

0.5 setgray 0.5 setgray

Лекция 15

ТЕОРЕМА О БАЗИСНОМ МИНОРЕ

§ 1. Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ следующего общего вида:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} = \|A_1, A_2, \dots, A_n\| = \left\| \begin{array}{c} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{array} \right\|,$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix}, \dots, A_n = \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix},$$

$$A^1 = (a_1^1, a_2^1, \dots, a_n^1), \dots, A^m = (a_1^m, a_2^m, \dots, a_n^m).$$

Рассмотрим линейные оболочки столбцов и строк матрицы A :

$$L(A_1, \dots, A_n) \subset \mathbb{K}^m, \quad L(A^1, \dots, A^m) \subset \mathbb{K}_n.$$

Пусть A' — это матрица, полученная из матрицы A первыми тремя элементарными преобразованиями строк.

Теорема 1. *Имеют место следующие равенства:*

$$\dim L(A'_1, A'_2, \dots, A'_n) = \dim L(A_1, A_2, \dots, A_n),$$

$$\dim L(A'^1, A'^2, \dots, A'^m) = \dim L(A^1, A^2, \dots, A^m).$$

Доказательство.

Докажем, например, равенство $L(A'^1, A'^2, \dots, A'^m) = L(A^1, A^2, \dots, A^m)$.

$$A' = P \cdot A \Rightarrow A'^j = P^j \cdot A = \sum_{k=1}^m P_k^j A^k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(A'^1, A'^2, \dots, A'^m) \subset L(A^1, A^2, \dots, A^m);$$

$$\begin{aligned}
A = P^{-1} \cdot A' &\Rightarrow A^j = (P^{-1})^j \cdot A' = \sum_{k=1}^m (P^{-1})_k^j A'^k \Rightarrow \\
&\Rightarrow L(A^1, A^2, \dots, A^m) \subset L(A'^1, A'^2, \dots, A'^m).
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Определение 1. *Размерность линейной оболочки $L(A_1, \dots, A_n)$ столбцов матрицы $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ называется рангом матрицы A .*

Обозначение. $\text{rk } A$, $\text{rang } A$, $\text{rg } A$, $\text{rang } A$, $\text{r}(A)$.

Теорема 2. *Для любой матрицы A размерность линейной оболочки её столбцов равна размерности линейной оболочки её строк:*

$$\dim L(A_1, \dots, A_n) = \dim L(A^1, \dots, A^m).$$

Доказательство.

Используя метод Гаусса–Жордана элементарными преобразованиями первых трёх типов как со строчками матрицы A , так и со столбцами матрицы A её можно преобразовать либо к нулевой матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

либо к блочным матрицам одного из следующих трёх видов:

$$\begin{aligned}
&\left\| \begin{array}{c|c} I_r & O_{r \times (n-r)} \\ \hline O_{(m-r) \times r} & O_{(m-r) \times (n-r)} \end{array} \right\|, \quad 1 \leq r < \min\{m, n\}; \\
&\left\| I_m | O_{m \times (n-m)} \right\| \quad \text{при } n > m; \\
&\left\| \begin{array}{c} I_n \\ \hline O_{(m-n) \times n} \end{array} \right\| \quad \text{при } m > n,
\end{aligned}$$

где

$$O_{r \times (n-r)}, \quad O_{(m-r) \times r}, \quad O_{(m-r) \times (n-r)}, \quad O_{m \times (n-m)}$$

— это нулевые матрицы соответствующих размеров, а I_r , I_m , I_n — это единичные (квадратные) матрицы соответствующего порядка. В первом случае получаем, что

$$\dim L(A_1, \dots, A_n) = \dim L(A^1, \dots, A^m) = 0.$$

Во втором случае

$$\dim L(A_1, \dots, A_n) = \dim L(A^1, \dots, A^m) = r;$$

в третьем случае

$$\dim L(A_1, \dots, A_n) = \dim L(A^1, \dots, A^m) = m, \quad m < n;$$

в четвертом случае

$$\dim L(A_1, \dots, A_n) = \dim L(A^1, \dots, A^m) = n, \quad n < m.$$

Теорема доказана.

Следствие. Для ранга $\text{rang } A$ матрицы A имеет место следующее неравенство:

$$\text{rang } A \leq \min\{m, n\}.$$

Доказательство. Независимое доказательство основано на следующих неравенствах:

$$L(A_1, \dots, A_n) \subset \mathbb{K}^m \Rightarrow \dim L(A_1, \dots, A_n) \leq m;$$

$$L(A^1, \dots, A^m) \subset \mathbb{K}_n \Rightarrow \dim L(A^1, \dots, A^m) \leq n.$$

Следствие доказано.

Теорема Кронекера–Капелли:

Теорема 3. Неоднородная система $AX = B$ совместна тогда и только тогда, когда

$$\text{rang } \|A\| = \text{rang } \|A \mid B\|.$$

Доказательство.

Шаг 1. Необходимость. Пусть система $AX = B$ совместна. Тогда найдутся такие числа $c^1, \dots, c^n \in \mathbb{K}$, что

$$\begin{aligned} B = c^1 A_1 + \dots + c^n A_n &\Rightarrow B \in L(A_1, \dots, A_n) \Rightarrow \\ &\Rightarrow L(A_1, \dots, A_n, B) \subset L(A_1, \dots, A_n). \end{aligned}$$

Обратное вложение очевидно. Таким образом,

$$L(A_1, \dots, A_n) = L(A_1, \dots, A_n, B) \Rightarrow \text{rang } \|A\| = \text{rang } \|A \mid B\|.$$

Шаг 2. Достаточность. Пусть

$$\dim \|A\| = \dim \|A \mid B\|.$$

Вложение

$$L(A_1, \dots, A_n) \subset L(A_1, \dots, A_n, B)$$

очевидно. Докажем, что $L(A_1, \dots, A_n) = L(A_1, \dots, A_n, B)$.

□ Пусть $\{A_1, \dots, A_r\}$ — это базис ($0 \leq r \leq n$) в $L(A_1, \dots, A_n)$ и столбец B линейно не выражается через столбцы $\{A_1, \dots, A_n\}$. Тогда тем более столбец B линейно не выражается через столбцы $\{A_1, \dots, A_r\}$. Тогда семейство $\{A_1, \dots, A_r, B\}$ линейно независимо и образует базис в линейной оболочке $L(A_1, \dots, A_n, B)$, т.е.

$$\dim L(A_1, \dots, A_n, B) = \dim L(A_1, \dots, A_n) + 1.$$

Противоречие. \boxtimes

$$L(A_1, \dots, A_n) = L(A_1, \dots, A_n, B) \Rightarrow \exists c^1, \dots, c^n, \quad B = c^1 A_1 + \dots + c^n A_n.$$

Система $AX = B$ совместна, поскольку имеет решение

$$X = \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ \vdots \\ c^n \end{pmatrix}.$$

Теорема доказана.

Теорема 4. Если существует произведение матриц A и B , то

$$\text{rang}(AB) \leq \min \{ \text{rang } A, \text{rang } B \}. \quad (1.1)$$

Доказательство.

Пусть $A \in \mathbb{K}^{m \times p}$ и $B \in \mathbb{K}^{p \times n}$. Обозначим через $C \in \mathbb{K}^{m \times n}$ произведение $A \cdot B$. Поэтому

$$C_k = A \cdot B_k = \sum_{l=1}^p A_l b_k^l, \quad k = \overline{1, n} \Rightarrow \text{rang } C \leq \text{rang } A,$$

$$C^j = A^j \cdot B = \sum_{l=1}^p a_l^j B^l, \quad j = \overline{1, m} \Rightarrow \text{rang } C \leq \text{rang } B.$$

Теорема доказана.

§ 2. Теорема о базисном миноре

Рассмотрим матрицу $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Выберем в этой матрице произвольные k строк с номерами $j_1 < j_2 < \dots < j_k$ и k столбцов с номерами $i_1 < i_2 < \dots < i_k$.

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_{i_1}^1 & \dots & a_{i_2}^1 & \dots & a_{i_k}^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^{j_1} & \dots & a_{i_1}^{j_1} & \dots & a_{i_2}^{j_1} & \dots & a_{i_k}^{j_1} & \dots & a_n^{j_1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^{j_2} & \dots & a_{i_1}^{j_2} & \dots & a_{i_2}^{j_2} & \dots & a_{i_k}^{j_2} & \dots & a_n^{j_2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^{j_k} & \dots & a_{i_1}^{j_k} & \dots & a_{i_2}^{j_k} & \dots & a_{i_k}^{j_k} & \dots & a_n^{j_k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_{i_1}^m & \dots & a_{i_2}^m & \dots & a_{i_k}^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{i_1}^{j_1} & a_{i_2}^{j_1} & \dots & a_{i_k}^{j_1} \\ a_{i_1}^{j_2} & a_{i_2}^{j_2} & \dots & a_{i_k}^{j_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_1}^{j_k} & a_{i_2}^{j_k} & \dots & a_{i_k}^{j_k} \end{pmatrix}.$$

Построенную матрицу будем называть подматрицей матрицы A и обозначать следующим образом:

$$A \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{k \times k}.$$

Определение 2. *Определитель матрицы*

$$A \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$$

называется *минором порядка k матрицы A* .

Матрицу, из которой удалили указанные строки и столбцы, будем обозначать следующим образом:

$$\bar{A} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{(m-k) \times (n-k)}.$$

Определение 3. *Если $m = n$, то определитель матрицы*

$$\bar{A} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$$

называется *дополнительным минором порядка $n - k$ квадратной матрицы A* .

Обозначение. При этом в литературе используются следующие обозначения:

$$M_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_k} := \det A \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix},$$

$$\bar{M}_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_k} := \det \bar{A} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}.$$

Определение 4. *Минор порядка $k \leq \min\{m, n\}$ матрицы $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ называется базисным, если он отличен от нуля, а любой минор большего порядка, если он существует, равен нулю.*

Пример 1. У матрицы может быть не один базисный минор. Действительно, у матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

имеется три базисных минора второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -2, \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2.$$

Определение 5. *Будем говорить, что подматрица $\widehat{\hat{A}}$ матрицы A окаймляет подматрицу \hat{A} матрицы A , если \hat{A} получается из матрицы $\widehat{\hat{A}}$ вычеркиванием последнего столбца и последней строчки.*

Например, матрица

$$\widehat{\hat{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ окаймляет матрицу } \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема о базисном миноре.

Теорема 5. Справедливы следующие свойства:

1. Столбцы (строки) матрицы, образующие её базисный минор, линейно независимы.
2. Любой столбец (строка) матрицы является линейной комбинацией столбцов (строк), образующих базисный минор.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что базисный минор матрицы A порядка r расположен в левом верхнем угле матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_{r+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_{r+1}^r & \cdots & a_n^r \\ a_1^{r+1} & \cdots & a_r^{r+1} & a_{r+1}^{r+1} & \cdots & a_n^{r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_r^m & a_{r+1}^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

Шаг 1. Поскольку определитель

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{vmatrix} \neq 0,$$

то столбцы матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{pmatrix}$$

линейно независимы. Но тогда тем более линейно независимыми будут столбцы

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_1^r \\ a_1^{r+1} \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix}, \quad A_r = \begin{pmatrix} a_r^1 \\ \vdots \\ a_r^r \\ a_r^{r+1} \\ \vdots \\ a_r^m \end{pmatrix}$$

исходной матрицы A .

Шаг 2. Пусть A_k — это произвольный столбец матрицы. Если $k \leq r$, то имеет место равенство

$$A_k = 0 \cdot A_1 + \cdots + 0 \cdot A_{k-1} + 1 \cdot A_k + 0 \cdot A_{k+1} + \cdots + 0 \cdot A_r$$

и, следовательно, столбец A_k линейно выражается через базисные столбцы. Если же $k > r$, то рассмотрим минор порядка $r+1$, полу-

ченный окаймлением базисного минора столбцом A_k и какой либо строчкой A^s :

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_k^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_k^r \\ a_1^s & \cdots & a_r^s & a_k^s \end{vmatrix}$$

Нужно рассмотреть два случая: $s \in \overline{1, r}$ и $s \in \overline{r+1, m}$. В первом случае у этого определителя заведомо две одинаковые строчки. Поэтому он равен нулю. Во втором случае указанный минор $r+1$ -го порядка составлен из элементов, находящихся на пересечении первых r строк и s -ой строчки и первых r столбцов и k -го столбца:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & \cdots & a_k^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & \cdots & a_k^r & \cdots & a_n^r \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^s & \cdots & a_r^s & \cdots & a_k^s & \cdots & a_n^s \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_r^m & \cdots & a_k^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

Соответствующий минор $r+1$ -го порядка равен нулю по определению базисного минора.

Теперь мы можем разложить этот определитель по s -й строчке и получить следующее равенство:

$$0 = a_1^s \mathcal{M}_1 + \cdots + a_r^s \mathcal{M}_r + a_k^s \mathcal{M}, \quad s = \overline{1, m},$$

причём $\mathcal{M} \neq 0$, а $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_r$ — это алгебраические дополнения элементов последней строчки. Итак, имеем

$$a_k^s = -\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}} a_1^s - \cdots - \frac{\mathcal{M}_r}{\mathcal{M}} a_r^s, \quad s = \overline{1, m}.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} A_k &= \begin{pmatrix} a_k^1 \\ \vdots \\ a_k^s \\ \vdots \\ a_k^m \end{pmatrix} = -\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}} \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_1^s \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix} - \cdots - \frac{\mathcal{M}_r}{\mathcal{M}} \begin{pmatrix} a_r^1 \\ \vdots \\ a_r^s \\ \vdots \\ a_r^m \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}} A_1 - \cdots - \frac{\mathcal{M}_r}{\mathcal{M}} A_r. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

менных x^1, \dots, x^r , мы можем привести эту систему к следующему эквивалентному виду:

$$\begin{aligned} x^1 + \bar{a}_{r+1}^1 x^{r+1} + \dots + \bar{a}_n^1 x^n &= 0, \\ x^2 + \bar{a}_{r+1}^2 x^{r+1} + \dots + \bar{a}_n^2 x^n &= 0, \\ \dots & \\ x^r + \bar{a}_{r+1}^r x^{r+1} + \dots + \bar{a}_n^r x^n &= 0. \end{aligned}$$

Система уравнений приняла упрощенный вид. Выберем переменные x^1, \dots, x^r как базисные, а переменные x^{r+1}, \dots, x^n как свободные. Положим

$$x^{r+1} = c_1, \quad x^{r+2} = c_2, \dots, x^{n-r} = c_{n-r}.$$

Тогда общее решение последней системы уравнений, а значит, в силу эквивалентных преобразований и исходной системы уравнений можно представить в следующем виде:

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \\ x^{r+1} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{a}_{r+1}^1 c_1 - \dots - \bar{a}_n^1 c_{n-r} \\ \vdots \\ -\bar{a}_{r+1}^r c_1 - \dots - \bar{a}_n^r c_{n-r} \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{pmatrix} = c_1 X_1 + \dots + c_{n-r} X_{n-r},$$

где

$$X_1 = \begin{pmatrix} -\bar{a}_{r+1}^1 \\ \vdots \\ -\bar{a}_{r+1}^r \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, X_{n-r} = \begin{pmatrix} -\bar{a}_n^1 \\ \vdots \\ -\bar{a}_n^r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Нетрудно убедиться в том, что столбцы X_1, \dots, X_{n-r} являются линейно независимыми, а по построению произвольное решение X исходной системы уравнений линейно выражается через эти столбцы. Следовательно, эти столбцы образуют базис пространства решений исходной однородной системы уравнений.