

ЛЕКЦИИ 8—9

Теорема Хилле—Иосиды

§ 3. Определение и элементарные свойства максимальных монотонных операторов

Всюду на протяжении этих двух лекций символом H обозначено гильбертово пространство со скалярным произведением (\cdot, \cdot) и нормой $\|\cdot\|$.

Определение 1. Линейный оператор $A : H \rightarrow H$ с областью определения $\mathcal{D}(A)$ называется *монотонным*, если

$$\forall v \in \mathcal{D}(A) \quad (Av, v) \geq 0.$$

Он называется *максимальным монотонным*, если, к тому же, $R(E + A) = H$, иными словами,

$$\forall f \in H \quad \exists u \in \mathcal{D}(A) : u + Au = f.$$

Лемма 1. Пусть A — максимальный монотонный оператор. Тогда:

- 1) $\mathcal{D}(A)$ плотно в H ;
- 2) A — замкнутый линейный оператор;
- 3) для любого $\lambda > 0$ оператор $E + \lambda A$ биективен при отображении из $\mathcal{D}(A)$ на H , причём оператор $(E + \lambda A)^{-1}$ ограничен и $\|(E + \lambda A)^{-1}\| \leq 1$.

Доказательство.

1) В силу утверждения задачи 1 достаточно для любого $f \in H$ показать, что если $f \perp \mathcal{D}(A)$, то $f = \theta$. Итак, фиксируем $f \in H$. Поскольку оператор A — максимальный монотонный, то существует элемент $v_0 \in \mathcal{D}(A)$ такой, что

$$(E + A)v_0 = f.$$

Имеем тогда

$$0 = (f, v_0) = (v_0, v_0) + (Av_0, v_0).$$

Но в сумме $(v_0, v_0) + (Av_0, v_0)$ оба слагаемых неотрицательны. Следовательно, они оба равны нулю. В частности, $(v_0, v_0) = 0$, следовательно, $v_0 = \theta$ и $f = (E + A)v_0 = \theta$.

2) Прежде всего заметим, что для любого $f \in H$ уравнение

$$u + Au = f$$

имеет не более одного решения (но и не менее — в силу определения максимального монотонного оператора). Поскольку оператор A линейный, достаточно доказать это утверждение для $f = \theta$.

Имеем

$$u + Au = \theta \Rightarrow (u, u) + (Au, u) = (\theta, u) = 0,$$

откуда аналогично предыдущему случаю получаем, что $u = \theta$. Следовательно, определён (на всём H) оператор $(E + A)^{-1}$. Покажем, что его норма не превосходит 1. Имеем

$$\begin{aligned} u + Au = f &\Rightarrow (u, u) + (Au, u) = (f, u) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{(Au, u) \geq 0\} \Rightarrow \|u\|^2 \leq (f, u) \leq \|f\| \|u\| \Rightarrow \|u\| \leq \|f\|. \end{aligned}$$

Докажем теперь, что A — замкнутый оператор. Заметим, что $\mathcal{D}(E + A) = \mathcal{D}(A)$ (это очевидно из определения суммы операторов, см. лекцию 7). Пусть $\{u_n\} \subset \mathcal{D}(A)$, $u_n \rightarrow u$, $Au_n \rightarrow f$. Требуется доказать, что $u \in \mathcal{D}(A)$ и $Au = f$. Имеем

$$(E + A)u_n = u_n + Au_n \rightarrow u + f. \quad (1)$$

С другой стороны (см. определение обратного оператора),

$$u_n = (E + A)^{-1}((E + A)u_n) = (E + A)^{-1}(u_n + Au_n). \quad (2)$$

Используя (1) и ограниченность оператора $(E + A)^{-1}$, можно перейти к пределу в (2) и получить:

$$u = (E + A)^{-1}(u + f). \quad (3)$$

Пользуясь п. 1), 3) определения обратного оператора, имеем:

$$(E + A)^{-1}(u + f) \in \mathcal{D}(E + A) \quad \text{и} \quad (E + A)((E + A)^{-1}(u + f)) = u + f.$$

Поэтому из (3) следует, что $u \in \mathcal{D}(E + A)$ (а следовательно, и $\mathcal{D}(A)$) и что

$$(E + A)u = u + f,$$

или

$$u + Au = u + f,$$

т. е. $Au = f$, что и требовалось. Утверждение 2) доказано.

3) Докажем сначала, что если

$$R(E + \lambda_0 A) = H \quad \text{для некоторого } \lambda_0 > 0, \quad (4)$$

то $R(E + \lambda A) = H$ для любого $\lambda > \frac{\lambda_0}{2}$.

Аналогично случаю 2) можно доказать, что при выполнении (4) уравнение

$$u + \lambda_0 Au = f$$

имеет *единственное* решение для любого $f \in H$ и что обратный оператор $(E + \lambda_0 A)^{-1}$ (определённый на H) ограничен и $\|(E + \lambda_0 A)^{-1}\| \leq 1$. Теперь рассмотрим уравнение

$$u + \lambda Au = f, \quad \lambda > 0. \quad (5)$$

Проведём эквивалентные преобразования:

$$\begin{aligned}
u + \lambda Au &= f \\
&\Downarrow \\
\frac{\lambda_0}{\lambda} u + \lambda_0 Au &= \frac{\lambda_0}{\lambda} f \\
&\Downarrow \\
u + \lambda_0 Au &= \frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) u.
\end{aligned}$$

Поскольку оператор $E + \lambda_0 A$ обратим, последнее уравнение эквивалентно уравнению

$$u = (E + \lambda_0 A)^{-1} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) u \right). \quad (6)$$

Если $\left|1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right| < 1$ (т. е. $\lambda > \lambda_0/2$), то, учитывая, что $\|(E + \lambda_0 A)^{-1}\| \leq 1$, можно применить принцип сжимающих отображений и доказать однозначную разрешимость уравнения (6), а с ним и (5), при любом $f \in H$.

Теперь утверждение пункта 3) можно получить индуктивно, отправляясь от ранее доказанного утверждения для $\lambda = 1$ и получая его сначала для всех $\lambda > \frac{1}{2}$ и, тем самым, для всех $\lambda \geq \frac{2}{3}$, затем для всех $\lambda \geq \frac{4}{9}$ и т. д., учитывая, что при всех $\lambda > 0$ верна оценка $\|(E + \lambda A)^{-1}\| \leq 1$.

▲

Замечание 1. Если A — максимальный монотонный оператор, при любом $\lambda > 0$ оператор λA обладает тем же свойством. (Его максимаальность следует из п. 3 леммы 1.) Но для суммы максимальных монотонных операторов это уже, вообще говоря, неверно.

Введём теперь операторы, которые позволят в некотором смысле аппроксимировать неограниченный оператор ограниченными.

Определение 2. Пусть A — максимальный монотонный оператор. Для всех $\lambda > 0$ положим

$$J_\lambda = (E + \lambda A)^{-1}, \quad A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(E - J_\lambda). \quad (7)$$

Оператор J_λ называется *резольventой* оператора A , A_λ — *регуляризацией по Иосиде* оператора A .

Замечание 2. Нам более привычно называть резольventой оператор $(A - \lambda E)^{-1}$, но примиримся с этим несоответствием терминологии, потому что нам нужен будет именно оператор $(E + \lambda A)^{-1}$.

Лемма 2. Пусть A — максимальный монотонный оператор. Тогда (обозначения см. в (7))

- (a₁) $\forall v \in H, \forall \lambda > 0 \quad A_\lambda v = A(J_\lambda v),$
- (a₂) $\forall v \in \mathcal{D}(A), \forall \lambda > 0 \quad A_\lambda v = J_\lambda(Av),$
- (b) $\forall v \in \mathcal{D}(A), \forall \lambda > 0 \quad \|A_\lambda v\| \leq \|Av\|,$
- (c) $\forall v \in H \quad \lim_{\lambda \rightarrow +0} J_\lambda v = v,$
- (d) $\forall v \in \mathcal{D}(A) \quad \lim_{\lambda \rightarrow +0} A_\lambda v = Av,$
- (e) $\forall v \in H, \forall \lambda > 0 \quad (A_\lambda v, v) \geq 0,$
- (f) $\forall v \in H, \forall \lambda > 0 \quad \|A_\lambda v\| \leq \frac{1}{\lambda} \|v\|.$

Доказательство.

(a₁) Имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\lambda}(E - J_\lambda)v &= A(J_\lambda v) \\
 \uparrow \\
 (E - J_\lambda)v &= \lambda A(J_\lambda v) \\
 \uparrow \\
 v - J_\lambda v &= \lambda A(J_\lambda v) \\
 \uparrow \\
 v &= J_\lambda v + \lambda A(J_\lambda v) \\
 \uparrow \\
 v &= (E + \lambda A)(J_\lambda v) \\
 \uparrow \\
 \{J_\lambda &= (E + \lambda A)^{-1}\} \\
 \uparrow \\
 v &= (E + \lambda A)((E + \lambda A)^{-1}v) \quad \forall v \in H.
 \end{aligned}$$

Нижняя строчка следует из определения обратного оператора с учётом того факта, что $R(E + \lambda A) = H$ (см. п. 3) леммы 1).

(a₂) Имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\lambda}(E - J_\lambda)v &= J_\lambda(Av) \\
 \uparrow \\
 (E - J_\lambda)v &= \lambda J_\lambda(Av) \\
 \uparrow \\
 v - J_\lambda v &= \lambda J_\lambda(Av) \\
 \uparrow \\
 v &= J_\lambda v + \lambda J_\lambda(Av) \\
 \uparrow \\
 v &= J_\lambda((E + \lambda A)v) \\
 \uparrow \\
 \{J_\lambda &= (E + \lambda A)^{-1}\} \\
 \uparrow \\
 v &= (E + \lambda A)^{-1}((E + \lambda A)v) \quad \forall v \in \mathcal{D}(A).
 \end{aligned}$$

Поскольку при $\lambda > 0$ верно $\mathcal{D}((E + \lambda A)) = \mathcal{D}(A)$, последнее есть в точности п. 2) определения обратного оператора.

(b) Следует из п. (a₂) с учётом $\|J_\lambda\| \leq 1$. (Можно ли вывести из (a₁)?)

(c) Предположим сначала, что $v \in \mathcal{D}(A)$. Тогда

$$\|v - J_\lambda v\| = \{\text{определение } A_\lambda\} = \|\lambda A_\lambda v\| = \lambda \|A_\lambda v\| \leq \{(b)\} \leq \lambda \|Av\|,$$

следовательно, $\lim_{\lambda \rightarrow +0} J_\lambda v = v$.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть фиксирован произвольный элемент $v \in H$. Требуется доказать:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \lambda_0(\varepsilon) > 0 \forall \lambda \in (0, \lambda_0) \|J_\lambda v - v\| < \varepsilon. \quad (8)$$

Пусть задано некоторое $\varepsilon > 0$. Чтобы построить $\lambda_0(\varepsilon)$, удовлетворяющее условию (8), прежде всего найдём и зафиксируем $v_1 \in \mathcal{D}(A)$ такое, что $\|v - v_1\| < \frac{\varepsilon}{3}$. (Такое v_1 существует, поскольку, согласно п. 1) леммы 1, $\mathcal{D}(A)$ плотно в H .) Имеем тогда

$$\begin{aligned} \|J_\lambda v - v\| &\leq \|J_\lambda v - J_\lambda v_1\| + \|J_\lambda v_1 - v_1\| + \|v_1 - v\| \leq \{\|J_\lambda\| \leq 1\} \leq \\ &\leq 2\|v_1 - v\| + \|J_\lambda v_1 - v_1\| < \frac{2}{3}\varepsilon + \|J_\lambda v_1 - v_1\|. \end{aligned} \quad (9)$$

Поскольку $J_\lambda \rightarrow v_1$ при $\lambda \rightarrow +0$ по ранее доказанному, существует такое $\lambda_0(\varepsilon)$, что для любого $\lambda \in (0, \lambda_0)$ верно $\|J_\lambda v_1 - v_1\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда при всех таких λ из (9) получаем

$$\|J_\lambda v - v\| < \varepsilon,$$

что и требовалось. Таким образом, необходимое $\lambda_0(\varepsilon)$ в (8) построено.

(d) Это непосредственно следует из (c) и (a₂) с учётом ограниченности оператора J_λ :

$$A_\lambda v = J_\lambda(Av) \rightarrow Av, \quad \lambda \rightarrow +0.$$

(e, f) Имеем

$$\begin{aligned} (A_\lambda v, v) &= (A_\lambda v, v - J_\lambda v) + (A_\lambda v, J_\lambda v) = \{\text{определение } A_\lambda, (a_1) \text{ и ограниченность } A_\lambda\} = \\ &= \lambda \|A_\lambda v\|^2 + (A(J_\lambda v), J_\lambda v) \geq \{\text{монотонность } A\} \geq \lambda \|A_\lambda v\|^2. \end{aligned}$$

Итак, мы получили оценку $(A_\lambda v, v) \geq \lambda \|A_\lambda v\|^2$. Во-первых, из неё следует, что $(A_\lambda v, v) \geq 0$. Во-вторых, можно воспользоваться неравенством Коши–Буняковского и получить

$$\|A_\lambda v\| \cdot \|v\| \geq (A_\lambda v, v) \geq \lambda \|A_\lambda v\|^2,$$

или, после деления на $\lambda \|A_\lambda v\|$,

$$\|A_\lambda v\| \leq \frac{1}{\lambda} \|v\|.$$

▲

Замечание 3. Это утверждение показывает, что семейство $\{A_\lambda\}_{\lambda>0}$ *ограниченных* операторов приближает (в сильном смысле, см. п. (d)) *неограниченный* оператор A . Конечно, вообще говоря,

- 1) $\|A_\lambda\|$ неограниченно возрастает при $\lambda \rightarrow +0$,
- 2) приближение $A_\lambda v \rightarrow Av$ не является равномерным по v .

§ 4. Решение эволюционной задачи. Существование и единственность

Напомним простейшую теорему Коши—Пикара из главы I (лекция 2).

Теорема 1. Пусть B — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Пусть функция $\Phi : B \rightarrow B$ определена на всём пространстве B и липшиц-непрерывна. Тогда задача Коши (при любых $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in B$)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = \Phi(x), & t \geq t_0; \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (10)$$

глобально и однозначно разрешима.

Как известно, она широко применяется в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, но её применение для уравнений в частных производных ограничено особыми случаями. (Некоторые характерные примеры были рассмотрены в главе I.) Следующая теорема является очень мощным инструментом в теории эволюционных уравнений в частных производных. Но прежде чем её сформулировать, нам понадобится ещё раз обсудить норму на пространстве $X \times Y$, введённую в прошлой лекции:

$$\|(x, y)\| = \sqrt{\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2}. \quad (11)$$

Было отмечено, что график $G(T)$ замкнутого оператора T является замкнутым линейным многообразием в банаховом пространстве $X \times Y$, а следовательно, банаховым пространством. Однако норму (11) можно использовать и по-другому, если положить

$$\|x\|_T = \|(x, Tx)\| \quad (12)$$

для всех $x \in \mathcal{D}(T)$. Нетрудно видеть, что функция (12) действительно является нормой на линейном пространстве $\mathcal{D}(T)$ и, более того, делает последнее банаховым пространством (в случае *замкнутого*) оператора T . Действительно, $\mathcal{D}(T)$ и $G(T)$ изоморфны как линейные пространства (см. задачу 2), поэтому на них можно ввести одну и ту же норму, и если одно из этих пространств будет полно по введённой норме, то и другое тоже. (В частном случае $B = \mathbb{R}$ это выглядело бы так: например, для $Tx = 5x$ получаем $\|x\|_T = \|(x, 5x)\| = \sqrt{26}|x|$.) Условимся далее под $\mathcal{D}(A)$ понимать не просто линейное многообразие в H , но банахово (поскольку оператор A является максимальным монотонным, а следовательно, замкнутым) пространство относительно нормы $\|x\|_A$.

Теорема 2. (Хилле, Йосида.) Пусть A — максимальный монотонный оператор. Тогда для любого $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ существует единственная функция класса

$$u \in C^1([0, +\infty); H),$$

удовлетворяющая абстрактной *линейной* задаче Коши

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = \theta, & t \in [0, +\infty), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (13)$$

Эта функция u обладает также следующими свойствами:

$$u \in C([0, +\infty); \mathcal{D}(A))$$

и

$$\forall t \geq 0 \quad \|u(t)\| \leq \|u_0\|, \quad \|u'(t)\| = \|Au(t)\| \leq \|Au_0\|.$$

Замечание 4. Основная ценность этой теоремы в том, что она позволяет (в предположении монотонности оператора A , которую легко проверить на практике) свести исследование эволюционной задачи (13) к исследованию «стационарного уравнения»

$$u + Au = f: \tag{14}$$

если уравнение (14) имеет решение $u \in H$ при любых $f \in H$ (где в роли H может выступать, например, L^2), то оператор A является максимальным монотонным и к нему применима рассматриваемая теория.

Доказательство. Доказательство проведём в 6 шагов.

Шаг 1. Единственность. В силу линейности задачи (13) достаточно доказать единственность в случае $u_0 = \theta$. Пользуясь гладкостью функции $u(t)$, имеем тогда

$$\frac{d}{dt} \frac{\|u(t)\|^2}{2} = \{\text{задача 3 из лекции 5}\} = (u'(t), u(t)) = -(Au(t), u(t)) \leq 0.$$

Но $\|u(0)\| = 0$. Значит, $\|u(t)\| \equiv 0$ и $u(t) \equiv \theta$ на всём промежутке существования.

Шаг 2. Ключевая идея доказательства разрешимости задачи (13) — замена её семейством задач с ограниченными операторами A_λ и последующий предельный переход при $\lambda \rightarrow 0$. Итак, рассмотрим семейство задач

$$\begin{cases} \frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = \theta, & t \in [0, +\infty), \\ u_\lambda(0) = u_0. \end{cases} \tag{15}$$

Поскольку ограниченный линейный оператор является глобально (на всём H) липшиц-непрерывным, разрешимость задач (15) при всех $\lambda > 0$ следует из теоремы 1.

Покажем теперь, что при всех $t \geq 0$, $\lambda > 0$ верны оценки

$$\|u_\lambda(t)\| \leq \|u_0\|, \tag{16}$$

$$\left\| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right\| = \|A_\lambda u_\lambda(t)\| \leq \|A_\lambda u_0\| \leq \|Au_0\|. \tag{17}$$

Эти оценки вытекают из того факта, что $\|A_\lambda u_0\| \leq \|Au_0\|$ (см. лемму 2, п. (b)), и из следующей леммы.

Лемма 3. Пусть $w \in C^1([0, +\infty); H)$ — (непрерывно дифференцируемое) решение уравнения

$$\frac{dw}{dt} + A_\lambda w = \theta, \quad t \in [0, +\infty). \tag{18}$$

Тогда функции $t \mapsto \|w(t)\|$ и $t \mapsto \left\| \frac{dw}{dt} \right\| = \|A_\lambda w(t)\|$ являются невозрастающими на $[0, +\infty)$.

Доказательство. Действуем аналогично доказательству единственности на шаге 1. Домножив скалярно на w уравнение (18), получим:

$$\left(\frac{dw}{dt}, w \right) + (A_\lambda w, w) = 0. \quad (19)$$

Поскольку оператор A_λ является монотонным (см. лемму 2, п. (е)), из (19) имеем оценку

$$\frac{d}{dt} \|w\|^2 \leq 0,$$

откуда и следует первое утверждение леммы. Чтобы доказать второе утверждение, заметим, что функция $\frac{dw}{dt}$ тоже удовлетворяет уравнению (18). В самом деле, решение задачи (18) непрерывно дифференцируемо по t . Но тогда (см. лекцию 1 и задачи к ней) функция $t \mapsto A_\lambda w(t)$ обладает тем же свойством и

$$\frac{d}{dt} (A_\lambda w(t)) = A_\lambda \frac{dw}{dt} (t). \quad (20)$$

С другой стороны, в силу уравнения (18) имеем $\frac{dw}{dt} = -A_\lambda w$, следовательно, $\frac{dw}{dt} \in C^1([0, +\infty); H)$ и $w \in C^2([0, +\infty); H)$. (Продолжая такие рассуждения дальше, получим, что на самом деле $w \in C^\infty([0, +\infty); H)$.) Тогда уравнение (15) можно продифференцировать и с учётом (20) получить:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dw}{dt} \right) + A_\lambda \left(\frac{dw}{dt} \right) = \theta.$$

Осталось лишь сослаться на первое утверждение леммы с учётом равенства $\frac{dw}{dt}(0) = -A_\lambda w(0)$.

▲

Шаг 3. Докажем, что функции $u_\lambda(t)$ сходятся к некоторой функции (назовём её $u(t)$) при $\lambda \rightarrow +0$ локально равномерно по $t \geq 0$. При всех $\lambda, \mu > 0$ и $t \geq 0$ имеем

$$\frac{du_\lambda}{dt} - \frac{du_\mu}{dt} + A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu = \theta$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\lambda - u_\mu\|^2 + (A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t), u_\lambda(t) - u_\mu(t)) = 0. \quad (21)$$

Опуская для краткости аргумент t , можем записать (с учётом определения A_λ и п. (а₁) леммы 2):

$$\begin{aligned} (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) &= (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - J_\lambda u_\lambda + J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu + J_\mu u_\mu - u_\mu) = \\ &= (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) + (A(J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu), J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu) \geq (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu). \end{aligned} \quad (22)$$

Из (21) и (22) получаем:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\lambda - u_\mu\|^2 &\leq -(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) = \\
&= -\lambda \|A_\lambda u_\lambda\|^2 - \mu \|A_\mu u_\mu\|^2 + \mu (A_\lambda u_\lambda, A_\mu u_\mu) + \lambda (A_\mu u_\mu, A_\lambda u_\lambda) \leq \\
&\leq -\lambda \|A_\lambda u_\lambda\|^2 - \mu \|A_\mu u_\mu\|^2 + \mu \|A_\lambda u_\lambda\| \cdot \|A_\mu u_\mu\| + \lambda \|A_\mu u_\mu\| \cdot \|A_\lambda u_\lambda\| \leq \\
&\leq \left\{ ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \right\} \leq -\lambda \|A_\lambda u_\lambda\|^2 - \mu \|A_\mu u_\mu\|^2 + \frac{\mu + \lambda}{2} (\|A_\lambda u_\lambda\|^2 + \|A_\mu u_\mu\|^2) = \\
&= \frac{\mu - \lambda}{2} \|A_\lambda u_\lambda\|^2 + \frac{\lambda - \mu}{2} \|A_\mu u_\mu\|^2 = \frac{\mu - \lambda}{2} (\|A_\lambda u_\lambda\|^2 - \|A_\mu u_\mu\|^2) \leq \frac{\mu + \lambda}{2} (\|A_\lambda u_\lambda\|^2 + \|A_\mu u_\mu\|^2).
\end{aligned}$$

Итак, мы получили оценку

$$\frac{d}{dt} \|u_\lambda - u_\mu\|^2 \leq (\mu + \lambda) (\|A_\lambda u_\lambda\|^2 + \|A_\mu u_\mu\|^2),$$

из которой в силу ранее доказанных неравенств $\|A_\lambda u_\lambda\| \leq \|Au_0\|$ (см. шаг 2) следует, что

$$\frac{d}{dt} \|u_\lambda - u_\mu\|^2 \leq 2(\mu + \lambda) \|Au_0\|^2. \quad (23)$$

Учитывая, что $u_\lambda(0) = u_\mu(0) = u_0$, из (23) получаем

$$\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2 \leq 2(\mu + \lambda) \|Au_0\|^2 t,$$

или

$$\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\| \leq \sqrt{2(\mu + \lambda)t} \|Au_0\|. \quad (24)$$

Из последней оценки очевидным образом вытекает, что при каждом фиксированном $t \geq 0$ функция $u_\lambda(t)$ как функция аргумента λ удовлетворяет в точке $\lambda = 0$ условию Коши. Следовательно, при каждом $t \geq 0$ существует предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} u_\lambda(t) =: u(t). \quad (25)$$

Поэтому можно перейти в (24) к пределу при $\mu \rightarrow +0$ и получить оценку

$$\|u_\lambda(t) - u(t)\| \leq \sqrt{2\lambda t} \|Au_0\|,$$

из которой следует, что сходимость (25) является равномерной на каждом конечном промежутке $[0, T]$. Но тогда (см. задачу 5) функция $u(t)$ непрерывна: $u \in C([0, +\infty); H)$.

Шаг 4. Предположим пока, что $u_0 \in \mathcal{D}(A^2)$ (это предположение будет снято на последнем шаге). Докажем, что в этом случае функции $\frac{du_\lambda}{dt}$ сходятся при $\lambda \rightarrow +0$ к некоторому пределу, причём равномерно на каждом ограниченном промежутке изменения t . Положим $v_\lambda = \frac{du_\lambda}{dt}$, тогда (как показано на шаге 2) $\frac{dv_\lambda}{dt} + A_\lambda v_\lambda = \theta$. Подобно шагу 3 можем получить (см. задачу 4)

$$\frac{d}{dt} \|v_\lambda - v_\mu\|^2 \leq (\mu + \lambda) (\|A_\lambda v_\lambda\|^2 + \|A_\mu v_\mu\|^2). \quad (26)$$

Аналогично шагу 3 имеем

$$\|A_\lambda v_\lambda(t)\| \leq \|A_\lambda v_\lambda(0)\| = \|A_\lambda A_\lambda u_0\|, \quad (27)$$

$$\|A_\mu v_\mu(t)\| \leq \|A_\mu v_\mu(0)\| = \|A_\mu A_\mu u_0\|. \quad (28)$$

Поскольку $u_0, Au_0 \in \mathcal{D}(A)$, имеем

$$A_\lambda A_\lambda u_0 = J_\lambda A J_\lambda A u_0 = J_\lambda J_\lambda A A u_0 = J_\lambda^2 A^2 u_0,$$

откуда с учётом $\|J_\lambda\| \leq 1$ следует

$$\|A_\lambda A_\lambda u_0\| \leq \|A^2 u_0\|, \quad \|A_\mu A_\mu u_0\| \leq \|A^2 u_0\|. \quad (29)$$

Тогда из (26)–(29) имеем

$$\frac{d}{dt} \|v_\lambda - v_\mu\|^2 \leq 4(\lambda + \mu) \|A^2 u_0\|^2,$$

откуда

$$\|v_\lambda(t) - v_\mu(t)\|^2 \leq \|v_\lambda(0) - v_\mu(0)\|^2 + 4t(\lambda + \mu) \|A^2 u_0\|^2. \quad (30)$$

Поскольку $v_\lambda(0) = -A_\lambda u_0 \rightarrow -A u_0$ при $\lambda \rightarrow +0$ (см. п. (d) леммы 2), имеем

$$\|v_\lambda(0) - v_\mu(0)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } \lambda, \mu \rightarrow +0,$$

а следовательно, при $\lambda, \mu \rightarrow +0$

$$\|v_\lambda(t) - v_\mu(t)\|^2 \rightarrow 0,$$

причём оценка равномерна на любом ограниченном промежутке изменения t . Итак, $\frac{du_\lambda}{dt} \rightarrow v(t)$, причём равномерно по t на любом ограниченном подмножестве полуоси $t \geq 0$.

Итак, на шагах 3 и 4 мы показали, что в предположении $u_0 \in \mathcal{D}(A^2)$ для решений семейства задач (15) верно:

$$u_\lambda(t) \rightarrow u(t) \quad \text{при } \lambda \rightarrow +0, \quad (31)$$

$$\frac{du_\lambda}{dt} \rightarrow v(t) \quad \text{при } \lambda \rightarrow +0, \quad (32)$$

причём сходимость равномерна по t на каждом ограниченном промежутке $[0, T]$. Значит (см. задачу 6), $u \in C^1([0, +\infty); H)$ и $\frac{du}{dt} = v$.

Шаг 5. Докажем, что при $u_0 \in \mathcal{D}(A^2)$ функция $u(t)$ является решением исходной задачи (13). Для этого перепишем, пользуясь леммой 2 (п. (a₁)) уравнение (15) в виде

$$\frac{du_\lambda}{dt} + A(J_\lambda u_\lambda) = \theta. \quad (33)$$

Заметим, что $J_\lambda u_\lambda(t) \rightarrow u(t)$. В самом деле, имеем

$$\|J_\lambda u_\lambda(t) - u(t)\| \leq \|J_\lambda u_\lambda - J_\lambda u\| + \|J_\lambda u - u\| \leq \|u_\lambda - u\| + \|J_\lambda u - u\| \rightarrow 0,$$

где мы воспользовались оценкой $\|J_\lambda\| \leq 1$ и п. (с) леммы 2. В конце шага 4 мы выяснили, что $\frac{du_\lambda}{dt} \rightarrow \frac{du}{dt}$. Но тогда в силу (33) имеем $A(J_\lambda u_\lambda) = -\frac{du_\lambda}{dt} \rightarrow -\frac{du}{dt}$. Поскольку оператор A замкнут и $J_\lambda u_\lambda \rightarrow u$, отсюда следует, что при любом $t \geq 0$ верно: $u(t) \in \mathcal{D}(A)$, $-\frac{du}{dt} = Au$. Наконец, поскольку $u \in C^1([0, +\infty); H)$, отсюда следует, что $t \mapsto Au(t) \in C([0, +\infty); H)$, а следовательно, $u \in C([0, +\infty); \mathcal{D}(A))$. Наконец, оценки

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\|, \quad \left\| \frac{du}{dt} \right\| = \|Au\| \leq \|Au_0\|$$

вытекают из (16)–(17) с помощью предельного перехода (31)–(32).

Шаг 6. Осталось доказать теорему для случая $u_0 \in \mathcal{D}(A) \setminus \mathcal{D}(A^2)$. Для этого нам понадобится следующая

Лемма 4. Пусть $u_0 \in \mathcal{D}(A)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\bar{u}_0 \in \mathcal{D}(A^2)$ такое, что

$$\|u_0 - \bar{u}_0\| < \varepsilon, \quad \|Au_0 - A\bar{u}_0\| < \varepsilon. \quad (34)$$

Иными словами, $\mathcal{D}(A^2)$ плотно в $\mathcal{D}(A)$ не только в исходной норме пространства H , но и в норме графика!

Доказательство. Положим $\bar{u}_0 = J_\lambda u_0$, где $\lambda > 0$ будет выбрано ниже. Имеем

$$\bar{u}_0 \in \mathcal{D}(A), \quad u_0 \in \mathcal{D}(A), \quad \bar{u}_0 + \lambda A\bar{u}_0 = u_0.$$

Значит, $A\bar{u}_0 \in \mathcal{D}(A)$. С другой стороны, в силу леммы 2 имеем

$$J_\lambda u_0 \rightarrow u_0,$$

т. е. $\|\bar{u}_0 - u_0\| < \varepsilon$ при всех достаточно малых $\lambda > 0$, и

$$A_\lambda u_0 \rightarrow Au_0, \quad \lambda \rightarrow +0, \quad \text{или} \quad AJ_\lambda u_0 \rightarrow Au_0,$$

т. е. $\|A\bar{u}_0 - Au_0\| < \varepsilon$ при всех достаточно малых $\lambda > 0$. Значит, можно выбрать такое $\lambda > 0$, что выполнены одновременно оба условия (34). \blacktriangle

Вернёмся к доказательству теоремы. Если $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, то в силу леммы 4 можно построить последовательность $\{u_{0n}\}$ такую, что $u_{0n} \in \mathcal{D}(A^2)$, а также $u_{0n} \rightarrow u_0$ и $Au_{0n} \rightarrow Au_0$ при $n \rightarrow \infty$.

В силу результата шага 5 существуют функции $u_n(t)$ — решения задач

$$\begin{cases} \frac{du_n}{dt} + Au_n = \theta, \\ u_n(0) = u_{0n}, \end{cases} \quad (35)$$

причём для всех $n \in \mathbb{N}$ верно:

$$u_n(t) \in C^1([0, +\infty); H), \quad u_n(t) \in C([0, +\infty); \mathcal{D}(A)).$$

Заметим, что при всех $n, m \in \mathbb{N}$ разности функций $u_n(t)$ и $u_m(t)$ удовлетворяют задачам

$$\begin{cases} \frac{d(u_n - u_m)}{dt} + A(u_n - u_m) = \theta, \\ u_n(0) - u_m(0) = u_{0n} - u_{0m}, \end{cases} \quad (36)$$

а поэтому в силу последнего замечания шага 5 имеем при $n, m \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u_m(t)\| &\leq \|u_{0n} - u_{0m}\| \rightarrow 0, \\ \left\| \frac{du_n}{dt} - \frac{du_m}{dt} \right\| &\leq \|Au_{0n} - Au_{0m}\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $u_n(t) \rightarrow u(t) \in C([0, +\infty); H)$ и $u'_n(t) \rightarrow v(t)$ равномерно на всей полупрямой $t \geq 0$. В свою очередь, из этого вытекает, что $u \in C^1([0, +\infty); H)$ и $u'(t) = v(t)$ при всех $t \geq 0$. Тогда с учётом (35) при каждом $t \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} u_n(t) \rightarrow u(t), \\ u'_n(t) \rightarrow u'(t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} Au_n(t) \rightarrow -u'(t), \end{aligned}$$

откуда в силу замкнутости оператора A следует, что $u(t) \in \mathcal{D}(A)$, $Au(t) = -u'(t)$, т. е. выполнено (13). Но поскольку $u \in C^1([0, +\infty); H)$, то из (13) вытекает, что $Au(t) \in C([0, +\infty); H)$, а следовательно, $u(t) \in C([0, +\infty); \mathcal{D}(A))$.

Теорема доказана. \blacktriangle

Замечание 5. Сейчас мы построим то, что называется полугруппой операторов. При всех $t \geq 0$ рассмотрим отображение $u_0 \mapsto u(t)$, где $u(t)$ — значение в точке t решения задачи (13) с начальным условием u_0 . Это отображение (определённое на $\mathcal{D}(A)$ и принимающее значения в $\mathcal{D}(A)$) линейно, а в силу оценки $\|u(t)\| \leq \|u_0\|$ оно является ограниченным с нормой не больше 1 (где норма понимается как норма оператора в пространстве H). Поскольку $\mathcal{D}(A)$ плотно в H , рассматриваемое отображение можно продолжить до ограниченного оператора $S_A(t)$, определённого на всём H и имеющего норму не более 1. При этом, очевидно, выполнены следующие свойства:

- 1) для любого $t \geq 0$ верно $S_A(t) \in L(H)$, $\|S_A(t)\| \leq 1$;
- 2) $S_A(0) = E$, $S_A(t_1 + t_2) = S_A(t_2)S_A(t_1)$ при всех $t_1, t_2 \geq 0$;
- 3) $\lim_{t \rightarrow +0} \|S_A(t)u_0 - u_0\| = 0$ при всех $u_0 \in H$.

В самом деле, свойство 1) уже доказано; свойство 2) вытекает из возможности «сшить» решения задач (13); свойство 3) для $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ вытекает из непрерывности решения задачи (13), а для остальных u_0 может быть получено по непрерывности.

Семейство $S(t)$ операторов, обладающее свойствами 1)–3), называется *непрерывной полугруппой сжатий*. (Непрерывной — потому функции $S(t)u$ непрерывны при любом $u \in H$. Полугруппой — потому что свойство 2) похоже на определение группы, за исключением наличия обратного элемента. Наконец, сжатием — вопреки всей предыдущей терминологии — в теории полугрупп называется оператор S , для которого $\|S(u_1) - S(u_2)\| \leq \|u_1 - u_2\|$.)

Важный результат, полученный Хилле и Иосидой, заключается в том, что если, обратно, семейство линейных операторов $S(t) \in L(H)$ обладает свойствами 1)–3) и сильно непрерывно по t (т. е. для любого $v \in H$ функция $S(t)v$ непрерывна по норме), то существует единственный максимальный монотонный оператор A такой, что $S(t) \equiv S_A(t)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть L — линейное многообразие в гильбертовом пространстве H . Доказать, что оно плотно в H тогда и только тогда, когда единственным элементом, ортогональным всем элементам из L , является нулевой элемент.

2. Доказать, что область определения оператора и его график изоморфны как линейные пространства.

3. 1) Показать, что последовательность линейных операторов $\{A_n\}$ в l^2 ,

$$A_n x = (x^{(1)}, 2x^{(2)}, \dots, nx^{(n)}, 0, 0, \dots),$$

сильно сходится к некоторому неограниченному линейному оператору A , и найти этот оператор A .

2) Однозначно ли определён этот предел A ?

4. Доказать неравенство (26).

5. Назовём последовательность абстрактных функций $\{u_n\}$ *локально равномерно сходящейся* на промежутке \mathcal{T} , если для каждой точки $t \in \mathcal{T}$ найдётся окрестность, в которой данная последовательность сходится равномерно. Доказать, что предельная функция непрерывна, если все функции последовательности $\{u_n\}$ непрерывны. (Достаточно, конечно, чтобы из $\{u_n\}$ можно было выделить локально равномерно сходящуюся подпоследовательность.)

6. Доказать, что если последовательность абстрактных функций $\{u_n\}$ сходится хотя бы в одной точке, а последовательность их производных $\{u'_n\}$ сходится равномерно, то предельная функция дифференцируема и её производная равна пределу производных.

7. Доказать подробнее свойства 2) и 3) полугруппы $S_A(t)$. (Заметим, что из свойств 2) и 3) вытекает непрерывность функции $S_A(t)u$ при любом $u \in H$.)

8*. Доказать, что если A — ограниченный оператор, то соответствующая ему полугруппа может быть представлена в виде $S_A(t) = \exp(tA)$, где экспонента понимается в виде ряда, и при добавлении отрицательных значений t (для которых рассматриваемая экспонента тоже имеет смысл) становится группой, т. е. в добавление к свойствам 1)–3) любой элемент имеет обратный.