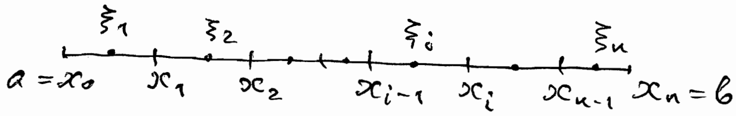
Глава 11. Определённый интеграл.

§ 1. Понятие определённого интеграла.

Пусть ф-я $f(x)$ определена на $[a,b]$, где $a<b$.
Выберем на $[a,b]$ произвольным образом точки $x_1,\dots,x_{n-1}$, так, что

$$a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=b.$$

Определённый выбор точек $x_1,\dots,x_{n-1}$ назовём <u>разбиением</u> $[a,b]$, сами точки $x_1,\dots,x_{n-1}$ – <u>точками разбиения</u>, а сегменты $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,\dots,n)$ – <u>частичными сегментами</u>.



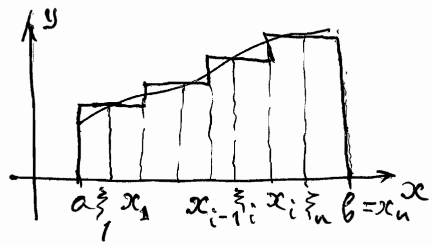
На каждом частичном сегменте $[x_{i-1},x_i]$ возьмём какую-нибудь точку ξ_i.

Точки ξ_i наз-ся <u>промежуточными точками</u>. Положим $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ и составим сумму

$$I(x_i,\xi_i)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Число $I(x_i,\xi_i)$ наз-ся <u>интегральной суммой</u> ф-ции $f(x)$, соответствующей данному разбиению сегмента $[a,b]$ и данному выбору промежуточных точек ξ_i на частичных сегментах $[x_{i-1},x_i]$.

<u>Геом. смысл инт. суммы</u> для $f(x)\geq 0$ – площадь ступенчатой фигуры.



<u>Обозначение</u>: $\Delta=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i$.

Величину Δ называют также <u>диаметром</u> разбиения.

<u>Опр.</u> Число I наз-ся пределом инт. сумм $I(x_i,\xi_i)$ при $\Delta\to 0$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$, такое, что $\forall$ разб. $[a,b]$, у которого $\Delta<\delta$, и $\forall$ выбора точек ξ_i вып-ся не-во

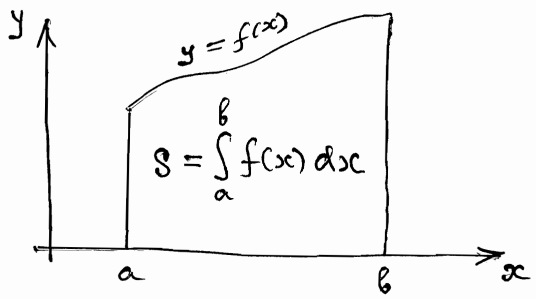
$$|I(x_i,\xi_i)-I|<\varepsilon.$$

Если сущ-т $\lim\limits_{\Delta\to 0} I(x_i,\xi_i)=I$, то ф-я $f(x)$ наз-ся интегрируемой (по Риману) на $[a,b]$, а число I наз-ся определённым интегралом от ф-ции $f(x)$ по сегменту $[a,b]$ и обозначается так:

$$I=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Бернгард Риман – – немецкий математик (1826 – 1866)

Геом. смысл опр. интеграла для непр. ф-ции $f(x) \geq 0$ — площадь криволинейной трапеции (это будет строго док-но после введения понятия площади)



Физ. примеры: 1) $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$ — путь, пройденный точкой по прямой за время $[t_1, t_2]$ при скорости $v(t)$.

2) $A = \int_a^b f(x)\,dx$ — работа силы $f(x)$ при перемещении матер. точки вдоль оси x из т. a в т. b.

Поставим вопрос: для каких ф-ций $f(x)$ сущ-т $\int_a^b f(x)\,dx$, т.е. какие ф-ции интегрируемы?

Неограниченная на $[a,b]$ ф-я $f(x)$ неинтегрируема, т.к. $\forall$ разб. $[a,b]$ инт. сумма $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ может быть сделана сколь угодно большой за счёт выбора точек ξ_i и, сл-но, не существует предела инт. сумм.

Два примера ограниченных ф-ций.

1) $f(x) = c = \text{const}, \quad x \in [a,b]$.

$\forall$ разб. $[a,b]$ и $\forall$ выбора точек ξ_i: $I(x_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i =$

$$= c\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b-a) = \text{const} \Rightarrow \lim_{\Delta \to 0} I(x_i, \xi_i) = c(b-a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b c\,dx = c(b-a)}$$

2) Ф-я Дирихле $f(x) = \begin{cases} 1, & x\text{-рац.} \\ 0, & x\text{-иррац.} \end{cases} \quad x \in [a,b]$.

$\forall$ разб. $[a,b]$ инт. сумма $I(x_i, \xi_i)$ может принимать значения от 0 до $(b-a)$ в зависимости от выбора т. $\xi_i \Rightarrow$

$\Rightarrow$ не сущ-т $\lim_{\Delta \to 0} I(x_i, \xi_i)$, т.е. ф-я Дирихле не интегрируема по Риману (по Лебегу она интегрируема).

В дальнейшем будем рассм-ть только огранич. ф-ции.

Наша цель — доказать интегр-сть непр-х ф-ий, нек-го класса разрывных ф-ий, в частности, кусочно-непр-х ф-ий, и монотонных ф-ий. Для этого потребуется развить теорию нижних и верхних сумм Дарбу.

§ 2. Суммы Дарбу.

Пусть $f(x)$ — ограниченная ф-я на $[a,b]$. Рассмотрим произвольное разбиение сегмента $[a,b]$ на частичные сегменты $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Введём обозначения:

$$M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

и составим две суммы:

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \qquad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1}).$$

S и s называются соотв-но верхней и нижней суммами ф-ии $f(x)$ для данного разбиения сегмента $[a,b]$ или, коротко, верхней и нижней суммами Дарбу.

Т.к. $\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$: $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$, то

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$$

т.е. для данного разбиения

$$s \leq I(x_i, \xi_i) \leq S \qquad (1)$$

(любая интегральная сумма данного разбиения заключена между нижней и верхней суммами для этого разбиения).

Свойства сумм Дарбу.

Рассм. нек. разбиение $[a,b]$. Ему соотв-т s, S и мн-во $\{I(x_i,\xi_i)\}$.

I [Для данного разбиения $[a,b]$

$$S = \sup\{I(x_i,\xi_i)\} \quad \left(s = \inf\{I(x_i,\xi_i)\}\right),$$

Док-во: докажем, что $S = \sup\{I(x_i,\xi_i)\}$. Для этого нужно док-ть, что

① $I(x_i,\xi_i) \le S$.

② $\forall \varepsilon>0$ можно так выбрать т. ξ_i, что

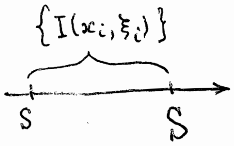
$$I(x_i,\xi_i) > S-\varepsilon.$$

① ~~выполняется~~ выполняется в силу (1).

② По опр. M_i $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ т. $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ такая, что

$$f(\xi_i) > M_i - \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Умножая на Δx_i и суммируя, получим



$$I(x_i,\xi_i) > S-\varepsilon.$$

Аналогичное док-во для нижней суммы.

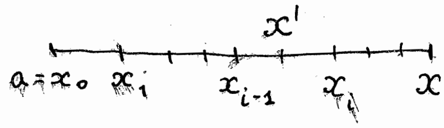
$\boxed{1}$ $\boxed{\text{Док-ть св-ва I и II для нижних сумм}}$

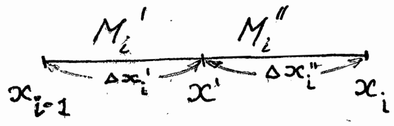
2007г. Л.12

II (Будем обозначать разбиение нек. буквой, напр. T, (с индексами) чтобы отличать разбиения.)

[Пусть разбиение T_2 сегм. $[a,b]$ получено из разбиения T_1 путём добавления нескольких новых точек. T_2: S_2, s_2; T_1: S_1, s_1.
Тогда $S_2 \le S_1$, $s_2 \ge s_1$. (Другими словами, при измельчении разбиения верхняя сумма не возрастает, а нижняя — не убывает).

Док-во. Рассм. вначале случай, когда добавлена одна новая точка $x'\in[x_{i-1},x_i]$.





$\Delta x_i' + \Delta x_i'' = \Delta x_i$

$M_i' \le M_i$, $M_i'' \le M_i$

$$S_1 - S_2 = M_i\Delta x_i - (M_i'\Delta x_i' + M_i''\Delta x_i'') = M_i(\Delta x_i' + \Delta x_i'') -$$

$$-(M_i'\Delta x_i' + M_i''\Delta x_i'') = (M_i - M_i')\Delta x_i' + (M_i - M_i'')\Delta x_i'' \ge 0 \Rightarrow S_2 \le S_1. \quad (2)$$

97г. Л.13 →

Если добавлено неск. новых точек, то нер-во верно тем более.
Для нижних сумм док-во аналогично.

Т.к. $M_i \le M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$, $M_i', M_i'' \ge m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $\Delta x_i^* \le \Delta$ $\left(= \max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i\right)$, то из (2) получаем

$S_1 - S_2 \le (M-m)\Delta$. ~~xxxxxx~~ Если добавлено p новых точек, то аналогично получаем

III [Нижняя сумма произвольного разбиения $[a, b]$ не превосходит верхней суммы любого другого разбиения.

$T_1 : S_1, s_1$

$T_2 : S_2, s_2$ Тр. док. $s_1 \le S_2$, $s_2 \le S_1$

Док-во. Положим $T = T_1 \cup T_2$. Пусть $T : S, s$.

Согласно св-ву II и не-ву (1):

$$s_1 \le s \le S \le S_1$$
$$s_2 \le s \le S \le S_2 \Rightarrow s_1 \le S_2, \; s_2 \le S_1.$$

84г. Л. 25.

IV Рассм. мн-во всех верхних сумм $\{S\}$ и мн-во $\{s\}$.

Мн-во $\{S\}$ огр. снизу (любой нижней суммой), и, сл-но, имеет inf.

мн-во $\{s\}$ огр. сверху (любой верхней суммой), и, сл-но, имеет Sup.

~~... огр. сверху ... имеет Sup, огр. снизу ... inf~~

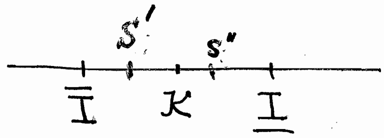
Пусть $\overline{I} = \inf\{S\}$ – верхний интеграл Дарбу от $f(x)$,

$\underline{I} = \sup\{s\}$ – нижний интеграл Дарбу от $f(x)$.

Утверждение: $\underline{I} \le \overline{I}$.

Док-во. Предположим противное: $\overline{I} < \underline{I}$.

Положим $K = \dfrac{\overline{I} + \underline{I}}{2}$.



По опр. Sup и inf $\exists\, S'$ и s'' : $S' < K$, $s'' > K$.

Отсюда $s'' > S'$, что противоречит св-ву III.

Итак, $\forall s$ и S: $\boxed{s \le \underline{I} \le \overline{I} \le S}$ (*)

Лемма Дарбу. 76г. л.25. 78г. л.24. 85г. л.23 86г. л.25 92г. л.27 Лекция 2.

(V) $\lim\limits_{\Delta\to 0} S = \overline{I}$, $\lim\limits_{\Delta\to 0} s = \underline{I}$

(док-во должны ещё раз продумать сам-но!)

т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ такое, что для любого разбиения, у которого $\Delta<\delta$, выполняются не-ва $S-\overline{I}<\varepsilon$, $\underline{I}-s<\varepsilon$.

~~Определение такое же, как и для $I(x_i,\xi_i)$~~

Док-во. Докажем для верхних сумм

Пусть $M=\sup\limits_{[a,b]} f(x)$, $m=\inf\limits_{[a,b]} f(x)$. (для нижних - аналогично)

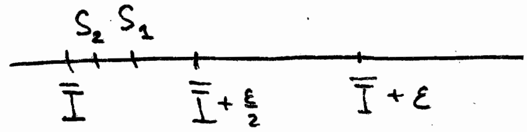
Если $M=m$, то $f(x)=\text{const}=M$ и $\overline{I}=S=M(b-a)$. Пусть $M>m$.

Зададим произвольное $\varepsilon>0$.

Т.к. $\overline{I}=\inf\{S\}$, то $\exists$ разбиение T_1 такое, что его верхняя сумма $S_1<\overline{I}+\frac{\varepsilon}{2}$

Пусть T_1 имеет p точек разбиения.

Возьмём $\delta=\frac{\varepsilon}{2(M-m)p}$.



Рассмотрим произвольное разб. T с $\Delta<\delta$. Пусть ему соотв. верхняя сумма S. Тр. док. $S-\overline{I}<\varepsilon$.

Добавим к T точки T_1. Получим $T_2=T\cup T_1$.

Пусть ему соотв. верхняя сумма S_2. Рассматривая T_2 как разбиение, полученное из T путём добавления p точек разбиения T_1, в силу (3) получим

$$S-S_2\le(M-m)\Delta p<\frac{\varepsilon}{2}. \quad (4)$$

С др. стороны по св-ву (II) $S_2\le S_1<\overline{I}+\frac{\varepsilon}{2}$.

Отсюда: $S_2-\overline{I}<\frac{\varepsilon}{2}$ (5)

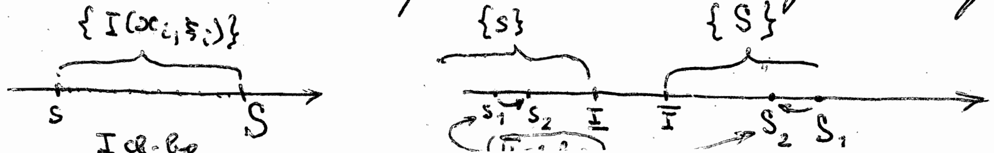
Складывая (5) и (4), получаем:

~~произв. разбиения T, у которого $\Delta<\delta=\frac{\varepsilon}{2(M-m)p}$, справедливо нер-во~~

$S-\overline{I}<\varepsilon$, что и тр. док. ~~Всё док-но.~~

$\boxed{\text{2}}$ Доказать лемму Дарбу для нижних сумм.

Геом. иллюстрация свойств сумм Дарбу.



III : $s'\le S''$
IV : $\underline{I}\le\overline{I}$ } Эти св-ва отражены на картинке

§3. Необходимое и достаточное условие интегрируемости.

Теорема 1. Для того, чтобы огр-я на $[a,b]$ ф-я $f(x)$ была интегр. на $[a,b]$, необх. и дост., чтобы $\overline{I} = \underline{I}$

Док-во.

а) Необх-сть. Пусть $f(x)$ – инт. на $[a,b]$, т.е. сущ. $\lim\limits_{\Delta\to 0} I(x_i,\xi_i) = I$. По опр. $\lim\limits_{\Delta\to 0} I(x_i,\xi_i)$ $\forall \varepsilon>0$ $\exists$ $\delta>0$ такое, что $\forall$ разб., у которого $\Delta<\delta$, и для любого выбора точек ξ_i: $|I(x_i,\xi_i)-I|<\frac{\varepsilon}{4}$.

Зафикс. одно из таких разбиений с $\Delta<\delta$. Пусть его в.с. $= S$, н.с. $= s$.

По св-ву (I) можно так выбрать ξ_i', ξ_i'', что

$$S - I(x_i,\xi_i') < \frac{\varepsilon}{4}; \quad I(x_i,\xi_i'') - s < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Отсюда

$$S - s = \left(S - I(x_i,\xi_i')\right) + \left(I(x_i,\xi_i') - I\right) + \left(I - I(x_i,\xi_i'')\right) + \left(I(x_i,\xi_i'') - s\right) < 4\,\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Т.к. $s \le \underline{I} \le \overline{I} \le S$, то $0 \le \overline{I} - \underline{I} < \varepsilon$. Отсюда $\overline{I} = \underline{I}$.

Замечание. Попутно мы (если $f(x)$ инт., то $\forall\varepsilon>0$) док-ли, что сущ-т такое разбиение $[a,b]$, для которого $S-s<\varepsilon$.
73г. Л.27.

б) дост-сть. (см. (*))
Пусть $\underline{I} = \overline{I} = I$. По лемме Дарбу $\lim\limits_{\Delta\to 0} s = I$, $\lim\limits_{\Delta\to 0} S = I$.
Из не-в (1): $s \le I(x_i,\xi_i) \le S$ следует, что $\exists \lim\limits_{\Delta\to 0} I(x_i,\xi_i) = I$, т.е. $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$. Дост-ть и теор. 1 док-на.

82г. Л.25 88г. Л.3
83г. Л.26 89г. Л.3 91г. Л.3

~~Т.к. $S \ge \overline{I} \ge \underline{I} \ge s$, то $\overline{I} - \underline{I} \le \varepsilon$~~ (см. н.о.)

~~Пусть $\overline{I} = \underline{I} = I$.~~

~~Докажем, что $\lim\limits_{\Delta\to 0} I(x_i,\xi_i) = I$.~~

$\varepsilon/2$ $\varepsilon/2$ $I(x_i,\xi_i)$
$I-\frac{\varepsilon}{2}$ s I S $I+\frac{\varepsilon}{2}$

~~Для этого по опр. $\lim\limits_{\Delta\to 0} I(x_i,\xi_i)$ нужно док-ть, что для любого $\varepsilon>0$ $\exists$ $\delta>0$ такое, что при $\Delta<\delta$ $|I(x_i,\xi_i)-I|<\varepsilon$.~~

~~Задаемся произвольным $\varepsilon>0$. Пусть p – число точек этих разбиения.~~

~~В силу свойства (V) $\exists$ $\delta>0$ такое, что при $\Delta<\delta$ $S - I < \frac{\varepsilon}{2}$, $I - s < \frac{\varepsilon}{2}$.~~

~~Складывая, получим $S - s < \varepsilon$.~~

~~Так как $s \le I \le S$, $s \le I(x_i,\xi_i) \le S$, то $|I - I(x_i,\xi_i)| < \varepsilon$. Все~~

Пример.

Для ф-ии Дирихле $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ - иррац.} \\ 1, & x \text{ - рац} \end{cases}$ на $[a, b]$

$\forall$ разбиения $S = (b-a)$, $s = 0$.

$$\overline{I} = (b-a), \quad \underline{I} = 0.$$

Таким обр., $\overline{I} \neq \underline{I}$. Сл-но, ф-я Дирихле не интегрируема.

Теорема 2. Для того, чтобы ф-я на $[a,b]$ $f(x)$ была интегр. на $[a,b]$, необх. и дост., чтобы $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ такое (хотя бы одно!) разбиение $[a,b]$, для которого $S - s < \varepsilon$.

Док-во.

а) Необх-сть (см. замеч., сделанное после док-ва необх-сти в Т.1)

~~Пусть $f(x)$ инт. на $[a,b]$~~

~~Пусть $f(x)$ инт. на $[a,b]$. При док-ве необх-сти в Т.1 было док-но сущ-е такого разбиения, что $S - s < \varepsilon$. Необх-сть док-на.~~

б) Дост-сть. Пусть $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ такое разбиение, что $S - s < \varepsilon$.

Т.к. $s \le \underline{I} \le \overline{I} \le S$, то $0 \le \overline{I} - \underline{I} < \varepsilon$.

Отсюда $\overline{I} = \underline{I}$ и в силу т. 1 ф-я инт-ма на $[a,b]$.

Ценность Т. 2. Необх. и дост-но сущ. ОДНОГО разбиения, для которого $S - s < \varepsilon$.

Замечание. Пример. Для ф-ии Дирихле возьмем $\varepsilon < b-a$. Тогда не сущ-т такого разбиения, для которого $S - s < \varepsilon$ (т.к. $\forall$ разбиения $S - s = b - a$). Сл-но, ф-я Дирихле не интегрируема.

Удобная форма записи не-ва $S - s < \varepsilon$.

Обознач. $\omega_i = M_i - m_i$ — колебание $f(x)$ на $[x_{i-1}, x_i]$

$$\boxed{S - s = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon}$$

76г. Л.26. 80г. Л. 21.

95г. Л. 14

§ 4. Классы интегрируемых функций.

① Интегрируемость непрерывных функций.

~~Непрерывная на $[a,b]$ ф-я $f(x)$ явл-ся по теор. Кантора равном. непр. на $[a,b]$, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x', x'' \in [a,b]$ и таких, что $|x' - x''| < \delta$, справедливо н-во $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$~~

~~(Сущ-но, что δ не зависит от x, а только от ε. Для всех x δ одно и то же.)~~

Примеры. 1) $y = x$, $x \geq 0$ $\boxed{\text{равн. непр.}}$

$\forall x'$ и x'' $|y(x') - y(x'')| = |x' - x''|$ $\boxed{\delta = \varepsilon}$

2) $y = x^2$ не явл-ся равн. непр. при $x \geq 0$

$\cancel{|y(x') - y(x'')| = |x'^2 - x''^2| = (x' + x'')|x' - x''|}$

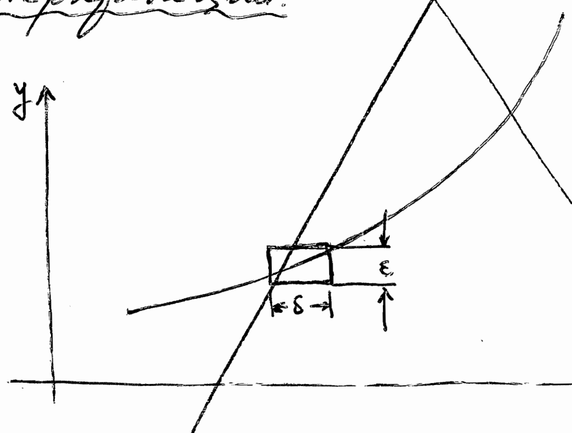
Зададимся нек-м $\varepsilon > 0$ и покажем, что какое бы $\delta > 0$ мы не взяли, можно выбрать так x' и x'', что хотя $|x' - x''| < \delta$, но $|y(x') - y(x'')| > \varepsilon$.

Возьмём сколь угодно малое подфикс. $\delta > 0$. Далее возьмём $x' > \frac{\varepsilon}{\delta}$ и $x'' = x' + \frac{\delta}{2}$.

Тогда $|x' - x''| = \frac{\delta}{2} < \delta$, но

$|y(x') - y(x'')| = |x'^2 - x''^2| = (x' + x'')|x' - x''| > \frac{2\varepsilon}{\delta} \cdot \frac{\delta}{2} = \varepsilon.$

Геом. интерпретация.



Если ф-я равн. непр-на, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что прямоугольник со сторонами δ и ε, параллельными осям Ox и Oy можно всегда расположить так, что график не будет пересекать ~~верх~~ сторон $\parallel Ox$.

Утверждение.
Если ф-я равномерно непр-на на мн-ве $\{x\}$, то она непр. в каждой точке этого множества.

Док-во тривиально.

Верно ли обратное? Не всегда!

Теорема. (Теорема Кантора).

Если $f(x)$ непр. на сегменте $[a, b]$, то она и равномерно непрерывна на этом сегменте.

Док-во. Предп. противное. Тогда для нек. $\varepsilon > 0$ и $\forall \delta > 0$ $\exists$ x' и x'' такие, что $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$, хотя $|x' - x''| < \delta$

Возьмём $\{\delta_n\} \to 0$, напр. $\delta_n = \frac{1}{n}$.

$\forall \delta_n \ \exists \ x_n'$ и x_n'' такие, что $|f(x_n') - f(x_n'')| \geq \varepsilon$

$\{x_n'\} \in [a,b]$. По теор. Больцано-Вейерштрасса $\exists \{x'_{k_n}\} \to c$,

где c — нек. точка $[a,b]$. Очевидно $\{x''_{k_n}\} \to c$.
(здесь используется то, что $f(x)$ непр. на сегм.)

В силу непр-сти $f(x)$ в т. c $\{f(x'_{k_n})\} \to f(c)$ и $\{f(x''_{k_n})\} \to f(c)$

т. е. $\{f(x'_{k_n}) - f(x''_{k_n})\} \to 0$, что противоречит

не-ву $|f(x'_{k_n}) - f(x''_{k_n})| \geq \varepsilon$. Теор. док-на.

Замечание: В случае, если $f(x)$ непр. на (a,b), теор., вообще говоря, не верна
[Напр. $y = \frac{1}{x}$, $x \in (0,1)$.]

90г. Л.4. **Следствие** из теор. Кантора. Если $f(x)$ ~~равн.~~ непр. на $[a,b]$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ такое разбиение $[a,b]$, у которого каждое $\omega_i < \varepsilon$. ~~на каждом сегменте $[c,d] \in [a,b]$ и таком, что $d-c < \delta$, колебание ω $f(x)$ будет $< \varepsilon$.~~

x_{i-1} ξ_i' ξ_i'' x_i

Док-во. ~~[illegible]~~

Зададим произв. $\varepsilon > 0$. Т.к. $f(x)$ равн. непр. на $[a,b]$ в силу т. Кантора, то $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x'$ и $x'' \in [a,b]$ и таких, что $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$, вып-ся не-во $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Рассм. разбиение $[a,b]$ с $\Delta < \delta(\varepsilon)$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \leq \Delta < \delta(\varepsilon)$. По 2-й теор. Вейерштрасса $\exists \ \xi_i'$ и $\xi_i'' \in [x_{i-1}, x_i]$ такие, что $f(\xi_i') = M_i$, $f(\xi_i'') = m_i$. Т.к. $|\xi_i' - \xi_i''| \leq \Delta x_i < \delta(\varepsilon)$, то $|f(\xi_i') - f(\xi_i'')| < \varepsilon$, т. е. $\omega_i < \varepsilon$.

~~Интегрируемость непр. ф-ий~~

97г. Л.10 2009г. Л.13

Теорема 3. Непрерывная на $[a,b]$ ф-я $f(x)$ инт-ма на этом сегменте.

Док-во: Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. В силу следствия из т. Кантора ~~равномерной непр-сти $f(x)$ $\exists$ сущ.~~ $\exists$ такое разбиение $[a,b]$, у которого каждое $\omega_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$ ~~(см. следствие из теор. Кантора). Возьмём одно из разбиений с $\Delta < \delta$. Для него~~ Для этого разбиения

77г. Л.25
75г.

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon.$$

По Т.2 $f(x)$ инт-ма на $[a,b]$. ~~[illegible]~~

Теорема док-на.

74г. Л.27. 79г. Л.21. 91г. Л.4 2008г. Л.14, 2009г. Л.13.

② Интегрируемость некоторых разрывных функций.

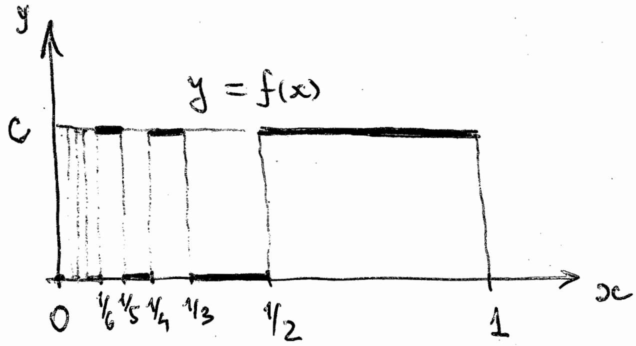
Если $\forall \varepsilon > 0$ существует конечное число интервалов, заключающих в себе все точки разрыва ф-ии и имеющих сумму длин $< \varepsilon$, то будем говорить, что все точки разрыва ф-ии можно покрыть конечным числом интервалов со сколь угодно малой суммой длин.

РОУ-Л.27 (последняя 6 стр. 93г)

Теорема 4. Если $f(x)$ опр-на и огр-на на $[a,b]$ и если ~~[illegible]~~ все её точки разрыва можно покрыть конечным числом интервалов со сколь угодно малой суммой длин, ~~можно указать конечное число интервалов, покрывающих все точки разрыва $f(x)$ и имеющих общую длину $< \varepsilon$,~~ то $f(x)$ инт-ма на $[a,b]$.

С.М. Н.О.

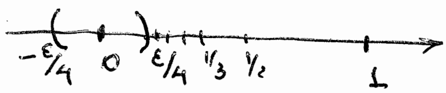
Пример



$\frac{1}{n}$ – точки разрыва ($n \in \mathbb{N}$)

Зададим $\varepsilon > 0$ и рассмотрим интервал $(-\frac{\varepsilon}{4}; \frac{\varepsilon}{4})$. Внутри него имеем беск. много точек разрыва ф-ии, а вне — лишь конечное число.

p зависит от ε!



Пусть вне интервала $(-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4})$ лежит p точек разрыва $f(x)$. Заключим каждую из этих точек в интервал с длиной $< \frac{\varepsilon}{2p}$. В рез-те все точки разрыва ф-ии окажутся покрытыми $(p+1)$ интервалом с суммой длин $< \frac{\varepsilon}{2} + p \cdot \frac{\varepsilon}{2p} = \varepsilon$.

Сл-но, все точки разрыва $f(x)$ можно покрыть конечным числом интервалов со сколь угодно малой суммой длин.

Пусть $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$, $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M>m$. Отметим, что $\forall$ разбиение $[a,b]$ каждое $\omega_i \le \omega = M-m$.

<u>Док-во.</u> Зададим произв. $\varepsilon>0$. Покроем все точки разрыва конечным числом интервалов с $\sum$ длин $< \frac{\varepsilon}{2(M-m)}$. Оставшиеся точки $[a,b]$ образуют ~~[illegible]~~ конечное число непересекающихся сегментов, на каждом из которых $f(x)$ ~~[illegible]~~ непр-на. В силу следствия из т. Кантора в ~~[illegible]~~ каждый из этих сегментов можно разбить на частичные сегменты так, что $\omega_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Объединяя эти разбиения и интервалы, покрывающие точки разрыва $f(x)$, получим нек. разбиение T сегмента $[a,b]$. Для него

$$S-s = \sum_T \omega_i \Delta x_i = \underset{\substack{\text{по интервалам,}\\ \text{покр. т. разрыва}}}{\sum{}'} \omega_i \Delta x_i + \underset{\substack{\text{по сегментам,}\\ \text{на кот. } f(x) \text{ непр.}}}{\sum{}''} \omega_i \Delta x_i <$$

$$< (M-m)\underbrace{\sum{}' \Delta x_i}_{<\frac{\varepsilon}{2(M-m)}} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\underbrace{\sum{}'' \Delta x_i}_{<(b-a)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

По Т.2 $f(x)$ инт-ма на $[a,b]$.

Теор. док-на.

<u>Замеч.</u> ~~[illegible]~~ Здесь сказывается ценность Т.2 — то, что дост. указать хотя бы одно разбиение с $S-s<\varepsilon$.

<u>Следствие.</u> Если $f(x)$ огр. на $[a,b]$ и имеет конечное число точек разрыва, то она инт-ма на $[a,b]$.

Т. ф-я, имеющая на $[a,b]$ конечное число точек разрыва 1 рода,

В частн., кус.-непр-я ф-я на $[a,b]$, инт-ма на $[a,b]$.

~~[illegible]~~

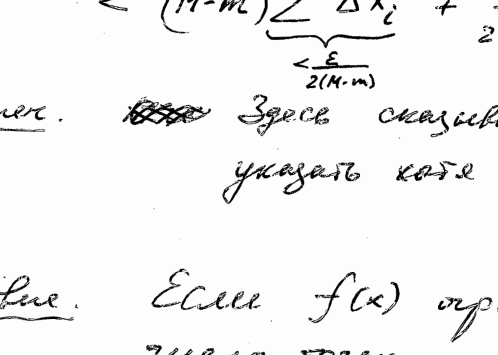
<u>Примеры</u>

1) $f(x) = \sin x$ $(0 \le x \le \pi)$ — интегр. по Т.3. $\int_0^\pi \sin x\,dx = ?$ (Сможем вычислить позже) (Знак ? определённого интеграла § 2)

2) $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & 0 < x \le \pi \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Ф-я инт-ма на $[0,\pi]$ в силу следствия из Т.4, т.к. у ней 1 т. разрыва и ф-я огр-на.

$\int_0^\pi f(x)dx = ?$ (Можно вычислить только приближённо)



3) Сделаем бесконечное число точек разрыва так, как показано на рисунке. Ф-я стала разрывной в точках $x = \frac{1}{\pi n}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$

Ф-я по-прежнему инт-ма (по Т.4). Дост-но покрыть точку 0 интервалом $(-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4})$ и оставшиеся p точек p интервалами по $\frac{\varepsilon}{\dots}$ каждую [illegible]

4) Ф-я Дирихле имеет беск. число точек разрыва и неинтегрируема. (Оказывается, что ф-я Дирихле интегрируема по Лебегу)

3 Интегрируемость монотонных ф-х ф-ий.

Теорема 5. Монотонная на $[a,b]$ ф-я $f(x)$ инт-ма на $[a,b]$.

Для опр-сти пусть $f(x)$ неубывающая ф-я, не равная const. Тогда $f(b)>f(a)$.

Зададим произв. $\varepsilon>0$ и разобьём $[a,b]$ на равные части, длины которых $< \dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$.

Тогда для этого разбиения

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\overbrace{\sum_{i=1}^{n}\omega_i}^{f(b)-f(a)} = \varepsilon,$$

В силу Т. 2 $\underbrace{\ }_{f(x)\ \text{инт-ма.}}$ Т. 5 доказана.

Упражнение: придумать пример монотонной на $[a,b]$ ф-ии, имеющей беск. много точек разрыва.

Лекция 3.

§5. Св-ва опр. интеграла.

Мы определили опр. интеграл по $[a,b]$ при усл., что $\underline{a<b}$.

Положим

(1) по Опр. $\int_a^a f(x)dx = 0$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \qquad (a<b).$$

Это определение соотв-т тому, что если сегмент $[a,b]$ пробегается в обратном направлении, то $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} < 0$.

Линейное свойство.

(2) ~~Если $f(x)$ и $g(x)$ – инт-мы на $[a,b]$, а α и β – любые вещ. числа, то ф-я $[\alpha f(x)+\beta g(x)]$ также интегрируема на $[a,b]$,~~ причём

$$\int_a^b[\alpha f+\beta g(x)]dx = \alpha\int_a^b f dx + \beta\int_a^b g dx. \qquad (1)$$

Док-во $\sum_{i=1}^{n}[\alpha f(\xi_i)+\beta g(\xi_i)]\Delta x_i = \alpha\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \beta\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$

Переходя к пределу при $\Delta\to 0$, получаем ф-лу (1)

(3) См. н.о.

Отметим 2 частных случая.

$\underline{\alpha=1,\ \beta=\pm1}$

$$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f dx \pm \int_a^b g dx$$

$\underline{\alpha\neq 0,\ \beta=0}$

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)dx$$

см. стр. 15-а

Можно док-ть, что произведение интегр. ф-ий инт-ма

2) Для любых x' и x'' из $[x_{i-1},x_i]$ имеем

$$f(x'')g(x'') - f(x')g(x') = [f(x'')-f(x')]g(x'') + f(x')[g(x'')-g(x')]$$

т.к. $|f(x'')-f(x')| \le \omega_i^f$; $|g(x'')-g(x')| \le \omega_i^g$

$|f| \le A$, $|g| \le B$, то

$$|f(x'')g(x'')-f(x')g(x')| \le B\omega_i^f + A\omega_i^g$$

Отсюда $\omega_i^{fg} \le B\omega_i^f + A\omega_i^g$ или $\sum_{i=1}^{n}\omega_i^{fg}\Delta x_i \le B\sum_{i=1}^{n}\omega_i^f\ldots$

Все следующие св-ва будем док-ть для случая $a \le b$.
Если $a > b$, то эти св-ва модифицируются в соотв. с ф-лой $\int_a^b = -\int_b^a$.

(3) Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то $|f(x)|$ также инт. на $[a,b]$,

причём

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \qquad (2)$$

Колебание ф-ии $f(x)$ на i-м част. сегменте будем обозначать иногда ω_i^f (вместо ω_i)

Док-во. Справедливо неравенство $\omega_i^{|f|} \le \omega_i^f$ {пояснить на рис., строго док-ть - самост.}

Отсюда $\sum_{i=1}^n \omega_i^{|f|} \Delta x_i \le \sum_{i=1}^n \omega_i^f \Delta x_i \qquad (3)$

Т.к. $f(x)$ инт. на $[a, b]$, то $\forall \varepsilon > 0 \ \exists T$ такое, что $\sum_{i=1}^n \omega_i^f \Delta x_i < \varepsilon$.

В силу (3) $\sum_{i=1}^n \omega_i^{|f|} \Delta x_i < \varepsilon$. По Т. 2 $|f(x)|$ инт. на $[a, b]$.

Далее $\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right| \le \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)|\Delta x_i$

Переходя к пределу при $\Delta \to 0$, получим (2).

73г. Л.28

Замеч. Если $|f(x)|$ - инт., то $f(x)$ м.б. не инт. по Риману

Напр. $f(x) = \begin{cases} +1, & x \text{ - рац.} \\ -1, & x \text{ - иррац.} \end{cases} \quad x \in [a, b]$.

По Лебегу $f(x)$ и $|f(x)|$ инт. или не инт. одновр.

(4) Если $f(x)$ и $g(x)$ инт. на $[a, b]$, то $[f(x)g(x)]$ также инт. на $[a, b]$.

Док-во. Докажем вначале интегрируемость $f^2(x)$.

Пусть $M = \sup_{[a,b]} |f(x)| > 0$.

$$\omega_i^{f^2} = \omega_i^{|f|^2} = M_i^{|f|^2} - m_i^{|f|^2} = \left(M_i^{|f|}\right)^2 - \left(m_i^{|f|}\right)^2 \le 2M\cdot\left(M_i^{|f|} - m_i^{|f|}\right) = 2M\cdot\omega_i^{|f|} \ \cancel{M = \sup_{[a,b]}|f(x)|}$$

Т.к. $|f(x)|$ инт., то $\forall \varepsilon > 0 \ \exists T$ такое, что $\sum_{i=1}^n \omega_i^{|f|}\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2M}$

Отсюда $\sum_{i=1}^n \omega_i^{f^2}\Delta x_i \le 2M\sum_{i=1}^n \omega_i^{|f|}\Delta x_i < \varepsilon$, т.е. $f^2(x)$ инт. на $[a, b]$.

Т.к. $fg = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right]$, то fg инт. на $[a, b]$.

30 Доказать, что $M_i^{|f|^2} = \left(M_i^{|f|}\right)^2$

~~Т.к. f и g инт-мы, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ такое T разбиение, что (по Т.2.)~~

~~$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i^f \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2B}, \quad \sum_{i=1}^{n} \omega_i^g \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2A}$$~~

~~(Упражнение: Почему найдётся такое общее разбиение для f и g?)~~

~~Отсюда $\sum_{i=1}^{n} \omega_i^{fg} \Delta x_i < B\frac{\varepsilon}{2B} + A\frac{\varepsilon}{2A} = \varepsilon$. Всё док-но~~

$\boxed{31}$ Док-ть: Если f и g инт-мы на $[a,b]$ и $m^g > 0$ (или $M^g < 0$), то $\frac{f}{g}$ - инт-ма на $[a,b]$.

~~④. Если f инт-ма, то cf - инт-ма и $\int cf dx = c\int f dx$.~~

~~Док-во: Из $\sum_{i=1}^{n} cf(\xi_i)\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ всё следует.~~

76г. Л.27. 81г. Л.25. 82г. Л.26. 83г. Л.27.

⑤. Если $f(x)$ инт-ма на $[a,b]$, то она инт-ма и на любом $[c,d] \subset [a,b]$.

Док-во. По Т.2 $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ T разбиение $[a,b]$ такое, что $S - s = \sum_{[a,b]} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$.

Добавим точки c и d. $T \cup c \cup d = T^*$: S^*, s^*

Т.к. $S^* - s^* \le S - s$ (в силу св-ва II сумм Дарбу), то $S^* - s^* = \sum_{[a,b]}^{*} \omega_i^* \Delta x_i < \varepsilon$.

~~Разбиение T^* сегмента $[a,b]$ порождает нек. разбиение сегмента $[c,d]$.~~

Каждое слагаемое в этой сумме ≥ 0, поэтому ~~Отсюда~~ $\sum_{[c,d]}^{*} \omega_i \Delta x_i \le \sum_{[a,b]}^{*} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$. По Т.2 $f(x)$ интегрируема на $[c,d]$.

⑥. Если f инт. на $[a,c]$ и $[c,b]$, то f инт. на $[a,b]$, причем $\int_a^c + \int_c^b = \int_a^b$. (5)

Док-во. а) Рассм. сначала $a < c < b$.

Т.к. $f(x)$ интегр. на $[ac]$ и $[c,b]$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ такие разбиения $[a,c]$ и $[c,b]$, для которых $\to$ $(S-s)_{[a,c]} < \frac{\varepsilon}{2}$ $(S-s)_{[c,b]} < \frac{\varepsilon}{2}$

Объединяя их, получим разбиение $[a,b]$, для которого $(S-s)_{[a,b]} = (S-s)_{[a,c]} + (S-s)_{[c,b]} < \varepsilon$, т.е. f инт. на $[a,b]$.

Вместо $(S-s)_{[a,c]}$ лучше писать $\sum_{[a,c]} \omega_i \Delta x_i$

Почему отсюда не следует интегрируемость f на $[a,b]$, а понадобилось доказывать её.

Рассм. инт. сумму в сл., когда c - точка разбиения $[a,b]$. $\sum_{[a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{[a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{[c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i$. Переходя к пределу при $\Delta \to 0$, получим $\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$.

б) Если $a < b < c$ ... где $b \in [a,b]$ ...

В силу (5) $f(x)$ инт-ма на $[a,b]$.

В силу (доказанного в п. (а)) $\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$.

Отсюда в силу (2) получим (4).

б) Случай $c < a < b$ рассм. самостоятельно.

75 г.

74 г. 1.28.

(7) Если $f(x)$ интегр-ма на $[a,b]$ и $f(x) \geq 0$, то $I = \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

Док-во. Пооп. $I = \lim\limits_{\Delta \to 0} I(x_i, \xi_i)$, где $I(x_i,\xi_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$ (5)

$I \quad 0 \quad I(x_i,\xi_i)$

Если бы $I < 0$, то нашлась бы $I(x_i,\xi_i) < 0$.

Предположим, что $I < 0$. По опр. предела инт. сумм $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall T (\Delta < \delta)$: $|I - I(x_i,\xi_i)| < \varepsilon$. Возьмём $\varepsilon = |I| = -I$

$$\underline{I < I - I(x_i,\xi_i)} < -I$$

$$I(x_i,\xi_i) < 0 \text{ — противоречие с (5).}$$

— · —

(8) Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$ и $f(x) \geq g(x)$,

следствие из (7)

то $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$. (6)

Док-во. $f(x) - g(x) \geq 0$ и $(f-g)$ — инт. на $[a,b]$ в силу (2).

В силу (7) $\int_a^b (f-g)\,dx \geq 0$. Отсюда следует (6).

— · —

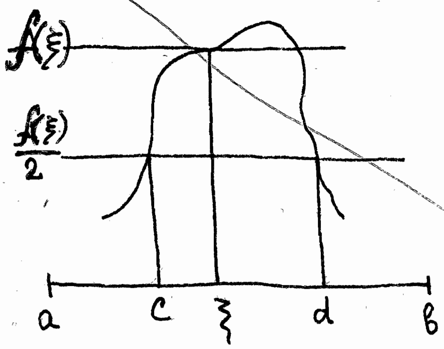
(9) Если $f(x)$ инт. на $[a,b]$ и $f(x) \geq m$, то $\int_a^b f(x)\,dx \geq m(b-a)$

Док-во. Возьмём в (6) $g(x) \equiv m$ на $[a,b]$, получим утвержд. (9).

— · —

(10) Если $f(x)$ непр. на $[a,b]$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \not\equiv 0$, то ~~такое, что~~ $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

Док-во. Т.к. $f(x) \not\equiv 0$, то $\exists\, \xi \in [a,b] : f(\xi) > 0$. В силу уст-ти знака непр. ф-ции $\exists$ такая окр-ть т. ξ, в которой $f(x) > 0$. Сл-но, сущ-т такой $[c,d] \subset [a,b]$,



в котором $f(x) \geq \frac{f(\xi)}{2}$. В силу (9)

$$\int_c^d f(x)\,dx \geq \frac{f(\xi)}{2}(d-c) > 0$$

$$\int_a^b \overset{(6)}{=} \underbrace{\int_a^c + \int_c^d + \int_d^b}_{\geq 0 \text{ в силу } (7)} \geq \int_c^d > 0$$

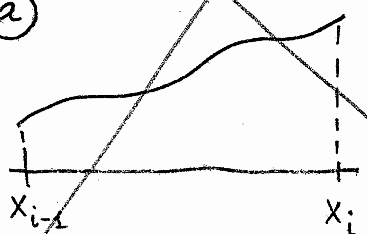
— · —

(11) Если $f(x)$ инт-ма на $[a,b]$, то $|f(x)|$ также инт-ма на $[a,b]$, и

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \qquad (5)$$

Док-во. Рассм. 3 случая

(а)

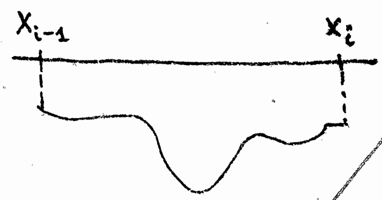


$f(x) \geq 0$, тогда $|f(x)| = f(x)$, $M_i^{|f|} = M_i^f$, $m_i^{|f|} = m_i^f$,

$M_i^{|f|} - m_i^{|f|} = M_i^f - m_i^f$

т.е. $\underline{\omega_i^{|f|} = \omega_i^f}$

(б)

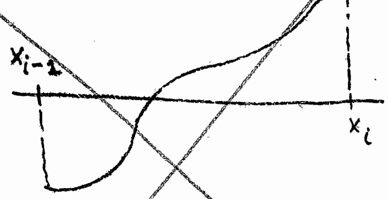


$f(x) \leq 0$, тогда $|f(x)| = -f(x)$, $M_i^{|f|} = -m_i^f$, $m_i^{|f|} = -M_i^f$,

$M_i^{|f|} - m_i^{|f|} = M_i^f - m_i^f$

т.е. $\underline{\omega_i^{|f|} = \omega_i^f}$

(в)



$f(x)$ может принимать как положит., так и отрицат. значения.

$M_i^f > 0$, $m_i^f < 0$, $M_i^{|f|} = \max(M_i^f, -m_i^f)$, $m_i^{|f|} \geq 0$.

$M_i^{|f|} - m_i^{|f|} \leq M_i^{|f|} \leq M_i^f - m_i^f$, т.к. $M_i^{|f|}$ - одно из положит. чисел M_i^f и $(-m_i^f)$

т.е. $\underline{\omega_i^{|f|} \leq \omega_i^f}$

Спр-во не-во $\omega_i^{|f|} \leq \omega_i^f$ (пояснить на рис.) Док-ть самостоят-но.

Из (а), (б), (в) следует $\underline{\omega_i^{|f|} \leq \omega_i^f}$. Отсюда $\sum_{i=1}^n \omega_i^{|f|}\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \omega_i^f \Delta x_i$ (6)

Т.к. $f(x)$ инт-ма на $[a,b]$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ разбиение T сегмента $[a,b]$ такое, что $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$. В силу (6) $\sum_{i=1}^n \omega_i^{|f|}\Delta x_i < \varepsilon$.

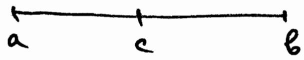
П. Т. 2 $|f(x)|$ интегр. на $[a,b]$

86г. Л.26.   85г. Л.24.

Пусть $f(x)$ кус.-непр. на $[a,b]$ и $c \in (a,b)$. Тогда

③ Аддитивность интеграла

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (2)$$

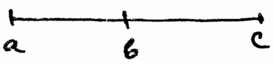
Док-во: 

Рассм. разбиения $[a,b]$, для которых т. c явл-ся точкой разбиения. Для таких разбиений:

$$\sum_{[a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{[c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{[a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Переходя к пределу при $\Delta \to 0$, получим р-во (2).

99г. Л.15. Отметим, что р-во (2) справедливо и в том случае, когда т. c лежит вне $[a,b]$.

Пусть, напр., $a<b<c$. 

По доказанному $\int_a^b + \int_b^c = \int_a^c$. Отсюда:

$$\int_a^c - \int_b^c = \int_a^b$$ или, учитывая св-во ①, $\int_a^c + \int_c^b = \int_a^b$, т.е. ф-ла (2) верна.

88г. Л.4

(интегр. ф-я)

④ Если $f(x) \ge 0$ на $[a,b]$ (и $a<b$), то $I = \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$.

Док-во. По опр. $\lim_{\Delta \to 0} I(x_i,\xi_i) = I$, $\ge$ любая $I(x_i,\xi_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \ge 0$.

т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall$ разб., у которого $\Delta < \delta$, вып-ся не-во:

$$|I(x_i,\xi_i) - I| < \varepsilon,$$

или

$$I - \varepsilon < \underline{I(x_i,\xi_i) < I + \varepsilon}$$

Предположим, что $I < 0$, и возьмём $\varepsilon = -I > 0$.

Тогда получим $I(x_i,\xi_i) < 0$, что противоречит не-ву $I(x_i,\xi_i) \ge 0$. Поэтому $I \ge 0$.

Следствие. Если $f(x) \ge g(x)$ на $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$.

Док-во. Т.к. $f(x) - g(x) \ge 0$, то $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \ge 0$, откуда $\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$.

СМ.ЖЮ.

(89г. Л.4; 90г. Л.5) [redacted]

⑤ Если $f(x)$ интегр. на $[a,b]$, то $|f(x)|$ также интегр. на $[a,b]$, и справедливо нер-во (при $a<b$):

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b |f(x)|dx. \qquad (3)$$

<u>Док-во:</u> Т.к. $f(x)$ инт. на $[a,b]$, то $\forall \varepsilon>0\ \exists$ разб. $[a,b]$, для которого

$$S^f - s^f = \sum_{i=1}^n \omega_i^f \Delta x_i < \varepsilon.$$

Т.к. $\omega_i^{|f|} \le \omega_i^f$, то для этого разбиения

$$S^{|f|} - s^{|f|} = \sum_{i=1}^n \omega_i^{|f|} \Delta x_i < \varepsilon.$$

Сл-но, $|f|$ – инт. ф-я на $[a,b]$.

Для док-ва (3) восп-ся нер-вом:

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \right| \le \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)| \Delta x_i$$

Переходя к пределу при $\Delta \to 0$, получим (3).

<u>Замеч.</u> Из инт-сти $|f(x)|$ не следует инт-сть $f(x)$.

<u>Пример:</u> $f(x) = \begin{cases} 1, & x\text{ - рац.} \\ -1, & x\text{ - иррац.} \end{cases} \quad x \in [a,b].$

$|f(x)| = 1$ – инт. ф-я, а $f(x)$ – не инт. ф-я.

⑥ Доказать самостоятельно:

а) если $f(x)$ и $g(x)$ инт. на $[a,b]$, то $f(x)g(x)$ инт. на $[a,b]$;

б) если $f(x)$ и $g(x)$ инт. на $[a,b]$ и $\inf\limits_{[a,b]} g(x) > 0$ (либо $\sup\limits_{[a,b]} g(x) < 0$)

то $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ инт. на $[a,b]$.

Т.к. $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$, то по св-ву (8)

$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$$

т.е. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$, что док-т (5).

Замечание. Если $|f(x)|$ — инт. ф-я, то $f(x)$ м.б. не инт. по Риману. (По Лебегу $f(x)$ и $|f(x)|$ инт. или не инт. одновременно).

77г. л. 26.
78г.
79г. л. 22.
80г. л. 22.

§ 6. Формулы среднего значения. 97г. л.15 95г. л.15. 91г. л.5

Теорема 6.1. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ интегр. ~~кус.-непр.~~ на $[a, b]$, $g(x) \ge 0$ (≤ 0) $\forall x \in [a,b]$,
$M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$, $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$,

тогда $\exists$ число $\mu \in [m, M]$ такое, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx \qquad (1)$$

(1-я ф-ла ср. значения в обобщ. форме).

Док-во. Пусть $g(x) \ge 0$ на $[a,b]$. (Т.к. $m \le f \le M$, то) $mg \le fg \le Mg$.

Поэтому $m\int_a^b g\,dx \le \int_a^b fg\,dx \le M\int_a^b g\,dx$

Т.к. $g(x) \ge 0$, то $\int_a^b g(x)dx \ge 0$.

Если $\int_a^b g\,dx = 0$, то, очевидно, $\int_a^b fg\,dx = 0$, и при любом μ (1) будет иметь место.

Пусть $\int_a^b g\,dx > 0$. Деля на $\int_a^b g(x)dx$, получим

$$m \le \frac{\int_a^b fg\,dx}{\int_a^b g\,dx} \le M$$

Дробь, стоящая в ср. части неравенств, явл-ся нек. числом из сегмента $[m,M]$. Обозначим это число через μ и получим (1). (См, н.о.)

Следствие 1. Если $f(x)$ — непр. на $[a, b]$, то $\exists$ т. $\xi \in [a,b]$ такая, что $\int_a^b fg\,dx = f(\xi)\int_a^b g\,dx$. (2)

Док-во. В силу непр-ти $f(x)$ для $\mu \in [m,M]$ $\exists$ т. $\xi \in [a,b]$: $f(\xi) = \mu$. Заменяя в (1) μ на $f(\xi)$, получим (2).

Следствие 2. Если f — интегр. на $[a, b]$, $M = \sup f$, $m = \inf f$, то $\exists \mu \in [m, M]: \int_a^b f dx = \mu(b-a)$ (3)

Следствие 3. Если f — непр. на $[a, b]$, то $\exists \xi \in [a,b]: \int_a^b f dx = f(\xi)(b-a)$. (4)

Ф-лы (3) и (4) вытекают из (1) и (2) ...

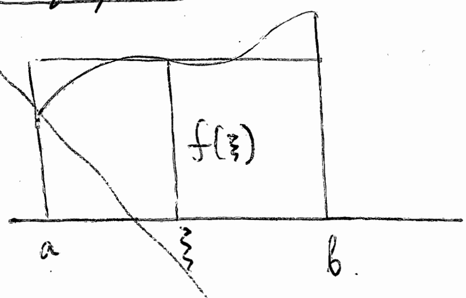
Замечание.

Если $g(x)$ не является знакопостоянной на $[a, b]$, то ф-ла (1) может быть не верна ни при каком μ. Например, пусть $f(x) = \cos x$, $g(x) = \cos x$, $0 \le x \le \pi$. Тогда

$$\int_0^{\pi} f(x) g(x)\, dx = \int_0^{\pi} \cos^2 x\, dx = \frac{\pi}{2} > 0, \quad \int_0^{\pi} g(x)\, dx = \int_0^{\pi} \cos x\, dx = 0,$$

и р-во (1) не вып-ся ни при каком μ.

Геом. смысл ф-лы ср. зн. для непр. неотриц. ф-ии. По ф-ле (4) $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

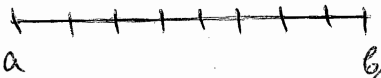


$\int_a^b f dx$ — площадь кривол. трапеции

$f(\xi)(b-a)$ — площадь прямоугольника.

Т. обр. можно найти такую т. ξ, что площадь прямоуг-ка с высотой $f(\xi)$ равна площади трапеции.

Арифм. смысл ~~[illegible]~~ $f(\xi)$ для непр. ф-ии.



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Рассм. случай $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$

Тогда $$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)}.$$

Отсюда $$\underbrace{f(\xi) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)}{n}}$$

т.е. «$f(\xi)$ есть ср. арифметическое бесконечно большого числа значений ~~[illegible]~~ $f(x)$»

Лекция 4. РОУ — л.1 во втором семестре. 4 апр. 2005 г. Л.15 (Начиная с этой лекции в апреле 2001 г. Алексеев читал Д.Д. Соколов)

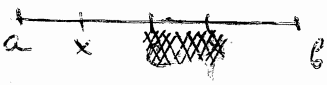
~~Существование первообразной у непр. ф-ии~~

§ 7. Ф-ла Ньютона-Лейбница.

Замечание о том, что $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.

В главе 5 было введено понятие первообразной. Вычисляли разл. первообр. Но не было док-но, для каких ф-ий они сущ-т.

Пусть $f(x)$ опр-на и непрерывна на $[a,b]$. Тогда $f(x)$ интегрируема на любом сегменте $\subset [a,b]$. Возьмём на $[a,b]$ 2 точки: a и $x \in [a,b]$.



a — фикс. точка

x — переменная точка

Опр. Ф-я $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ $(a\le x\le b)$ наз-ся интегралом с переменным верхним пределом. Пусть переменная t изм-ся от a до x.

Теорема 7.1. Непрерывная на $[a,b]$ ф-я $f(x)$ имеет первообразную на $[a,b]$. Одной из первообразных является ф-я $F(x)=\int_a^x f(t)dt$.

Док-во. Пусть x – произвольная точка $\in [a,b]$.

Нужно док-ть, что $\exists F'(x) = f(x)$, т.е. сущ. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = f(x)$

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(\xi)\cdot\Delta x,\ \text{где } x \le \xi \le x+\Delta x$$

[Δx выбираем столь малым, чтобы $x+\Delta x \in [a,b]$. Если $x=a$, то $\Delta x>0$; Если $x=b$, то $\Delta x<0$]

Св-ва ① и ③ ⑤

По ф-ле ср. зн. для непр. ф-ии. (См. 3 Т.6)

$a \quad x \quad \xi \quad x+\Delta x \quad b$

Отсюда $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\xi) = f(x)$. Всё док-но.

73г. Л. 29.

~~Вместо $\int_a^x f(t)dt$ ... можно ... точку $\in [a,b]$.~~

76г. Л.28. Пример. Найти первообразную функции $f(x) = e^{|x|}$ на $(-\infty,+\infty)$.

Ответ: $F(x) = \begin{cases} e^{x}, & x\ge 0 \\ -e^{-x}+2, & x\le 0. \end{cases}$

2009г. Л.14

Ф-ла Ньютона-Лейбница.

Т.к. любые две первообразные отличаются на const, то в силу Т.7 любая первообразная $\Phi(x)$ непрерывной на $[a,b]$ ф-ии $f(x)$ имеет вид

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C.$$

$x=a:\ \Phi(a) = C$

$x=b:\ \Phi(b) = \int_a^b f(t)dt + \Phi(a)$

Отсюда

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)}$$

Основная ф-ла инт. исчисления или ф-ла Н.-Л.

Она связывает Опр. инт-л с неопр-м.

92г. Л. 23.

Обознач. $\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)\Big|_a^b$

Примеры. 1) $\int_0^{\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = 1-(-1) = 2$. 2) $\int_0^{\pi} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\pi} = 0$;

3) $\int_{-1}^{+1} \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-1}^{+1} = \dfrac{\pi}{4} - \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

Замечание: См. и.о. стр. 19.

<u>Замеч. 1</u> 99г. Л.16, 2005г. Л.10, 2007г. Л.14

Ф-ла Н.-Л. доказана для непр-х ф-ций. Если $f(x)$ - кус.-непр. на $[a,b]$, то

В 2009 она не рассказывалась

не имеет первообразной в смысле данного в гл.5[redacted] определения (см. пример $f(x) = \operatorname{sgn} x$ из § 1 гл.5[redacted]). Дадим новое опр. первообразной.

<u>Опр.</u> Ф-я $F(x)$ наз-ся первообразной для ф-ции $f(x)$ на $[a,b]$, если

Это будет нужно в теореме о почленном диф-ии триг. ряда Фурье

1) $F(x)$ непр. на $[a,b]$;

2) $F'(x) = f(x)$ в точках непр-сти $f(x)$.

Для непр-х ф-ций $f(x)$ это опр-е совпадает со старым. Можно доказать, что любая кус.-непр. на $[a,b]$ ф-ция ~~...~~ $f(x)$ имеет первообр. в смысле нового определения, и одной из первообразных является снова $F(x) = \int f(t)\,dt$, ~~(напр. для sgn x $F(x) = |x|$)~~, и потому для кус. непр. ф-ций справедлива ф-ла Н.-Л.

<u>Пример.</u> $f(x) = \operatorname{sgn} x$ не имеет первообразной на $(-\infty, +\infty)$ в смысле старого определения, но имеет первообразную $F(x) = |x| + c$ в смысле нового определения.

~~32 Док-ть последние утверждения~~

Сформулированные утверждения войдут в экз. билеты в виде задач повышенной трудности.

88г. Л.5.

<u>Замеч. 2</u> Было доказано (для непр. ф-ций $f(x)$), что

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Вычислим $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt$.

Пусть $\mathcal{F}(x)$ - первообразная ф-ции $f(x)$, т.е. $\mathcal{F}'(x) = f(x)$.

По ф-ле Ньютона - Лейбница

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt = \mathcal{F}(t)\Big|_{\varphi(x)}^{\psi(x)} = \mathcal{F}(\psi(x)) - \mathcal{F}(\varphi(x)).$$

Отсюда получаем

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt = \mathcal{F}_t'(\psi(x))\cdot\psi'(x) - \mathcal{F}_t'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x).$$

Итак,

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt = f(\psi(x))\cdot\psi'(x) - f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)}$$

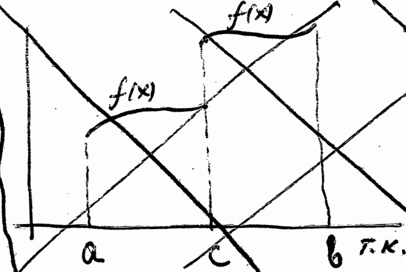
Например, $\displaystyle\frac{d}{dx}\int^{\sin x}$ [redacted] $^{-t^2}\,dt =$ [redacted] $e^{-\sin^2 x}\cdot\cos x + e^{-\cos^2 x}\cdot\sin x.$

Замечание 1. (см. н.о.)

~~Ф-ла Н-Л для кусочно-непр-х ф-ций.~~

~~Напомним опр. кус.-непр. ф-ции. Для кус.-непр. ф-й старое опр. первообр. не~~

~~Для ф-ии $f(x) = \text{sign}\, x$ (напр. на $[-1,1]$) не сущ-т первообразная в смысле данного ранее опр., т.к. при $x=0$ ф-я $|x|+C$ не имеет пр-й.~~
~~Для кус. непр-х ф-й нужно дать новое опр. первообразной.~~



~~Опр. первообразной для кус.-непр. ф-ции.~~

~~(Старое опр. не годится, т.к. в т. с~~

~~$$f(c-0) = F'(c-0) \neq F'(c+0) = f(c+0),$$ т.е. в т. с получается разрыв 1 рода у ф-ии $F'(x)$, чего не может быть т.к. если $F(x)$ имеет производную в каждой точке (a,b), то у $F'(x)$ нет точек разрыва 1 рода.)~~

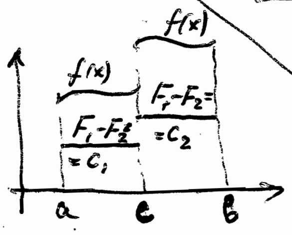
~~Опр. $F(x)$ наз-ся первообразной кус.-непр. ф-ии $f(x)$ на $[a,b]$, если 1) $F(x)$ — непр. на $[a,b]$~~

~~2) $F'(x) = f(x)$ в точках непр-сти $f(x)$.~~

Для кус.-непр. ф-ий справедлива ф-ла Н-Л. $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$, где $F(x)$ — опр-я выше первообр.

~~Утверждение 1. Любые две первообр. отличаются на const.~~

~~Док-во. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — любые две первообразные. В точках непр-сти $f(x)$ $F_1' - F_2' = 0$, т.е. в точках непр-сти $f(x)$ $F_1 - F_2 = \text{const}$. Т.к. $F_1 - F_2$ непр-на, то const одна и та же на всех интервалах непр-сти $f(x)$, т.е. $F_1 - F_2 = \text{const}$ $[a \le x \le b]$~~



~~$C_1 = C_2$, т.к. $F_1 - F_2$ — непр.~~

~~Утверждение 2. [Кусочно непр-я на $[a,b]$ ф-я $f(x)$ имеет первообр. на $[a,b]$. Одной из первообразных явл-ся $\int\limits_a^x f(t)dt = F(x)$~~

~~Док-во 1) Докажем непр-сть $\int\limits_a^x f(t)dt = F(x)$~~

~~$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \mu\Delta x \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0$$~~

~~по теор. о среднем~~

~~2) Если $f(x)$ непр. в т. x, то можно взять Δx столь малым, что $f(x)$ будет непр-й на $[x, x+\Delta x]$~~

~~Тогда $\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)\Delta x$ и $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = f(x)$~~

~~Ут. 3. Если $f(x)$ — кус.-непр. на $[a,b]$, то для неё верна ф-ла Н.-Л.~~

~~Док-во дословно повторяет вывод ф-лы Н.-Л. для непр-х ф-ий.~~

Замечание 2.

~~Опр. интеграл, как сложная функция переменного верхнего предела.~~ (что для непр. на $[a,b]$ ф-ии $f(x)$ интеграл с перем. верх. пр. $\int_a^x f(t)dt$ явл-ся первообр., т.е.

Было показано, $\dfrac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$.

Рассмотрим интеграл $\Phi(x) = \int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt$, ~~{сложная ф-я интегр. верхнего предела}~~

где $f(t)$ – непр., а $\varphi(x)$ – дифф. ф-я.

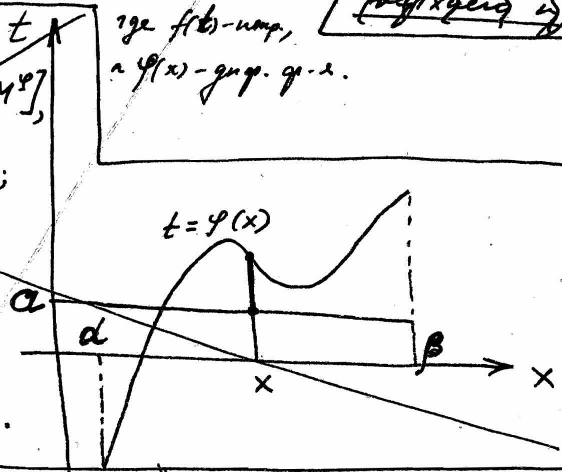
Пусть 1) $t=\varphi(x)$ дифф-ма на $[\alpha,\beta]$,

2) $y=f(t)$ – непрерывна на $[m^{\varphi}, M^{\varphi}]$,

где $m^{\varphi}=\min\limits_{[a,b]}\varphi(x)$; $M^{\varphi}=\max\limits_{[a,b]}\varphi(x)$;

3) $a\in[m^{\varphi}, M^{\varphi}]$.

4) $F(t)$ – первообразная $f(t)$ на $[m^{\varphi}, M^{\varphi}]$, т.е. $F'(t)=f(t)$.



Пусть $F(t)$ – первообр. непр. ф-ии $f(t)$, т.е. $F'(t)=f(t)$, а $\varphi(x)$ – дифф. ф-я.

Тогда по ф-ле Н.-Л. при каждом x

$$\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt = F(t)\Big|_a^{\varphi(x)} = F(\varphi(x)) - F(a)$$

Дифф-я, получим

$$\frac{d}{dx}\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt = F'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) = f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x).$$

Аналогично можно получить

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt\right] = f(\varphi(x))\,\varphi'(x) - f(\psi(x))\,\psi'(x).$$

~~(Сформулировать условия, при которых эта ф-ла верна, а док-ть самостоятельно).~~

Пример. $\dfrac{d}{dx}\left(\int_{\cos x}^{\sin x} e^{-t^2}dt\right) = e^{-\sin^2 x}\cdot\cos x + e^{-\cos^2 x}\sin x.$

81г. Л.26. 82г. Л.27. 83г. Л.28

~~Методы интегрирования.~~

89г. Л.5. 90г. Л.6

§8. {Замена переменной и интегрирование по частям}

Теорема 8. Пусть 1) $f(x)$ (опр. и) непр. на $[a,b]$,

2) $g(t)$ опр-на и имеет непр. пр-ю на $[\alpha,\beta]$, причём $g(\alpha)=a$, $g(\beta)=b$ (и $a\le g(t)\le b$) (т.е. мн-м знач. $g(t)$ явл-ся $[a,b]$).

Тогда $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)dt$ (ф-ла замены переменной)

Док-во. Пусть $F(x)$ – одна из первообразных для $f(x)$ на $[a,b]$ (т.е. $F'=f$). Тогда $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$. (1)

Т.к. $F(x)$ и $g(t)$ диф-мы, то сложная ф-я $F(g(t))$ также диф-ма и для любого $t\in[\alpha,\beta]$

$$\frac{d}{dt}F(g(t)) = F'(g(t))\,g'(t) = f(g(t))\,g'(t).$$

Отсюда следует, что $F(g(t))$ является первообразной для $f(g(t))\,g'(t)$ (непр. ф-ии) на $[\alpha,\beta]$

Поэтому $$\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt = F(g(t))\Big|_\alpha^\beta = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) =$$

$$= F(b)-F(a) \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), получаем:

~~С др. стороны $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$~~

Отсюда $$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$ Всё док-но.

Практическое применение ф-лы: $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\underbrace{g(t)}_{x})\,\underbrace{g'(t)dt}_{dx}$

Пример.

~~$J = \int_{\frac{3}{2\pi}}^{\frac{3}{\pi}} \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx$; $x=\frac{1}{t}$; $dx = -\frac{1}{t^2}dt$; $x=\frac{3}{2\pi}\to t=\frac{2\pi}{3}$; $x=\frac{3}{\pi}\to t=\frac{\pi}{3}$~~

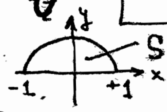
~~$J = -\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos t\,dt = -\sin t\Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{\sqrt3}{2} - \left(-\frac{\sqrt3}{2}\right) = 0$~~

$J = \int_{-1}^{+1}\sqrt{1-x^2}\,dx$;

$x=\cos t$ $(0\le t\le \pi)$

$J = +\int_0^\pi \sin^2 t\,dt = \int_0^\pi \frac{1-\cos 2t}{2}dt =$

$= \frac{\pi}{2}$.



$S=\frac{\pi}{2}$.

74г. Л.29. 84г. Л.27. 86г. Л.27. РОУ – Л.2 во 2-м семестре 95г. Л 16

Теорема 9. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на $[a,b]$. Тогда

$$\int_a^b uv'dx = [uv]\Big|_a^b - \int_a^b u'v\,dx$$ – ф-ла интегр. по частям.

Док-во: Т.к. $[uv]' = u'v + uv'$, то $[uv]$ явл-ся первообразной для $u'v+uv'$.

Отсюда $$\int_a^b (u'v+uv')dx = [uv]\Big|_a^b,$$ что и тр. док.

Др. форма записи $\left(\int_a^b u\,dv = [uv]\Big|_a^b - \int_a^b v\,du\right)$

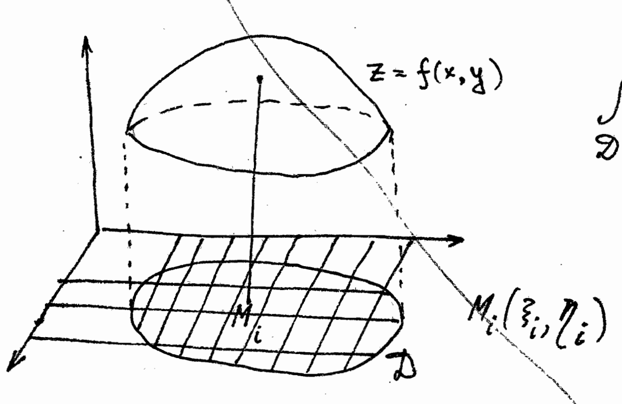
Пример. $$\int_0^\pi x\sin x\,dx = \int_0^\pi -x\,d(\cos x) = -x\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,dx =$$

$$= \pi - 0 + \sin x\Big|_0^\pi = \pi.$$

— : —

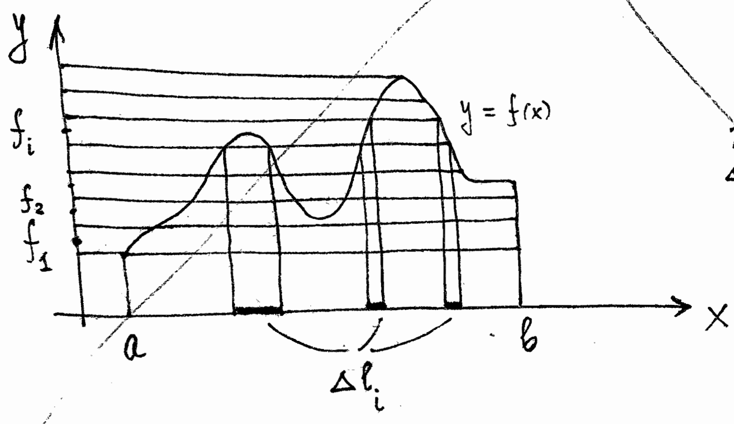
Замечание: 1) О кратных ~~интегралах~~, 2) Об инт. Лебега. (См. н.о.)

1) О кратных интегралах.



$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta S_i$$

2) Об интеграле Лебега.



$$\lim_{\Delta y_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f_i\,\Delta l_i =$$ интеграл Лебега.

Интеграл от ф-ии Дирихле

$\int_0^1 D(x)\,dx = 0$, т.к. $\sum f_i \Delta l_i = 0 \cdot \Delta l_1 + 1 \cdot \Delta l_2 = 0$.

($\Delta l_2 < \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ – сколь угодно мало, сл-но $\Delta l_2 = 0$ – мера мн-ва рац. точек).

§ 9. Длина дуги кривой.

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат Oxy. Рассмотрим множество точек $\{M(x,y)\}$, координаты которых задаются уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \le t \le \beta, \qquad (1)$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывные функции на $[\alpha,\beta]$.

Если некоторая точка $M \in \{M\}$ соответствует нескольким значениям $t \in [\alpha,\beta]$, то такую точку назовём <u>кратной</u>.

Пусть различным значениям $t \in [\alpha,\beta]$ соответствуют различные точки $M(x,y)$, т.е. мн-во $\{M(x,y)\}$ не содержит кратных точек. Тогда мн-во $\{M(\varphi(t),\psi(t))\}$ назовём <u>простой плоской незамкнутой кривой</u>. Переменную t назовем <u>параметром</u> и будем говорить, что <u>уравнения (1) задают кривую параметрически</u>.

Точки $A(\varphi(\alpha),\psi(\alpha))$ и $B(\varphi(\beta),\psi(\beta))$ назовем <u>граничными точками</u> или <u>концами</u> кривой. Саму кривую называют также <u>кривой AB</u> или <u>дугой AB</u>.

Если точки A и B совпадают, а остальные точки не являются кратными, то кривая называется <u>простой замкнутой кривой</u>.

<u>Примеры.</u> 1) $x = \cos t$, $y = \sin t$

а) $0 \le t \le \pi$ — простая незамкнутая кривая (полуокружность),

б) $0 \le t \le 2\pi$ — простая замкнутая кривая (окружность),

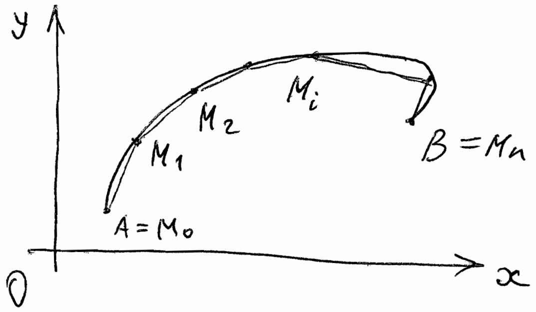
в) $0 \le t \le 4\pi$ — непростая кривая (все её точки - двукратные, кроме точки $(1,0)$ — она трехкратная).

2) График непр. ф-ии $y = f(x)$, $a \le x \le b$, можно рассматривать как простую незамкн. кривую. Соотв. параметрические ур-я:

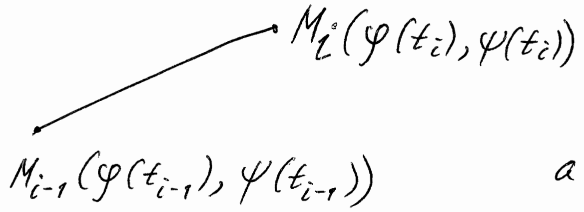
$$x = t, \quad y = f(t), \quad a \le t \le b.$$

Рассмотрим простую (замкнутую или незамкнутую) кривую, заданную ур-ем (1). Разобьем $[\alpha,\beta]$ на n частей точками

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta.$$



Каждому значению t_i соответствует точка $M_i(\varphi(t_i), \psi(t_i))$ на кривой. Впишем в кривую ломаную $AM_1M_2 \cdots B$.



Длина i-го звена ломаной равна

$$\Delta l_i = \sqrt{(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))^2+(\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2},$$

а длина всей ломаной

$$l(t_i) = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))^2+(\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2} \qquad (2)$$

Пусть $\Delta = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta t_i$, где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

<u>Определение</u>. Число l наз-ся пределом длин ломаных $l(t_i)$ при $\Delta \to 0$, если $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$, такое, что $\forall$ разбиения $[\alpha,\beta]$, у которого $\Delta<\delta$, выполняется нер-во

$$0 \le l - l(t_i) < \varepsilon.$$

Если сущ-т $\lim\limits_{\Delta\to 0} l(t_i) = l$, то кривая наз-ся <u>спрямляемой</u>, а число l – <u>длиной её дуги</u>.

<u>Теорема 10.</u> <u>Пусть</u> простая кривая задана параметрически

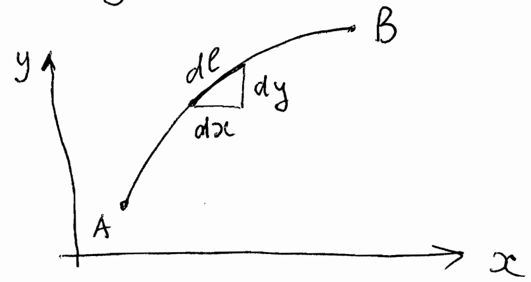
$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\quad \alpha\le t\le\beta \qquad (1)$$

и пусть функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют непрерывные производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ на $[\alpha,\beta]$.

<u>Тогда</u> кривая спрямляема и длина l её дуги выражается формулой

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\, dt. \qquad (3)$$

а) Доказательство "на пальцах".



$$dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)\,dt$$

$$dy = d\psi(t) = \psi'(t)\,dt$$

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt$$

$$l = \int_\alpha^\beta dl = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt.$$

б) "Аккуратное" док-во.

Нужно доказать, что $\exists \lim\limits_{\Delta\to 0} l(t_i) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt.$ (4)

Длина ломаной $l(t_i)$ выражается формулой (2). По формуле Лагранжа конечных приращений имеем:

$$\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\xi_i)\Delta t_i\,, \quad \xi_i \in [t_{i-1}, t_i],$$

$$\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}) = \psi'(\xi_i^*)\Delta t_i, \quad \xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$$

t_{i-1} ξ_i ξ_i^* t_i

Следовательно,

$$l(t_i) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\xi_i^*)}\,\Delta t_i\,.$$

Введём функцию $f(t) = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$. Она непрерывна и, сл-но, интегрируема на $[\alpha,\beta]$. Интегральная сумма этой функции, соответствующая разбиению $[\alpha,\beta]$ на частичные сегменты $[t_{i-1}, t_i]$ и выбору точек ξ_i в качестве промежуточных точек, имеет вид

$$I(t_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta t_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\xi_i)}\,\Delta t_i\,.$$

По определению определенного интеграла

$$\lim_{\Delta\to 0} I(t_i, \xi_i) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt. \qquad (5)$$

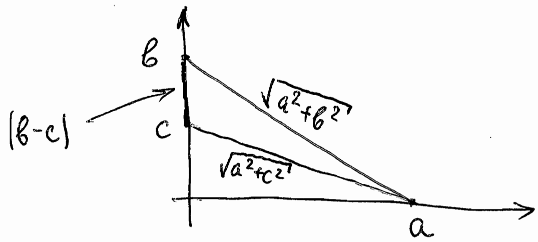
В силу (5) для док-ва (4) достаточно доказать, что

$$\lim_{\Delta\to 0}\left(\ell(t_i)-I(t_i,\xi_i)\right)=0.$$

Для этого понадобится вспомогательное (алгебраическое) неравенство

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\leq|b-c|. \qquad (6)$$

Вот его (геометрическое) док-во:



Согласно не-ву треугольника

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\leq|b-c|.$$

Используя не-во (6), а также выражения для $\ell(t_i)$ и $I(t_i,\xi_i)$, получаем

$$\left|\ell(t_i)-I(t_i,\xi_i)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\psi_i'^2(\xi_i^*)}-\sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\xi_i)}\right)\Delta t_i\right|\leq$$

$$\leq\sum_{i=1}^{n}\left|\psi'(\xi_i^*)-\psi'(\xi_i)\right|\cdot\Delta t_i.$$

Зададим теперь произвольное $\varepsilon>0$. Т.к. $\psi'(t)$ непрерывна на $[\alpha,\beta]$, то $\exists\,\delta>0$, такое, что при $\Delta t_i<\delta$ будет выполнено не-во

$$\left|\psi'(\xi_i^*)-\psi'(\xi_i)\right|<\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}.$$

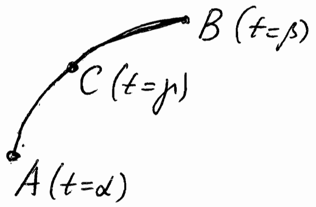
Следовательно, при $\Delta t_i<\delta$ (т.е. при $\Delta<\delta$) выполняется не-во

$$\left|\ell(t_i)-I(t_i,\xi_i)\right|<\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i=\varepsilon,$$

а это и означает, что $\lim\limits_{\Delta\to 0}\left(\ell(t_i)-I(t_i,\xi_i)\right)=0$. Теорема 10 доказана.

2007г. Л.15

Следствия. ① Возьмём на кривой AB произвольную точку $C(\varphi(\gamma),\psi(\gamma))$, $\gamma\in(\alpha,\beta)$. Тогда



$$\ell_{AC}=\int_\alpha^\gamma\sqrt{}\,dt,\quad \ell_{CB}=\int_\gamma^\beta\sqrt{}\,dt.$$

Т.к. $\int_\alpha^\gamma+\int_\gamma^\beta=\int_\alpha^\beta$, то $\ell_{AC}+\ell_{CB}=\ell_{AB}$. Это св-во наз-ся аддитивностью длины дуги.

2009 г. 1.15

② Пусть кривая задана в прямоуг. системе координат уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$, причем ф-я $f(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную производную $f'(x)$.

Перейдём к параметрическим уравнениям кривой:

$$x = \underbrace{t}_{\varphi(t)}, \quad y = \underbrace{f(t)}_{\psi(t)}, \quad a \le t \le b$$

По формуле (3) получаем

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)}\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

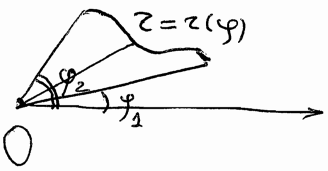
③ Пусть кривая задана уравнением в полярных координатах

$$r = r(\varphi), \quad \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2,$$

причём ф-я $r(\varphi)$ имеет на $[\varphi_1, \varphi_2]$ непр. производную $r'(\varphi)$.

Переходя к декартовым координатам, получим уравнение кривой в параметрической форме (φ — параметр):

$$x = r(\varphi)\cos\varphi, \quad y = r(\varphi)\sin\varphi, \quad \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2.$$



Т.к. $x'(\varphi) = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi$, $y'(\varphi) = $
$= r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi$, то, применяя ф-у (3), получаем

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi)}\, d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\, d\varphi.$$

~~④~~ Если кривая задана в полярных координатах уравнением $\varphi = \varphi(r)$, $r_1 \le r \le r_2$, то

$$l = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 + r^2\varphi'^2(r)}\, dr$$ (вывести эту формулу самостоятельно).

$x'(\varphi) = r'\cos\varphi - r\sin\varphi$; $y'(\varphi) = r'\sin\varphi + r\cos\varphi$; $x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi) = r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)$

Подставляя в (3), получим

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\, d\varphi .$$

Если $\varphi = \varphi(r)$, $(r_1 \le r \le r_2)$, то $l = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 + r^2 \varphi'^2(r)}\, dr$ (Самостоятельно!). $\boxed{3}$ 3-га на дом

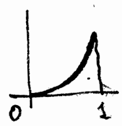
Примеры. 2) $r = R = const$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ (снова окружность, но теперь в полярных координатах).

1) $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$

$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}\, dt = 2\pi R$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + 0}\, d\varphi = 2\pi R.$$

3) $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.



$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx = \left[x\sqrt{x^2 + \tfrac{1}{4}} + \tfrac{1}{4}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + \tfrac{1}{4}}\right) \right]\Bigg|_0^1 =$$

Сосчитать самостоятельно

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\left[\ln\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) - \ln\frac{1}{2}\right] = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln(2 + \sqrt{5}).$$

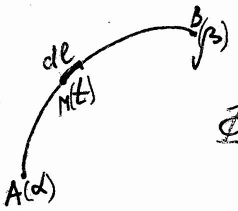
77г. Лекция 28.

73г. Лекция 31 82г. Л. 28. 86г. Л. 28 РОУ – Л. 3 во 2-м семестре.

④ Переменная дуга

Пусть $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ – имеют на $[\alpha, \beta]$ непр. пр-е.

~~Возьмём на $[\alpha,\beta]$ произв. знач. t и положим~~ Введем ф-ю



$$l(t) = \int_\alpha^t \sqrt{\varphi'^2(s) + \psi'^2(s)}\, ds, \quad \alpha \le t \le \beta, \text{ – длина дуги } AM.$$

Ф-я $l(t)$ назовём переменной дугой.

Из 2 7 следует, что

$$l'(t) = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$$

Геом. смысл dl – длина элемента кривой (см. рис.)

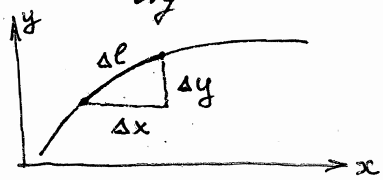
Отсюда $dl = l'(t)dt = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt$.

Возводя в квадрат, ~~и умножим на dt^2~~ получим

$$[\underbrace{l'(t)dt}_{dl}]^2 = [\underbrace{\varphi'(t)dt}_{dx}]^2 + [\underbrace{\psi'(t)dt}_{dy}]^2$$

Отсюда

$$dl^2 = dx^2 + dy^2.$$



Таким обр. для диф-лов dl, dx, dy (т.е. для главных частей приращений $\Delta l, \Delta x, \Delta y$) справедлива т. Пифагора.

В декартовых координатах $dl = \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$

В полярных координатах $dl = \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\, d\varphi$.

~~6~~ Замечания о пространственной кривой.

Простая простр. кривая ~~можно~~ опр-ся, как мн-во точек $\{M(x,y,z):\ x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t)\ (\alpha\le t\le\beta)\}$, где φ, ψ, χ — непр. ф-ии на $[\alpha,\beta]$, причем ~~нет~~ мн-во $\{M(x,y,z)\}$ не содержит кратных точек. Понятие длины дуги можно ввести аналогично плоской кривой и получить ф-лы:

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt,$$

$$dl^2=dx^2+dy^2+dz^2.$$

~~линии~~

Пример. $\begin{cases} x=R\cos t\\ y=R\sin t\\ z=ht\end{cases}$ — винтовая линия.

Пусть $0\le t\le 2\pi$, тогда $l=\int_0^{2\pi}\sqrt{R^2+h^2}\,dt=2\pi\sqrt{R^2+h^2}.$

§ 10. Площадь плоской фигуры.

① Множества точек плоскости.

Пусть M_1 и M_2 – две точки плоскости. Через $\rho(M_1, M_2)$ обозначим расстояние между M_1 и M_2.

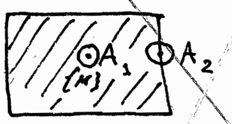
Через $\{M : Q\}$ обозначим мн-во всех точек M пл-ти, обладающих нек-м св-м Q.

Пусть A – произв. т. плоскости, $\varepsilon > 0$.

Опр1. $\{M : \rho(M, A) < \varepsilon\}$ ~~наз-ся~~ ε-окр. точки A назовем мн-во всех точек пл-ти, расст. которых от т. A $< \varepsilon$.

Опр2. Пусть $\{M\}$ – нек. мн-во точек пл-ти. Точка $A \in \{M\}$ наз-ся внутр. точкой $\{M\}$, если $\exists$ нек. ε-окр. т. A, целиком $\in \{M\}$.

Опр3. Точка A ($\in$ или $\bar{\in}$ $\{M\}$) наз-ся граничной точкой $\{M\}$, если в любой ε-окр. т. A содержатся как точки $\in \{M\}$, так и точки $\bar{\in} \{M\}$.

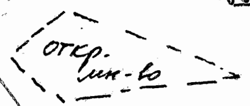


A_1 – внутр. точка многоугольника,
A_2 – гр. точка —"—

Опр4. ~~Мн-во $\{M\}$ наз-ся~~ Совокупность всех граничных точек мн-ва $\{M\}$ наз-ся его границей.
(Отметим, что вся граница или часть её может $\bar{\in} \{M\}$).

79г. Л.24.

Опр5. Мн-во $\{M\}$ наз-ся открытым мн-вом, если все его точки – внутренние.



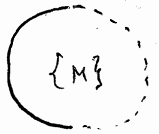
Опр6. Мн-во $\{M\}$ наз-ся замкнутым, если оно содержит все свои гр. точки.

Примеры (см. н.о.)

Опр7. Мн-во $\{M\}$ наз-ся огр-м, если ~~его~~ можно ~~поместить~~ указать такой квадрат (или круг), который содержит все точки $\{M\}$. ~~внутрь некоторого большого квадрата (или круга).~~

Опр8. Плоской фигурой назовём огр. мн-во точек пл-ти.

Например, круг, многоугольник – огр. мн-ва; прямая – неогр. мн-во.

1) 

$\{M\}$ — мн-во, не явл-ся ни открытым, ни замкнутым

2) Вся пл-ть — множество и открытое, и замкнутое, т.к. любая точка — внутренняя, а граница $= \varnothing$ (пустое мн-во) $\subset$ пл-ти.

<u>Нетрив. пример.</u>

3) $G^* = \{M(x,y):\ x$ и y - рац, $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ — мн-во не явл-ся ни откр., ни замкн.

Граница $\{M\} = \{(x,y):\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ — весь квадрат имеет мощность континуум, в то время как само мн-во G^* — счётное.

(см. н. о.)

② Понятие квадрируемости плоской фигуры и площади по Жордану.

Под многоугольной фигурой будем понимать мн-во, составленное из конечного числа многоугольников.

Из элем. геометрии хорошо известно понятие площади многоугольной фигуры.

Площадь многоугольной фигуры Q (при выбранной единице измерения) — это (некоторое) число $P(Q)$, ~~[illegible]~~ причём

1) $P(Q) \geq 0$ (неотрицательность)

2) Если Q_1 и Q_2 — две многоугольные фигуры без общих внутренних точек, то

$$P(Q_1 \cup Q_2) = P(Q_1) + P(Q_2)$$ (аддитивность площади)

Распространим теперь понятие площади, сохранив указанные 2 св-ва, на более широкий класс (плоских) фигур. При этом мы введём понятие площади по Жордану, основная идея которого восходит ещё к математикам древней Греции и состоит в том, что (в качестве приближения к) „измеряемому" мн-ву G (т.е. мн-ву, ~~для~~ (площадь) которого мы хотим (определить) ~~ввести понятие площади~~) берутся вписанная и описанная многоугольные фигуры $Q_в$ и $Q_о$, для которых понятие площади известно, т.е.

$$Q_в \subseteq G \subseteq Q_о.$$

Рассмотрим подробно метод введения площади по Жордану.

Пусть G — огр. мн-во на пл-ти, т.е. плоская фигура.

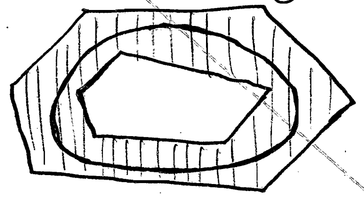
Опр. Многоугольную фигуру $Q_в$ назовём вписанной в фигуру G, если каждая точка $Q_в$ $\in G$ ~~[illegible]~~.
Многоугольную фигуру $Q_о$ назовём описанной вокруг фигуры G, если каждая ~~[illegible]~~ точка фигуры G ~~[illegible]~~ $\in Q_о$.

Из этого опр. следует, что $Q_в \subset G \subset Q_о$, в частности $Q_в \subset Q_о$.

(см. н. о.)

~~Договоримся считать (чтобы не делать специальных оговорок в дальнейшем), что многоугольные фигуры содержат свои границы. Тогда справедливо~~

~~**Замечание (*).** Любая внутренняя точка $Q_в$ является также внутренней точкой G, а любая граничная точка G ($\in$ или $\bar{\in} G$) является внутренней или гр. точкой $Q_о$. Тем самым вся граница G содержится в замкнутой многоугольной фигуре, заключённой между границами $Q_в$ и $Q_о$.~~



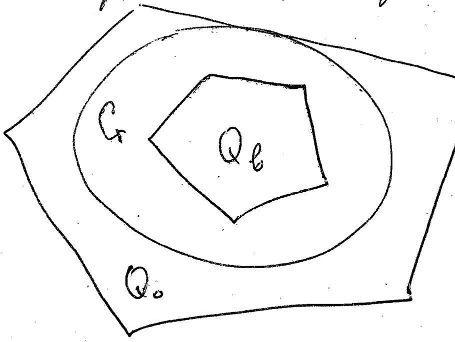
Очевидно, $\forall Q_в$ и $Q_о$ граница $G \in$ замкн. обл. $\overline{Q_о - Q_в}$.

~~Утверждение. Если допустить многоугольники без границ, то~~

91г. л. 7.

(1) Понятие площади плоской фигуры.

Будем исходить из того, что нам ~~Из курса элементарной математики~~ известно понятие площади многоугольника. Рассмотрим плоскую фигуру G, ограниченную простой замкнутой кривой. Многоугольник $Q_в$ будем называть вписанным в фигуру G, а многоугольник $Q_о$ — описанным около G, если $Q_в \subset G \subset Q_о$.



Площадь $Q_в$ обозначим $P_в(\cancel{Q_в})$, площадь $Q_о$ — $P_о(\cancel{Q_о})$. Очевидно,

$\forall Q_в$ и $Q_о$: $P_в(\cancel{Q_в}) \leq P_о(\cancel{Q_о})$.

Пусть $\{P_в\}$ – мн-во площадей всех вписанных в G мн-ков. Оно огр. сверху (любой $P_о$) и, сл-но, имеет $\sup\{P_в\} = \underline{P}$.

Если в G нельзя вписать ни одного многоугольника, то по определению положим $\underline{P} = 0$.

Пусть $\{P_о\}$ – мн-во площадей всех описанных G мн-ков. Оно огр. снизу (напр., нулём) и, сл-но, имеет $\inf\{P_о\} = \overline{P}$.

Опр. Числа $\underline{P}$ и $\overline{P}$ наз-ся соотв-но <u>нижней</u> и <u>верхней</u> <u>площадью</u> фигуры G.

Если $\overline{P} < \underline{P}$, то $\exists\, Q_в$ и $Q_о$: $P_в > P_о$ – противоречие.

Утверждение: $\underline{P} \le \overline{P}$

Таким обр. $\underbrace{P_в \le \underline{P} \le \overline{P} \le P_о}$ (*)

Опр. Плоская фигура G наз-ся <u>квадрируемой</u>, если $\underline{P} = \overline{P}$. При этом число $P = \underline{P} = \overline{P}$ наз-ся <u>площадью фигуры G (по Жордану)</u>.

<u>Замечание</u>. Всякая многоуг. фигура явл-ся, очевидно, квадр. по новому опр., и её площадь по Жордану совпадает с опр. ранее пл-ю.

80г. Л.24. ② <u>Необх. и дост. усл. квадрируемости</u>.

<u>Т. 12.</u> Для того, чтобы пл. ф. G была квадр-й, <u>необх. и дост.</u>, чтобы $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, Q_в$ и $Q_о$ такие, что $P_в - P_о < \varepsilon$.

<u>Док-во.</u> <u>1) Необх-сть.</u> Пусть G – квадр. фигура, т.е. $\underline{P} = \overline{P} = P$. По опр. sup и inf $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, Q_в$ и $Q_о$ такие, что

$$\underline{P} - P_в < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$P_о - \overline{P} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Складывая, получим $P_о - P_в < \varepsilon$.

2) <u>Дост-ть.</u> Пусть $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, Q_в$ и $Q_о$ такие, для которых $P_о - P_в < \varepsilon$. Воспользуемся не-ми (*):

$$P_в \le \underline{P} \le \overline{P} \le P_о,$$

Отсюда следует, что $0 \le \overline{P} - \underline{P} < \varepsilon$. В силу произв. малости ε получаем $\underline{P} = \overline{P}$, т.е. по опр. G – квадрируема

Опр. Будем говорить, что нек. ~~фигура~~ (в частности, кривая) имеет площадь нуль, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ Q_0 такой, что $P(Q_0) < \varepsilon$.

Теорему 11 можно сформулировать теперь таким об.

Т. 11'. Для того, чтобы пл. ф. G была квадрируемой, необх. и дост., чтобы её граница имела площадь нуль.

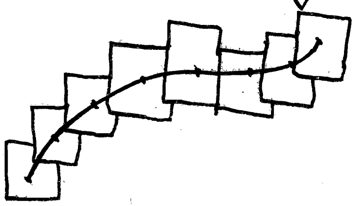
Док-во вытекает из Т. 11 и замечания (*).

— · —

(4) ~~Дост. усл. квадрируемости.~~ Квадрируемость фигур, ограниченных спрямляемыми кривыми.

Лемма. Всякая спрямляемая кривая имеет площадь нуль.

Док-во. Расм. спрямляемую кривую, длина которой $= l$.



Разобьём её с помощью $n+2$ точек на $n+1$ часть так, чтобы длина каждой части была $< \frac{l}{n}$, и примем каждую из точек за центр квадрата со стороной $\frac{2l}{n}$. Объединение этих квадратов представляет собой многоугольную фигуру Q_0, описанную вокруг кривой.

$$P(Q_0) \le \frac{4l^2}{n^2}(n+2) <$$ любого наперёд заданного ε при дост. большом n. Сл-но, кривая имеет площадь нуль. Лемма док-на.

Т. 12. Для того, чтобы пл. ф. G была квадрируемой, дост-но, чтобы её граница была спрямляемой кривой.

Док-во вытекает из Т. 11' и леммы.

81г. Л. 28.

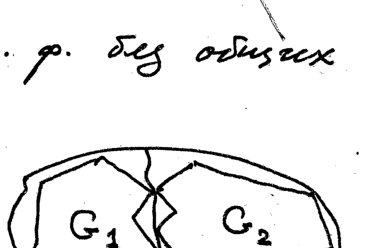
— · —

(5) Аддитивность площади.

Т. 13. Пусть 1) G_1 и G_2 — квадрируемые пл. ф. без общих внутр. точек; 2) $G = G_1 \cup G_2$.

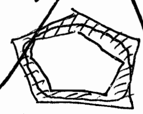
Тогда 1) G — квадрируема,

2) $P(G) = P(G_1) + P(G_2)$. (1)

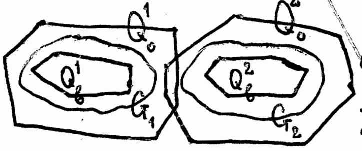


$\boxed{34}$ (Док-ть самостоятельно, используя Т. 11.) (Сказать идею док-ва)

~~Для док-ва т. 13' дост. заметить, что всякая внутр. т. $Q_в$ явл-ся внутр. точкой G, а всякая гр. точка т. $G \in Q_0$, откуда следует, что вся граница G лежит в замкнутой области между граничащими Q_0 и $Q_в$.~~



Док-во. 1) В силу Т.13' гр. G_1 и гр. G_2 имеют площадь нуль. Т.к. гр. G является частью $\{$гр.$G_1 \cup$ гр.$G_2\}$, то она также имеет площадь нуль. По Т. 4' G — квадр-ма. Обозначим её площадь $P(G)$.



2) Рассм. $Q_{\text{в}}^1$, $Q_{\text{в}}^2$, $Q_{\text{о}}^1$ и $Q_{\text{о}}^2$. Очевидно $P(Q_{\text{в}}^1) \le P(G_1) \le P(Q_{\text{о}}^1)$ (2)

$P(Q_{\text{в}}^2) \le P(G_2) \le P(Q_{\text{о}}^2)$ (3)

Обозначим $Q_{\text{в}} = Q_{\text{в}}^1 \cup Q_{\text{в}}^2$; $Q_{\text{о}} = Q_{\text{о}}^1 \cup Q_{\text{о}}^2$.

Т.к. $Q_{\text{в}}^1$ и $Q_{\text{в}}^2$ не имеют общих внутр. точек, то

$$P(Q_{\text{в}}) = P(Q_{\text{в}}^1) + P(Q_{\text{в}}^2)$$

Т.к. $Q_{\text{о}}^1$ и $Q_{\text{о}}^2$ могут иметь общие внутр. точки, то

$$P(Q_{\text{о}}) \le P(Q_{\text{о}}^1) + P(Q_{\text{о}}^2)$$

Т.к. $Q_{\text{в}}$ яв-ся вписанной многоуг. фигурой для G, а $Q_{\text{о}}$ — описанной, то

$$P(Q_{\text{в}}^1)+P(Q_{\text{в}}^2) = P(Q_{\text{в}}) \le P(G) \le P(Q_{\text{о}}) \le P(Q_{\text{о}}^1) + P(Q_{\text{о}}^2) \quad (4)$$

Складывая (2) и (3), получим

$$P(Q_{\text{в}}^1) + P(Q_{\text{в}}^2) \le P(G_1) + P(G_2) \le P(Q_{\text{о}}^1) + P(Q_{\text{о}}^2) \quad (5).$$

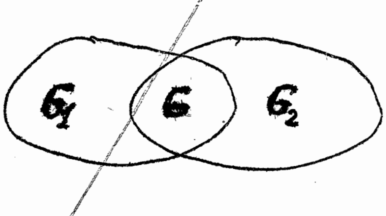
В силу Т.13. разности $P(Q_{\text{о}}^1) - P(Q_{\text{в}}^1)$ и $P(Q_{\text{о}}^2) - P(Q_{\text{в}}^2)$ могут быть сделаны сколь угодно малыми. Из (4) и (5) тогда следует, что разность между $P(G)$ и $[P(G_1) + P(G_2)]$ также сколь угодно мала, т.е.

$$P(G) = P(G_1) + P(G_2).$$

Р-во (1) и Т.15 док-ны.

— · —

Док-ть самостоятельно.

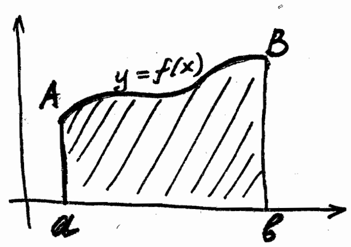


Если G_1 и G_2 квадр-мы, то $G = G_1 \cap G_2$ — квадр-ма.

— · —

③ ⑥ Площадь криволинейной трапеции.

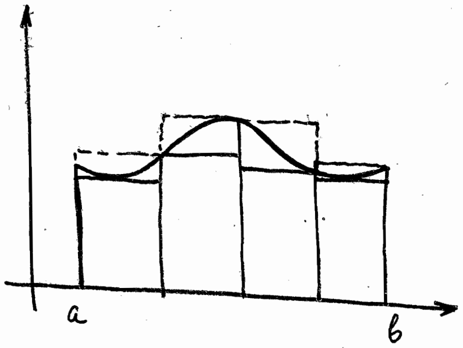
Пусть $f(x) \geq 0$ и непр. на $[a,b]$.



Криволин. трапецией назовём заштрихованную плоскую фигуру $aABb$.

Т.12. Криволинейная трапеция явл-ся квадрируемой пл. ф. и её площадь P ~~может быть вычислена по ф-ле~~ выражается формулой

$$P = \int_a^b f(x)\,dx$$



Док-во. Т.к. $f(x)$ - непр. на $[a,b]$, то $f(x)$ - инт. на $[a,b]$, ~~т.е.~~: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ разбиение T сегм. $[a,b]$ такое, для которого

$$S - s < \varepsilon.$$

Но $S = P_o(\ )$, $s = P_в(\ )$.

Т. обр. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $Q_в$ и Q_o такие, что

$$P_o(\ ) - P_в(\ ) < \varepsilon.$$

По Т. 11 кривол. трапеция квадрируема. Пусть P - её площадь.

Тогда $\forall Q_в$ и Q_o: $P_в(\ ) \leq P \leq P_o(\ )$,

в частности, $s \leq P \leq S$.

Т.к. (по лемме Дарбу) $\lim\limits_{\Delta \to 0} s = \lim\limits_{\Delta \to 0} S = \int_a^b f(x)\,dx$, то $\boxed{P = \int_a^b f(x)\,dx}$

— · —

88г. Л.7. **Замеч.** Если $f(x) \leq 0$, то $P = -\int_a^b f(x)\,dx$.

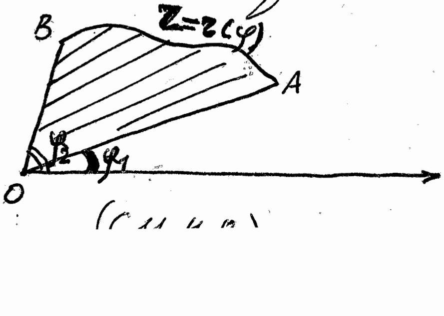
82г. Л.29. Пример. Площадь фигуры, огр-й эллипсом (см. стр. 78).

④ ⑦ Площадь криволинейного сектора.

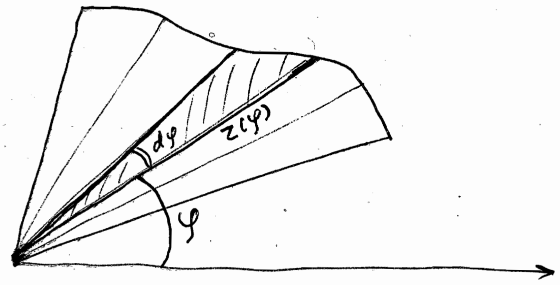
Пусть кривая ~~L~~ задана в полярной системе координат:

$$r = r(\varphi), \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2,$$

причём $r(\varphi)$ - непр. и ≥ 0.



Криволин. сектором назовём заштрих. плоскую фигуру OAB.



Площадь сектора с углом $d\varphi$:

$$dP = \frac{1}{2} r^2(\varphi)\, d\varphi$$

Площадь всего сектора

$$P = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\, d\varphi.$$

Т. ~~12~~ Криволинейный сектор явл-ся квадр. пл. ф. и

$$P = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi$$

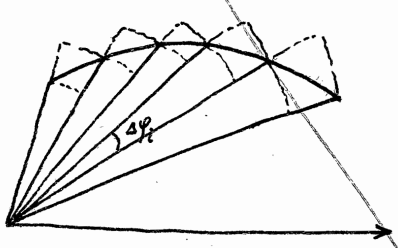
Пример неквадрируемой по Жордану фигуры (на обороте стр. 17).

1977 г. конец 28 лекц.

(разобрать самост-но по учебнику). Конец 30-й лекции.

Док-во. Разобьём сегмент $[\alpha, \beta]$ точками

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_n = \beta$$



и для каждого частичного сегмента $[\varphi_{i-1}, \varphi_i]$ построим круговые секторы, радиусы которых равны миним. r_i и макс. R_i значением $r(\varphi)$ на $[\varphi_{i-1}, \varphi_i]$.

Получим 2 веерообр. фигуры, первая из которых содержится в криволин. секторе, а вторая — содержит в себе криволин. сектор. Площади $\tilde{P}_1$ и $\tilde{P}_2$ этих веерообр. фигур равны соотв-но $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\varphi_i$ и $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} R_i^2 \Delta\varphi_i$.

Заметим, что $\tilde{P}_1 = s$, а $\tilde{P}_2 = S$, где s и S — нижняя и верхняя суммы ф-ии $\frac{1}{2} r^2(\varphi)$ для данного разбиения сегмента $[\alpha, \beta]$. Т.к. $\frac{1}{2} r^2(\varphi)$ — инт-мая в силу непр-сти ф-я, то $\forall \varepsilon > 0$ $S - s = \tilde{P}_2 - \tilde{P}_1$ может быть сделана $< \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\tilde{P}_2 - \tilde{P}_1 < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

~~Т.к. веерообр. фигуры состоят из конечного числа круговых секторов, которые квадрируемы, то согласно~~ Т.к. веерообр. фигуры квадрируемы, то в первую из них можно вписать многоугольник $Q_в$, а вокруг второй описать мн-к $Q_о$ так, что

$$\tilde{P}_1 - P(Q_в) < \frac{\varepsilon}{4}, \quad P(Q_о) - \tilde{P}_2 < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Складывая эти два не-ва и не-во (1), получим

$$P(Q_о) - P(Q_в) < \varepsilon. \qquad (2)$$

Т.к. $Q_в$ явл-ся вписанным в криволин. сектор, а $Q_о$ — опис-м вокруг него, то кривол. сектор квадрируем. Обозначим его площадь P.

~~а т.к.~~

$$\cancel{P(Q_6) \le P_1^{m} = s \le \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi \le S = P_2^{m} \le P(Q_0)}$$

~~и~~ $\cancel{P(Q_6) \le P \le P(Q_0)}$,

Т.к. $s = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\varphi_i \le P \le \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2} R_i^2 \Delta\varphi_i = S$ и т.к. $\lim\limits_{\max\Delta\varphi_i \to 0} s = \lim\limits_{\max\Delta\varphi_i \to 0} S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$,

то ~~в силу (7)~~

$$\boxed{P = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi}$$

(8) Примеры. (см. далее на стр. 18).

О недостатках ~~понятия~~ ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ площади по Жордану.

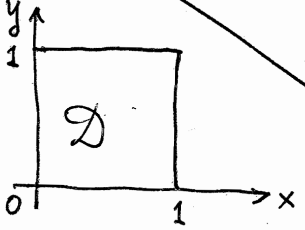
Введённое понятие площади наз-ся понятием площади по Жордану или мерой Жордана. Это понятие ~~[illegible]~~ позволило нам доказать квадрируемость довольно широкого класса плоских фигур, в частн. криволин. трапеций и секторов, а также док-ть квадр-ть объединения конечн. числа кв. фигур. Однако, понятие площади по Жордану ~~[illegible]~~ имеет нек. недостатки.

В частности, если мы рассм. посл-ть

$$G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$$

квадр. фигур, то их объединение может оказаться не квадр. по Жордану. (см. н.о.)

Пример. Рассм. на пл-ти квадрат D: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$



и отметим в нём точки с рац. координатами. Эти точки образуют счётное мн-во, т.е. их можно занумеровать (это легко показать аналогично тому, как была показана счётность рац. чисел $\in [0,1]$)

$$M_1(x_1, y_1),\ M_2(x_2, y_2),\ \ldots,\ M_n(x_n, y_n),\ \ldots$$

Возьмём теперь нек. $\varepsilon > 0$ и построим квадрат D_1 ~~круг~~ со стороной ~~радиуса~~ $a_1 < \varepsilon/2$ с ц. в т. M_1, целиком лежащий внутри квадрата D. Далее возьмём 1-ю из точек $M_2, M_3, \ldots$, не попавших в ~~этот круг~~ квадрат D_1, и построим второй квадрат D_2 ~~круг~~ со стороной ~~радиуса~~ $a_2 < \frac{\varepsilon}{2^2}$ с ц. в этой точке, целиком лежащий в D, ~~[illegible]~~ и не пересекающийся с ~~1-м кругом~~ квадратом D_1. Далее возьмём первую из оставшихся точек, не попавших в ~~1-й и 2-й круги~~ D_1 и D_2, и построим...

5) Пример фигуры, неквадрируемой по Жордану.

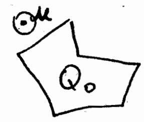
Расс-м квадрат $D = \{M(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$.

Пусть $G = \{M(x,y) : M \in D,\ x - \text{рац.},\ y - \text{рац.}\}$.

Точки мн-ва G можно расположить в виде посл-ти $\{M_n\}$. Площадь каждой точки $= 0$, $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$

Ясно, что $\underline{P}(G) = 0$. Найдём $\overline{P}(G)$.

Пусть Q_0 – произвольная описанная около G замкнутая многоугольная фигура (т.е. граница $Q_0 \in Q_0$). Докажем, что любая т. M квадрата $D \in Q_0$. Предположим, что нек. т. $M_0 \notin Q_0$, $M \in D$. Тогда найдётся ε-окрестность т. M_0, не имеющая общих точек с Q_0.



Но в любой ε-окр. т. M квадрата D имеются точки $\in G$.

Тем самым Q_0 не яв-ся описанным мн-ком. Полученное противоречие доказывает, что $D \subset Q_0\ \forall Q_0$. Отсюда следует, что опис. около G многоугольником наименьшей площади яв-ся сам квадрат D, т.е. $\overline{P}(G) = 1$. Т.к. $\underline{P}(G) \neq \overline{P}(G)$, то фигура G не квадрируема.

~~Свободным от подобных недостатков яв-ся понятие площади по Лебегу (или мера Лебега).~~

с ц. в этой точке квадрат D_3 со стороной $a_3 < \frac{\varepsilon}{2^3}$, лежащий в D и не пересекающийся с D_1 и D_2. Продолжим такое построение до беск-ти. Получим сов-ть $D_1, D_2, \ldots$ квадратов, помещенных внутри квадрата D, и попарно не пересекающихся.

Показать, что объединение этих квадратов явл-ся не квадр-й по Жордану фигурой.

Док-во. $\underline{P} \le \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\varepsilon}{2^i}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{3}$

$\overline{P} = 1$. Т.к. $\underline{P} \ne \overline{P}$, то фигура не квадрируема.

Однако более естественным было бы приписать этой фигуре площадь, равную сумме площадей всех квадратов, т.е.

$$P = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \frac{\varepsilon^2}{3}.$$

Свободным от подобных недостатков является понятие меры (в частности площади) по Лебегу.

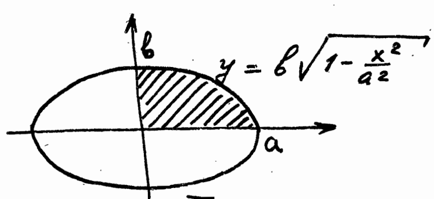
—·—

5 Пример неквадрируемой фигуры (н.о. стр. 17).

на стр. 15 в п. 3

Площадь фигуры, ограниченной эллипсом.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$P_э = 4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = 4b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\,(+a\cos t)\,dt = +4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt =$$

Замена
$x = a\sin t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$
$dx = a\cos t\,dt$

$$= 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + ab\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab.$$

$$\boxed{P_э = \pi ab}$$

В частности, при $a = b$, $P_{круга} = \pi a^2$.

—·—

Понятие объема произвольного тела можно ввести аналогично понятию площади плоской фигуры, рассматривая опис. и впис. в тело многогранники, для которых понятие объема введено в элем. геом.

§11. Объём тела и площадь пов-сти вращения ~~без площади~~

~~Все понятия, введённые в п.1 §2 (ε-окр. точки, внутр. точка, гр. точка и т.д.) дословно переносятся на случай пр-ва.~~

~~Из курса элем. геом. известно понятие объёма многогранника. Введём понятие объёма произв. тела.~~

~~В частности~~, Телом называется ~~любое~~ ограниченное мн-во точек пр-ва.

Аналогично понятиям $\underline{P}$ и $\overline{P}$ ~~[illegible]~~ ~~можно ввести~~ вводятся понятия верхнего $\overline{V}$ и нижнего $\underline{V}$ объёмов, ~~рассматривая вписанные вокруг тела многогранники, для которых понятие объёма введено в элем. матем.~~

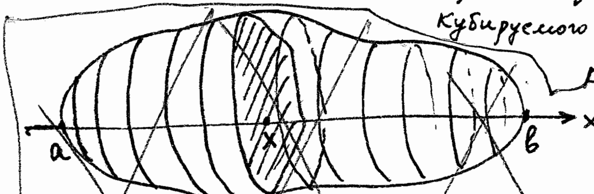
Опр. Тело наз-ся *кубируемым*, если $\underline{V}=\overline{V}$.
Число $\underline{V}=\overline{V}=V$ наз-ся при этом его объёмом.

~~Для объёмов имеют место теоремы, аналогичные Т. 4, 4', 6 для площади. (Сформулировать и док-ть самостоятельно)~~

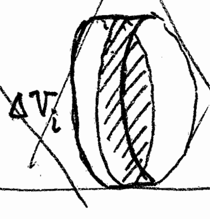
89г. Л.7. Имеет место теорема о необх. и дост. усл. кубируемости тела, аналогичная т. 11.

Выражение объёма тела опр.м интегралом (нестрогий вывод)

Рассм. нек. тело. Пусть при каждом x известна площадь $S(x)$ сечения кубируемого тела плоскостью $x=\text{const}$, причем $a\le x\le b$ ~~⊥ оси Ox, причём a ≤ x ≤ b~~, и $S(x)$ – непр. ф-я на $[a,b]$ (см. н.ю.).



~~Рассм. нек. разбиение $[a,b]$.~~ Проведём через точки разбиения сечения ⊥ оси Ox. Они разобьют тело на n частей. Возьмём на каждом частичном сегменте т. ξ_i.

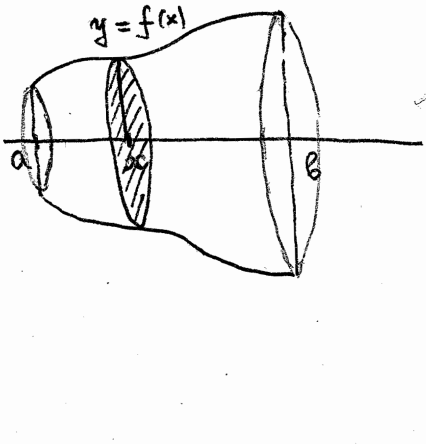


Объём i-й части $\Delta V_i \cong S(\xi_i)\Delta x_i$

$$V \cong \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i$$

$$V=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b S(x)\,dx$$

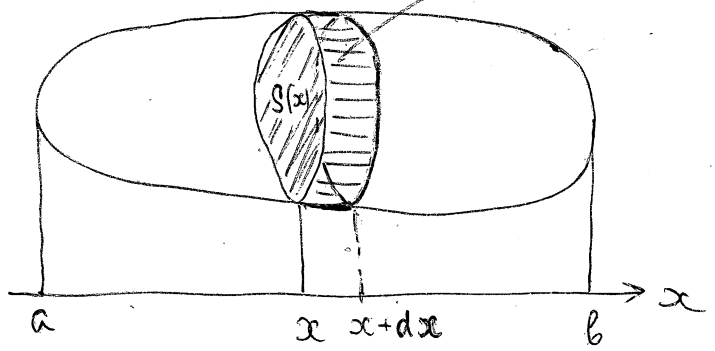
В частности, если тело является телом вращения, полученным от вращ. графика непр. $f(x)\ge 0$ вокруг оси Ox, то $S(x)=\pi f^2(x)$, $\boxed{V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx}$



92г. Л.31 (последняя)

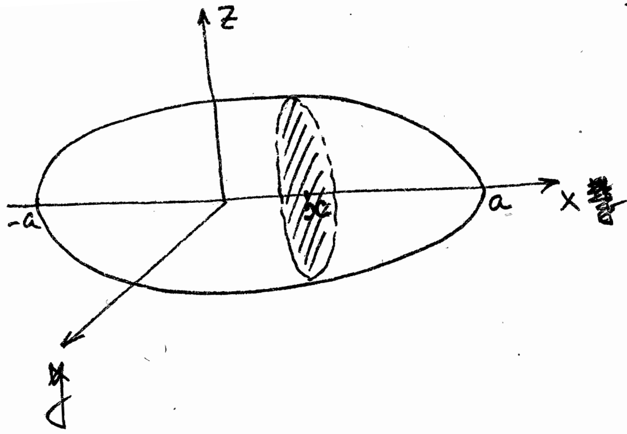
Пример 1) Объём тела, ограниченного эллипсоидом

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



$dV = S(x)dx$ (тонкий блин)

$$V = \int_a^b S(x)\,dx$$



В сечении $x = \mathrm{const}$ имеем эллипс

$$\frac{y^2}{\left[b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]^2} + \frac{z^2}{\left[c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]^2} = 1$$

$$S(x) = \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$V = \int_{-a}^{a} \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = \pi bc\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a} =$$

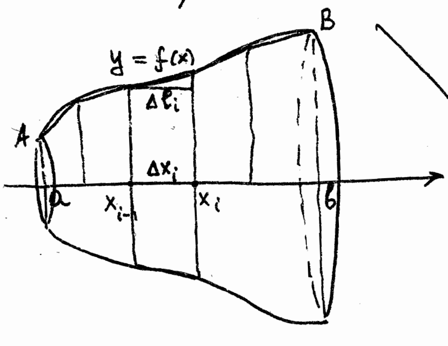
$$= \pi bc\left(a - \frac{a}{3} + a - \frac{a}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi abc. \qquad \boxed{V = \frac{4}{3}\pi abc}$$

В частности, если $a = b = c = R$, то $\underline{V_{шара} = \frac{4}{3}\pi R^3}$

2) см. н. о. ⊛

— · —

Площадь ~~~~ поверхности ~~~~ вращения. (см. н. о.)



Рассм. поверхность ~~~~, образованную вращением вокруг оси Ox графика ф-ии $y = f(x) \geq 0$ $(a \leq x \leq b)$. Пусть $f'(x)$ непр. на $[a, b]$. Впишем в кривую $(AB\ (y = f(x)))$ ломаную. При вращении ломаной получается пов-сть, составленная из бок. пов-й усеч. конусов и цилиндров. Площадь поверхности одного из таких конусов (i-го)

$$\Delta S_i = \pi\left[f(x_{i-1}) + f(x_i)\right]\Delta l_i = 2\pi\,\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\,\Delta l_i$$

$$\Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \underbrace{\left[f(x_i) - f(x_{i-1})\right]^2}_{f'(\xi_i)\Delta x_i}} = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i$$

Площадь пов-сти, составленной из бок. пов-стей усеч. конусов

$$P(x_i) = 2\pi\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i \cong$$

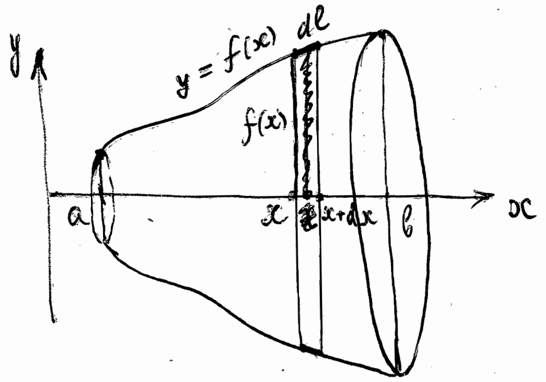
x_{i-1} ξ_i x_i

$$\cong 2\pi\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i;$$

Предел пр. части, очевидно, равен $2\pi\int_a^b f\sqrt{1+f'^2}\,dx$. Док-ть <u>самостоятельно</u>, что предел $P(x_i)$, которая $\cong$ равна пр. части, также равен $2\pi\int_a^b f\sqrt{1+f'^2}\,dx$. <u>Указание</u>: Используя равн.

Площадь пов-сти вращения:

$$\boxed{P = \lim_{\Delta \to 0} P(x_i) = 2\pi\int_a^b f(x)\underbrace{\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx}_{dl}}$$



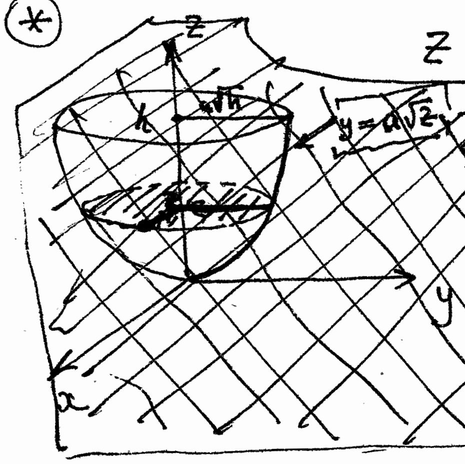
$$dS = 2\pi f(x)\,dl = 2\pi f(x)\underbrace{\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}_{dl}$$

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

(Далее → стр. 21)

2) Объем тела, ограниченного параболоидом ~~вращения~~

$Z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ ~~вращения~~ и плоскостью $z = h$

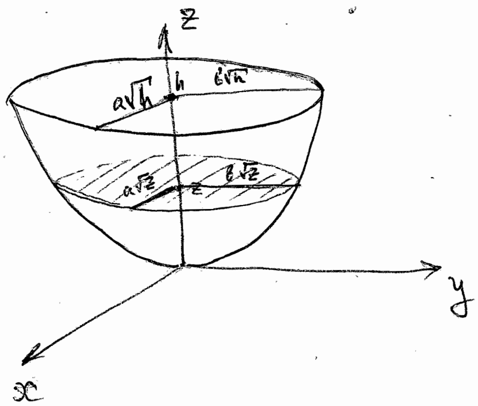


~~$y = a\sqrt{z}$ — от вращения этой кривой получ-ся параболоид, ограничивающий тело~~

$$\cancel{S(z) = \pi y^2 = \pi a^2 z}$$

$$\cancel{V = \int_0^h S(z)\,dz = \int_0^h \pi a^2 z\,dz = \pi a^2 \frac{z^2}{2}\Big|_0^h = \frac{1}{2}\pi a^2 h^2}$$

~~Т.к.~~ $\cancel{S_{осн} = \pi a^2 h}$, ~~то~~ $\cancel{V = \frac{1}{2} S_{осн}\cdot h}$



В сечении пл-ю $z = const$ получается эллипс:

$$\frac{x^2}{(a\sqrt{z})^2} + \frac{y^2}{(b\sqrt{z})^2} = 1$$

$$S(z) = \pi abz; \quad V = \int_0^h \pi abz\,dz = \frac{1}{2}\pi abh^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(\pi abh)\cdot h = \frac{1}{2}S(h)\cdot h = \frac{1}{2}S_{осн}\cdot h.$$

У конуса: $V = \frac{1}{3} S_{осн}\cdot h$

Если кривая, от вращения которой вокруг оси Ox получ-ся пов-сть, задана параметрически

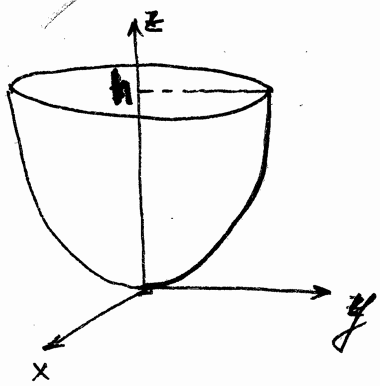
$$y = \psi(t) \geq 0, \quad x = \varphi(t), \quad (\alpha \leq t \leq \beta),$$

причём $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ непр. на $[\alpha, \beta]$

то $dS = 2\pi\psi(t)\,dl = 2\pi\psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt$

$$\boxed{S = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt.}$$

~~Пример.~~ Площадь параболоида вращения.



$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \quad (0 \leq z \leq h).$$

Эта пов-сть получ-ся от вращения кривой $y = a\sqrt{z}$, $(0 \leq z \leq h)$ вокруг оси Oz.

$$S = 2\pi\int_0^h a\sqrt{z}\sqrt{1 + \left(\frac{a}{2\sqrt{z}}\right)^2}\,dz = 2\pi a\int_0^h\sqrt{z + \frac{a^2}{4}}\,dz =$$

$$= 2\pi a\left(z + \frac{a^2}{4}\right)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\Bigg|_0^h = \frac{4}{3}\pi a\left[\left(h + \frac{a^2}{4}\right)^{3/2} - \left(\frac{a^2}{4}\right)^{3/2}\right]$$

— · —

Глава 11. Методы приближённого вычисления определённых интегралов.

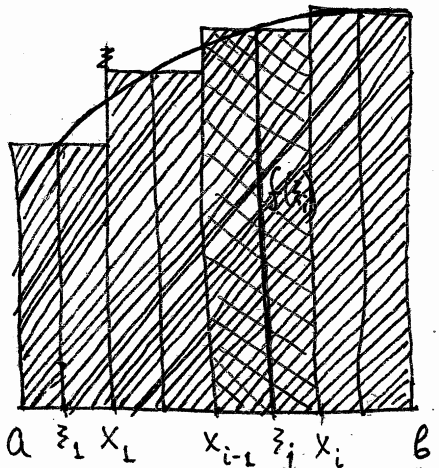
97г. Л. 18 (В 2005 г. – изучить самостоятельно. В 2007 – тоже. В 2009 Опр.-я.)

В примерах, с которыми мы имели дело, для вычисления интегралов использовали ф-лу Н.-Л. На практике довольно часто встречаются интегралы от таких ф-ций, первообразная которых не яв-ся элементарной функцией, и потому применение ф-лы Н.-Л. затруднительно. Примером является интеграл ошибок $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$ ($\Phi(\infty)=1$)

В таких случаях ~~используются~~ приближённые ~~методы~~ вычисления интегралов. Мы рассмотрим три ~~приближ.~~ метода приближ. выч. инт. в: м. прямоугольников, м. трапеций, м. парабол. Суть каждого из этих методов состоит в том, что сегмент интегрирования разбивается на равные частичные сегменты, на каждом из которых ф-я $f(x)$ заменяется более простой ф-ей: константой, т.е. многочленом нулевой степени в методе пр-ков, многочленом 1-й степени в методе трапеций, многочленом 2-й степени в методе парабол.

83г. Л. 30. **1. Метод прямоугольников.**

Требуется вычислить $J=\int_a^b f(x)\,dx$ (1)



Разобьём $[a,b]$ на n равных частей точками $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$.

Обозначим: $\Delta x_i \overset{=x_i-x_{i-1}}{=} \frac{b-a}{n}=h$ (шаг приближенного интегрирования).

Через ξ_i обозначим средние точки сегментов $[x_{i-1},x_i]$. Заменим на каждом частичном сегменте $[x_{i-1},x_i]$ ф-цию $f(x)$ постоянным значением $f(\xi_i)$ (см. н.о.)

Тогда площадь n прямоугольников $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)$ (2) яв-ся приближённым значением $\int_a^b f(x)dx$, т.е.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)+R} \qquad (3)$$

86г. Л. 29. Ф-ла (3) наз-ся ф-лой прямоугольников.

Если ф-я $f(x)$ инт-ма, то $\left(\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\to\int_a^b f(x)dx\right)$ при $n\to\infty$ (при $n\to\infty$), т.е. ост. член $R\to 0$, ф-ла (2) тем точнее, чем больше n. На практике берут какое-то опр. число n точек и вычисляют интеграл по прибл. ф-ле (2).

Чтобы оценить погрешность этой ф-лы, нужно знать, как ост. член R зависит от n.

Теорема. Если $f(x)$ имеет на $[a,b]$ непр. 2-ю пр-ю, то $\exists\,\eta\in[a,b]$ такая, что

$$R=\frac{(b-a)^3}{24n^2}f''(\eta)=\frac{b-a}{24}f''(\eta)\cdot h^2 \qquad (4)$$

Тогда $J_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(\xi_i)dx = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)\,\frac{b-a}{n}$

(Геометрически это означает, что на $[x_{i-1}, x_i]$ площадь криволинейной трапеции заменяется площадью прямоугольника, а площадь всей криволинейной трапеции — площадью ступенчатой фигуры.)

$$J = \int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} J_i \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \qquad (2)$$

Положим $\int\limits_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) = R$.

R наз-ся остаточным членом.

Ф-ла (4) показывает, что при (прибл. вычислении) инт. (1) по ф-ле (2) мы совершаем ошибку порядка h^2, $R=O(h^2)$.

Док-во. Пусть $F(x)$ – первообр. $f(x)$ на $[a,b]$, т.е. $F'(x)=f(x)$ (отметим, что $F''=f'$, $F'''=f''$)

~~Рассм. интеграл~~ $\cancel{J_i=\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \int_{\xi_i-\frac{h}{2}}^{\xi_i+\frac{h}{2}} f(x)dx}$;

$$J_i=\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x_{i-1}=\xi_i-\frac{h}{2}}^{x_i=\xi_i+\frac{h}{2}} = F\left(\xi_i+\frac{h}{2}\right)-F\left(\xi_i-\frac{h}{2}\right)=$$

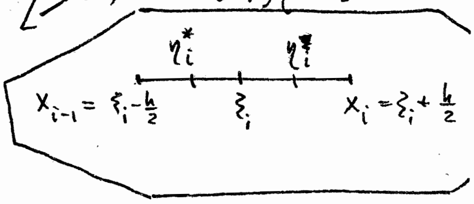
по ф-ле Н.-Л.

разложим F по форм. Тейлора с ц. в т. ξ_i с ост. членом 3-го порядка в форме Лагранжа.

88г. Л. 8.

$$=\left[\cancel{F(\xi_i)}+F'(\xi_i)\frac{h}{2}+\cancel{\frac{1}{2}F''(\xi_i)\left(\frac{h}{2}\right)^2}+\frac{1}{6}F'''(\eta_i)\left(\frac{h}{2}\right)^3\right]-\left[\cancel{F(\xi_i)}+F'(\xi_i)\left(-\frac{h}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\cancel{\frac{1}{2}F''(\xi_i)\left(-\frac{h}{2}\right)^2}+\frac{1}{6}F'''(\eta_i^*)\left(-\frac{h}{2}\right)^3\right]=$$



$$=F'(\xi_i)h+\frac{1}{48}\left[F'''(\eta_i)+F'''(\eta_i^*)\right]h^3=f(\xi_i)h+\frac{1}{48}\left[f''(\eta_i)+f''(\eta_i^*)\right]h^3$$

Итак $\quad J_i=f(\xi_i)h+\frac{1}{48}\left[f''(\eta_i)+f''(\eta_i^*)\right]h^3=\frac{b-a}{n}f(\xi_i)+\frac{(b-a)^3}{24n^2}\cdot\frac{f''(\eta_i)+f''(\eta_i^*)}{2n}$

Суммируем по всем i от 1 до n.

$$\sum_{i=1}^{n} J_i = \int_a^b f(x)\,dx = \cancel{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)h+\frac{h^3}{48}\sum_{i=1}^{n}\left[f''(\eta_i)+f''(\eta_i^*)\right]}=$$

$$=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)+\frac{(b-a)^3}{24n^2}\,\frac{\sum_{i=1}^{n}\left[f''(\eta_i)+f''(\eta_i^*)\right]}{2n}$$

Сравнивая с (3), получаем

$$R=\frac{(b-a)^3}{24n^2}\,\frac{\sum_{i=1}^{n}\left[f''(\eta_i)+f''(\eta_i^*)\right]}{2n}.$$

Для док-ва (4) дост. показать, что $\exists\,\eta\in[a,b]$ такая, что

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left[f''(\eta_i)+f''(\eta_i^*)\right]}{2n}=f''(\eta). \qquad (5)$$

Левая часть в (5) является средним арифметическим $2n$ значений непр. ф-ии $f''(x)$. Справедливость ф-лы (5) вытекает из след. утверждения.

90г. Л. 9,

Лемма. Если 1) $g(x)$ непр. на $[a,b]$, 2) $x_1,\dots,x_n$ — произв. точки $\in[a,b]$, то $\exists\,\xi\in[a,b]$ такая, что ср. арифметическое

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)$ равно $g(\xi)$.

Док-во. Пусть $m=\min\limits_{[a,b]} g(x)$, $M=\max\limits_{[a,b]} g(x)$.

Тогда $m\le g(x_i)\le M$. Суммируя по i от 1 до n и деля на n, получим

$$m\le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\le M$$

По теореме о прохождении непр. ф-ии через любое промеж. значение $\exists\,\xi\in[a,b]$ такая, что

$$\underbrace{g(\xi)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)}$$ Лемма доказана. ~~что и тр. док.~~

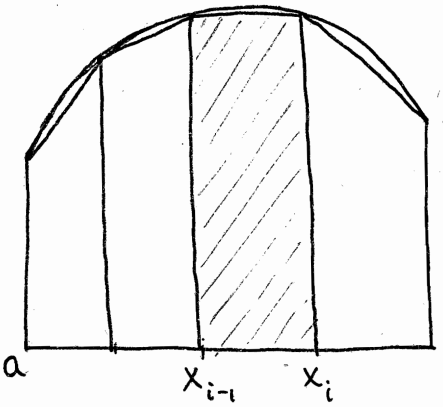
Применяя лемму к непр. ф-ии $f''(x)$, получим ф-лу (5). Т. 13 док-на.

84г. Л. 29. 85г. Л. 27. 89г. Л. 8

99г. Л. 19.

2 Метод трапеций.

Вновь тр-ся вычислить $\underline{J=\int_a^b f(x)\,dx}$ (1)



Разобьём $[a,b]$ на n равных частей точками $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$.

$$\Delta x_i=\frac{b-a}{n}=h.$$

Заменим на каждом частичном отрезке $[x_{i-1},x_i]$ ф-ю $f(x)$ линейной ф-цией A_ix+B_i, график которой проходит через 2 точки: $(x_{i-1},f(x_{i-1}))$ и $(x_i,f(x_i))$. $\underbrace{\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}}_{\text{площадь трапеции}}\cdot h$ является приближ. знач. площади криволин. трапеции.

Тогда $J_i=\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx\approx\int_{x_{i-1}}^{x_i}(Ax+B)\,dx=\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}h$. Отсюда

$$\sum_{i=1}^{n} J_i=\int_a^b f(x)\,dx\approx\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}h=\frac{b-a}{2n}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right].$$

Сл-но,

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{2n}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]+R}$$

(формула трапеций.)

Т. 13 Если $f(x)$ имеет на $[a,b]$ непр. 2-ю пр-ю, то $\exists \eta \in [a,b]$ такая, что

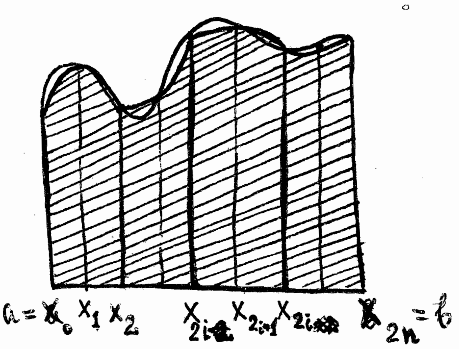
$$R = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\eta) = -\frac{(b-a)}{12} f''(\eta) h^2.$$

~~Из (2) следует, что~~ Как и в ф-ле прямоугольников, $R=O(h^2)$.

Док-ст. Т.13. аналогично —.—

③ Метод парабол.

$$J=\int_a^b f(x)\,dx \qquad (1)$$



Разобьём $[a,b]$ на $2n$ равных частей точками

$$a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{2n}=b.$$

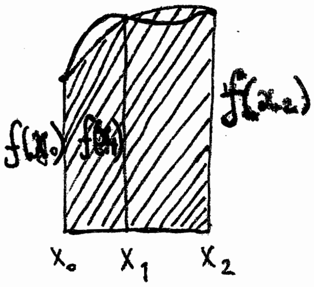
$$\Delta x_i = x_{2i}-x_{2i-2} = \frac{b-a}{n} = h.$$

Рассмотрим сегмент $[x_0, x_2]$.

На ~~этом~~ частичном сегменте ~~$[x_{2i-2}, x_{2i}]$~~

Заменим $f(x)$ ~~многочленом второй степени~~ ~~интерполяционным~~ (путем коэф-ты A, B, C выберем так, чтобы парабола) Ax^2+Bx+C, проходящей через 3 точки $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$. Покажем, что это всегда можно сделать и притом ед-м образом.

Нужно показать, что сущ-т такие A, B, C, что будут вып-ны р-ва



$$\begin{cases} Ax_0^2+Bx_0+C = f(x_0) \\ Ax_1^2+Bx_1+C = f(x_1) \\ Ax_2^2+Bx_2+C = f(x_2) \end{cases} \qquad (2)$$

Это система 3-х лин. ур-ий отн. A, B, C, опр-ль которой

$$\begin{vmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = \overbrace{(x_0-x_1)}^{-h/2}\overbrace{(x_0-x_2)}^{-h}\overbrace{(x_1-x_2)}^{-h/2} = -\frac{h^3}{4} \neq 0$$

(Опр-ль Вандермонда 3-го порядка)

Сл-но, сущ-т ед. реш. отн. A, B, C. (В частности, если точки $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ лежат на одной прямой, то $A=0$, и получится не парабола, а прямая). Найдя из (2) A, B, C и проделав соотв. вычисления получим:

~~Выразим теперь~~ $\int_{x_0}^{x_2}(Ax^2+Bx+C)\,dx$ ~~(т.е. площадь криволинейной трапеции, огр-ой параболой) через ... и h~~

~~Будем считать $x_1 = 0$ (это можно сделать, сдвинув кривол. тр-ю вдоль оси Ox).~~

~~Тогда $x_0 = -\frac{h}{2}$, $x_2 = \frac{h}{2}$.~~

~~Из (2) получаем: $\boxed{C = y_1}$; $\begin{cases} A\frac{h^2}{4} - B\frac{h}{2} = y_0 - y_1 \\ A\frac{h^2}{4} + B\frac{h}{2} = y_2 - y_1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{Ah^2}{2} = y_0 - 2y_1 + y_2}$, $Bh = y_2 - y_0$~~

~~Далее~~

$$\int_{x_0}^{x_2} (Ax^2 + Bx + C)\,dx = \left(A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx\right)\Bigg|_{x_0 = -\frac{h}{2}}^{x_2 = \frac{h}{2}} = \ldots$$

(опускаем выкладки)

$$= \left[A\frac{h^3}{24} + B\frac{h^2}{8} + C\frac{h}{2} - A\left(-\frac{h^3}{24}\right) - B\left(+\frac{h^2}{8}\right) - C\left(-\frac{h}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{h}{6}\left(\frac{Ah^2}{2} + 6C\right) = \frac{h}{6}\left(y_0 - 2y_1 + y_2 + 6y_1\right) = \frac{h}{6}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

$$J_1 = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_2}(Ax^2+Bx+C)\,dx = \frac{b-a}{6n}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$

Аналогично $J_i = \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\left[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})\right]$

Отсюда $\sum_{i=1}^{n} J_i = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})\right]$ или

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6n}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1})\right] + R}$$

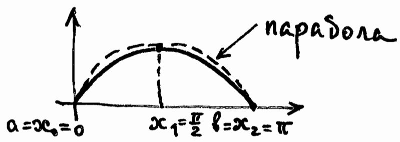
(ф-ла парабол или Симпсона).

Т.16. Если $f(x)$ имеет на $[a,b]$ непр. 4-ю пр-ю, то $\exists\, \eta \in [a,b]$ такая, что $R = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(\eta) = -\frac{(b-a) f^{(4)}(\eta)}{2880} h^4$, $\boxed{\text{см. н.о.}}$

т.е. $R = O(h^4)$

Пример. $J=\int\limits_0^{\pi} \sin x\, dx = 2$.

Возьмём $n=1$.



$$J \cong \frac{\pi}{6}\left[f(0)+f(\pi)+4f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} = 2+\varepsilon, \text{ где } |\varepsilon|<0{,}1.$$

Т. обр. уже при $n=1$ получаем приличную точность, что свидетельствует об эффективности метода парабол.

(привл. выч. опер. кол-в)

из проведённого рассмотрения следует

Замеч. 1. ~~что существо каждого из 3-х методов в том, что ф-я $f(x)$ заменяется на каждом част. сегменте более простой: многочленом нулевой степени в методе прямоуг-в, 1-й степени — в м. трапеций, 2-й степени — в м. парабол.~~

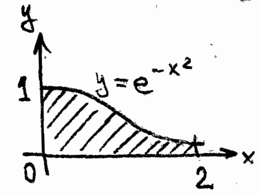
Замеч. 2. Каждый из методов содержит чётко сформулированный алгоритм для проведения вычислений, т.е. опр-ю посл-ть вычисл. операций; причём эти вычисл. операции стереотипны. Это позволяет с успехом применять указ. методы для вычислений с пом. эл.-выч. машин.

84г.
82г. Конец последней 29-й лекции

83г. Успел продиктовать билеты. Конец последней 30-й лекции

Пример.

$$\Phi(2)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^2 e^{-x^2}dx. \qquad (\Phi(\infty)=1)$$



$f(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$; $a=0, b=2$; $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(-2x e^{-x^2})$; $f''(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(4x^2-2)e^{-x^2}$;

~~При $n=8$ по ф-ле Симпсона $|R|<10^{-4}$, по ф-ле трапеций $|R|<10^{-2}$.~~

$f''_{max}(\sqrt{\tfrac{3}{2}})=1{,}007\ldots<1{,}01$. В методе прямоугольников $|R|<\frac{2^3}{24n^2}\cdot 1{,}01\approx\frac{1{,}01}{3n^2}$; При $n=6$ $|R|<10^{-2}$

8	0,995304 3415	0,9948 96188
16	995321 1394 ($R\approx10^{-6}$)	995214907 ($R\sim10^{-4}$)
32	995322 1907	995295363
64	995322 2565	99531552

В этом примере 1) наглядно видна бо́льшая точность метода парабол по ср-ю с методом трапеций,

2) уже при 32 точках получается по ф-ле парабол ошибка $\sim10^{-7}$, т.е. очень большая точность.

3) полученные рез-ты хорошо иллюстрируют написанные выше оценки ост. членов, напр. при

$n=16$: $h=\frac{1}{8}$, $h^2=\frac{1}{64}$, $h^4\cong\frac{1}{3600}\cong 3\cdot10^{-4}$;

$$R_{трапеций}=-\frac{2}{12}h^2f''(\eta)\approx10^{-3}\div10^{-4}$$

$$R_{парабол}=-\frac{2}{2880}\cdot h^4f^{(IV)}(\eta)\approx10^{-6}-10^{-7}$$