

# **СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ**

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУКАХ**

**Профессор А.Н.Боголюбов**

## Введение

Метод математического моделирования, представляющий собой количественное описание изучаемых явлений на языке математики, широко применяется для исследования всевозможных явлений природы и общественной жизни. Этот «третий путь познания» сочетает в себе достоинства как теории, так и эксперимента. С одной стороны, работая не с самим объектом, а с ее моделью, мы можем относительно быстро и без существенных затрат исследовать его свойства и поведение в любых мыслимых ситуациях (**преимущества теории**). С другой стороны, вычислительные эксперименты с моделями объектов позволяют, опираясь на мощь современных вычислительных методов и вычислительной техники, подробно и глубоко изучать объекты в достаточной полноте, недоступной чисто теоретическим исследованиям (**преимущества эксперимента**).

Элементы математического моделирования использовались с самого начала появления точных наук: слово «алгоритм» происходит от имени средневекового арабского ученого Аль-Хорезми (аль Хорезми Абу Абдала Мухамед бен Мусса аль Маджуси, 787 г. –ок. 850 г.). Второе рождение математического моделирования пришлось на конец 40-х – начало 50-х годов XX века и было обусловлено в основном двумя причинами.

Первая из них – появление первых компьютеров. Вторая – социальный заказ – выполнение национальных программ СССР и США по созданию ракетно-ядерного щита, который не мог быть выполнен традиционными методами. Математическое моделирование блестяще справилось с этой задачей: ядерные взрывы и полеты ракет и спутников были предварительно осуществлены в недрах ЭВМ с помощью математических моделей и лишь затем претворены на практике.

Сейчас математическое моделирование вступает в третий принципиально важный этап своего развития, встраиваясь в структуру информационного общества. «Сырая информация» обычно мало что дает для анализа и прогноза, для принятия решений и контроля за их исполнением. Нужны надежные способы переработки информационного сырья в готовый продукт – точные знания.

**История и методология математического моделирования убеждает: оно может и должно стать интеллектуальным ядром информационных технологий, всего процесса информатизации общества.**

*Математическое моделирование – третий путь познания.*

*А.Н.Тихонов*

## **ЧТО ТАКОЕ МОДЕЛЬ?**

Моделирование не является единственным методом изучения окружающего мира. Существует целая область знания - **методология**, которая специально занимается изучением методов познания.

**Методология** (греческие слова: *metodos* – метод, путь к чему-либо, *logos*-учение) изучает закономерности человеческой познавательной деятельности и вырабатывает методы ее осуществления.

**Понятие «метод» означает совокупность приемов и операций практического и теоретического освоения действительности.**

*Метод есть душа знания, его жизнь, им порождаются отдельные научные системы. Им же они и низвергаются как недостаточно разрешающие задачу научного построения...Овладеть методом науки можно, только применяя этот метод к решению конкретных проблем опытного знания*

*С.И.Гессен*

**Из всеобщих методов в истории познания известны два: диалектический и метафизический. Это общепhilosophические методы. С середины XIX века метафизический метод начал все больше вытесняться из естествознания диалектическим методом.**

**Классификация общенаучных методов тесно связана с понятием уровней научного познания. Различают два уровня научного познания: эмпирический и теоретический. Одни общенаучные методы применяются только на эмпирическом уровне (наблюдение, эксперимент, измерение), другие – только на теоретическом (идеализация, формализация).**

**Но есть общенаучные методы, которые используются как на эмпирическом уровне, так и на теоретическом. Таким общенаучным методом является моделирование.**

**Моделирование – метод познания окружающего мира, который можно отнести к общенаучным методам, применяемым как на эмпирическом, так и на теоретическом уровне познания. При построении и исследовании модели могут применяться практически все остальные методы познания.**

Научное исследование сосредоточено на изучении предметов и процессов, существующих вне нашего сознания и называемых **объектами исследования** (от лат. objectum-предмет).

**В научной литературе наиболее распространены два значения термина «модель»:**

**модель как аналог реального объекта;**

**модель как образец будущего изделия.**

При разработке моделей важную роль играют **гипотезы** (от греч. hypothesis – основание, предположение). **Формулирование и проверка правильности гипотез основывается, как правило, на аналогиях.**

**Аналогия** (от греч. analogia – соответствие, соразмерность) – представление о каком-либо частном сходстве двух объектов, **причем такое сходство может быть как существенным, так и несущественным.**

Существенность сходства или различия двух объектов условна и зависит от **уровня абстрагирования** (от лат. abstrahere – отвлекать), **определяемого конечной целью исследования.** Уровень абстрагирования зависит от набора учитываемых параметров объекта исследования и всегда устанавливается по отношению к другим объектам.

**Под моделью (от лат. *modulus* – мера, образец, норма) понимается такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе познания (изучения) замещает объект-оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные его черты. Процесс построения и использования модели называется моделированием.**

**Другими словами, модель – это объект-заменитель объекта-оригинала, обеспечивающий изучение некоторых интересующих исследователя свойств оригинала.**

Любая модель нетождественна объекту-оригиналу, поскольку при ее построении исследователь учитывал лишь важнейшие с его точки зрения факторы. В этом отношении **любая модель является неполной**. «Полная» модель, очевидно, будет полностью тождественна оригиналу (Норберт Винер: наилучшей моделью кота является другой кот, а еще лучше – тот же самый кот).

Если результаты моделирования удовлетворяют исследователя и могут служить основой для прогнозирования поведения или свойств исследуемого объекта, то говорят, что **модель адекватна** (от лат. *adaequatus* – приравненный) объекту. Адекватность модели зависит от целей моделирования и принятых критериев. Идеально адекватная модель принципиально невозможна в силу неполноты модели.

В качестве одной из характеристик модели может выступать **простота (или сложность) модели.**

Важнейшим свойством модели является **потенциальность модели** (от лат. potential – мощь, сила), или предсказательность с позиций получения новых знаний об исследуемом объекте: мы хотим получать от модели больше, чем в нее вложили. Эта «дерзость», «собственный ум» моделей – есть проявление множества внутренних связей, осознать совместное действие (синергетические эффекты) которых их создатели зачастую не в состоянии (по крайней мере, на стадии разработки).

*Под моделью мы будем понимать упрощенное, если угодно, упакованное знание, несущее вполне определенную, ограниченную информацию о предмете (явлении), отражающее те или иные его свойства. Модель можно рассматривать как специальную форму кодирования информации. В отличие от обычного кодирования, когда известна вся исходная информация, и мы лишь переводим ее на другой язык. модель, какой бы язык она не использовала, кодирует и ту информацию, которую люди еще не знали. Можно сказать, что модель содержит в себе потенциальное знание, которое человек, исследуя ее, может приобрести, сделать наглядным и использовать в своих практических нуждах.*

*Н.Н.Мусеев*



В научных исследованиях модели, не обладающие определенной «предсказательностью», едва ли могут считаться удовлетворительными.

**Вывод. Модель нужна для того, чтобы:**

**понять, как устроен конкретный объект: какова его структура, внутренние связи, основные свойства, законы развития, саморазвития и взаимодействия с окружающей средой;**

**научиться управлять объектом или процессом, определять наилучшие способы управления при заданных целях и критериях;**

**прогнозировать прямые и косвенные последствия реализации заданных способов и форм воздействия на объект.**

## КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ

*Очевидно, не существует классификации мира, которая не была бы произвольной и проблематичной. Причина весьма проста: мы не знаем, что такое мир...*

*Хорхе Луи Борхес*

*В действительности вообще нет никаких строго проведенных межей и граней к великой горести всех систематиков.*

*А.И.Герцен*

**Использование моделирования на эмпирическом и теоретическом уровнях исследования приводит к делению (условному) моделей на материальные и идеальные.**

**Материальное моделирование** – это моделирование, при котором исследование объекта происходит с использованием его материального аналога воспроизводящего основные физические, геометрические, динамические и функциональные характеристики данного объекта.

**Идеальное моделирование** отличается от материального тем, что оно основано не на материализованной аналогии объекта и модели, а на аналогии идеальной, мыслимой и всегда носит теоретический характер.

**Основными разновидностями материального моделирования является натурное и аналоговое.**

**Натурное моделирование** – это такое моделирование, при котором реальному объекту ставится в соответствие его увеличенный или уменьшенный материальный аналог, допускающий исследование с помощью последующего перенесения свойств изучаемых процессов и явлений с модели на объект на основе теории подобия.

**Аналоговое моделирование** – это моделирование, основанное на аналогии процессов и явлений, имеющих различную физическую природу, но одинаково описываемых формально (одними и теми же математическими соотношениями, логическими и структурными схемами).

**Фактически процесс исследования моделей данного типа сводится к проведению ряда натуральных экспериментов, где вместо реального объекта используется его физическая или аналоговая модель.**

К примерам натурального моделирования можно отнести макеты в архитектуре, модели судов в судостроении. Следует отметить, что именно с натуральных моделей судов в середине XIX века моделирование стало развиваться как научная дисциплина, а сами модели – активно использовался при проектировании новых технических устройств. Середина XIX века связана в судостроении с окончанием эпохи парусных судов и началом эпохи парового флота. Оказалось, что использование паровых машин требует принципиального изменения конструкции судов. В первую очередь это осознали строители военных кораблей. Как известно, в условиях морского сражения время жизни судна зависит главным образом от его маневренности и скорости. Для парусных судов в результате многовекового опыта были выработаны оптимальные сочетания формы корпуса и парусов. Для кораблей с паровой машиной скорость определяется в значительной степени мощностью паровой машины. В тот период тепло для машин получали от сжигания угля в топках котлов. Поэтому чем выше требуемая мощность машины, тем большее число котлов необходимо использовать и иметь на судне большой запас угля. Все это утяжеляло судно и снижало его скорость, сводя к нулевому эффекту увеличение мощности машины.

Учитывая, что строительство одного крейсера занимало несколько лет, а его стоимость была весьма значительной, можно понять стремление судостроителей найти более быстрый и дешевый по сравнению с традиционным методом проб и ошибок способ поиска оптимальных параметров судна. Выход был найден в моделировании. Протягивая в бассейне небольшие модели будущих судов и измеряя силу сопротивления, конструкторы нашли рациональные решения, как по форме корпуса судна, так и по мощности силовой установки.

В настоящее время методы натурального моделирования находят самое широкое применение в судостроении, авиастроении, автомобилестроении, ракетостроении и других областях. Например, при разработке нового самолета большое значение имеют эксперименты с натурными моделями, испытываемыми в аэродинамической трубе. Проведенные исследования позволяют изучить особенности обтекания фюзеляжа воздушными потоками, найти наиболее рациональную форму корпуса и отдельных узлов. Натурные модели используются и при исследовании причин крупных аварий и катастроф. Активно применяются натурные модели в сочетании с другими методами моделирования (например, компьютерного) при съемке кинофильмов. Так, на съемках американского фильма «Титаник» для сцен гибели корабля было использовано более десяти моделей судов.

**В основу аналогового моделирования положено совпадение математических описаний различных объектов.** Примерами аналоговых моделей могут служить электрические и механические колебания, которые с точки зрения математики описываются одинаковыми соотношениями, но относятся к качественно отличающимся физическим процессам. Поэтому изучение механических колебаний можно вести с помощью электрической схемы, и наоборот. При некоторых допущениях аналогичными можно считать процессы распространения тепла в теле, диффузии примесей и просачивания жидкости.

К числу интересных примеров можно отнести известную в теории упругости аналогию Прандтля, который показал, что уравнения для функции напряжений (по которой простым дифференцированием по координатам определяются компоненты тензора напряжений) в задаче о кручении стержня произвольного поперечного сечения идентичны уравнениям, определяющим прогиб нерастяжимой мембраны, натянуто на упругий контур той же формы, под действием равномерного давления. Это позволит заменить отнюдь не простые эксперименты по определению компонент тензора напряжений в скручиваемом стержне простыми измерениями прогиба мембраны.

Фактически процесс исследования моделей данного типа сводится к проведению ряда натуральных экспериментов, где вместо реального объекта используется его физическая или аналоговая модель.

Универсальность математических моделей есть отражение принципа материального единства мира. Математическая модель должна описывать не только конкретные отдельные явления или объекты, но достаточно широкий круг разнородных явлений и объектов. **Одним из плодотворных подходов к моделированию сложных объектов является использование аналогий с уже изученными явлениями.** Пример: процессы колебаний в объектах различной природы.

**1. Колебательный электрический контур, состоящий из конденсатора и катушки индуктивности.** Сопротивление проводов считаем равным нулю,  $q(t)$  – заряд на обкладках конденсатора,  $u(t)$  – напряжение на обкладках конденсатора,  $C$  – ёмкость конденсатора,  $L$  – индуктивность катушки,  $E$  – э.д.с. самоиндукции,  $i$  – ток.

$$u(t) = Cq(t), E = -L \frac{di}{dt}, i = -\frac{dq}{dt}, u(t) = -E(t) \rightarrow L \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = -Cq \rightarrow \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \frac{C}{L} q = 0$$

## 2. Малые колебания при взаимодействии двух биологических популяций

$N(t)$ -численность растительной популяции 1;  $M(t)$ - численность плотоядной популяции 2.

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = (a_1 - b_1 M)N, & a_1 > 0, b_1 > 0, \\ \frac{dM}{dt} = (-a_2 + b_2 N)M, & a_2 > 0, b_2 > 0. \end{cases}$$

Система находится в равновесии, если  $\frac{dN}{dt} = \frac{dM}{dt} = 0$ . **Линеаризованная система** имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = -b_1 N_0 m \\ \frac{dm}{dt} = b_2 M_0 n \end{cases} \rightarrow \frac{\partial^2 n}{\partial t^2} + a_1 a_2 n = 0, \quad n = N - N_0, \quad m = M - M_0,$$

где  $M_0 = \frac{a_1}{b_1}, \quad N_0 = \frac{a_2}{b_2}.$



3. **Простейшая модель изменения зарплаты и занятости:**  $p(t)$  – зарплата,  $N(t)$  – число занятых работников. **Равновесие рынка труда:** за плату  $p_0 > 0$  согласны работать  $N_0 > 0$  человек.

Предполагается, что

а) работодатель изменяет зарплату пропорционально отклонению численности занятых работников от равновесного;

б) численность работников изменяется пропорционально изменению зарплаты относительно  $p_0$ .

Система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = -a_1(N - N_0), & a_1 > 0, \\ \frac{dN}{dt} = a_2(p - p_0), & a_2 > 0, \end{cases}$$

где

$$\frac{d^2(p - p_0)}{dt^2} + a_1 a_2 (p - p_0) = 0.$$

**Идеальное моделирование разделяют на два основных типа: интуитивное и научное.**

**Интуитивное моделирование** – это моделирование, основанное на интуитивном (не обоснованном с позиций формальной логики) представлении об объекте исследования, не поддающимся формализации или не нуждающимся в ней.

Интуиция, интуитивные модели играют в науке чрезвычайно важную роль. Новое знание недостижимо только методами формальной логики. Большую роль играют интуиция и интуитивные модели.

Вот одно из самых поэтичных высказываний на эту тему.

*Теоретик верит в логику, Ему кажется, будто он презирает мечту, интуицию, поэзию. Он не замечает, что они, эти три феи, просто переоделись, чтобы обольстить его, как влюбчивого мальчишку... Они являются ему под именем «рабочих гипотез», «произвольных гипотез», «аналогий», и может ли теоретик подозревать, что, слушая их. он изменяет суровой логике и внемлет напевам муз.*

*Антуан де Сент-Экзюпери*

Интуитивное и научное (теоретическое) моделирование ни в коем случае нельзя противопоставлять одно другому. Они хорошо дополняют друг друга, разделяя области своего применения. Привычная буквенно-цифровая (знаковая) форма представления научного знания исторически сложилась как технология «передела» готового знания. Создание же качественно нового знания, рождение принципиально новых научных идей не может быть сведено к процессу чистой дедукции, к процессу формально-логического вывода следствий из множества уже открытых, готовых фактов, гипотез и теорий, составляющих базу данных сегодняшней науки.

*Подлинно ценностью является, в сущности, только интуиция. Для меня не подлежит сомнению, что наше мышление протекает, в основном, минуя символы (слова) и тому же бессознательно.*

*Альберт Эйнштейн*

Даже в самой абстрактной области фундаментальной науки – математике – интуиция играет определяющую роль

*Вы должны догадаться о математической теореме прежде, чем вы ее докажете; вы должны догадаться об идее доказательства, прежде чем вы его проведете в деталях...; доказательство открывается... с помощью догадки.*

*Д.Пойа*

*Чистая логика всегда привела бы нас только к тавтологии; она не могла бы ничего нового; сама по себе она не может дать начало никакой науке... Для того, чтобы создать арифметику, как и для того, чтобы создать геометрию или какую б то ни было науку, нужно нечто другое, чем чистая логика. Для обозначения этого другого у нас нет иного слова, кроме слова «интуиция».*

*А.Пуанкаре*

*Извечный секрет необычайной продуктивности гения – в его умении находить новые постановки задач, интуитивно предугадать теоремы приводящие к новым значительным результатам и к установлению важных закономерностей. Не будь новых концепций, новых идей, математика с присущей ей строгостью логических вводов вскоре исчерпала бы себя и пришла в упадок, ибо весь материал оказался бы израсходованным. В этом смысле можно сказать, что математику движут вперед в основном те, кто отмечен даром интуиции, а не строгого доказательства.*

*Ф.Клейн*

Необходимо заметить что в основе любого логического рассуждения лежат гипотезы или аксиомы, принимаемые на веру и непротиворечащие имеющемуся опыту или эксперименту. Поэтому можно говорить об интуитивной первооснове любого научного знания. В то же время следует подчеркнуть, что во многих областях знаний, особенно в естественных науках, аксиомы являются, как правило обобщением огромного количества накопленных эмпирических данных.

В результате познания человек разбирается в причинах тех или иных явлений, раздвигая границы своих интуитивных представлений об окружающем мире. Учитывая бесконечность этого процесса, можно сказать, что интуитивна основа у любого научного знания будет присутствовать всегда. О мере интуитивности знания можно судить по числу используемых гипотез и аксиом. В указанном смысле деление моделирования на интуитивное и научное следует признать относительным.

**Научное моделирование** – это всегда логически обоснованное моделирование, использующее минимальное число предположений, принятых в качестве гипотез на основании наблюдений за объектом моделирования.

**Главное отличие научного моделирования от интуитивного заключается не только в умении выполнять необходимые операции и действия по собственно моделированию, но и в знании «внутренних» механизмов, которые используются при этом. Можно сказать, что научное моделирование знает не только, как необходимо моделировать, но и почему так нужно делать.**

**Знаковым** называется моделирование, использующее в качестве моделей знаковые изображения какого-либо вида: схемы, графики, чертежи, иероглифы, наборы символов, включающее также совокупность законов и правил, по которым можно оперировать с выбранными знаковыми образованиями и элементами.

**Моделирование с помощью математических соотношений является примером знакового моделирования.**

# **Когнитивные, концептуальные и формальные модели**

При наблюдении за объектом-оригиналом в голове исследователя формируется некий мысленный образ объекта, его идеальная модель, которую принято называть **когнитивной** (мысленной, способствующей познанию) **моделью**.

Представление когнитивной модели на естественном языке называется **содержательной моделью**.

По функциональному признаку **содержательные модели** подразделяются на **описательные, объяснительные и прогностические**.

**Описательной моделью** можно назвать любое описание объекта.

**Объяснительная модель** позволяет ответить на вопрос, почему что-либо происходит.

**Прогностическая модель** должна описывать будущее поведение объекта.

Заметим, что прогностическая модель не обязана включать в себя объяснительную.

**Концептуальной моделью** называется **содержательная модель**, при формулировке которой используются понятия и представления предметных областей знания, занимающихся изучением объекта моделирования. В более широком смысле под концептуальной моделью понимают **содержательную модель**, базирующуюся на определенной концепции или точке зрения.

**Выделяют три вида концептуальных моделей: логико-семантические, структурно-функциональные и причинно-следственные.**

**Логико-семантическая модель** является описанием объекта в терминах и определениях соответствующих предметных областей знаний, включающим все известные логически непротиворечивые утверждения и факты. Анализ таких моделей осуществляется средствами логики с привлечением знаний, накопленных в соответствующих предметных областях.

При построении **структурно-функциональной модели** объект рассматривается как целостная система, которую расчленяют на отдельные элементы или подсистемы. Части системы связываются структурными отношениями, описывающими подчиненность, логическую и временную последовательность решения отдельных задач. Для представления подобных моделей удобны различного рода схемы, карты и диаграммы.

**Причинно-следственная модель** часто используется для объяснения и прогнозирования объекта. Данные модели ориентированы в основном на следующее:

выявление главных взаимосвязей между основными элементами изучаемого объекта;

определение того, как изменение одних факторов влияет на состояние компонентов модели;



понимание того, как в целом будет функционировать модель и будет ли она адекватно описывать динамику интересующих исследователя параметров.

**Формальная модель** является представлением концептуальной модели с помощью одного или нескольких формальных языков (например, языков математических теорий или алгоритмических языков).

**В гуманитарных науках процесс моделирования во многих случаях заканчивается созданием концептуальной модели объекта. В естественно-научных дисциплинах, как правило, удастся построить формальную модель.**

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

**Математическое моделирование** – это идеальное научное знаковое формальное моделирование, при котором описание объекта осуществляется на языке математики, а исследование модели проводится с использованием тех или иных математических методов.

В настоящее время математическое моделирование это один из самых результативных и наиболее часто применяемых методов научного исследования. Фактически все современные разделы физики посвящены построению и исследованию математических моделей различных физических объектов и явлений.

Так физики - «ядерщики» до проведения экспериментов выполняют серьезные исследования с применением математических моделей. При этом на основании теоретического моделирования разрабатывается и уточняется методика натуральных экспериментов, выясняется, какие эффекты, где и когда следует ожидать, когда и что регистрировать. Такой подход позволяет значительно снизить затраты на проведение эксперимента, повысить его эффективность.

Как правило значительные успехи в биологии и химии в последнее время были связаны с разработкой и исследованием математических моделей для биологических систем и химических процессов. Идут активные работы по созданию математических моделей в экологии, экономике и социологии. Нельзя переоценить использование математических моделей в медицине и промышленности. Появилась возможность на научной, то есть логически обоснованной основе подходить ко многим экологическим и медицинским проблемам: имплантации и замене различных органов, прогнозирование развития эпидемий, обоснования планов ликвидации последствий крупных аварий и катастроф. Очень часто методы математического моделирования являются единственно возможными.

**По сравнению с натурным моделированием математическое моделирование имеет следующие преимущества:**

экономичность (в частности, сбережение ресурсов реальной системы);

возможность моделирования гипотетических, то есть не реализуемых в природе объектов (прежде всего на разных этапах проектирования);

возможность реализации режимов опасных или трудновоспроизводимых в природе (критический режим ядерного реактора, работа системы противоракетной обороны);

возможность изменения масштабов времени; простота многоаспектного анализа;

большая прогностическая сила вследствие возможности выявления общих закономерностей;

универсальность технического и программного обеспечения проводимой работы (ЭВМ, системы программирования и пакеты прикладных программ широкого назначения).

Очень часто методы математического моделирования являются единственно возможными. Приведем два примера.

Всестороннее математическое моделирование и «проигрывание» различных вариантов на ЭВМ позволило в кратчайшие сроки обоснованно спланировать и преступить к реализации плана ликвидации последствий Чернобыльской катастрофы.

Уникальные результаты были получены по проекту «Гея», связанному с математическим моделированием последствий ядерной войны. Было показано, что в результате сильного запыления атмосферы возможно значительное глобальное похолодание («ядерная зима») и связанное с этим практическое вымирание всего живого.

Существуют и другие определения математического моделирования.

Например, в «чистой» математике существует такое определение математической модели, приведенное в известном справочнике: Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1978. 832 с.:

Под математической моделью понимается «класс абстрактных и символьных математических объектов, таких, как числа или векторы, и отношения между ними». Под математическим отношением понимается «гипотетическое правило, связывающее два или более символических объекта». Вводится абстрактное и конструктивное определение математической модели. При абстрактном определении новая модель задается «непротиворечивым набором правил (определяющих аксиом), вводящих операции, которыми можно пользоваться, и устанавливающие общие отношения между их результатами». Конструктивное определение вводит математическую модель, пользуясь уже известными математическими понятиями (например, определение сложения и вычитания матриц в терминах сложения и вычитания чисел).

Для «прикладной» математики характерна меньшая оторванность от реальной жизни, поскольку математические соотношения связывают не просто абстрактные математические объекты, а вполне конкретные примеры реальных физических, химических, биологических или социальных явлений и процессов.

Желательно иметь определение математической модели, сохраняющее строгость и логичность (как в «чистой математике») и, в то же время, пригодное для классификации существующих и создаваемых моделей, сравнение их между собой (как в «прикладной» математике).

Приведем один из вариантов такого определения.

Любая математическая модель, предназначенная для научных исследований, позволяет по заданным исходным данным найти значения интересующих исследователя параметров моделируемого объекта или явления. Поэтому можно предположить, что суть любой подобной модели заключается в отображении некоторого заданного множества  $\Omega_x$  значений исходных параметров  $X$  на множество значений  $\Omega_y$  выходных параметров  $Y$ . Данное обстоятельство позволяет рассматривать математическую модель как некоторый математический оператор  $A$  и сформулировать следующее определение.

**Под математической моделью будем понимать любой оператор  $A$ , позволяющий по соответствующим значениям входных параметров  $X$  установить выходные значения параметров модели**

$$A: X \rightarrow Y; \quad X \in \Omega_x; \quad Y \in \Omega_y,$$

где  $\Omega_x$  и  $\Omega_y$  - множества допустимых значений входных и выходных параметров для моделируемого объекта. В зависимости от природы моделируемого объекта элементами множеств  $\Omega_x$  и  $\Omega_y$  могут являться любые математические объекты (числа, векторы, тензоры, функции, множества и т.п.).

**Понятие оператора в приведенном определении может трактоваться достаточно широко.** Это может быть как некоторая функция, связывающая входные и выходные значения, так и отображение, представляющее символическую запись системы алгебраических, дифференциальных, интегродифференциальных и интегральных уравнений. Наконец, это может быть некоторый алгоритм, совокупность правил и таблиц, обеспечивающих нахождение (или установление) выходных параметров по заданным значениям.

В зависимости от вида оператора математические модели можно разделить на **простые и сложные.**

Если оператор модели является алгебраическим выражением, отражающим функциональную зависимость выходных параметров  $Y$  от входных параметров  $X$ , модель будем называть **простой.**

Простые модели часто всего являются результатом обобщения и анализа экспериментальных данных, полученных в результате наблюдений за исследуемым объектом или явлением.

Примеры простых моделей: закон всемирного тяготения, закон Ома, закон Гука и другие законы физики, все эмпирические (полученные из опыта) алгебраические зависимости между входными и выходными параметрами.



**Определение математической модели через понятие оператора является более конструктивным с точки зрения построения классификации таких моделей, поскольку включает в себя все многообразие имеющихся в настоящее время математических моделей.**

**Информационные модели** представляют собой, по существу, автоматизированные справочники, реализованные с помощью систем управления базами данных. Получая на входе некоторый запрос на поиск требуемой информации, подобные модели позволяют найти всю имеющуюся в базе данных информацию по интересующему вопросу. Однако такие модели не могут генерировать новое знание, отсутствующее в базе данных. Можно сказать, что это модель с нулевым потенциалом. В тоже время в сочетании даже с весьма простыми математическими моделями информационные модели могут привести к открытию новых закономерностей, позволить прогнозировать развитие исследуемых процессов.

**Так как в качестве входных или выходных параметров моделей могут выступать математические объекты, а саму процедуру поиска данных можно представить в виде некоторого оператора, то информационные модели можно считать специфической разновидностью математических моделей.**

# КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

**Один из возможных способов классификации:**

- 1) классификация математических моделей в зависимости от сложности объекта моделирования;
- 2) классификация математических моделей в зависимости от оператора модели;
- 3) классификация математических моделей в зависимости от параметров модели;
- 4) классификация математических моделей в зависимости от целей моделирования;
- 5) классификация математических моделей в зависимости от методов реализации.

# **Основные этапы метода математического моделирования**

## **1. Создание качественной модели**

Выясняется характер законов и связей, действующих в системе. В зависимости от природы модели эти законы могут быть физическими, химическими, биологическими, экономическими.

**Задача моделирования-выявить главные, характерные черты явления или процесса, его определяющие особенности.**

Применительно к исследованию физических явлений создание качественной модели – это формулировка физических закономерностей явления или процесса на основании эксперимента.

## **2. Создание математической модели (постановка математической задачи)**

**Если модель описывается некоторыми уравнениями, то она называется детерминированной.** Начально-краевые задачи математической физики являются примерами детерминированных дифференциальных моделей.

**Если модель описывается вероятностными законами, то она называется стохастической.**

1) Выделение существенных факторов.

**Основной принцип: если в системе действует несколько факторов одного порядка, то все они должны быть учтены, или отброшены.**

2) Выделение дополнительных условий (начальных, граничных, условий сопряжения и т.п.).

### **3. Изучение математической модели**

1) **Математическое обоснование модели.** Исследование внутренней непротиворечивости модели. Обоснование корректности дифференциальной модели. Доказательство теорем существования, единственности и устойчивости решения.

2) **Качественное исследование модели.** Выяснение поведения модели в крайних и предельных ситуациях.

3) **Численное исследование модели.** а) Разработка алгоритма. б) Разработка численных методов исследования модели. **Разрабатываемые методы должны быть достаточно общими, алгоритмичными и допускающими возможность распараллеливания.** в) Создание и реализация программы. Компьютерный эксперимент.

**Лабораторный эксперимент**

**Образец**

**Физический прибор**

**Калибровка**

**Измерения**

**Анализ данных**

**Компьютерный эксперимент**

**Математическая модель**

**Программа**

**Тестирование программы**

**Расчеты**

**Анализ данных**

**По сравнению с лабораторным (натурным) экспериментом компьютерный эксперимент дешевле, безопасней, может проводиться в тех случаях, когда натурный эксперимент принципиально невозможен.**

#### **4. Получение результатов и их интерпретация**

Сопоставление полученных данных с результатами качественного анализа, натурального эксперимента и данными, полученными с помощью других численных алгоритмов. Уточнение и модификация модели и методов её исследования.

#### **5. Использование полученных результатов**

**Предсказание новых явлений и закономерностей. Предсказание Полем Дираком открытия античастиц на основе исследования построенной им модели квантовой теории поля.**

### **2. Прямые и обратные задачи математического моделирования**

**1. Прямая задача:** все параметры исследуемой задачи известны и изучается поведение модели в различных условиях.

**2. Обратные задачи:**

**а) Задача распознавания:** определение параметров модели путем сопоставления наблюдаемых данных и результатов моделирования. По результатам наблюдений пытаются выяснить, какие процессы управляют поведением объекта и находят определяющие параметры модели. В обратной задаче распознавания требуется определить значение параметров модели по известному поведению системы как целого.

**Примеры задач распознавания:** -**Задача электроразведки:** определение подземных структур при помощи измерения на поверхности. -**Задача магнитной дефектоскопии:** определение дефекта в детали, помещённой между полюсами магнита, по возмущению магнитного поля на поверхности детали.

**б) Задача синтеза (задача математического проектирования):** построение математических моделей систем и устройств, которые должны обладать заданными техническими характеристиками. В отличие от задач распознавания в задачах синтеза отсутствует требование единственности решения («веер решений»). Отсутствие единственности решения позволяет выбрать технологически наиболее приемлемый результат.

**Примеры задач синтеза:** -Синтез диаграммы направленности антенны: определение распределения токов, создающих заданную диаграмму направленности антенны.- Синтез градиентных световодов: определение профиля функции диэлектрической проницаемости, при котором световод обладает заданными характеристиками.

**3. Задача проектирования управляющих систем:** особая область математического моделирования, связанная с автоматизированными информационными системами и автоматизированными системами управления.

## Типичные примеры обратных задач распознавания

**1. Задача электроразведки.** Для изучения неоднородностей земной коры в целях разведки полезных ископаемых широко применяются электрические методы. Основная схема электроразведки постоянных током заключается в следующем.

При помощи заземленных электродов в землю пропускается ток от питающей батареи. На поверхности земли измеряется напряжение созданного таким образом поля постоянного тока. При помощи измерений на поверхности определяют подземную структуру. Методы определения подземных структур (интерпретация наблюдений) основывается на математическом решении соответствующих задач.

**2. Задача магнитной дефектоскопии.** Для определения дефекта (наличие пустот) металлическую деталь помещают между полюсами магнита и измеряют магнитное поле на ее поверхности.

По возмущениям магнитного поля требуется определить наличие дефекта, а также, его размеры, глубину залегания и т.д.