ВАРИАНТ 4.

1. Укажите, при каких значениях p интеграл $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x^p}{\ln\left(1+x^p\right)}dx$ а) сходится абсолютно; б) сходится условно.

Решение. Сделаем замену переменных $x^p\Big|_0^{\infty} = t\Big|_0^{\infty}$; $x = t^{1/p}$; $dx = \frac{1}{p}t^{\frac{1}{p}-1}dt$:

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x^p}{\ln\left(1+x^p\right)}dx = \frac{1}{p}\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin t dt}{\ln\left(1+t\right)t^{1-\frac{1}{p}}} = \frac{1}{p}\left(\int\limits_0^{1} \frac{\sin t dt}{\ln\left(1+t\right)t^{1-\frac{1}{p}}} + \int\limits_1^{\infty} \frac{\sin t dt}{\ln\left(1+t\right)t^{1-\frac{1}{p}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{p}\left(\int\limits_0^{1} \frac{\left(t+o\left(t\right)\right)dt}{t^{-\frac{1}{p}}} + \int\limits_1^{\infty} \frac{\sin t dt}{\ln\left(1+t\right)t^{1-\frac{1}{p}}}\right).$$

Первый интеграл является несобственным интегралом 2 рода. Это интеграл от знакоопределенной функции, поэтому область его условной сходимости совпадает с областью абсолютной сходимости. Согласно признаку сравнения, он сходится абсолютно при $-1-\frac{1}{p}<1 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} p>0 \\ p<-\frac{1}{2} \end{cases}$.

Второй интеграл является несобственным интегралом 1 рода и, согласно признаку сравнения, сходится абсолютно при $1-\frac{1}{p}>1 \;\Leftrightarrow\; p<0$.

Исходный интеграл сходится абсолютно при $p<-\frac{1}{2}$.

Второй интеграл, согласно признаку Дирихле, сходится условно при $1-\frac{1}{p}\ge 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} p<0; \\ p\ge 1. \end{cases}$

Исходный интеграл сходится условно при $p\ge 1$.

2. Исследуйте интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}$ на равномерную сходимость на множестве $p\in\left(0;1\right)$.

Решение. Для того, чтобы применить практический критерий, сведем несобственный интеграл 2 рода к несобственному интегралу 1 рода при помощи замены $x=\frac{1}{t}$; $dx=-\frac{dt}{t^2}$; $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} = \int\limits_1^{\infty} \frac{t^p dt}{t^2} = \int\limits_1^{\infty} t^{p-2}dt$. Применим практический критерий:

$$\lim_{R\to+\infty}\sup_{p\in(0;1)}\left(\int\limits_R^{+\infty} t^{p-2}dt\right) = \lim_{R\to+\infty}\sup_{p\in(0;1)}\frac{t^{p-1}}{p-1}\Bigg|_R^{+\infty} = \lim_{R\to\infty}\sup_{p\in(0;1)}\frac{R^{p-1}}{1-p} = \infty \;\left(p=1\right).$$

Нет равномерной сходимости.

3. Покажите, что при $\alpha\in\left[0;A_0\right]$ выполнены условия теоремы о дифференцировании интеграла $I\left(\alpha\right) = \int\limits_0^{\infty} \frac{-e^{-x}\cos\alpha x + e^{-x}}{x}dx$ по параметру и вычислите интеграл

$\int\limits_0^{\infty} \frac{-e^{-x}\cos x + e^{-x}}{x} dx$ при помощи дифференцирования по параметру. **Совет:** используйте условие $I(0) = 0$.

Решение. Проверим выполнение условий теоремы.

1) Подынтегральная функция может быть доопределена до непрерывности в точке $x = 0$, поскольку $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-e^{-x}\cos\alpha x + e^{-x}}{x} = 0$.

2) Интеграл $I(\alpha)$ является несобственным интегралом 1 рода (поскольку подынтегральная функция не имеет особенностей в нуле) и равномерно сходится при $\alpha \in [0; A_0]$, поскольку $\int\limits_a^{\infty} \frac{-e^{-x}\cos\alpha x + e^{-x}}{x} dx,\ a > 0$ мажорируется сходящимся интегралом $\int\limits_a^{\infty} \frac{e^{-x}dx}{x}$, а $\int\limits_0^{a} \frac{-e^{-x}\cos\alpha x + e^{-x}}{x} dx$ - собственный, определенный.

3) $\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha} = e^{-x}\sin\alpha x$ непрерывна при $x \in [0;+\infty)$.

4) $\frac{\partial I}{\partial\alpha} = I_\alpha = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\sin\alpha x dx$ сходится равномерно при $\alpha \in [0; A_0]$, поскольку $\int\limits_a^{\infty} e^{-x}\sin\alpha x dx,\ a > 0$ мажорируется сходящимся интегралом $\int\limits_a^{\infty} e^{-x}dx$, а $\int\limits_0^{a} e^{-x}\sin\alpha x dx$ - собственный, определенный.

$$\frac{\partial I}{\partial\alpha} = I_\alpha = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\sin\alpha x dx = \operatorname{Im}\int\limits_0^{\infty} e^{(-1+i\alpha)x}dx = \operatorname{Im}\frac{-1}{-1+i\alpha} = \frac{\alpha}{1+\alpha^2};\ I(\alpha) = \ln(1+\alpha^2)$$

(мы учли условие $I(0) = 0$). В задаче требуется найти $I(1) = \ln 2$.

4. Вычислите интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sh} x e^{-x^2-x} dx$.

Решение.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sh} x e^{-x^2-x} dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(e^x - e^{-x}\right)e^{-x^2-x}dx = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\pi} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-2x}dx\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\pi} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-1)^2+1}dx\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\pi} - e\sqrt{\pi}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(e-1).$$

5. Вычислите интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt[4]{1-x^4}\, x^6 dx$. **Совет:** сведите к интегралу Эйлера.

Решение.

$$x^4 = t;\ x = t^{\frac{1}{4}};\ dx = \frac{1}{4}t^{\frac{1}{4}-1};\quad \int\limits_0^1 \sqrt[4]{1-x^4}\, x^6 dx = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 (1-t)^{\frac{5}{4}-1} t^{\frac{7}{4}-1}dt = \frac{1}{4}B\left(\frac{5}{4};\frac{7}{4}\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\frac{\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{3}{128}\frac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{4}} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{128}.$$