0.5 setgray0 0.5 setgray1

Лекция 4

ВЕКТОРЫ. БАЗИС

§ 1. Базис векторов

Определение 1. *Векторы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *называются упорядоченными, если указано какой вектор из этой системы является первым, какой второй и .т.д., какой является* n*–ым.*

Определение 2. *Базисом в пространстве векторов называется упорядоченная линейно независимая система векторов такая, что любой вектор этого пространства по ней раскладывается.*

ПРИМЕР 1. Например, векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ образуют базис на плоскости, если

1. векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ не коллинеарны;
2. любой вектор плоскости $\mathbf{a}$ по ним раскладывается, т. е. найдутся такие числа λ_1 и λ_2, что

$$\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2.$$

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *В пространстве векторов на прямой* $\mathbb{V}_1$ *базис состоит из произвольного ненулевого вектора.*

Доказательство.

Шаг 1. Докажем, что любой ненулевой вектор является линейно независимым. Действительно, пусть $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Рассмотрим следующее равенство:

$$\lambda \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Поскольку $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ это равенство выполнено тогда и только тогда, когда $\lambda = 0$. Итак, вектор $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ образует линейно независимое семейство.

Шаг 2. Пусть $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ — это произвольный вектор на прямой. Докажем, что для любого другого вектора на прямой $\mathbf{b}$, в частности, нулевого, найдётся такое число λ, что будет выполнено следующее равенство:

$$\mathbf{b} = \lambda \cdot \mathbf{a}. \tag{1.1}$$

Сразу же заметим, что если $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, то равенство (1.1) имеет место при $\lambda = 0$.

Пусть оба вектора $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Отложим их от произвольной точки O на прямой. Получим два направленных отрезка $\overrightarrow{OA} \neq \mathbf{0}$ и

$\overrightarrow{OB} \neq \mathbf{0}$, лежащих на той же прямой. Рассмотрим два направленных отрезка
$$\mathbf{e}_A := \frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}, \quad \mathbf{e}_B := \frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}.$$
Это два направленных отрезка с общи началом — точкой O и единичной длины. Возможны две ситуации взаимного их расположения на прямой: Поэтому либо

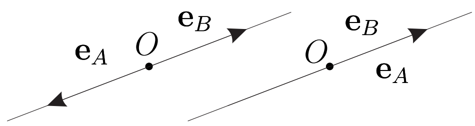

Рис. 1. Взаимное расположение двух единичных направленных отрезков.

$$\mathbf{e}_B = \mathbf{e}_A \quad \text{либо} \quad \mathbf{e}_B = -\mathbf{e}_A.$$
В первом случае имеем
$$\frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|} = \frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} = \lambda_+\overrightarrow{OA}, \quad \lambda_+ := \frac{|\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}|}.$$
Во втором случае имеем
$$\frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|} = -\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} = \lambda_-\overrightarrow{OA}, \quad \lambda_- := -\frac{|\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}|}.$$
В силу произвольности точки O в первом случае имеем
$$\mathbf{b} = \lambda_+\mathbf{a},$$
а во втором случае имеем
$$\mathbf{a} = \lambda_-\mathbf{a}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *В пространстве векторов на плоскости $\mathbb{V}_2$ базис состоит из двух не коллинеарных векторов.*

Доказательство.

Шаг 1. На прошлой лекции было доказано, что необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов — это их линейная зависимость. Поэтому если два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны, то они линейно независимы.

Шаг 2. Докажем, что любой вектор $\mathbf{c}$, лежащий в одной плоскости с неколлинеарными векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ по ним раскладывается, т. е. найдутся такие числа α и β, что
$$\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}.$$
□ Действительно, отложим все три вектора от одной произвольной фиксированной точки O плоскости, где лежат векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. По-

лучим три направленных отрезка $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$: Сделаем следующие

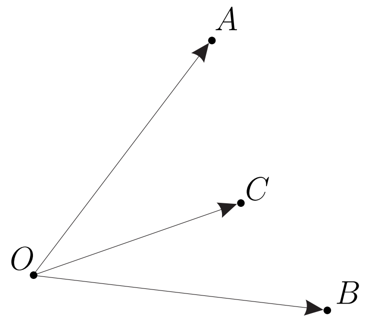

Рис. 2. Направленные отрезки.

два построения. Проведём через точку C прямую параллельную прямой (OB). Пусть A_1 — это точка пересечения этой прямой и прямой (OA). Также проведём через точку C прямую параллельную прямой (OA). Пусть B_1 — это точка пересечения этой прямой и прямой (OB): По

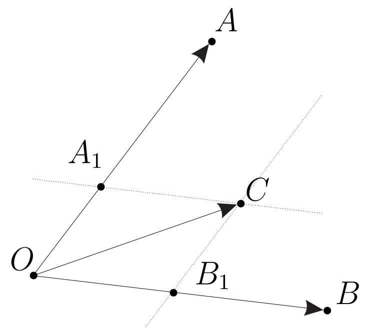

Рис. 3. Точки A_1 и B_1.

построению четырёхугольник OB_1CA_1 является параллелограммом. По правилу параллелограмма сложения направленных отрезков имеет место следующее равенство:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}. \tag{1.2}$$

Заметим, что направленные отрезки $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB_1}$ и $\overrightarrow{OB}$ лежат на одних и тех же соответствующих прямых. Точно также как и при доказательстве теоремы 1 можно доказать, что найдутся такие числа α и β, что

$$\overrightarrow{OA_1} = \alpha\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OB_1} = \beta\overrightarrow{OB}. \tag{1.3}$$

Из равенств (1.2) и (1.3) вытекает следующее равенство:

$$\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}. \tag{1.4}$$

В силу произвольности α и β имеет место следующее равенство:

$$\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Любые три некомпланарных вектора в пространстве образуют базис в* $\mathbb{V}_3$.

Доказательство.

Шаг 1. Прежде всего в силу теоремы **??** вытекает, что три некомпланарных вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ в пространстве являются линейно независимыми.

Шаг 2. Докажем, что любой вектор $\mathbf{d}$ в пространстве представим через произвольную тройку некомпланарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}. \tag{1.5}$$

Отложим все четыре вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ от поизвольной точки O и получим следующие четыре направленных отрезка: $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$. Определим четыре плоскости, в которых лежат указанные в фигурных скобках направленные отрезки:

$$\pi_1 = \{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\}, \quad \pi_2 = \{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}, \quad \pi_3 = \{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}\}.$$

Проделаем следующие геометрические построения:

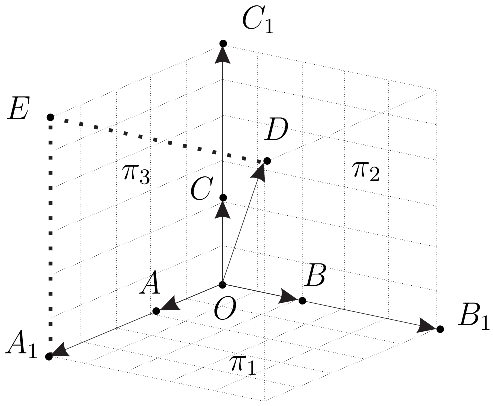

Рис. 4. Геометрические построения.

1. Проведём через точку D плоскость, параллельную π_2. Пусть A_1 — это точка пересечения этой плоскости и линии действия направленного отрезка $\overrightarrow{OA}$;

2. Проведём через точку D плоскость, параллельную π_3. Пусть B_1 — это точка пересечения этой плоскости и линии действия направленного отрезка $\overrightarrow{OB}$;

3. Проведём через точку D плоскость, параллельную π_1. Пусть C_1 — это точка пересечения этой плоскости и линии действия направленного отрезка $\overrightarrow{OC}$.

Заметим, что имеет место следующее равенство:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{A_1E} + \overrightarrow{ED}. \tag{1.6}$$

С другой стороны, в смысле свободных векторов имеют место следующие равенства:

$$\overrightarrow{A_1E} = \overrightarrow{OC}_1, \quad \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{OB}_1. \tag{1.7}$$

Поэтому из (1.6) и (1.7) вытекает следующее равенство:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}. \tag{1.8}$$

Направленные отрезки $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OC_1}$ лежат на соответствующих трёх прямых. Поэтому найдутся такие три числа α, β и γ, что

$$\overrightarrow{OA_1} = \alpha\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OB_1} = \beta\overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OC_1} = \gamma\overrightarrow{OC}. \tag{1.9}$$

Из (1.8) и (1.9) вытекает следующее равенство:

$$\overrightarrow{OD} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}. \tag{1.10}$$

В силу произвольности точки O приходим к равенству (1.5).

Теорема доказана.

Следствием теорем 1–3 является следующее утверждение:

Следствие. *Любые два вектора из $\mathbb{V}_1$, любые три вектора из $\mathbb{V}_2$ и любые четыре вектора из $\mathbb{V}_3$ линейно зависимы.*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — это два вектора на одной и той же прямой (пространство $\mathbb{V}_1$). Если $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, то по теореме 1 предыдущей лекции и всё семейство $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ линейно зависимо. Пусть $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, тогда по теореме 1 этой лекции найдётся такое число α, что

$$\mathbf{b} = \alpha \cdot \mathbf{a} \Leftrightarrow \alpha \cdot \mathbf{a} + (-1) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Это нетривиальная комбинация векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, равная нулю. Поэтому семейство $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ линейно зависимо.

Шаг 2. Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ — это три вектора на плоскости (пространство $\mathbb{V}_2$). Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, то они линейно зависимы, а тогда и всё семейство $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ линейно зависимо по теореме 2 прошлой лекции. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны. Тогда по теореме 2 этой лекции найдутся такие числа α и β, что

$$\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} \Leftrightarrow \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + (-1) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

Это нетривиальная линейная комбинация семейства векторов $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, равная нулевому вектору. Следовательно, это семейство линейно зависимо.

Шаг 3. Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ — это четыре вектора в пространстве (пространство $\mathbb{V}_3$). Предположим, что векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ компланарны, тогда они линейно зависимы и тогда по теореме 2 предыдущей лекции и всё семейство $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ линейно зависимо. Пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ не компланарны, тогда по теореме 3 найдутся такие числа α, β, γ, что

$$\mathbf{d} = \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b} + \gamma \cdot \mathbf{c} \Leftrightarrow \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b} + \gamma \cdot \mathbf{c} + (-1) \cdot \mathbf{d} = \mathbf{0}.$$

Это нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору. Значит, семейство векторов $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ линейно зависимо.

Следствие доказано.

Дадим определение координат вектора разложения по базису.

Определение 3. *Упорядоченный набор коэффициентов в разложении вектора по базису называется координатами вектора.*

Замечание 1. Для того чтобы задать связанный вектор нужно шесть параметров — координаты начало связанного вектора и три координаты конца связанного вектора. Для того чтобы задать скользящий вектор нужно задать его линию действия — это две координаты, а также нужно задать координаты связанного вектора, т.е. нужно всего пять координат. Как мы видим, чтобы задать свободный вектор нужно всего три координаты.

ПРИМЕР 2. Например, пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ — это базис в пространстве $\mathbb{V}_3$ и вектор $\mathbf{d}$ определяется его разложением по базису:

$$\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}.$$

Тогда α, β, γ — это координаты вектора $\mathbf{d}$ по базису $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

Базис удобно записывать в виде строчки

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}),$$

а координаты вектора $\mathbf{d}$ по этому базису удобно записывать в виде столбца

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Тогда можно записать формулу разложения вектора $\mathbf{d}$ по базису $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ в следующей компактной форме:

$$\mathbf{d} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Справедлива следующая важная теорема:

Теорема 4. *Координаты вектора* $\mathbf{a}$ *в его разложении по базису* $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ *определены единственным образом.*

Доказательство.

Пусть имеются два разложения вектора $\mathbf{a}$ по базису $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$:

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n = \beta_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \beta_n\mathbf{e}_n.$$

Но тогда справедливо следующее равенство:

$$(\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{e}_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)\mathbf{e}_n = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 - \beta_1 = \dots = \alpha_n - \beta_n = 0,$$

поскольку по определению базиса векторы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ линейно независимы.

Теорема доказана.

Справедлива теорема:

Теорема 5. *При сложении векторов их координаты относительно фиксированного базиса складываются, а при умножении вектора на вещественное число его координаты умножаются на это число.*

Доказательство. Рассмотрим случай пространства векторов $\mathbb{V}_3$. Пусть $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ — это базис в $\mathbb{V}_3$. Тогда

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \gamma\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{a}_1 = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \beta_1\mathbf{e}_2 + \gamma_1\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{a}_2 = \alpha_2\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \gamma_2\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = (\alpha_1\mathbf{e}_1 + \beta_1\mathbf{e}_2 + \gamma_1\mathbf{e}_3) + (\alpha_2\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \gamma_2\mathbf{e}_3) = \\ = (\alpha_1 + \alpha_2)\mathbf{e}_1 + (\beta_1 + \beta_2)\mathbf{e}_2 + (\gamma_1 + \gamma_2)\mathbf{e}_3;$$

$$\lambda\mathbf{a} = \lambda(\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \gamma\mathbf{e}_3) = \lambda(\alpha\mathbf{e}_1) + \lambda(\beta\mathbf{e}_2) + \lambda(\gamma\mathbf{e}_3) = \\ = (\lambda\alpha)\mathbf{e}_1 + (\lambda\beta)\mathbf{e}_2 + (\lambda\gamma)\mathbf{e}_3.$$

Теорема доказана.

Докажем следующее важное утверждение:

Теорема 6. *Для того чтобы два вектора* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, *заданные своими разложениями по одному и тому же базису* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 + z_1\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + z_2\mathbf{e}_3 \tag{1.11}$$

были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.12}$$

Доказательство.

Достаточность. Пусть выполнены равенства (1.12). Тогда равенство

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

равносильно тому, что найдутся такие числа α_1 и β_1 не равные одновременно нулю ($|\alpha_1| + |\beta_1| > 0$), что справедливы следующие равенства:

$$\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 = 0, \quad \alpha_1 y_1 + \beta_1 y_2 = 0. \tag{1.13}$$

Равенство

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

равносильно тому, что найдутся такие числа α_2 и β_2 не равные одновременно нулю ($|\alpha_2| + |\beta_2| > 0$), что справедливы следующие равенства:

$$\alpha_2 y_1 + \beta_2 y_2 = 0, \quad \alpha_2 z_1 + \beta_2 z_2 = 0. \tag{1.14}$$

Из сравнения (1.13) и (1.14) видим, что

$$\alpha_1 = \alpha_2 =: \alpha, \quad \beta_1 = \beta_2 := \beta.$$

Поэтому имеют место следующие равенства:

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = 0, \quad \alpha y_1 + \beta y_2 = 0, \quad \alpha z_1 + \beta z_2 = 0, \quad |\alpha| + |\beta| > 0. \tag{1.15}$$

Поэтому либо $\alpha \neq 0$ либо $\beta \neq 0$. В первом случае приходим к равенствам:

$$x_1 = \lambda_1 x_2, \quad y_1 = \lambda_1 y_2, \quad z_1 = \lambda_1 z_2, \quad \lambda_1 := -\frac{\beta}{\alpha}. \tag{1.16}$$

Во втором случае имеем

$$x_2 = \lambda_2 x_1, \quad y_2 = \lambda_2 y_1, \quad z_2 = \lambda_2 z_1, \quad \lambda_2 := -\frac{\alpha}{\beta}. \tag{1.17}$$

В первом случае приходим к равенствам

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 + z_1\mathbf{e}_3 = \lambda_1(x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + z_2\mathbf{e}_3) = \lambda_1\mathbf{b}.$$

Во втором случае приходим к следующим равенствам:

$$\mathbf{b} = x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + z_2\mathbf{e}_3 = \lambda_2(x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 + z_1\mathbf{e}_3) = \lambda_2\mathbf{a}.$$

т. е. векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в обоих случаях коллинеарны.

Необходимость. Пусть теперь векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны. Тогда найдутся такие не равные нулю одновременно числа α и β, что

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Из этого равенства вытекает следующее:

$$(\alpha x_1 + \beta x_2)\mathbf{e}_1 + (\alpha y_1 + \beta y_2)\mathbf{e}_2 + (\alpha z_1 + \beta z_2)\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}.$$

Поскольку $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — это базис, то

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = 0, \quad \alpha y_1 + \beta y_2 = 0, \quad \alpha z_1 + \beta z_2 = 0.$$

Но тогда имеют место равенства (1.12).

Теорема доказана.

Справедливо следующее утверждение для векторов на плоскости:

Теорема 7. *Для того чтобы два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ на некоторой плоскости, заданные своими разложениями по базису $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$*

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{b} = x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2,$$

были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.18}$$

Доказательство.

Докажем сначала *необходимость*. Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, т. е. найдутся такие числа α и β, не равные одновременно нулю, что

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha(x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2) + \beta(x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2) = \mathbf{0}$$

или после приведения подобных слагаемых

$$(\alpha x_1 + \beta x_2)\mathbf{e}_1 + (\alpha y_1 + \beta y_2)\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}.$$

Поскольку $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ — это линейно независимое семейство (базис), то из последнего равенства получим два следующих уравнения:

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = 0, \quad \alpha y_1 + \beta y_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда и из леммы 1 первой лекции получим, что определитель (1.18) равен нулю. Напомним доказательство.

□ Действительно, числа α и β одновременно не равны нулю. Пусть, например, $\alpha \neq 0$. Тогда имеем

$$x_1 = \lambda x_2 \quad \text{и} \quad y_1 = \lambda y_2, \quad \lambda := -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Тогда

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1 = \lambda x_2 y_2 - x_2 \lambda y_2 = 0. \quad \boxtimes$$

Докажем *достаточность*. Пусть определитель (1.18) равен нулю. Тогда по лемме 1 первой лекции найдутся такие числа α и β не равные одновременно нулю, что

$$\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 = 0, \quad \alpha y_1 + \beta y_2 = 0.$$

Пусть, например, $\alpha \neq 0$, тогда

$$x_1 = \lambda x_2, \quad y_1 = \lambda y_2, \quad \lambda := -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Поэтому

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 = \lambda x_2\mathbf{e}_1 + \lambda y_2\mathbf{e}_2 = \lambda(x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2) = \lambda\mathbf{b}.$$

Итак, векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны.

Теорема доказана.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 8. *Для того чтобы три вектора* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$, *заданные своими разложениями по одному и тому же базису* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 + z_1\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + z_2\mathbf{e}_3, \tag{1.19}$$

$$\mathbf{c} = x_3\mathbf{e}_1 + y_3\mathbf{e}_2 + z_3\mathbf{e}_3, \tag{1.20}$$

были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.21}$$

Доказательство.

Достаточность. Пусть выполнено равенство (1.21). Тогда по доказанной во второй лекции теореме о равенстве нулю определителя третьего порядка найдутся такие не равные одновременно нулю числа α, β, γ, что

$$\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Без ограничения общности предположим, что $\alpha \neq 0$, тогда получим следующие три равенства:

$$x_1 = \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_3, \quad y_1 = \lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_3, \quad z_1 = \lambda_2 z_2 + \lambda_2 z_3,$$

где

$$\lambda_1 = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad \lambda_2 = -\frac{\gamma}{\alpha}.$$

Следовательно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 + z_1\mathbf{e}_3 = \\ &= (\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_3)\mathbf{e}_1 + (\lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_3)\mathbf{e}_2 + (\lambda_2 z_2 + \lambda_2 z_3)\mathbf{e}_3 = \lambda_1\mathbf{b} + \lambda_2\mathbf{c}, \end{aligned}$$

т. е. векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны.

Необходимость. Пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны, т. е. найдутся такие числа α, β, γ, не равные одновременно нулю, что

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0},$$

из которого получим равенство

$$(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3)\mathbf{e}_1 + (\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3)\mathbf{e}_2 + (\alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3)\mathbf{e}_3 = \mathbf{0},$$

а поскольку $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — это базис, то отсюда вытекают равенства

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 = \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 = 0$$

или иначе

$$\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и поэтому по доказанной во второй лекции теореме о равенстве нулю определителя имеет место равенство (1.21).

Теорема доказана.