
Теория катастроф и ее физические приложения

Рабочая программа дисциплины

Теория катастроф и ее физические приложения

1. Название курса

Теория катастроф и ее физические приложения

2. Лектор

д.ф.-м.н., профессор Быков Алексей Александрович (кафедра математики физического факультета МГУ), abkov@yandex.ru, abkov.ru, телефон.: +7-495-939-13-51

3. Аннотация дисциплины

Теория катастроф (ТК) изучает теорию особенностей дифференцируемых отображений и эффекты, возникающие в особых точках отображений. В предлагаемом курсе основное внимание уделено как изложению математических основ ТК, так и приложению ТК к анализу физических моделей. Типичная катастрофа (в математическом смысле) проявляет себя, например, при исследовании математической модели, описывающей выпуклую оболочку, к которой приложено некоторое силовое воздействие. При постепенном увеличении нагрузки на выпуклую оболочку в некоторый момент возникает эффект потери устойчивости, при котором увеличение прогиба сопровождается уменьшением возвращающей силы, что ведет к практически мгновенному разрушению конструкции. После некоторых преобразований эта и многие другие практически важные задачи ТК сводятся к исследованию критических точек дифференцируемых отображений. Курс ТК включает полное теоретическое описание основных моделей и методов ТК, формулировки определений, формулировки и доказательства основных теорем. Курс включает также практическую часть, в которой рассматриваются основные задачи, допускающие практически полное решение без применения аппарата, существенно выходящего за рамки программы общего курса высшей математики. Для данного курса отобраны задачи теории катастроф, представленные в общих и специальных курсах, преподаваемых на физическом факультете МГУ. Данный курс знакомит слушателей с основами теории катастроф. Отличием данного курса является широкое использование компьютерного моделирования и визуализации. По каждой теме излагается физическая постановка задачи, математические модели, основные аналитические результаты, численные алгоритмы, методика кодирования для математического инструмента. Предлагается набор задач для самостоятельного решения.

4. Цели освоения дисциплины

Студент, освоивший данный курс ТК, способен сформулировать физическую постановку задачи, сформулировать и исследовать математическую модель, получить основные аналитические результаты, создать численные алгоритмы, создать код для математического инструмента, исследовать численную модель, построить гибридное описание системы с использованием аналитических, численных, символьных методов.

5. Задачи дисциплины

Теория катастроф (ТК) изучает теорию особенностей дифференцируемых отображений и эффекты, возникающие в физических, биологических, социальных, экономических, химических, логистических моделях, в которых имеются особые точки системы нелинейных уравнений, описывающих состояние равновесия. ТК изучает поведение системы при изменении параметров, приводящем к расщеплению особенно го положения равновесия на несколько близко расположенных состояний равновесия с меньшей степенью вырожденности.

6. Компетенции

6.1. Компетенции, необходимые для освоения дисциплины

ОНК-5, ОНК-6, ИК-1, ИК-3, ИК-4, ПК-1, ПК-2

6.2. Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины

ОНК-5, ОНК-6, ПК-2, ПК-3, ПК-6

7. Требования к результатам освоения содержания дисциплины

В результате освоения дисциплины ТК обучающийся должен знать основные понятия, методы, модели, результаты и факты теории катастроф. Студент должен уметь формулировать определения основных понятий, формулировать и доказывать основные теоремы. Студент в результате освоения курса ТК получает возможность сформулировать математическую модель объекта, указать переменные состояния и переменные управления, построить функцию потенциала, сформулировать необходимые условия экстремума, найти многообразие особых точек (многообразие катастрофы), построить флаг катастрофы, найти морсовские точки, найти и классифицировать неморсовские точки, описать поведение системы при заданном перемещении в пространстве управления. Студент сможет решать типовые задачи по всем разделам курса. Студент должен уметь применять понятия, теоремы и методы теории катастроф для решения задач физического содержания.

8. Содержание и структура дисциплины

8.1. Распределене часов

Вид работы	Семестр			Всего
		8		
Общая трудоёмкость, акад. часов		64		64
Аудиторная работа:		32		32
Лекции, акад. часов		32		32
Семинары, акад. часов		-		-
Лабораторные работы, акад. часов		-		-
Самостоятельная работа, акад. часов		32		32
Вид итогового контроля (зачёт, зачёт с оценкой, экзамен)		Зачет или экза- мен		Зачет или экза- мен

8.2. Рабочий план

Номер раздела	
Наименование раздела	Предмет теории катастроф.
Лекции	Складки и сборки. Задача о равновесии и об изломе упругого стержня. Равновесие и обрушение упругой оболочки. Волновые фронты и каустики. Задача о расположении натянутой нити на гладкой поверхности. Геодезические линии. Задачи о равновесии плавающих объектов. Задачи о равновесии и опрокидывании качалок. Опрокидывание транспортных средств. Транспортные задачи оптимизации. Экстремальные задачи логистики. Машины катастроф.
Семинары	—
Лабораторные работы	Изучение математической модели равновесия: а) аналитическое, б) компьютерное, с помощью математического инструмента.
Самостоятельная работа	Изучение курса по конспекту лекций и по следующим учебным пособиям и научным публикациям: Постон, Стюарт, стр 19-28.
Форма текущего контроля	1) Контрольная работа, 10 минут. 2) Выполнение самостоятельного домашнего задания.

Теория катастроф и ее физические приложения

8. Содержание дисциплины

8.2. Рабочий план

Номер раздела	
Наименование раздела	Экстремальные задачи с параметром.
Лекции	Экстремальные задачи для одной функции от одной переменной с параметром. Экстремальные задачи для одной функции от нескольких переменных с параметром. Экстремальные задачи для одной функции от нескольких переменных с несколькими параметрами. Теоремы о зависимости решения экстремальной задачи от параметра.
Семинары	
Лабораторные работы	Изучение экстремальной задачи для одной функции от одной переменной с параметром: а) аналитическое, б) компьютерное, с помощью математического инструмента.
Самостоятельная работа	Изучение курса по конспекту лекций и по следующим учебным пособиям и научным публикациям: Постон, Стюарт, стр 73-76.
Форма текущего контроля	1) Контрольная работа, 10 минут. 2) Выполнение самостоятельного домашнего задания.
Номер раздела	
Наименование раздела	Классическая теория неявных функций .
Лекции	Неявные функции, определяемые системой уравнений. Теоремы разрешимости, теоремы гладкости. Теоремы о зависимости решения системы нелинейных уравнений от параметров.
Семинары	
Лабораторные работы	Изучение экстремальной задачи для неявной функции с параметром: а) аналитическое, б) компьютерное, с помощью математического инструмента.
Самостоятельная работа	Изучение курса по конспекту лекций и по следующим учебным пособиям и научным публикациям: Постон, Стюарт, стр 73-76.
Форма текущего контроля	1) Контрольная работа, 10 минут. 2) Выполнение самостоятельного домашнего задания.

Теория катастроф и ее физические приложения

8. Содержание дисциплины

8.2. Рабочий план

Номер раздела	
Наименование раздела	Задача об условном экстремуме с параметрами.
Лекции	Теоремы о необходимых и достаточных условиях условного экстремума. Теоремы о зависимости решения задачи об условном экстремуме от параметров.
Семинары	
Лабораторные работы	Изучение условной экстремальной задачи с параметром: а) аналитическое, б) компьютерное, с помощью математического инструмента.
Самостоятельная работа	Изучение курса по конспекту лекций и по следующим учебным пособиям и научным публикациям: Постон, Стюарт, стр 73-76.
Форма текущего контроля	1) Контрольная работа, 10 минут. 2) Выполнение самостоятельного домашнего задания.
Номер раздела	
Наименование раздела	Математический аппарат теории катастроф.
Лекции	Линейные пространства, линейные преобразования, матрицы. Квадратичные формы. Кубические формы. Формы старших порядков. Ряд Тейлора. Струи.
Семинары	
Лабораторные работы	Анализ струи функции нескольких переменных: а) аналитическое, б) компьютерное, с помощью математического инструмента.
Самостоятельная работа	Изучение курса по конспекту лекций и по следующим учебным пособиям и научным публикациям: Постон, Стюарт, стр 28-76.
Форма текущего контроля	1) Контрольная работа, 10 минут. 2) Выполнение самостоятельного домашнего задания.

Теория катастроф и ее физические приложения

8. Содержание дисциплины

8.2. Рабочий план

Номер раздела	
Наименование раздела	Критические точки дифференцируемых отображений.
Лекции	Критические точки. Лемма Морса. Применение леммы Морса для функции одной переменной. Применение леммы Морса для функции нескольких переменных.
Семинары	
Лабораторные работы	Морс-анализ функции одной или нескольких переменных: а) аналитическое, б) компьютерное, с помощью математического инструмента.
Самостоятельная работа	Изучение курса по конспекту лекций и по следующим учебным пособиям и научным публикациям: Постон, Стюарт, стр 76-87.
Форма текущего контроля	1) Контрольная работа, 10 минут. 2) Выполнение самостоятельного домашнего задания.
Номер раздела	
Наименование раздела	Структурная устойчивость.
Лекции	Лемма расщепления. Семейства отображений. Структурная устойчивость семейств. Лемма Морса и лемма расщепления для семейств.
Семинары	
Лабораторные работы	Анализ структурной устойчивости: а) аналитический, б) компьютерный, с помощью математического инструмента.
Самостоятельная работа	Изучение курса по конспекту лекций и по следующим учебным пособиям и научным публикациям: Постон, Стюарт, стр 87-92.
Форма текущего контроля	1) Контрольная работа, 10 минут. 2) Выполнение самостоятельного домашнего задания.

Теория катастроф и ее физические приложения

8. Содержание дисциплины

8.2. Рабочий план

Номер раздела	
Наименование раздела	Трансверсальность.
Лекции	Многообразия, трансверсальность и устойчивость. Отображения, трансверсальность и устойчивость. Коразмерность.
Семинары	
Лабораторные работы	
Самостоятельная работа	Изучение курса по конспекту лекций и по следующим учебным пособиям и научным публикациям: Постон, Стюарт, стр 92-103.
Форма текущего контроля	1) Контрольная работа, 10 минут. 2) Выполнение самостоятельного домашнего задания.
Номер раздела	
Наименование раздела	Параметрические семейства.
Лекции	Однопараметрические семейства. Двухпараметрические семейства. Семейства высших порядков. Классификационная теорема Тома.
Семинары	
Лабораторные работы	
Самостоятельная работа	Изучение курса по конспекту лекций и по следующим учебным пособиям и научным публикациям: Постон, Стюарт, стр 12-33.
Форма текущего контроля	1) Контрольная работа, 10 минут. 2) Выполнение самостоятельного домашнего задания.

Теория катастроф и ее физические приложения

8. Содержание дисциплины

8.2. Рабочий план

Номер раздела	
Наименование раздела	Структурная устойчивость семейств.
Лекции	Эквивалентные семейства. Структурная устойчивость семейств. Лемма Морса и лемма расщепления для семейств.
Семинары	
Лабораторные работы	Исследование структурной устойчивости семейства, моделирующего равновесие физического объекта с параметрами.
Самостоятельная работа	Изучение курса по конспекту лекций и по следующим учебным пособиям и научным публикациям: Постон, Стюарт, стр 121-132.
Форма текущего контроля	1) Контрольная работа, 10 минут. 2) Выполнение самостоятельного домашнего задания.
Номер раздела	
Наименование раздела	Классификационная теорема Тома.
Лекции	Высшие катастрофы. Классификационная теорема Тома.
Семинары	
Лабораторные работы	Исследование катастроф старших порядков.
Самостоятельная работа	Изучение курса по конспекту лекций и по следующим учебным пособиям и научным публикациям: Постон, Стюарт, стр 157-164.
Форма текущего контроля	1) Контрольная работа, 10 минут. 2) Выполнение самостоятельного домашнего задания.

Теория катастроф и ее физические приложения

8. Содержание дисциплины

8.2. Рабочий план

Номер раздела	
Наименование раздела	Геометрия первых семи катастроф.
Лекции	Складки. Сборки. Ласточкин хвост. Бабочка. Эллиптическая, гиперболическая, параболическая омбилика. Линейчатые поверхности.
Семинары	
Лабораторные работы	Анализ складки, сборки, ласточкина хвоста, бабочки, омбилики: а) аналитический, б) компьютерный, с помощью математического инструмента.
Самостоятельная работа	Изучение курса по конспекту лекций и по следующим учебным пособиям и научным публикациям: Постон, Стюарт, стр 130-132.
Форма текущего контроля	1) Контрольная работа, 10 минут. 2) Выполнение самостоятельного домашнего задания.
Номер раздела	
Наименование раздела	Физические приложения: Остойчивость судов.
Лекции	Равновесие судна. Геометрия кривой центров плавающего тела сложной формы. Прямоугольное, эллиптическое судно. Статическая остойчивость судов. Динамическая остойчивость судов.
Семинары	
Лабораторные работы	Анализ остойчивости прямоугольного судна: а) аналитический, б) компьютерный, с помощью математического инструмента.
Самостоятельная работа	Изучение курса по конспекту лекций и по следующим учебным пособиям и научным публикациям: Постон, Стюарт, стр 251-278.
Форма текущего контроля	1) Контрольная работа, 10 минут. 2) Выполнение самостоятельного домашнего задания.

Теория катастроф и ее физические приложения

8. Содержание дисциплины

8.2. Рабочий план

Номер раздела	
Наименование раздела	Физические приложения: Устойчивые течения.
Лекции	Ламинарные и вихревые течения. Функция тока. Растягивание течения. Устойчивое и неустойчивое обтекание.
Семинары	
Лабораторные работы	Анализ устойчивости течения жидкости: а) аналитический, б) компьютерный, с помощью математического инструмента.
Самостоятельная работа	Изучение курса по конспекту лекций и по следующим учебным пособиям и научным публикациям: Постон, Стюарт, стр 278-314.
Форма текущего контроля	1) Контрольная работа, 10 минут. 2) Выполнение самостоятельного домашнего задания.
Номер раздела	
Наименование раздела	Физические приложения: оптика.
Лекции	Волны в оптике. Каустики. Радуга. Мираж. Вариационные принципы.
Семинары	
Лабораторные работы	Анализ каустики: а) аналитический, б) компьютерный, с помощью математического инструмента.
Самостоятельная работа	Изучение курса по конспекту лекций и по следующим учебным пособиям и научным публикациям: Постон, Стюарт, стр 314-329.
Форма текущего контроля	1) Контрольная работа, 10 минут. 2) Выполнение самостоятельного домашнего задания.

Теория катастроф и ее физические приложения

8. Содержание дисциплины

8.2. Рабочий план

Номер раздела	
Наименование раздела	Физические приложения: волны.
Лекции	Звуковые волны в нелинейной среде. Световые волны в нелинейной среде. Ударные волны, каустики ударных волн. Разрушение препятствий ударной волной. Волны в разрушающихся средах. Большие волны на воде, цунами. Фокусировка, рассеяние.
Семинары	
Лабораторные работы	Анализ световой волны в нелинейной среде: а) аналитический, б) компьютерный, с помощью математического инструмента.
Самостоятельная работа	Изучение курса по конспекту лекций и по следующим учебным пособиям и научным публикациям: Постон, Стюарт, стр 346-359.
Форма текущего контроля	1) Контрольная работа, 10 минут. 2) Выполнение самостоятельного домашнего задания.
Номер раздела	
Наименование раздела	Физические приложения: упругие конструкции.
Лекции	Эйлеровы стержни. Устойчивость упругого стержня. Пружины, устойчивость и выпячивание. Устойчивость упругой пластины. Устойчивость упругой оболочки. Гравитационно-арочные плотины. Устойчивость центрифуги.
Семинары	
Лабораторные работы	Анализ упругой оболочки: а) аналитический, б) компьютерный, с помощью математического инструмента.
Самостоятельная работа	Изучение курса по конспекту лекций и по следующим учебным пособиям и научным публикациям: Постон, Стюарт, стр 346-359.
Форма текущего контроля	1) Контрольная работа, 10 минут. 2) Выполнение самостоятельного домашнего задания.

Теория катастроф и ее физические приложения

9. Место дисциплины

9.0. Рабочий план

Номер раздела	
Наименование раздела	Физические приложения: лазерная физика.
Лекции	Основы лазерной физики. Гамильтониан. Уравнения движения. Равновесные и неравновесные состояния. Лазерный переход.
Семинары	
Лабораторные работы	Анализ лазерного пучка: а) аналитический, б) компьютерный, с помощью математического инструмента.
Самостоятельная работа	Изучение курса по конспекту лекций и по следующим учебным пособиям и научным публикациям: Постон, Стюарт, стр 454-482.
Форма текущего контроля	1) Контрольная работа, 10 минут. 2) Выполнение самостоятельного домашнего задания.
Номер раздела	
Наименование раздела	Естественнонаучные приложения: биология.
Лекции	Квазиволны в экологии. Бистабильные и тристабильные системы. Одномерные, двумерные биосистемы. Биосистемы с сосредоточенными параметрами. Катастрофы клеточного уровня. Формирование многоклеточного организма. Рак. Восприятие формы. Распознавание лица, узнавание.
Семинары	
Лабораторные работы	Анализ многоклеточного организма: а) аналитический, б) компьютерный, с помощью математического инструмента.
Самостоятельная работа	Изучение курса по конспекту лекций и по следующим учебным пособиям и научным публикациям: Постон, Стюарт, стр 482-514.
Форма текущего контроля	1) Контрольная работа, 10 минут. 2) Выполнение самостоятельного домашнего задания.

Номер раздела	
Наименование раздела	Гуманитарно-научные приложения: социология.
Лекции	Устойчивость толпы. Пространственные осцилляции двумерной толпы, катастрофические осцилляции. Катастрофа революции. Захват власти. Паника на рынке, обвалы.
Семинары	
Лабораторные работы	Анализ многоклеточного организма: а) аналитический, б) компьютерный, с помощью математического инструмента.
Самостоятельная работа	Изучение курса по конспекту лекций и по следующим учебным пособиям и научным публикациям: Постон, Стюарт, стр 482-514.
Форма текущего контроля	1) Контрольная работа, 10 минут. 2) Выполнение самостоятельного домашнего задания.

9. Место дисциплины в структуре ООП ВПО

9.1. Дисциплина профиля

Дисциплина является Дисциплиной профиля (обязательная)

9.2. Вариативная часть

Вариативная часть, профессиональный блок, дисциплина профиля (обязательная)

9.3. Связи

Курс неразрывно связан с дисциплинами Математический анализ. Линейная алгебра. Дифференциальные уравнения.

9.3.1. Необходимые для данного курса дисциплины

Дисциплины и практики, которые должны быть освоены для начала освоения данной дисциплины:

- Математический анализ,
- Линейная алгебра,
- Теория функций комплексного переменного,
- Электромагнетизм,
- Дифференциальные уравнения,
- Оптика,
- Методы математической физики,
- Электродинамика,

- Основы математического моделирования.

9.3.2. Поддерживаемые данным курсом дисциплины

Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее.

Данная дисциплина предусмотрена в 10-ом семестре, ее освоение необходимо для научно-исследовательской работы, курсовой работы, преддипломной практики, дипломной работы.

10. Образовательные технологии

Курс имеет электронную версию для презентации. Подробные конспекты лекций и дополнительные материалы выложены в сети Internet на сайте кафедры.

11. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

11.1. Текущая аттестация

Текущая аттестация проводится еженедельно. Критерии формирования оценки – посещаемость занятий, активность студентов на лекциях, уровень подготовки к лекциям, собеседование после лекций.

11.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация проводится на 9 неделе в форме контрольной работы с оценкой. Критерии формирования оценки – уровень знаний пройденной части курса.

11.3. Основные вопросы

Символом ★ помечены вопросы повышенного уровня сложности.

11.3.1. Экстремальные задачи функции одной переменной $f(x)$

1. Сформулируйте теорему о необходимых условиях локального экстремума дифференцируемой функции одной переменной.
2. Сформулируйте теорему о достаточных условиях локального экстремума дважды дифференцируемой функции одной переменной.
3. Сформулируйте теорему о точке возможного экстремума трижды дифференцируемой функции одной переменной.
4. Сформулируйте теорему о достаточных условиях локального экстремума $2k$ раз дифференцируемой функции одной переменной, $k \in \mathbb{N}$.
5. Сформулируйте теорему о точке возможного экстремума $2k - 1$ раз дифференцируемой функции одной переменной, $k \in \mathbb{N}$.

11.3.2. Экстремальные задачи функции нескольких переменных $f(x, y, \dots)$

6. Сформулируйте теорему о необходимых условиях локального экстремума дифференцируемой функции нескольких переменных.
7. Сформулируйте теорему о достаточных условиях локального экстремума дважды дифференцируемой функции нескольких переменных.
8. Сформулируйте теорему о точке возможного экстремума трижды дифференцируемой функции нескольких переменных.

11.3.3. Неявные функции

9. Сформулируйте теорему о неявной функции $y = f(x)$, определенной уравнением $F(x, y) = 0$.
10. Сформулируйте теорему о неявной функции $z = f(x, y)$, определенной уравнением $F(x, y, z) = 0$.
11. Сформулируйте теорему о неявной функции $y = f(x)$, $z = g(x)$, определенной системой уравнений $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$.
12. Сформулируйте теорему о неявной функции $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, определенной системой уравнений $F(x, y, u, v) = 0$, $G(x, y, u, v) = 0$.
13. Сформулируйте теорему о неявной функции $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, определенной системой уравнений $u = F(x, y) = 0$, $v = G(x, y) = 0$.

11.3.4. Экстремальные задачи с параметром

14. Сформулируйте теорему зависимости от параметра точки экстремума функции $y = f(x, p)$, определенной уравнением $F(x, y, p) = 0$.
15. Сформулируйте теорему зависимости от параметра точки экстремума функции $z = f(x, y, p)$, определенной уравнением $F(x, y, z, p) = 0$.
16. Сформулируйте теорему зависимости от параметра точки экстремума функции $u = f(x, y, p)$, определенной системой уравнений $F(x, y, u, v, p) = 0$, $G(x, y, u, v, p) = 0$.

11.3.5. Экстремальные условные задачи

17. Сформулируйте теорему точке локального экстремума функции $z = f(x, y)$ с условием $F(x, y, z) = 0$.
18. Сформулируйте теорему зависимости от параметра точки экстремума функции $z = f(x, y, p)$, определенной уравнением $F(x, y, z, p) = 0$.

11.3.6. Стандартные катастрофы с одномерным пространством состояния**1. Катастрофа складки**

19. Запишите росток катастрофы складки. Запишите стандартную деформацию складки.
20. Составьте таблицу всех возможных типов расщепления катастрофы складки, представьте графическую иллюстрацию каждого типа.
21. Найдите уравнение кривой минимального расщепления катастрофы складки, представьте графическую иллюстрацию. Опишите флаг катастрофы складки

2. Катастрофа сборки

22. Запишите росток катастрофы сборки. Запишите стандартную деформацию сборки.
23. Составьте таблицу всех возможных типов расщепления катастрофы сборки, представьте графическую иллюстрацию каждого типа.
24. Найдите уравнение кривой минимального расщепления катастрофы сборки, представьте графическую иллюстрацию. Опишите флаг катастрофы сборки

3. Катастрофа ЛХ

25. Запишите росток катастрофы ЛХ. Запишите стандартную деформацию ЛХ.

26. Составьте таблицу всех возможных типов расщепления катастрофы ЛХ, представьте графическую иллюстрацию каждого типа.

27. Найдите уравнение кривой минимального расщепления катастрофы ЛХ, представьте графическую иллюстрацию. Опишите флаг катастрофы ЛХ

4. Катастрофа Бабочка

28. Запишите росток катастрофы бабочки. Запишите стандартную деформацию бабочки.

29. Составьте таблицу всех возможных типов расщепления катастрофы бабочки, представьте графическую иллюстрацию каждого типа.

30. Найдите уравнение кривой минимального расщепления катастрофы бабочки, представьте графическую иллюстрацию. Опишите флаг катастрофы бабочки

11.3.7. Стандартные катастрофы с двумерным пространством состояния

1. Эллиптическая омбилика

31. Запишите росток катастрофы эллиптической омбилики. Запишите стандартную деформацию эллиптической омбилики.

32. Запишите росток катастрофы эллиптической омбилики. Нарисуйте карту линий равного уровня для функции двух переменных, определяющей росток катастрофы эллиптической омбилики.

33. ★ Составьте таблицу всех возможных типов расщепления катастрофы эллиптической омбилики, представьте графическую иллюстрацию каждого типа.

2. Гиперболическая омбилика

34. Запишите росток катастрофы гиперболической омбилики. Запишите стандартную деформацию гиперболической омбилики.

35. Запишите росток катастрофы гиперболической омбилики. Нарисуйте карту линий равного уровня для функции двух переменных, определяющей росток катастрофы гиперболической омбилики.

36. ★ Составьте таблицу всех возможных типов расщепления катастрофы гиперболической омбилики, представьте графическую иллюстрацию каждого типа.

3. Параболическая омбилика

37. Запишите росток катастрофы параболической омбилики. Запишите стандартную деформацию параболической омбилики.

38. Запишите росток катастрофы параболической омбилики. Нарисуйте карту линий равного уровня для функции двух переменных, определяющей росток катастрофы параболической омбилики.

39. ★ Составьте таблицу всех возможных типов расщепления катастрофы параболической омбилики, представьте графическую иллюстрацию каждого типа.

11.3.8. Машины катастроф

40. Опишите модель параболической гравитационной машины (ПГМ): физическая модель, математическая модель, пространство состояния, пространство управления, стандартная функция деформации. Найдите точки катастрофы. Опишите изменение состояния ПГМ при перемещении точки по характерным кривым пространства управления.

41. Опишите модель гиперболической гравитационной машины (ГГМ): физическая модель, математическая модель, пространство состояния, пространство управления, стандартная функция деформации. Найдите точки катастрофы. Опишите изменение состояния ГГМ при перемещении точки по характерным кривым пространства управления.

42. Опишите модель эллиптической гравитационной машины (ЭГМ): физическая модель, математическая модель, пространство состояния, пространство управления, стандартная функция деформации. Найдите точки катастрофы. Опишите изменение состояния ЭГМ при перемещении точки по характерным кривым пространства управления.

43. Опишите модель машины Зимана (МЗ): физическая модель, математическая модель, пространство состояния, пространство управления, стандартная функция деформации. Найдите точки катастрофы. Опишите изменение состояния МЗ при перемещении точки по характерным кривым пространства управления.

11.3.9. Лемма Морса 1. Определения и формулировки

44. Сформулируйте определение критической точки дифференцируемого отображения.

45. Сформулируйте определение диффеоморфизма.

46. Сформулируйте лемму Морса для дифференцируемого отображения.

47. Сформулируйте лемму Морса для функции одной переменной.

48. Сформулируйте лемму Морса для функции нескольких переменных.

2. Теоремы с доказательством

49. Сформулируйте и докажите теорему о лемме Морса для дифференцируемого отображения.

50. Сформулируйте и докажите теорему о лемме Морса для функции одной переменной.

51. Сформулируйте и докажите теорему о лемме Морса для функции нескольких переменных.

11.3.10. Лемма расщепления

52. Сформулируйте лемму расщепления для гладкого отображения.

53. Сформулируйте определение семейства отображений.

54. Сформулируйте определение эквивалентных семейств отображений.

55. Сформулируйте определение структурной устойчивости отображения.

56. Сформулируйте определение структурной устойчивости семейства отображений.

57. ★ Сформулируйте лемму Морса для семейства отображений.

58. ★ Сформулируйте лемму расщепления для семейства отображений.

11.3.11. Отображения, многообразия и трансверсальность-1

59. Сформулируйте определение многообразия.

60. Сформулируйте определение трансверсального пересечения подпространств.

61. Сформулируйте определение трансверсального пересечения афинных пространств.

62. Сформулируйте определение трансверсального пересечения многообразий.

63. Сформулируйте определение трансверсального отображения.

64. ★ Сформулируйте определение трансверсального семейства отображений.

65. ★ Сформулируйте определение коразмерности.

11.3.12. Отображения, многообразия и трансверсальность-2

66. Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии трансверсального пересечения подпространств.

67. Найдите необходимые и достаточные условия трансверсального пересечения подпространств $\mathcal{M} : ax + by + cz = 0, a^2 + b^2 + c^2 > 0$ и $\mathcal{N} : px + qy + rz = 0, p^2 + q^2 + r^2 > 0$ в $\mathbb{R}^3 : \{(x, y, z)\}$.

68. Найдите необходимые и достаточные условия трансверсального пересечения подпространств $\mathcal{M} : a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0, \sum_{j=1}^4 a_j^2 > 0$ и $\mathcal{N} : b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0, \sum_{j=1}^4 b_j^2 > 0$ в $\mathbb{R}^4 : \{(x_1, \dots, x_4)\}$.

69. Найдите необходимые и достаточные условия трансверсального пересечения подпространств $\mathcal{M} : \{x = ta, y = tb, z = tc, t \in \mathbb{R}\}, a^2 + b^2 + c^2 > 0$ и $\mathcal{N} : px + qy + rz = 0, p^2 + q^2 + r^2 > 0$ в $\mathbb{R}^3 : \{(x, y, z)\}$.

70. Найдите необходимые и достаточные условия трансверсального пересечения подпространств $\mathcal{M} : \{x = ta, y = tb, z = tc, t \in \mathbb{R}\}, a^2 + b^2 + c^2 > 0$ и $\mathcal{N} : \{x = sp, y = sq, z = sr, s \in \mathbb{R}\}, p^2 + q^2 + r^2 > 0$ в $\mathbb{R}^3 : \{(x, y, z)\}$.

71. Найдите необходимые и достаточные условия трансверсального пересечения подпространств $\mathcal{M} : \sum_{j=1}^n a_j x_j = 0, \sum_{j=1}^n a_j^2 > 0$ и $\mathcal{N} : \sum_{j=1}^n b_j x_j = 0, \sum_{j=1}^n b_j^2 > 0$ в $\mathbb{R}^n : \{(x_1, \dots, x_n)\}$, где $n \geq 3$.

72. Найдите необходимые и достаточные условия трансверсального пересечения подпространств $\mathcal{M} : x_j = ta_j, t \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^n a_j^2 > 0$ и $\mathcal{N} : x_j = sb_j, s \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^n b_j^2 > 0$ в $\mathbb{R}^n : \{(x_1, \dots, x_n)\}$, где $n \geq 2$.

73. Найдите необходимые и достаточные условия трансверсального пересечения подпространств $\mathcal{M} : \sum_{j=1}^n a_j x_j = 0, \sum_{j=1}^n a_j^2 > 0$ и $\mathcal{N} : x_j = sb_j, s \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^n b_j^2 > 0$ в $\mathbb{R}^n : \{(x_1, \dots, x_n)\}$, где $n \geq 4$.

11.3.13. Отображения, многообразия и трансверсальность-3

74. Найдите необходимые и достаточные условия трансверсального пересечения многообразий $\mathcal{M} : 2y = x^2 + p$ и $\mathcal{N} : 2x = y^2 + p$ в $\mathbb{R}^2 : \{(x, y)\}$.

75. Найдите необходимые и достаточные условия трансверсального пересечения многообразий $\mathcal{M} : z = p$ и $\mathcal{N} : z = x^2 + y^2$ в $\mathbb{R}^3 : \{(x, y, z)\}$.

76. Найдите необходимые и достаточные условия трансверсального пересечения многообразий $\mathcal{M} : z = x^2 + py^2$ и $\mathcal{N} : z = qx^2 + y^2$ в $\mathbb{R}^3 : \{(x, y, z)\}$.

77. Найдите необходимые и достаточные условия трансверсального пересечения многообразий $\mathcal{M} : z = x^2 + p$ и $\mathcal{N} : z = qy^2$ в $\mathbb{R}^3 : \{(x, y, z)\}$.

78. Найдите необходимые и достаточные условия трансверсального пересечения многообразий $\mathcal{M} : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и $\mathcal{N} : x^2 + y^2 = r^2, r > 0$ в $\mathbb{R}^3 : \{(x, y, z)\}$.

79. Найдите необходимые и достаточные условия трансверсального пересечения многообразий $\mathcal{M} : x^2 + z^2 = 1$ и $\mathcal{N} : x^2 + y^2 = r^2, r > 0$ в $\mathbb{R}^3 : \{(x, y, z)\}$.

80. Найдите необходимые и достаточные условия трансверсального пересечения многообразий $\mathcal{M} : z = 0$ и $\mathcal{N} : z = x^2 + py$ в \mathbb{R}^3 .

81. Найдите необходимые и достаточные условия трансверсального пересечения многообразий $\mathcal{M} : z = 0$ и $\mathcal{N} : z = px^2 + y$ в $\mathbb{R}^3 : \{(x, y, z)\}$.

11.3.14. Классификационная теорема Тома

82. Однопараметрические семейства отображений.

83. Двухпараметрические семейства отображений.

84. ★ Семейства отображений высших порядков.

85. Классификационная теорема Тома.

11.3.15. Модели катастроф

86. Опишите модель оптической катастрофы: физическая модель, математическая модель, пространство состояния, пространство управления, стандартная функция деформации. Найдите точки катастрофы. Опишите изменение состояния траектории светового луча при перемещении точки управления по характерным кривым пространства управления.

87. ★ Опишите модель геодезической катастрофы: физическая модель, математическая модель, пространство состояния, пространство управления, стандартная функция деформации. Найдите точки катастрофы. Опишите изменение состояния геодезической линии при перемещении точки управления по характерным кривым пространства управления.

88. ★ Опишите модель катастрофы выпуклой оболочки во внешнем поле давления: физическая модель, математическая модель, пространство состояния, пространство управления, стандартная функция деформации. Найдите точки катастрофы. Опишите изменение состояния выпуклой оболочки при перемещении точки управления по характерным кривым пространства управления.

11.4. Список контрольных вопросов:

1. Машины катастроф.
2. Экстремальные задачи для одной функции одной переменной с параметром. Экстремальные задачи для одной функции нескольких переменных с параметром. Экстремальные задачи для одной функции нескольких переменных с несколькими параметрами. Теоремы о зависимости решения экстремальной задачи от параметра.
3. Неявные функции, определяемые системой уравнений. Теоремы разрешимости, теоремы гладкости. Теоремы о зависимости решения системы нелинейных уравнений от параметров.
4. Теоремы о необходимых и достаточных условиях условного экстремума. Теоремы о зависимости решения задачи об условном экстремуме от параметров.
5. Линейные пространства, линейные преобразования, матрицы. Квадратичные формы. Кубические формы. Формы старших порядков. Ряд Тейлора. Струи.
6. Критические точки. Диффеоморфизм. Лемма Морса. Применение леммы Морса для функции одной переменной. Применение леммы Морса для функции нескольких переменных.

-
7. Лемма расщепления. Семейства отображений. Эквивалентные семейства. Структурная устойчивость семейств. Лемма Морса и лемма расщепления для семейств.
 8. Многообразия, трансверсальность и устойчивость. Отображения, трансверсальность и устойчивость. Коразмерность.
 9. Однопараметрические семейства. Двухпараметрические семейства. Семейства высших порядков. Классификационная теорема Тома.
 10. Складки. Сборки.
 11. Ласточкин хвост.
 12. Бабочка.
 13. Эллиптическая, гиперболическая, параболическая омбилика.
 14. Линейчатые поверхности.
 15. Задача о расположении натянутой нити на гладкой поверхности. Геодезические линии.
 16. Устойчивость и опрокидывание транспортных средств. Задачи о равновесии и опрокидывании качалок.
-
17. Задачи о равновесии плавающих объектов. Равновесие судна. Геометрия кривой центров плавающего тела сложной формы. Прямоугольное, эллиптическое судно. Статическая остойчивость судов. Динамическая остойчивость судов.
 18. Ламинарные и вихревые течения. Функция тока. Растягивание течения. Устойчивое и неустойчивое обтекание.
 19. Волны в оптике. Каустики. Радуга. Мираж. Вариационные принципы.
 20. Звуковые волны в нелинейной среде. Световые волны в нелинейной среде. Ударные волны, каустики ударных волн. Разрушение препятствий ударной волной. Волны в разрушающихся средах. Большие волны на воде, цунами. Фокусировка, рассеяние.
 21. Эйлеровы стержни. Устойчивость упругого стержня. Пружины, устойчивость и выпячивание. Устойчивость упругой пластины. Устойчивость упругой оболочки. Гравитационно-арочные плотины. Устойчивость центрифуги.
 22. Квазиволны в экологии. Бистабильные и тристабильные системы. Одномерные, двумерные биосистемы. Биосистемы с сосредоточенными параметрами.
 23. Катастрофы клеточного уровня. Формирование многоклеточного организма. Рак.
 24. Восприятие формы. Распознавание лица, узнавание.
 25. Транспортные задачи оптимизации. Экстремальные задачи логистики.

11.5. Итоговая аттестация

зачет или экзамен.

11.6. Перечень вопросов к экзамену

1. Машины катастроф.
 2. Экстремальные задачи для одной функции одной переменной с параметром. Экстремальные задачи для одной функции нескольких переменных с параметром. Экстремальные задачи для одной функции нескольких переменных с несколькими параметрами. Теоремы о зависимости решения экстремальной задачи от параметра.
 3. Неявные функции, определяемые системой уравнений. Теоремы разрешимости, теоремы гладкости. Теоремы о зависимости решения системы нелинейных уравнений от параметров.
 4. Теоремы о необходимых и достаточных условиях условного экстремума. Теоремы о зависимости решения задачи об условном экстремуме от параметров.
 5. Линейные пространства, линейные преобразования, матрицы. Квадратичные формы. Кубические формы. Формы старших порядков. Ряд Тейлора. Струи.
 6. Критические точки. Диффеоморфизм. Лемма Морса. Применение леммы Морса для функции одной переменной. Применение леммы Морса для функции нескольких переменных.
 7. Лемма расщепления. Семейства отображений. Эквивалентные семейства. Структурная устойчивость семейств. Лемма Морса и лемма расщепления для семейств.
 8. Многообразия, трансверсальность и устойчивость. Отображения, трансверсальность и устойчивость. Коразмерность.
 9. Однопараметрические семейства. Двухпараметрические семейства. Семейства высших порядков. Классификационная теорема Тома.
 10. Складки. Сборки.
 11. Ласточкин хвост.
 12. Бабочка.
 13. Эллиптическая, гиперболическая, параболическая омбилика.
 14. Линейчатые поверхности.
 15. Задача о расположении натянутой нити на гладкой поверхности. Геодезические линии.
 16. Устойчивость и опрокидывание транспортных средств. Задачи о равновесии и опрокидывании качалок.
-

17. Задачи о равновесии плавающих объектов. Равновесие судна. Геометрия кривой центров плавающего тела сложной формы. Прямоугольное, эллиптическое судно. Статическая остойчивость судов. Динамическая остойчивость судов.
18. Ламинарные и вихревые течения. Функция тока. Растягивание течения. Устойчивое и неустойчивое обтекание.
19. Волны в оптике. Каустики. Радуга. Мираж. Вариационные принципы.
20. Звуковые волны в нелинейной среде. Световые волны в нелинейной среде. Ударные волны, каустики ударных волн. Разрушение препятствий ударной волной. Волны в разрушающихся средах. Большие волны на воде, цунами. Фокусировка, рассеяние.
21. Эйлеровы стержни. Устойчивость упругого стержня. Пружины, устойчивость и выпячивание. Устойчивость упругой пластины. Устойчивость упругой оболочки. Гравитационно-арочные плотины. Устойчивость центрифуги.
22. Квазиволны в экологии. Бистабильные и тристабильные системы. Одномерные, двумерные биосистемы. Биосистемы с сосредоточенными параметрами.
23. Катастрофы клеточного уровня. Формирование многоклеточного организма. Рак.
24. Восприятие формы. Распознавание лица, узнавание.
25. Транспортные задачи оптимизации. Экстремальные задачи логистики.

12. Учебно-методическое обеспечение дисциплины

Основная литература

Список литературы

- [1] Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. Мир, 1979.
- [2] Арнольд В.И. Теория катастроф. Наука, 1990.
- [3] Томпсон Дж. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. Мир, 1985.
- [4] Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Т. 1 и 2. Мир, 1989.
- [5] Арнольд В.И. Первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эвольвент до квазикристаллов. Наука 1989.

Периодическая литература —

Интернет-ресурсы abkov.ru

Методические указания к лабораторным занятиям —abkov.ru

Методические указания к практическим занятиям —abkov.ru

13. Материально-техническое обеспечение

В соответствии с требованиями п.5.3. образовательного стандарта МГУ по направлению подготовки “Физика”.

Курс может быть прочитан в аудитории при наличии: работающих электрических розеток, компьютера, проектора, экрана, учебной доски. Лекции читаются с использованием современных инновационных мультимедийных возможностей и проекционного оборудования.