

Асимптотика решения уравнения Гельмгольца в трехмерном слое переменной толщины с локализованной правой частью.

П.Н.Петров, С.Ю.Доброхотов (Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН, Московский физико-технический институт)

Мы строим асимптотическое решение уравнения Гельмгольца в трехмерном слое переменной толщины с локализованной правой частью.

$$(h^2\Delta + n^2(x_1, x_2))u = F\left(\frac{x_1 - \xi_1}{\mu}, \frac{x_2 - \xi_2}{\mu}\right)g\left(\frac{z - z_0}{\mu}\right), \quad u|_{z=hd_1(x)} = 0, \quad u|_{z=hd_2(x)} = 0.$$

Здесь коэффициент $n^2(x_1, x_2)$, задающие границу слоя функции $d_1(x) < d_2(x)$ и задающие источник функции $F(x_1, x_2), g(z)$, предполагаются гладкими функциями всех своих аргументов. Кроме того, предполагаются, что $F(x_1, x_2), g(z)$ быстроубывают на бесконечности. Например, в качестве $F(x_1, x_2), g(z)$ можно выбрать гауссовы экспоненты. Положительные параметры h и μ предполагаются малыми. Числа (ξ_1, ξ_2, z_0) определяют координаты точки, в окрестности которой локализован источник.

С помощью метода адиабатической размерной редукции [1] и недавно развитого подхода [2] в предположении отсутствия “ловушечных” состояний и выполнения условий излучения на бесконечности (типа условия Зоммерфельда) в работе строится асимптотическое решение сформулированной задачи при $1 \gg \mu \geq h$. Асимптотика решения представляется в виде разложения на конечное число мод, каждая из которых связана с парами лагранжевых многообразий. Одно из соответствующих многообразий определяет локализованную (“сингулярную”) в окрестности точки $(x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2)$ часть решения, а вторая “размазанную” по всему слою осциллирующую (“волновую”) часть решения (с учетом возможного появления каустик и фокальных точек). В пределе $F(x_1, x_2)g(z) \rightarrow \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(z)$ полученные формулы описывают асимптотику функции Грина для рассматриваемого уравнения Гельмгольца, однако в отличие от такой асимптотики, полученная формула позволяет достаточно явно описать влияние формы источника на волновую часть решения.

Литература

- [1] В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов, Т. Я. Тудоровский, “Асимптотические решения нерелятивистских уравнений квантовой механики в искривленных нанотрубках. I. Редукция к пространственно-одномерным уравнениям”, ТМФ, 141:2 (2004), 267–303;
- [2] Аникин А.Ю., Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.В., Руло М., Канонический оператор Маслова на паре лагранжевых многообразий и уравнения с локализованной правой частью, Доклады АН, 2017, т. 475, N 6, С. 624–628