

0.5 setgray 0.5 setgray

Лекция 8

ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Различные уравнения прямой в пространстве

Уравнение прямой в векторной параметрической форме было получено нами в предыдущей лекции:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t. \quad (1.1)$$

Если в пространстве фиксирована общая декартова система координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и справедливы следующие разложения векторов по базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{e}_1 + y_0\mathbf{e}_2 + z_0\mathbf{e}_3, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{a} = l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2 + n\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \quad (1.3)$$

то из равенств (1.1)–(1.3) вытекает следующее равенство:

$$(x - x_0 - lt)\mathbf{e}_1 + (y - y_0 - mt)\mathbf{e}_2 + (z - z_0 - nt)\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}, \quad (1.4)$$

которое эквивалентно следующим трём равенствам:

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt, \quad l^2 + m^2 + n^2 > 0. \quad (1.5)$$

Определение 1. Уравнения (1.5) называются параметрическими уравнениями прямой в пространстве.

Из уравнений (1.5) вытекает следующее уравнение прямой:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \quad (1.6)$$

причём если в этом равенстве знаменатель обращается в ноль, то и числитель тоже обращается в ноль. При этом все знаменатели в ноль обратиться не могут, так как тогда $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. А вот два знаменателя в ноль могут обратиться. Предположим, что это числа $l = m = 0$ и $n \neq 0$. Тогда

$$x = x_0, \quad y = y_0.$$

Уравнения $x = x_0$ и $y = y_0$ определяют две пересекающиеся по прямой плоскости в пространстве.

Определение 2. Уравнение (1.6) называется каноническим уравнением прямой в пространстве.

Справедливо следующее важное утверждение:

Теорема 1. Уравнение прямой (1.1) эквивалентно уравнению

$$[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{m}, \quad (\mathbf{m}, \mathbf{a}) = 0. \quad (1.7)$$

Доказательство.

Пусть нам задано векторное параметрическое уравнение прямой

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t \Leftrightarrow \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{a}t \Leftrightarrow [\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = 0 \Leftrightarrow [\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{m}, \quad \mathbf{m} = [\mathbf{r}_0, \mathbf{a}],$$

причём $(\mathbf{m}, \mathbf{a}) = 0$.

Пусть теперь нам задано уравнение (1.7) при указанном условии, что $(\mathbf{m}, \mathbf{a}) = 0$. Пусть

$$\mathbf{r}_0 = \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{m}]}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}.$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} [\mathbf{r}_0, \mathbf{a}] &= \frac{1}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} [[\mathbf{a}, \mathbf{m}], \mathbf{a}] = -\frac{1}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} [\mathbf{a}, [\mathbf{a}, \mathbf{m}]] = \\ &= -\frac{1}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} \{\mathbf{a}(\mathbf{a}, \mathbf{m}) - \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{a})\} = \mathbf{m}, \end{aligned}$$

поскольку по условию $(\mathbf{a}, \mathbf{m}) = 0$. Тогда уравнение (1.7) эквивалентно следующему уравнению:

$$[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = [\mathbf{r}_0, \mathbf{a}] \Leftrightarrow [\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = 0 \Leftrightarrow \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{a}t.$$

Теорема доказана.

Следствие. Для того чтобы уравнение

$$[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{m} \quad (1.8)$$

имело решение \mathbf{r} необходимо и достаточно, чтобы было выполнено равенство $(\mathbf{a}, \mathbf{m}) = 0$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть уравнение (1.8) имеет решение \mathbf{r}_0 , т.е. имеет место равенство $[\mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = \mathbf{m}$. Тогда по свойству векторного произведения векторов \mathbf{r}_0 и \mathbf{a} вектор

$$[\mathbf{r}_0, \mathbf{a}] \perp \mathbf{r}_0 \quad \text{и} \quad [\mathbf{r}_0, \mathbf{a}] \perp \mathbf{a}.$$

Но тогда

$$([\mathbf{r}_0, \mathbf{a}], \mathbf{a}) = 0 \Rightarrow (\mathbf{m}, \mathbf{a}) = 0.$$

Достаточность. Пусть выполнено условие $(\mathbf{m}, \mathbf{a}) = 0$. Тогда как было доказано в теореме 1 уравнение (1.8) имеет решение

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 := \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{m}]}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}.$$

Следствие доказано.

§ 2. Различные уравнения плоскости в пространстве

Дадим вывод векторного параметрического уравнения плоскости. Пусть π — это некоторая плоскость в пространстве. Пусть \mathbf{a} и \mathbf{b} — это два неколлинеарных вектора, параллельных плоскости. Пусть O — это произвольная точка пространства и нам заданы радиус-вектор \mathbf{r}_0 фиксированной точки $M_0 \in \pi$ и радиус-вектор \mathbf{r} произвольной точки $M \in \pi$. Очевидно, что \mathbf{a}, \mathbf{b} — это базис на плоскости и поэтому найдутся такие числа t, s , что

$$\overrightarrow{M_0M} = t\mathbf{a} + s\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a} + s\mathbf{b}. \quad (2.1)$$

Заметим, что если точка M не лежит на плоскости π , то тройка векторов $\{\overrightarrow{M_0M}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ является не компланарной тройкой векторов и поэтому вектор $\overrightarrow{M_0M}$ разложить по базису на плоскости $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ нельзя, т. е. в этом случае равенство (2.1) не имеет места. Таким образом, векторное равенство (2.1) является необходимым и достаточным условием того, чтобы точка M лежала на плоскости π .

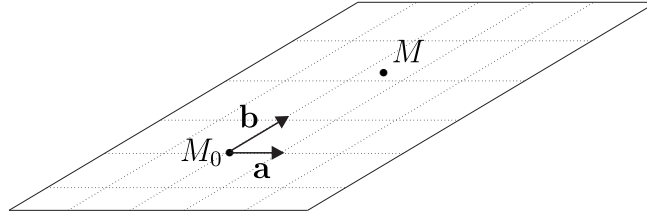


Рис. 1. Плоскость.

Определение 3. Уравнение (2.1) называется *векторным параметрическим уравнением плоскости в пространстве*.

Пусть в пространстве задана общая декартова система координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Пусть радиус-векторы \mathbf{r} и \mathbf{r}_0 точек M и M_0 заданы своими разложениями по базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{e}_1 + y_0\mathbf{e}_2 + z_0\mathbf{e}_3. \quad (2.2)$$

И заданы направляющие векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} плоскости π :

$$\mathbf{a} = l_1\mathbf{e}_1 + m_1\mathbf{e}_2 + n_1\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = l_2\mathbf{e}_1 + m_2\mathbf{e}_2 + n_2\mathbf{e}_3. \quad (2.3)$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. В общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ векторное параметрическое уравнение плоскости (2.1) эквивалентно следующим уравнениям:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - x_0 & l_1 & l_2 \\ y - y_0 & m_1 & m_2 \\ z - z_0 & n_1 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.4)$$

Доказательство.

Шаг 1. Из уравнений (2.1)–(2.3) вытекает уравнение

$$(x - x_0 - tl_1 - sl_2)\mathbf{e}_1 + (y - y_0 - tm_1 - sm_2)\mathbf{e}_2 + (z - z_0 - tn_1 - sn_2)\mathbf{e}_3 = \mathbf{0},$$

из которого поскольку $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — это базис в пространстве вытекают следующие три равенства:

$$x - x_0 - tl_1 - sl_2 = 0, \quad y - y_0 - tm_1 - sm_2 = 0, \quad z - z_0 - tn_1 - sn_2 = 0,$$

или в форме одного равенства для столбцов

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}.$$

Но тогда по свойствам определителя третьего порядка имеют место следующие равенства:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & l_1 & l_2 \\ y - y_0 & m_1 & m_2 \\ z - z_0 & n_1 & n_2 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}.$$

Шаг 2. Теперь предположим, что имеет место равенство (2.4). Тогда найдутся такие числа α, β, γ , не равные одновременно нулю, что имеет место следующее равенство

$$\alpha \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Если предположить, что $\alpha = 0$, то из последнего равенства получим следующее:

$$\beta \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\beta| + |\gamma| > 0. \quad (2.5)$$

Докажем, что тогда справедливо следующее векторное равенство:

$$\beta \mathbf{a} + \gamma \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad |\beta| + |\gamma| > 0. \quad (2.6)$$

□ Действительно, с одной стороны, (2.5) равносильно трём равенствам

$$\beta l_1 + \gamma l_2 = \beta m_1 + \gamma m_2 = \beta n_1 + \gamma n_2 = 0. \quad (2.7)$$

С другой стороны, имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \beta \mathbf{a} + \gamma \mathbf{b} &= \beta(l_1 \mathbf{e}_1 + m_1 \mathbf{e}_2 + n_1 \mathbf{e}_3) + \gamma(l_2 \mathbf{e}_1 + m_2 \mathbf{e}_2 + n_2 \mathbf{e}_3) = \\ &= (\beta l_1 + \gamma l_2) \mathbf{e}_1 + (\beta m_1 + \gamma m_2) \mathbf{e}_2 + (\beta n_1 + \gamma n_2) \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}. \quad \square \quad (2.8) \end{aligned}$$

Но по определению плоскости векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} не коллинеарны, а значит, линейно независимы. Противоречие. Итак, $\alpha \neq 0$ и мы приходим к равенству

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix},$$

т. е. к параметрическому уравнению плоскости в координатах.

Теорема доказана.

Разложим определитель в левой части равенства (2.4) по первой строчке и получим следующее уравнение:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad (2.9)$$

где

$$A = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}, \quad B = - \begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}.$$

Уравнение (2.9) можно переписать в следующей форме:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0. \quad (2.10)$$

Определение 4. Уравнение (2.10) называется общим уравнением плоскости в пространстве.

Теорема 3. Уравнение плоскости в форме (2.4) эквивалентно общему уравнению плоскости в форме (2.10).

Доказательство.

Осталось доказать, что из общего уравнения плоскости в форме (2.10) вытекает уравнение вида (2.4). Поскольку $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, то существует по меньшей мере одна точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, удовлетворяющая общему уравнению плоскости (2.10), т. е. справедливо равенство

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \Leftrightarrow D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0.$$

Поэтому общее уравнение плоскости примет следующий вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Без ограничения общности предположим, что $A \neq 0$. Введём вещественные параметры t и s следующим не однозначным образом:

$$y - y_0 = t, \quad z - z_0 = s, \quad (2.11)$$

тогда

$$x - x_0 = \beta \cdot t + \gamma \cdot s, \quad \beta := -\frac{B}{A}, \quad \gamma := -\frac{C}{A}. \quad (2.12)$$

Равенства (2.11) и (2.12) можно записать в виде одного равенства для соответствующих столбцов:

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

из которого вытекают следующие равенства:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & \beta & \gamma \\ y - y_0 & 1 & 0 \\ z - z_0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \beta & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Эти равенства совпадают с равенствами (2.4) при

$$l_1 = \beta, \quad m_1 = 1, \quad n_1 = 0, \quad l_2 = \gamma, \quad m_2 = 0, \quad n_2 = 1,$$

т. е. в частности, направляющие векторы плоскости имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= -\frac{B}{A} \cdot \mathbf{e}_1 + 1 \cdot \mathbf{e}_2 + 0 \cdot \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{b} &= -\frac{C}{A} \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + 1 \cdot \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Можно проверить, что эти два вектора линейно независимые. Теорема доказана.

§ 3. Нормальное уравнение плоскости

Дадим определение.

Определение 5. *Нормальным уравнением плоскости в общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ называется следующее уравнение:*

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D, \quad \mathbf{n} \neq \mathbf{0}, \quad (3.1)$$

где $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ — это радиус-вектор точки M , лежащей на данной плоскости.

Корректность определения. Прежде всего нужно проверить корректность этого определения. Докажем, что уравнение (3.1) действительно описывает плоскость. Пусть

$$\mathbf{r}_0 := \frac{\mathbf{n}}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})} D. \quad (3.2)$$

Очевидно, что

$$(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = D.$$

Поэтому уравнение (3.1) эквивалентно следующему уравнению:

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = (\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) \Leftrightarrow (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0.$$

Вектор $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM}_0 = \overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярен вектору \mathbf{n} , где точка M_0 — это некоторая фиксированная точка. Теперь заметим, что конец M направленного отрезка $\overrightarrow{M_0M}$ лежит на плоскости, тогда и только тогда, когда направленный отрезок $\overrightarrow{M_0M}$ ортогонален вектору нормали к плоскости. В данном случае — это вектор \mathbf{n} . Итак, в любой общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ вектор \mathbf{n} в нормальном уравнении плоскости (3.1) — это вектор нормали к плоскости.

Для дальнейшего нам нужно рассмотреть *взаимный базис* к базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

Взаимный базис. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — это правая тройка некопланарных векторов в пространстве. Отметим, что смешанное произведение $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) > 0$. Введём так называемый взаимный базис $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$, к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, определённый формулами

$$\mathbf{f}_1 := \frac{[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \quad \mathbf{f}_2 := \frac{[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \quad \mathbf{f}_3 := \frac{[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}.$$

1. Прежде всего докажем, что векторы $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$, образуют базис.
□. Действительно, рассмотрим уравнение

$$\alpha \mathbf{f}_1 + \beta \mathbf{f}_2 + \gamma \mathbf{f}_3 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] + \beta[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] + \gamma[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = \mathbf{0}.$$

Умножая скалярно обе части последнего уравнения на векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и \mathbf{e}_3 , с учётом свойств векторных произведений получим равенства

$$\alpha(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 0, \quad \beta(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 0, \quad \gamma(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Следовательно, векторы семейства $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ образуют базис. ☒

2. Скалярно умножая векторы взаимного базиса $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ на векторы семейства $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ получим следующие равенства:

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_1) = 1, \quad (\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_2) = 0, \quad (\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_3) = 0; \quad (3.3)$$

$$(\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_1) = 0, \quad (\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_2) = 1, \quad (\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_3) = 0; \quad (3.4)$$

$$(\mathbf{f}_3, \mathbf{e}_1) = 0, \quad (\mathbf{f}_3, \mathbf{e}_2) = 0, \quad (\mathbf{f}_3, \mathbf{e}_3) = 1. \quad (3.5)$$

3. Векторно умножая между собой векторы взаимного базиса $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ получим следующие равенства:

$$[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2] = \frac{\mathbf{e}_3}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \quad [\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3] = \frac{\mathbf{e}_1}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \quad [\mathbf{f}_3, \mathbf{f}_1] = \frac{\mathbf{e}_2}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}.$$

4. В том случае, когда векторы $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ образуют правый ортонормированный базис имеют место равенства

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_3.$$

Лемма 1. Если $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ — это взаимный базис к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_1 + a_y \mathbf{e}_2 + a_z \mathbf{e}_3$, то

$$a_x = (\mathbf{a}, \mathbf{f}_1), \quad a_y = (\mathbf{a}, \mathbf{f}_2), \quad a_z = (\mathbf{a}, \mathbf{f}_3).$$

Доказательство.

Для доказательства нужно воспользоваться линейностью скалярного произведения по первому аргументу и формулами из второго пункта.

Лемма доказана.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 4. В произвольной общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0$$

эквивалентно нормальному уравнению плоскости

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) + D = 0$$

с некоторым вектором нормали к плоскости \mathbf{n} .

Доказательство.

Шаг 1. Сначала рассмотрим случай прямоугольной декартовой системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Введём вектор \mathbf{n} с координатами (A, B, C) :

$$\mathbf{n} = A\mathbf{e}_1 + B\mathbf{e}_2 + C\mathbf{e}_3.$$

Тогда

$$Ax + By + Cz + D = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{n}, \mathbf{r}) + D = 0,$$

где $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ — это радиус-вектор произвольной точки плоскости с координатами (x, y, z) . Это выполнено в силу доказанного нами ранее представления скалярного произведения векторов, заданных координатами в ортонормированном базисе.

Шаг 2. Теперь мы рассмотрим случай косоугольной декартовой системы координат. В этом случае тройку векторов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ будем считать произвольным базисом.

1. Пусть в рассматриваемой общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ задано уравнение

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) + D = 0$$

Пусть в рассматриваемой общей декартовой системе координат радиус-вектор \mathbf{r} произвольной точки задается задается своим разложением по базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3.$$

Заметим, что в силу линейности скалярного произведения по первому аргументу справедливо равенство

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{n})x + (\mathbf{e}_2, \mathbf{n})y + (\mathbf{e}_3, \mathbf{n})z.$$

Итак,

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) + D = 0 \Rightarrow Ax + By + Cz + D = 0,$$

где

$$A = (\mathbf{e}_1, \mathbf{n}), \quad B = (\mathbf{e}_2, \mathbf{n}), \quad C = (\mathbf{e}_3, \mathbf{n}).$$

2. Пусть в общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ нам задана плоскость своим общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Найдём такой вектор \mathbf{n} , чтобы были справедливы следующие равенства:

$$(\mathbf{n}, \mathbf{e}_1) = A, \quad (\mathbf{n}, \mathbf{e}_2) = B, \quad (\mathbf{n}, \mathbf{e}_3) = C.$$

Будем искать вектор \mathbf{n} в виде разложения по взаимному базису $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$:

$$\mathbf{n} = \alpha \mathbf{f}_1 + \beta \mathbf{f}_2 + \gamma \mathbf{f}_3.$$

Умножая последовательно это равенство на \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 и \mathbf{e}_3 мы получим следующие равенства:

$$(\mathbf{n}, \mathbf{e}_1) = \alpha, \quad (\mathbf{n}, \mathbf{e}_2) = \beta, \quad (\mathbf{n}, \mathbf{e}_3) = \gamma.$$

Значит, $\alpha = A$, $\beta = B$, $\gamma = C$ и поэтому

$$\mathbf{n} = A\mathbf{f}_1 + B\mathbf{f}_2 + C\mathbf{f}_3.$$

Итак,

$$\mathbf{n} = \frac{A[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] + B[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] + C[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}.$$

Но тогда имеют место следующие выражения:

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D = 0 &\Rightarrow (\mathbf{n}, \mathbf{e}_1)x + (\mathbf{n}, \mathbf{e}_2)y + (\mathbf{n}, \mathbf{e}_3)z + D = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\mathbf{n}, \mathbf{r}) + D = 0, \quad \mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

В качестве следствия из теоремы 4 можно сформулировать следующую теорему:

Теорема 5. *Для того чтобы две плоскости, заданные своими общими уравнениями*

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

в некоторой общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, были параллельны или совпадали необходимо и достаточно, чтобы

$$A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2, \quad C_1 = \lambda C_2 \quad \text{при} \quad \lambda \neq 0.$$

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ — это взаимный базис с базисом $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

Необходимость. Пусть плоскости параллельны. Уравнения плоскостей можно записать в следующем нормальном виде:

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) = D_1, \quad (\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) = D_2,$$

$$\mathbf{n}_1 = A_1\mathbf{f}_1 + B_1\mathbf{f}_2 + C_1\mathbf{f}_3, \quad \mathbf{n}_2 = A_2\mathbf{f}_1 + B_2\mathbf{f}_2 + C_2\mathbf{f}_3$$

Векторы \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 — это векторы нормалей к соответствующим плоскостям. В силу параллельности плоскостей вектора нормалей коллинеарны. Итак, найдется такое число $\lambda \neq 0$, что

$$\mathbf{n}_1 = \lambda \mathbf{n}_2 \Leftrightarrow (A_1 - \lambda A_2)\mathbf{f}_1 + (B_1 - \lambda B_2)\mathbf{f}_2 + (C_1 - \lambda C_2)\mathbf{f}_3 = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2, \quad C_1 = \lambda C_2.$$

Достаточность. Пусть $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$, $C_1 = \lambda C_2$. Тогда из тех же формул для векторов нормалей получим равенство $\mathbf{n}_1 = \lambda \mathbf{n}_2$. Это означает, что плоскости параллельны.

Теорема доказана.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 2. Для того чтобы вектор $\mathbf{a} = \{l, m, n\}$ был компланарен плоскости, заданной своим общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$Al + Bm + Cn = 0. \quad (3.6)$$

Доказательство.

Запишем уравнение плоскости в нормальном виде

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D, \quad \mathbf{n} = A\mathbf{f}_1 + B\mathbf{f}_2 + C\mathbf{f}_3,$$

а вектор \mathbf{a} задан своим разложением по базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a} = l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2 + n\mathbf{e}_3.$$

Искомое необходимое и достаточное условие — это равенство

$$(\mathbf{n}, \mathbf{a}) = 0. \quad (3.7)$$

Осталось воспользоваться линейностью скалярного произведения по обоим аргументам и доказанными ранее равенствами (3.3)–(3.5) и получить равенство

$$(\mathbf{n}, \mathbf{a}) = A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n. \quad (3.8)$$

Итак, из равенств (3.7) и (3.8) вытекает условие (3.6).

Лемма доказана.

Непосредственным следствием этой леммы является следующее утверждение:

Лемма 3. Два из возможных неколлинеарных векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , которые являются направляющими векторами плоскости, заданной своим общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A \neq 0,$$

в некоторой общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, имеют следующий вид:

$$\mathbf{a} = -B\mathbf{e}_1 + A\mathbf{e}_2 + 0 \cdot \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = -C\mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + A\mathbf{e}_3. \quad (3.9)$$

Доказательство.

Непосредственно можно проверить, что векторы (3.9) удовлетворяют равенству (3.6). Теперь рассмотрим их линейную комбинацию

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = (-\alpha B - \beta C)\mathbf{e}_1 + \alpha A\mathbf{e}_2 + \beta A\mathbf{e}_3,$$

но тогда равенство

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

возможно, тогда и только тогда, когда $\alpha = \beta = 0$. Значит, векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} линейно независимы при $A \neq 0$.

Лемма доказана.

ПРИМЕР 1. Нужно составить уравнение плоскости, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и компланарной вектору $\mathbf{a} = \{l, m, n\}$, при условии что направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$ не коллинеарен вектору \mathbf{a} . Очевидно, в качестве точки M_0 можно взять точку M_1 , а в качестве вектора \mathbf{b} можно взять вектор, порождённый направленным отрезком $\overrightarrow{M_1M_2}$. Тогда уравнение следующее:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

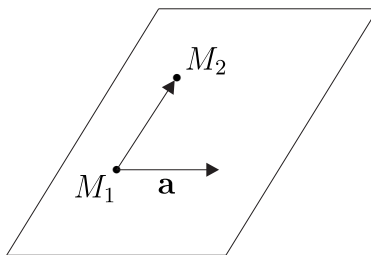


Рис. 2. Плоскость, проходящая через две точки и не коллинеарный им вектор.

ПРИМЕР 2. Провести плоскость через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой. Положим $M_0 = M_1$, $\mathbf{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{M_1M_3}$. Тогда уравнение следующее:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

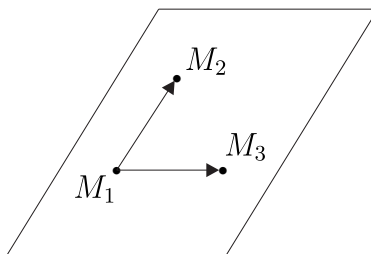


Рис. 3. Плоскость, проходящая через три точки.

ПРИМЕР 3. Уравнение прямой, проходящей через две различные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Положим $M_0 = M_1$, $\mathbf{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

§ 4. Взаимное расположение двух прямых

Пусть нам заданы две прямые:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 \tau, \quad \mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0}. \quad (4.1)$$

Из геометрических соображений вытекает наличие четырёх случаев в пространстве, в отличие от трёх случаев на плоскости: 1. прямые совпадают, 2. прямые параллельны, 3. прямые пересекаются, 4. прямые скрещиваются, т. е. не параллельны и не пересекаются.

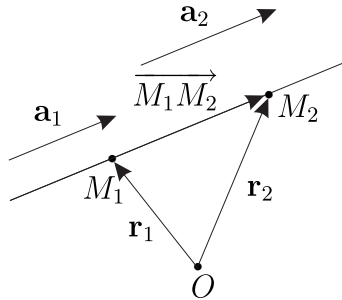


Рис. 4. Прямые совпадают.

Первый случай. Прямые совпадают, если уравнения (4.1) являются эквивалентными. Эти уравнения эквивалентны, если направляющие векторы \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 коллинеарны и вектор $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ коллинеарен обеим прямым:

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad [\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{a}_1] = \mathbf{0}.$$

Второй случай. Прямые параллельны, если направляющие векторы \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 коллинеарны, но вектор $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ не коллинеарен обеим прямым:

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad [\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{a}_1] \neq \mathbf{0}.$$

Третий случай. Прямые пересекаются, т. е. в частности лежат в одной некоторой плоскости, если направляющие векторы \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 не коллинеарны, а векторы $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 компланарны:

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] \neq \mathbf{0}, \quad (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]) = 0.$$

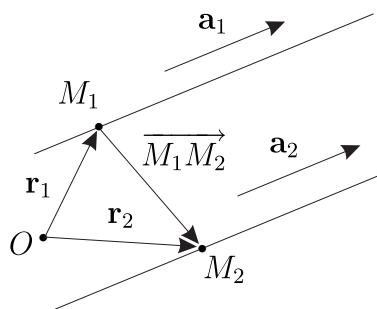


Рис. 5. Прямые параллельны.

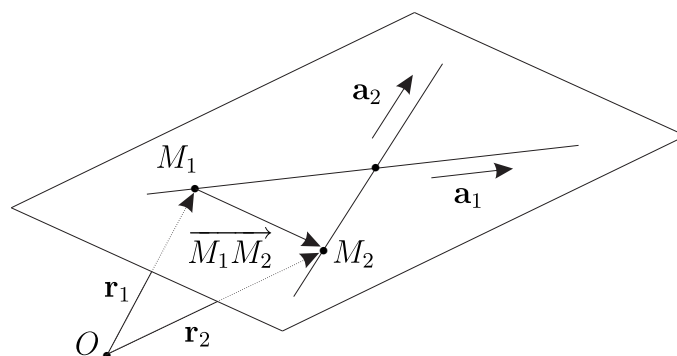


Рис. 6. Прямые пересекаются.

Четвёртый случай. Прямые скрещиваются, если направляющие векторы \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 не коллинеарны и векторы $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 не компланарны:

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]) \neq 0.$$

§ 5. Прямая как пересечение двух плоскостей

Пусть начала плоскости заданы своими общими уравнениями в некоторой общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad (5.1) \\ A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0, \quad A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0. \end{aligned}$$

Пусть эти плоскости пересекаются. Условие того, чтобы эти плоскости пересекались будет получено вместе с координатами направляющего вектора прямой, по которой пересекаются плоскости.

Ясно, что направляющий вектор искомой прямой пересечения двух плоскостей может быть найден как такой вектор

$$\mathbf{a} = l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2 + n\mathbf{e}_3,$$

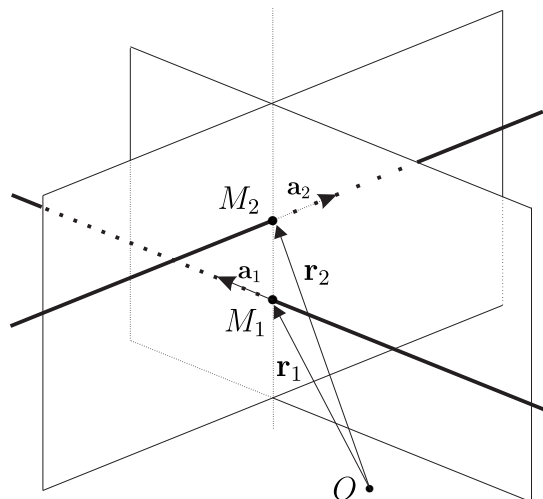


Рис. 7. Скрещивающиеся прямые.

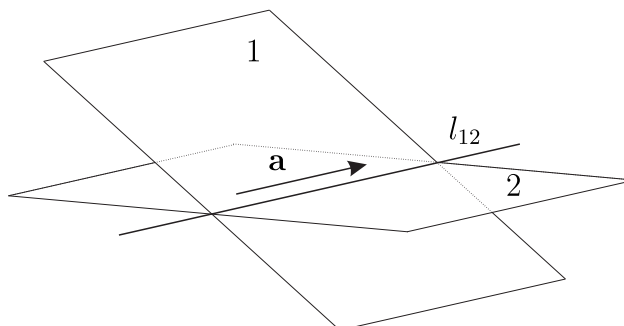


Рис. 8. Пересекающиеся плоскости.

который одновременно компланарен и первой и второй плоскостям, т. е. в силу леммы 2 может быть найден как решение следующей системы двух уравнений:

$$A_1 l + B_1 m + C_1 n = 0, \quad A_2 l + B_2 m + C_2 n = 0. \quad (5.2)$$

Рассмотрим сначала следующий определитель:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (5.3)$$

который равен нулю, поскольку у него две одинаковые строчки. Разложим его по первой строчке и получим равенство

$$A_1 \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - B_1 \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + C_1 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.4)$$

Теперь рассмотрим следующий определитель:

$$\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (5.5)$$

у которого тоже две одинаковые строчки. Разложим его по первой строчке и получим следующее равенство:

$$A_2 \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - B_2 \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + C_2 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.6)$$

Значит, направляющий вектор искомой прямой равен

$$\mathbf{a} = \{l, m, n\}, \quad l = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad m = - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}. \quad (5.7)$$

И необходимое и достаточное условие пересечения данных плоскостей имеет следующий вид:

$$l^2 + m^2 + n^2 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}^2 > 0. \quad (5.8)$$

Далее осталось найти какую-либо точку пересечения плоскостей. Действительно, без ограничения общности можно считать, что

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда систему уравнений (5.9) можно переписать в следующем виде:

$$A_1 x + B_1 y = -C_1 z - D_1, \quad A_2 x + B_2 y = -C_2 z - D_2. \quad (5.9)$$

Эта система уравнений имеет бесконечное множество решений и пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — это одно из решений, тогда уравнение прямой имеет следующий вид:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}. \quad (5.10)$$

§ 6. Полупространства, определяемые плоскостью

Справедлива следующая теорема, доказательство которой в точности повторяет доказательства соответствующих утверждений из предыдущей лекции:

Теорема 6. Пусть относительно общей декартовой системы координат задано уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Тогда для координат x, y, z точки $M(x, y, z)$, лежащих по одну сторону от плоскости, выполнено неравенство

$$Ax + By + Cz + D > 0,$$

а для координат точек $M(x, y, z)$, лежащих по другую сторону от плоскости, выполнено неравенство

$$Ax + By + Cz + D < 0.$$

Вектор $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$ направлен в сторону положительного полупространства $Ax + By + Cz + D > 0$.

§ 7. Некоторые метрические задачи

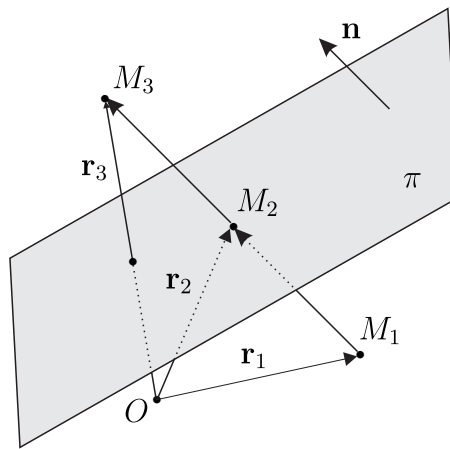


Рис. 9. К теореме 7.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 7. Пусть в пространстве даны точка $M_1(\mathbf{r}_1)$ и плоскость, заданная нормальным уравнением $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$. Тогда

1. радиус-вектор \mathbf{r}_2 точки M_2 , являющейся ортогональной проекцией точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ на плоскость π , выражается формулой

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) + D}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})} \mathbf{n}; \quad (7.1)$$

2. расстояние от точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ до плоскости π выражается формулой

$$d(M_1, \pi) = \frac{|(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) + D|}{|\mathbf{n}|}; \quad (7.2)$$

3. Радиус вектор \mathbf{r}_3 точки M_3 , симметричной точке $M_1(\mathbf{r}_1)$ относительно плоскости π , выражается формулой

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 - 2 \frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) + D}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})} \mathbf{n}. \quad (7.3)$$