Новый вариант с 2005 г.

# Глава 10. Неявные функции.

## §1. О неявных функциях, определяемых одним уравнением.

Функция $y=f(x)$ может быть задана явно или неявно:

1) $y=\underbrace{x^2}_{f(x)}$, $-\infty<x<\infty$ – ф-я задана явно.

2) $x^2+y^2-1=0$, $y\geq 0 \Longrightarrow y=\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{f(x)}$, $-1\leq x\leq 1$ – эта ф-я задана неявно ур-м $x^2+y^2-1=0$.

Рассм. ур-е

$$\mathcal{F}(x,y)=0 \qquad (1)$$

Если $\forall x\in X$ ур-е (1) имеет решение отн. $y$: $y=f(x)$, то говорят, что ур-е (1) задаёт неявно ф-ю $y=f(x)$, $x\in X$, а сама ф-я $y=f(x)$ наз-ся неявной ф-й, определяемой ур-м (1).

Итак, неявная ф-я $y=f(x)$ – это решение ур-я (1) отн. $y$, т.е. $\mathcal{F}(x,f(x))=0$ $\forall x\in X$.

Мы рассмотрим вопрос о том, при каких условиях ур-е (1) определяет неявную ф-ю $y=f(x)$, а также вопросы о непр-сти и дифф-сти неявной ф-ии $y=f(x)$.

При этом нужно различать вопрос о сущ-ии неявной ф-ии, т.е. о существовании решения ур-я (1) отн. $y$, и вопрос о возможности найти эту неявную ф-ю в явном виде. Так, например, неявная ф-я $y=f(x)$, определяемая ур-м $x^2+y^2-1=0$ в обл. $y\geq 0$, легко находится в явном виде: $y=\sqrt{1-x^2}$, $-1\leq x\leq 1$, а неявная ф-я $y=f(x)$, определяемая ур-м

$$2y+\sin y-x=0,$$

как мы увидим ниже, существует, однако найти её в явном виде (через элементарные ф-ии) не представляется возможным.

**Т.1.** Пусть 1) $F(x,y)$ опр-на и непр. в прямоугольнике
$Q = \{(x,y):\ a<x<b,\ c\le y\le d\}$;

2) $\forall x\in(a,b)$: $F(x,c)\,F(x,d)<0$;

3) $\forall$ фикс. $x\in(a,b)$ $F(x,y)$ — строго монотонная ф-я $y$ на $[c,d]$.

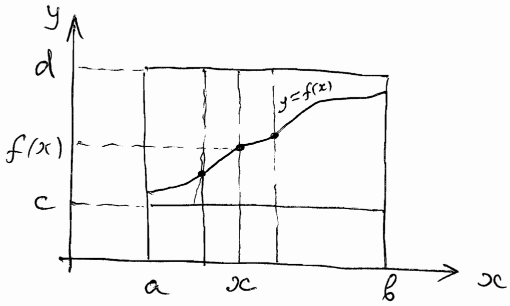
Тогда: 1) в прямоугольнике $Q$ ур-е

$$F(x,y)=0 \qquad (1)$$

определяет ед. (неявную) ф-ю вида $y=f(x)$, т.е. $\forall x\in(a,b)$ ур-е (1) имеет ед. реш. отн. $y$, лежащее на $[c,d]$

2) ф-я $y=f(x)$ непр. на $(a,b)$.

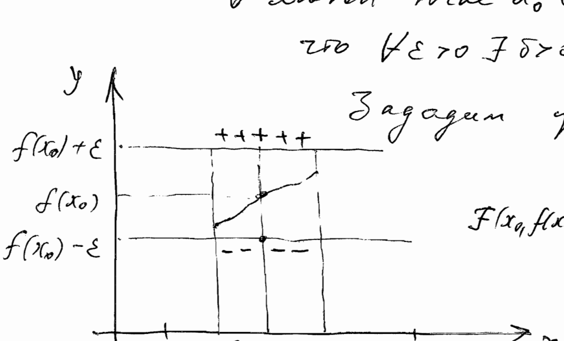
Док-во:




1) Зафиксируем произвольное $x\in(a,b)$ и рассмотрим $F(x,y)$ как ф-ю $y$ на $[c,d]$. Эта ф-я непр. на $[c,d]$ и имеет на концах сегмента значения разных знаков. Сл-но, $\exists\, y\in[c,d]$ такое, что $F(x,y)=0$. В силу строгой монотонности $F(x,y)$ по $y$ такое значение $y$ единственно. Итак, $\forall x\in(a,b)$ ур-е (1) имеет ед. реш. отн. $y$.

Обозначим его $y=f(x)$. Тогда $F(x,f(x))=0$ $\forall x\in(a,b)$. Сущ-е и ед-сть неявной ф-ии вида $y=f(x)$, опр-й ур-м (1), доказаны.

2) Докажем непр-сть неявной ф-ии $y=f(x)$ на $(a,b)$, т.е. непр-сть в любой точке $x_0\in(a,b)$. По опр. непр-сти нужно доказать, что $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$, такое, что $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ при $|x-x_0|<\delta$.




Зададим произвольное $\varepsilon>0$ и проведём прямые $y=f(x_0)\pm\varepsilon$.

Рассм. ф-ю $F(x_0,y)$. Пусть она возр. на $[c,d]$. Тогда $F(x_0,f(x_0))=0$, $F(x_0,f(x_0)-\varepsilon)<0$, $F(x_0,f(x_0)+\varepsilon)>0$.

Рассм. теперь $F(x,y)$ на прямых $y=f(x_0)\pm\varepsilon$, т.е. $F(x,f(x_0)-\varepsilon)$ и $F(x,f(x_0)+\varepsilon)$. В силу непр-ти $F(x,y)$ $\exists\delta>0$, такое, что

$$F(x,f(x_0)-\varepsilon)<0,\quad F(x,f(x_0)+\varepsilon)>0 \quad \text{при } |x-x_0|<\delta.$$

Отсюда следует, что $\forall x$ из $\delta$-окр. т. $x_0$ корень ур-е $F(x,y)=0$, т.е. значения $y=f(x)$ лежат между $f(x_0)-\varepsilon$ и $f(x_0)+\varepsilon$), т.е.

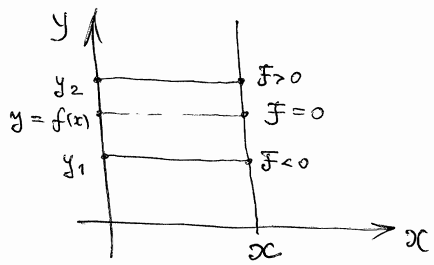
$$f(x_0)-\varepsilon < f(x) < f(x_0)+\varepsilon \quad \text{при} \quad |x-x_0|<\delta$$

или

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \quad \text{при} \quad |x-x_0|<\delta, \text{ ч.т.д.}$$

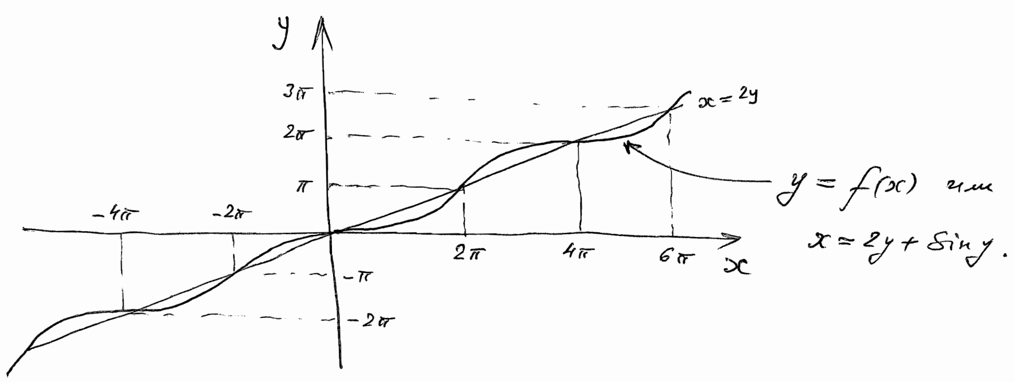
Теорема 1 доказана.

Пример. Рассм. ур-е $\underbrace{2y+\sin y-x}_{F(x,y)}=0$. Докажем, что оно определяет ед. неявную ф-ю вида $y=f(x)$ на $(-\infty,+\infty)$.




Зафикс. произв. $x\in(-\infty,+\infty)$ и рассм. $F(x,y)=2y+\sin y-x$ при этом фикс. $x$. Положим $y=y_1=\frac{x}{2}-1$. Тогда $F(x,y_1)=-2+\sin y_1<0$. Положим $y=y_2=\frac{x}{2}+1$. Тогда $F(x,y_2)=2+\sin y_2>0$. Сл-но, $\exists y\in[y_1,y_2]$, такое, что $F(x,y)=0$. Обозначим его $y=f(x)$. Итак, $\forall x$ ур-е $F(x,y)=0$ имеет реш. отн. $y$: $y=f(x)$. Т.к. $F'_y=2+\cos y>0$, то $F(x,y)$ - возр. ф-я $y$ и, сл-но, данное ур-е определяет ед. неявную ф-ю вида $y=f(x)$.

Как уже отмечалось, эту неявную ф-ю $y=f(x)$ мы не можем найти в явном виде. Однако, мы можем "увидеть" эту ф-ю, построив график ф-ии $x=2y+\sin y$ (т.е. $F(x,y)=0$).



2007г. 1.9

Важным условием в Т.1 была строгая монотонность по $y$ ф-ции $F(x,y)$. Дост. условием строгой монотонности по $y$ явл-ся знакопостоянство $F'_y(x,y)$. Это исп-ся в след. теореме.

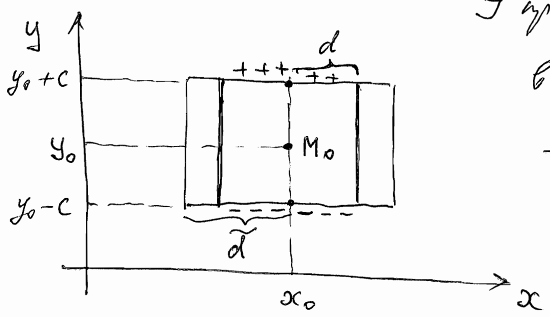
**Т.2 (локальная)** Пусть

1) $F(x,y)$ опр. и непр. в нек. окр. $\omega$ т. $M_0(x_0,y_0)$;
2) В окр. $\omega$ $\exists$ $F_y(x,y)$, непрерывная в т. $M_0$;
3) $F(x_0,y_0)=0$, $F_y(x_0,y_0)\neq 0$.

Тогда

$\exists$ прямоугольник $Q=\{(x,y): |x-x_0|<d,\ |y-y_0|\le c,\ d>0$ и $c>0$ — нек. числа$\}$, целиком содержащийся в окр. $\omega$ т. $M_0$, в котором ур-е $F(x,y)=0$ (1) определяет ед. неявную ф-ю вида $y=f(x)$, причём эта ф-я непр. при $|x-x_0|<d$.

**Док-во.** Пусть $F_y(x_0,y_0)>0$. В силу непр-сти $F_y(x,y)$ в т. $M_0$




$\exists$ прямоугольник $\tilde Q=\{(x,y): |x-x_0|<\tilde d,\ |y-y_0|\le c\}\in\omega$, в котором $F_y(x,y)>0$, и, сл-но, $F(x,y)$ — возр. ф-я $y$ $\forall$ фикс. $x\in(x_0-\tilde d,\ x_0+\tilde d)$.

Рассм. $F(x_0,y)$ при $|y-y_0|\le c$. Т.к. $F(x_0,y)$ — возр. ф-я $y$ и т.к. $F(x_0,y_0)=0$, то
$$F(x_0,y_0-c)<0,\quad F(x_0,y_0+c)>0.$$

Рассмотрим ф-ю $F(x,y)$ на прямых $y=y_0-c$ и $y=y_0+c$, т.е. $F(x,y_0-c)$ и $F(x,y_0+c)$. В силу непр-сти $F(x,y)$ $\exists$ интервал $|x-x_0|<d\le\tilde d$, такой, что $F(x,y_0-c)<0$, $F(x,y_0+c)>0$ при $|x-x_0|<d$, и, сл-но, $F(x,y_0-c)\cdot F(x,y_0+c)<0$ при $|x-x_0|<d$.

Т. обр., мы построили прямоугольник $Q=\{(x,y): |x-x_0|<d,\ |y-y_0|\le c\}$, для которого вып-ны все условия Т.1.

По Т.1 в пр-ке $Q$ ур-е (1) опр-т ед. ф-ю вида $y=f(x)$, которая непр. при $|x-x_0|<d$. Т.2 доказана.

**Замечание 1.** Отметим, что $f(x_0)=y_0$.

**Замечание 2.** Если $F(x_0,y_0)=0$ и $F_y(x_0,y_0)=0$, то в окр. т. $M_0$ ур-е может не иметь реш. отн. $y$, может иметь не ед. реш., но может иметь и ед. реш.

**Примеры:** 1) $\underbrace{x^2+y^2-1}_{F(x,y)}=0$, $M_0(1,0)$; $F(1,0)=0$, $F_y(1,0)=0$; при $x>1$ – нет реш.; при $x<1$ – 2 непр. реш. $y=\pm\sqrt{1-x^2}$.

2) $\underbrace{x^3-y^3}_{F(x,y)}=0$, $M_0(0,0)$. $F(0,0)=0$, $F_y(0,0)=0$. В окр. т. $M_0$ ед. реш. отн. $y$: $y=\underbrace{x}_{f(x)}$

**2009 г. Л. 9**

**Дополнение к Т. 2.** Пусть вып-ны усл. Т. 2 и пусть $F(x,y)$ диф-ма в т. $M_0(x_0,y_0)$. Тогда неявная ф-я $y=f(x)$ диф-ма в т. $x_0$, причём

$$f'(x_0)=-\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}=-\frac{F_x(x_0,f(x_0))}{F_y(x_0,f(x_0))} \qquad (2).$$

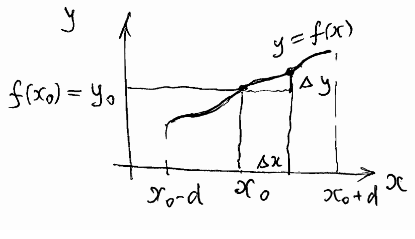
**Док-во.** **1 способ.** $F(x,f(x))\equiv 0$. Вычислим пр-ю по $x$ от обеих частей тожд-ва в т. $x_0$:

$$F_x(x_0,f(x_0))+F_y(x_0,f(x_0))\cdot f'(x_0)=0 \Rightarrow f'(x_0)=-\frac{F_x(x_0,f(x_0))}{F_y(x_0,f(x_0))}.$$

Однако, этот способ док-ва некорректен, т.к. мы ещё не доказали, что $f'(x_0)$ сущ-т, а потому дифференцирование по $x$ левой части тожд-ва было необоснованным.

**2 способ.** Т.к. $F(x,y)$ диф-ма в т. $M_0(x_0,y_0)$, то её приращение в т. $M_0$ можно представить в виде

$$\Delta F=F(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-F(x_0,y_0)=F_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x+F_y(x_0,y_0)\Delta y+$$
$$+\alpha_1\cdot\Delta x+\alpha_2\Delta y, \text{ где } \alpha_1,\alpha_2\to 0 \text{ при } \begin{cases}\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\end{cases}. \qquad (3)$$




Возьмём $|\Delta x|<d$, т.е. $x_0+\Delta x\in(x_0-d,\ x_0+d)$,

$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-y_0$.

Тогда $\Delta \mathcal{F} = \mathcal{F}(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x)) - \mathcal{F}(x_0, y_0) = 0$,

т.к. $\mathcal{F}(x, f(x)) \equiv 0 \ \forall x \in (x_0 - d, x_0 + d)$, и, сл-но, из (3) получаем

$$\mathcal{F}_x(x_0,y_0)\Delta x + \mathcal{F}_y(x_0,y_0)\left[f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\right] +$$

$$+ \alpha_1 \cdot \Delta x + \alpha_2 \cdot \left[f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\right] = 0,$$ откуда

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = -\frac{\mathcal{F}_x(x_0,y_0) + \alpha_1}{\mathcal{F}_y(x_0,y_0) + \alpha_2}.$$

Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$. В силу непр-сти неявной ф-ции $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \to 0$. Поэтому $\alpha_1, \alpha_2 \to 0$.

В результате получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = -\frac{\mathcal{F}_x(x_0,y_0)}{\mathcal{F}_y(x_0,y_0)},$$

т.е. $\exists\, f'(x_0) = -\dfrac{\mathcal{F}_x(x_0,y_0)}{\mathcal{F}_y(x_0,y_0)}$, ч.т.д.

Замечание. Если $\mathcal{F}(x,y)$ дифф-ма в у-ке $Q$ (см. Т.2), то неявная ф-я $y = f(x)$ дифф-ма в интервале $(x_0 - d, x_0 + d)$ и $f'(x) = -\dfrac{\mathcal{F}_x(x,y)}{\mathcal{F}_y(x,y)}\Big/_{y=f(x)}$.

Пример. $\underbrace{2y + \sin y - x}_{\mathcal{F}(x,y)} = 0 \implies y = f(x), \ -\infty < x < +\infty.$

$$f'(x) = -\frac{\mathcal{F}_x(x,y)}{\mathcal{F}_y(x,y)}\Big/_{y=f(x)} = \frac{1}{2+\cos f(x)};$$

$$f''(x) = \left[f'(x)\right]' = -\frac{1}{\left[2+\cos f(x)\right]^2}\left(-\sin f(x)\right)\cdot f'(x) = \frac{\sin f(x)}{\left[2+\cos f(x)\right]^3}.$$

Чтобы найти $f'(x)$ и $f''(x)$ в какой-то т. $x$, нужно сначала найти соотв. значение $f(x)$. Пусть $x=2\pi$. Для этого $x$ ур-е решается точно: $y=f(2\pi)=\pi$. Поэтому $f'(2\pi)=1$, $f''(2\pi)=0$.

2005г. Л.9

Рассм. теперь ур-е

$$\mathcal{F}(x_1,\dots,x_n,y)=0 \qquad (1a)$$

Реш. этого ур-я отн. $y$: $y=f(x_1,\dots,x_n)$ наз-ся неявной ф-й, опр-й ур-м (1а).

**Т. 2а** Пусть 1) $\mathcal{F}(x_1,\dots,x_n,y)$ опр. и дифф. в нек. окр. $\omega$ т. $M_0(x_1^0,\dots,x_n^0,y^0)$;

2) $\mathcal{F}_y(x_1,\dots,x_n,y)$ непр. в т. $M_0$.

3) $\mathcal{F}(x_1^0,\dots,x_n^0,y^0)=0$, $\mathcal{F}_y(x_1^0,\dots,x_n^0,y^0)\neq 0$.

Тогда $\exists$ параллелепипед $Q=\{(x_1,\dots,x_n,y): |x_i-x_i^0|<d_i,\ i=1,\dots,n;\ |y-y^0|\le c;\ d_i>0$ и $c>0$ нек. числа$\}\subset\omega$, в котором ур-е (1а) опр-т ед. неявную ф-ю вида $y=f(x_1,\dots,x_n)$, причём эта ф-я дифф-ма при $|x_i-x_i^0|<d_i$ $(i=1,\dots,n)$ и её ч. пр. вычисляются по ф-ле

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=-\frac{\mathcal{F}_{x_i}(x_1,\dots,x_n,y)}{\mathcal{F}_y(x_1,\dots,x_n,y)}\Bigg|_{y=f(x_1,\dots,x_n)}.$$

Док-во т. 2а аналогично док-ву Т. 2 и дополнения к Т.2.

## § 2. О неявных функциях, определяемых системой уравнений.

Рассм. систему $m$ ур-й

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \text{— — — — — — — —} \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Решение этой системы ур-й отн. $y_1, \dots, y_m$

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m = f_m(x_1, \dots, x_n) \qquad (2)$$

наз-ся системой неявных ф-ий, определяемой системой ур-й (1).

Мы рассмотрим вопросы о существовании и единственности неявных ф-й вида (2), опр-х системой ур-й (1), об их непр-сти и дифф-сти. При рассмотрении этих вопросов важную роль играет определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \text{— —} & \text{— —} & & \text{— —} \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

— определитель Якоби или якобиан ф-ий $F_1, \dots, F_m$ по переменным $y_1, \dots, y_m$.

Обозначение: $\Delta = \dfrac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)}$.

**Теорема 3.** Пусть

1) Ф-ии $F_1(x_1, \dots, y_m), \dots, F_m(x_1, \dots, y_m)$ дифф-мы в нек. окр. $\omega$ т. $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0)$.

2) $\dfrac{\partial F_i}{\partial y_j}$ $(i, j = 1, \dots, m)$ (т.е. все ч. пр., входящие в якобиан $\Delta$) непр. в т. $M_0$.

3) $F_1(M_0) = 0, \dots, F_m(M_0) = 0$, $\left.\dfrac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)}\right|_{M_0} \neq 0$.

Тогда

$\exists$ параллелепипед $Q = \{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) : |x_i - x_i^0| < d_i \ (i = 1, \dots, n)$, $|y_j - y_j^0| \le c_j \ (j = 1, \dots, m)$, $d_i > 0$ и $c_j > 0$ — нек. числа$\} \subset \omega$, в котором система (1) имеет ед. реш. отн. $y_1, \dots, y_m$:

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m = f_m(x_1, \dots, x_n) \qquad (2)$$

(т.е. система ур-й (1) определяет в $Q$ единственную систему неявных ф-й вида (2)), причём ф-ии (2) диф-мы при $|x_i - x_i^0| < d_i$ $(i = 1, \dots, n)$.

Док-во. При $m = 1$ Т.3 следует из Т.2. При $m > 1$ Т.3 можно док-ть по индукции (док-во технически дост. сложное).

Мы докажем Т.3 для $m = 2$.

(3) $\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2) = 0 \\ F_2(x, y_1, y_2) = 0 \end{cases}$ $\quad x = (x_1, \dots, x_n)$.

Пусть $M_0(x^0, y_1^0, y_2^0)$. В силу усл. 3) $F_1(M_0) = 0$, $F_2(M_0) = 0$,

$$\Delta\Big|_{M_0} = \frac{D(F_1, F_2)}{D(y_1, y_2)}\Big|_{M_0} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(M_0) & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(M_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(M_0) & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(M_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Отсюда следует, что хотя бы одна из ч. пр-х $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(M_0) \neq 0$.

Пусть $\underline{\frac{\partial F_1}{\partial y_1}(M_0) \neq 0.}$

Рассм. 1-е ур-е системы (3) в окр. т. $M_0$, как ур-е отн. $y_1$:

$$F_1(x, y_1, y_2) = 0. \qquad (4)$$

Т.к. $F_1(M_0) = 0$, $\frac{\partial F_1}{\partial y_1}(M_0) \neq 0$, то для ур-я (4) вып-ны усл. Т.2а, согласно которой в нек. окр. т. $M_0$ ур-е (4) имеет ед. реш. отн. $y_1$:

$$y_1 = f(x, y_2), \qquad (5)$$

причём $f(x^0, y_2^0) = y_1^0$, $f(x, y_2)$ – диф. ф-я, в частности,

$$\frac{\partial f}{\partial y_2} = - \frac{\frac{\partial F_1}{\partial y_2}(x, y_1, y_2)}{\frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x, y_1, y_2)}\Bigg|_{y_1 = f(x, y_2)}. \qquad (6)$$

Подставим решение (5) ур-е (4) во второе ур-е системы (3):

$$\underbrace{F_2(x, f(x, y_2), y_2)}_{g(x, y_2)} = 0 \quad \text{или} \quad \underline{g(x, y_2) = 0} \qquad (7).$$

Рассм. это ур-е в окр. т. $M_0'(x^0, y_2^0)$ (отн. $y_2$). Имеем

$$g(M_0') = F_2(x^0, \underbrace{f(x^0, y_2^0)}_{y_1^0}, y_2^0) = F_2(x^0, y_1^0, y_2^0) = F_2(M_0) = 0,$$

$$\frac{\partial g}{\partial y_2} = \frac{\partial F_2}{\partial y_2} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial f}{\partial y_2} \underset{\uparrow}{=} \frac{\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial y_2} - \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial y_1}}{\frac{\partial F_1}{\partial y_1}} = \frac{\Delta}{\frac{\partial F_1}{\partial y_1}}.$$

используем ф-лу (6)

Сл-но, $\left.\frac{\partial g}{\partial y_2}\right|_{M_0'} = \left.\frac{\Delta}{\frac{\partial F_1}{\partial y_1}}\right|_{M_0} \neq 0.$

Таким образом, для ур-е (7) в окр-ти т. $M_0'$ вып-ны усл. Т.2а.

По Т. 2а ур-е (7) в нек. окр. т. $M_0'(x^0, y_2^0)$ имеет ед. реш. отн. $y_2$:

$$y_2 = f_2(x),$$

причем $f_2(x)$ – дифф. ф-я. Подставляя это реш. в (5), получим

$$y_1 = f(x, f_2(x)) \equiv f_1(x),$$

причем $f_1(x)$ – дифф. ф-я.

Таким обр., в нек. окр. т. $M_0$ система (3) имеет ед. реш. отн. $y_1, y_2$:

$$y_1 = f_1(x), \quad y_2 = f_2(x),$$

причем $f_1(x), f_2(x)$ – дифф. ф-ии. Теорема 3 для $m=2$ доказана.

В общем случае произвольного $m$ Т.3 док-ся аналогичным образом.

Вычисление производных неявных ф-й $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$.

Подставим (мысленно) эти ф-ии в систему (3). Получим тождества

$$F_1(x, f_1(x), f_2(x)) = 0, \quad F_2(x, f_1(x), f_2(x)) = 0.$$

Продиф. эти тождества по $x_i$:

$$\begin{cases} F_{1x_i} + F_{1y_1}\cdot f_{1x_i} + F_{1y_2}\cdot f_{2x_i} = 0 \\ F_{2x_i} + F_{2y_1}\cdot f_{1x_i} + F_{2y_2}\cdot f_{2x_i} = 0 \end{cases}$$

Это система двух линейных ур-й отн. $f_{1x_i}$ и $f_{2x_i}$, определитель которой равен якобиану, отличному от нуля в т. $M_0$.

Поэтому в окр-ти т. $M_0$, где якобиан $\neq$ в силу усл-ти знака непр. ф-ии, из этой системы можно найти $f_{1x_i}$ и $f_{2x_i}$.

2007г. Л.10



## § 3. Зависимость функций.

В курсе лин. алгебры было введено понятие линейной зависимости элементов лин. пр-ва. В частности, в пр-ве $C[a,b] = \{ y(x) : y(x) - \text{непр. на } [a,b] \}$ линейная зависимость ф-й $y_1(x), \dots, y_m(x)$ означает, что одна из этих ф-й является линейной комбинацией остальных:

$$y_k(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_{k-1} y_{k-1}(x) + C_{k+1} y_{k+1}(x) + \dots + C_m y_m(x).$$

Введем более общее понятие зависимости ф-й, которое включает в себя как частный случай понятие лин. зависимости.

Начнём с примера: $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $a \le x \le b$.

$y_1(x)$ и $y_2(x)$ не яв-ся линейно зависимыми на $[a,b]$, т.к. ни при каком $C = \text{const}$ р-во $x = Cx^2$ (и также $x^2 = Cx$) не вып-ся $\forall x \in [a,b]$. Вместе с тем $y_2(x) = y_1^2(x)$ $\forall x \in [a,b]$, т.е. $y_2(x)$ зависит от $y_1(x)$, но эта зависимость не линейная.

Перейдем к общему понятию зависимости ф-й.

Пусть ф-ии

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m = f_m(x_1, \dots, x_n) \qquad (1)$$

опр. и диф. на нек. откр. мн-ве $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$ (в откр. обл. $\mathcal{D}$).

**Опр.** Ф-я $y_k = f_k(x_1, \dots, x_n)$ наз-ся зависимой в обл. $\mathcal{D}$ от остальных ф-ий системы (1), если сразу для всех точек обл. $\mathcal{D}$ её можно представить в виде

$$y_k = \Phi(y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_m), \qquad (2)$$

где $\Phi(y_1, \dots, y_m)$ — диф. ф-я своих аргументов.

Замечания. 1) Р-во (2) нужно понимать так: если вместо $y_1, \dots, y_m$ подставить ф-ии (1), то получится тожд-во

$$f_k(x_1, \dots, x_m) = \Phi(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_m(x_1, \dots, x_m)) \quad \forall (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{D}.$$

2) Существенно, что $\Phi$ зависит только от $y_1, \dots, y_m$ (кроме $y_k$) и не зависит от $x_1, \dots, x_n$.

Опр. Ф-ии (1) наз-ся зависимыми в обл. $D$, если одна из них (всё равно — какая) зависит в обл. $D$ от остальных ф-ий.

В противном случае ф-ии (1) наз-ся независимыми в обл. $D$.

Примеры. 1) $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ y_2 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ y_3 = (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2 \end{cases} \Rightarrow y_3 = \underbrace{\frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)}_{\Phi(y_1, y_2)}$

т.е. данные ф-ии зависимы в любой обл. $D \subset E^4$.

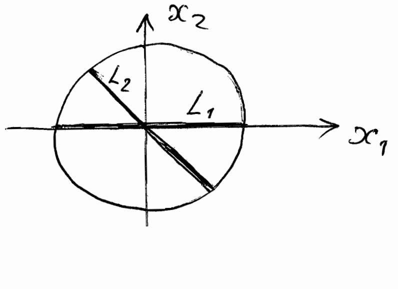
2009г. 1.10

2) $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_1 x_2$.

Докажем, что эти ф-ии независимы в любой окр. т. $(0,0)$ (интуитивно ясно, что $x_1 + x_2$ нельзя выразить через $x_1 x_2$ и наоборот).

Предположим, что $y_1$ и $y_2$ зависимы в нек. окр. т. $(0,0)$. Тогда в этой окр-ти либо $y_1 = \Phi(y_2)$, либо $y_2 = \Phi(y_1)$.

Допустим, что $y_1 = \Phi(y_2)$, т.е. $x_1 + x_2 = \Phi(x_1 x_2)$. Тогда




на отрезке $L_1$ $(x_2 = 0)$ получим $x_1 = \Phi(0) = \text{const}$ — неверное р-во.

Если допустить, что $y_2 = \Phi(y_1)$, т.е. $x_1 x_2 = \Phi(x_1 + x_2)$, то на отрезке $L_2$ $(x_1 + x_2 = 0)$ получим $-x_1^2 = \Phi(0) = \text{const}$, что также неверно.

Таким обр., ни одна из данных ф-ий не зависит от другой в любой окр. т. $(0,0)$, т.е. эти ф-ии независимы в любой окр. т. $(0,0)$.

3) Док-ть самост-но, что ф-ия $y_1(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ зависит от ф-ии

$y_2(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ 0, & -1 < x < 0, \\ (x+1)^2, & x \leq -1 \end{cases}$ в некоторой окрестности любой точки числовой прямой, но $y_1(x)$ не зависит от $y_2(x)$ на всей числ. прямой.

Вернёмся к ф-м (1):

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m = f_m(x_1, \dots, x_n) \qquad (1)$$

Пусть $n \geq m$. Выберем какие-нибудь $m$ аргументов: $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$

и составим якобиан $\dfrac{D(f_1, \dots, f_m)}{D(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})}$ (2).

Т. 4. Если: 1) ф-ции (1) (опр. и) дифф-мы в окр. ($\omega$) т. $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$,

2) какой-нибудь якобиан вида (2) не равен нулю в т. $M_0$,

то ф-ции (1) независимы в окр. $\omega$.

Док-во. Пусть, например, $\left.\dfrac{D(f_1, \dots, f_m)}{D(x_1, \dots, x_m)}\right|_{M_0} \neq 0$.

Допустим, что ф-ции (1) зависимы в окр. $\omega$. Тогда одна из них, (напр. $y_k = f_k(x_1, \dots, x_n)$) зависит в $\omega$ от остальных:

$$y_k = \Phi(y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_m), \text{ где } \Phi \text{ — дифф. ф-я},$$

т.е. $f_k(x_1, \dots, x_n) = \Phi(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$.

По правилу дифф. сложной ф-ции

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_m} \cdot \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_m} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m} + \dots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_m} \cdot \dfrac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{cases} \qquad (3)$$

Рассм. якобиан

$$\frac{D(f_1, \dots, f_m)}{D(x_1, \dots, x_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{vmatrix}$$

Из ф-л (3) следует, что $k$-я строка явл-ся лин. комбинацией остальных строк с коэф-ми $\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial y_m}$.

Поэтому $\dfrac{D(f_1,\dots,f_m)}{D(x_1,\dots,x_m)} \equiv 0$ в $\omega$, что противоречит усл. 2) теоремы. Сл-но, ф-ии (1) независимы в $\omega$.

<u>Т. 4 доказана.</u>

<u>2005 г. Л 10</u>

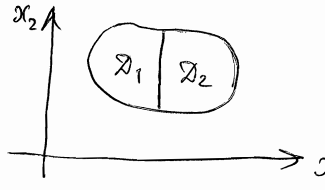
<u>Следствие.</u> Если ф-ии (1) зависимы в $\omega$, то все якобианы вида (2) $\dfrac{D(f_1,\dots,f_m)}{D(x_{i_1},\dots,x_{i_m})} \equiv 0$ в $\omega$.

В 2005 г не рассказывал

<u>Замечание.</u> Мы доказали, что дост. условием независимости ф-й (1) в окр. т. $M_0$ является условие I: отличие от нуля в т. $M_0$ какого-либо якобиана вида (2), а необх. условием зависимости ф-ий в $\omega$ явл-ся усл. II: тождественное р-во нулю в $\omega$ всех якобианов вида (2).

Отметим, что усл I не явл-ся необх. условием независимости ф-ий (1) в окр. т. $M_0$. Так в примере 2 $\dfrac{D(f_1,f_2)}{D(x_1,x_2)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_2$, откуда следует, что $\left.\dfrac{D(f_1,f_2)}{D(x_1,x_2)}\right|_{(0,0)} = 0$, но ф-ии $y_1$ и $y_2$ независимы в окр. т. $(0,0)$.

Аналогично, усл. II не явл-ся дост. условием зависимости ф-ий в окр. $\omega$ т. $M_0$. <u>Пример:</u> $y_1(x_1,x_2) = \begin{cases} \equiv 0 \text{ в } D_1, \\ \not\equiv 0 \text{ в } D_2, \end{cases}$




$y_2(x_1,x_2) = \begin{cases} \not\equiv \text{ в } D_1, \\ \equiv 0 \text{ в } D_2, \end{cases}$

причем $y_1$ и $y_2$ — диф. в $D = D_1 \cup D_2$.

$\dfrac{D(y_1,y_2)}{D(x_1,x_2)} \equiv 0$ в обл. $D$, но $y_1$ и $y_2$ независимы в обл. $D$ (док-ть самост-но).

## <u>Общая теорема о зависимости и независимости функций.</u>

Снова рассм. ф-ии

$$y_1 = f_1(x_1,\dots,x_n),\ \dots,\ y_m = f_m(x_1,\dots,x_n) \qquad (1)$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ наз-ся <u>функциональной матрицей</u>. Её размеры — $(m \times n)$.

Выберем $r$ строк с какими-то номерами $i_1, \dots, i_r$ и $r$ столбцов с номерами $j_1, \dots, j_r$. На их пересечении стоит минор $r$-го порядка — якобиан ф-й $f_{i_1}, \dots, f_{i_r}$ по переменным $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$

$$\frac{D(f_{i_1}, \dots, f_{i_r})}{D(x_{j_1}, \dots, x_{j_r})}$$

Теорема 5. Пусть

1) ф-ии (1) опр-ны и диф-мы в окр-ти $\omega$ т. $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$;

2) все ч. пр. $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $(i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n)$ непр. в т. $M_0$;

3) $\exists$ минор $r$-го порядка матрицы $A$, не равный нулю в т. $M_0$;

4) все миноры $(r+1)$-го порядка матрицы $A \equiv 0$ в $\omega$.

Тогда

① $r$ функций, представленных в миноре из усл. 3) независимы в окр-ти $\omega$;

② каждая из остальных $(m-r)$ функций зависит от указанных $r$ ф-ий в нек. окр. $\omega_1$ т. $M_0$ ($\omega_1 \subset \omega$).

Утв. ① следует из теоремы 4, утв. ② доказывать не будем.

Пример.
$$\begin{cases} y_1 = \underbrace{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}_{f_1} \\ y_2 = \underbrace{x_1 - x_2 + x_3 - x_4}_{f_2} \\ y_3 = \underbrace{(x_1+x_3)^2 + (x_2+x_4)^2}_{f_3} \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2(x_1+x_3) & 2(x_2+x_4) & 2(x_1+x_3) & 2(x_2+x_4) \end{pmatrix}$$

Выделенный минор 2-го порядка $\neq 0$. (Сл-но, $y_1$ и $y_2$ — независимые ф-ии.) Все миноры 3-го порядка $\equiv 0$. Из первых двух ур-й выразим $x_1$ и $x_2$:

$$x_1 = \tfrac{1}{2}(y_1+y_2) - x_3, \qquad x_2 = \tfrac{1}{2}(y_1-y_2) - x_4.$$

Подставим эти выражения в 3-е р-во:

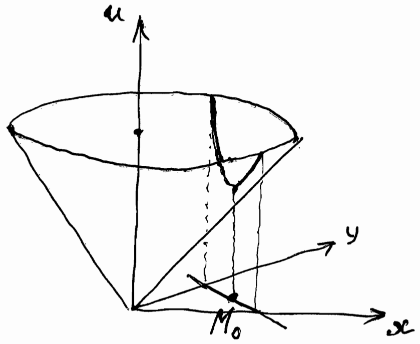
$$y_3 = \left[\tfrac{1}{2}(y_1+y_2)\right]^2 + \left[\tfrac{1}{2}(y_1-y_2)\right]^2 = \underbrace{\tfrac{1}{2}(y_1^2+y_2^2)}_{\Phi(y_1,y_2)} \Rightarrow y_3 \text{ зависит от } y_1 \text{ и } y_2.$$

Док-во утв. ② в Т.5 проводится таким же образом.

## §4. Условный экстремум.

Задача об условном экстремуме ф-ции $u=f(x_1,\dots,x_n)$ – это задача о нахождении точек локального максимума и минимума этой ф-ции при условии, что её аргументы $x_1,\dots,x_n$ связаны между собой некоторыми равенствами (условиями связи).

Пример. Найти экстремумы ф-ции $u=\sqrt{x^2+y^2}$ при условии $x+y=1$ (условие связи).




Т.обр., экстремумы ф-ции ищутся не на всей пл-ти $(x,y)$, а на прямой $x+y=1$. Наглядно видно, что в нек. точке $M_0$ прямой $x+y=1$ ф-я имеет минимальное значение по отношению к другим точкам этой прямой, т.е. ф-я $u=\sqrt{x^2+y^2}$ имеет в т. $M_0$ условный минимум при условии связи $x+y=1$.

Для точного решения з-чи выразим $y$ через $x$ из условия связи: $y=1-x$ и подставим в выражение для ф-ции $u$: $u=\sqrt{x^2+(1-x)^2}$. Найдём экстремумы этой ф-ции:

$u'_{(x)}=\frac{x-(1-x)}{\sqrt{x^2+(1-x)^2}}=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$. Пр-я $u'(x)$ при переходе через т. $x=\frac{1}{2}$ меняет знак с $\ominus$ на $\oplus$. Поэтому в т. $x=\frac{1}{2}$ – min.

Т.обр. в т. $M_0(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ф-я $u=\sqrt{x^2+y^2}$ имеет усл. минимум при усл. связи $x+y=1$.

### Общая постановка з-чи об усл. экстремуме.

Рассматривается ф-я

$$u=f(x_1,\dots,x_n)=f(M) \qquad (1)$$

при наличии $m$ условий связи $(m<n)$:

$$F_1(x_1,\dots,x_n)=0,\ \dots,\ F_m(x_1,\dots,x_n)=0 \qquad (2)$$

Пусть координаты т. $M_0(x_1^0,\dots,x_n^0)$ удовл. ур-м (2).

<u>Опр.</u> Говорят, что ф-я $u = f(M)$ имеет в т. $M_0$ условный минимум (максимум) при условиях связи (2), если $\exists$ $\varepsilon$-окр. т. $M_0$, в которой $\forall$ т. $M(x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющей ур-ю (2), вып-ся нер-во

$$f(M) > f(M_0) \quad \left(f(M) < f(M_0)\right) \text{ при } M \neq M_0.$$

Экстремум ф-ии без условий связи будем называть <u>безусловным</u>.

<u>Два метода решения з-чи об условном экстремуме.</u>

<u>I метод.</u> <u>Сведение к з-че о безусловном экстремуме.</u>

Пусть для системы ур-й (2) в окр. т. $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$ вып-ны усл. Т.3 о неявных функциях.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m \text{ диф-мы в окр. т. } M_0; \\ 2)\ \dfrac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j}\ (i, j = 1, \dots, m) \text{ непр. в т. } M_0; \\ 3)\ \mathcal{F}_1(M_0) = 0, \dots, \mathcal{F}_m(M_0) = 0, \quad \left.\dfrac{D(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m)}{D(x_1, \dots, x_m)}\right|_{M_0} \neq 0. \end{array}\right\} (3)$$

Тогда в нек. окр. $\omega$ т. $M_0$ ур-я (2) имеют ед. реш. отн. $x_1, \dots, x_m$:

$$x_1 = \varphi_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, x_m = \varphi_m(x_{m+1}, \dots, x_n), \quad (4)$$

причём ф-ии (4) диф-мы.

В указ. окр-ти $\omega$ условие связи (2) эквивалентно соотношениям (4), в которых $x_{m+1}, \dots, x_n$ можно расм-ть как независимые переменные, а $x_1, \dots, x_m$ – ф-ии этих независимых переменных.

Если удаётся найти ф-ии (4) в явном виде, то, подставляя их в (1), получим

$$u = f(\varphi_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) \equiv \mathcal{F}(x_{m+1}, \dots, x_n) = \mathcal{F}(M'),$$

причём ф-я $\mathcal{F}$ зависит только от независимых переменных $x_{m+1}, \dots, x_n$. Т. обр., вопрос об условном экстремуме ф-ии $f$ при условиях связи (2) в окр. $\omega$ сводится к вопросу о безусловном экстремуме ф-ии $\mathcal{F}$. Эти две з-чи экв-ны

(Именно этот приём был использован в примере, с которого мы начали).

II метод. Метод Лагранжа.

В этом методе не будут использоваться явные выражения для ф-ий (4), хотя по-прежнему будем считать, что усл. (3) вып-ны и потому неявные ф-ии вида (4) сущ-т в окр. $\omega$ т. $M_0$.

Введём т. наз. ф-ю Лагранжа

$$\Phi = f + \lambda_1 \mathcal{F}_1 + \dots + \lambda_m \mathcal{F}_m,$$

где $f$ — ф-я (1); $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m$ — ф-ии из (2); $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — пока произвольные числа (они наз-ся множителями Лагранжа). Заметим, что в точках $M(\varphi_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n)$, удовлетворяющих условиям связи (2), вып-ся р-ва

$$\Phi(M) = f(M) = \mathcal{F}(M'), \quad \text{где } M'(x_{m+1}, \dots, x_n),$$

или, в более подробной записи,

$$\mathcal{F}(x_{m+1}, \dots, x_n) = \Phi(\varphi_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n). \quad (5)$$

Выведем необх. усл. условного экстремума (по Лагранжу).

Пусть ф-я $f$, а значит и ф-я $\Phi$, дифф-ма в т. $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ и пусть $f$, а значит и ф-я $\Phi$, имеет в т. $M_0$ усл. экстремум при усл-х связи (2). Тогда ф-я $\mathcal{F}(M')$ имеет безусл. экстремум в т. $M_0'(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)$. Сл-но,

$$d\mathcal{F}\big|_{M_0'} = 0.$$

Это р-во в силу (5) можно записать в виде

$$dF\Big|_{M_0'} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(M_0)\,dx_1 + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_m}(M_0)\,dx_m + \frac{\partial \Phi}{\partial x_{m+1}}(M_0)\,dx_{m+1} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}(M_0)\,dx_n = 0, \quad (6)$$

где $dx_{m+1}, \dots, dx_n$ – диф-лы независимых переменных,

а $dx_1, \dots, dx_m$ – диф-лы ф-ий (4) в т. $M_0'$: $dx_i = d\varphi_i\big|_{M_0'}$ $(i=1,\dots,m)$

Покажем, что числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ можно выбрать так, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(M_0) = 0, \dots, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_m}(M_0) = 0. \qquad (7)$$

Напишем р-ва (7) в развёрнутом виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(M_0) + \dots + \lambda_m \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1}(M_0) = 0, \\ \text{------------------------------} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_m}(M_0) + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial x_m}(M_0) + \dots + \lambda_m \dfrac{\partial F_m}{\partial x_m}(M_0) = 0. \end{cases}$$

Это система $m$ линейных ур-ий отн. $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, определитель которой является транспонированием по отношению к якобиану $\dfrac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(x_1, \dots, x_m)}\Big|_{M_0} \neq 0$. Сл-но, из этой системы однозначно опр-ся $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.

В силу (7) р-во (6) принимает вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_{m+1}}(M_0)\,dx_{m+1} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}(M_0)\,dx_n = 0,$$

а т.к. $dx_{m+1}, \dots, dx_n$ – диф-лы независимых переменных, то отсюда получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_{m+1}}(M_0) = 0, \dots, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}(M_0) = 0. \qquad (8)$$

Таким образом, мы доказали след. теорему.

Теорема 6 (необх. по Лагранжу условие усл. экстремума).

Пусть вып-ны усл. (3) и пусть ф-я $f(M)$ диф-ма в т. $M_0$ и имеет в этой точке усл. экстр. при условиях связи (2). Тогда $\exists$ ф-я Лагранжа $\Phi = f + \lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_m F_m$ (т.е. $\exists$ числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$) такая, что все ей ч. пр. в т. $M_0$ равны нулю

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(M_0) = 0, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}(M_0) = 0. \qquad (9).$$

2007г. Л. 11, 2009г. Л. 11

Из Т. 6 следует, что отыскание точек усл. экстремума ф-ии $f$ при условиях связи (2) можно производить след. образом.

Составляем ф-ю Лагранжа $\Phi = f + \lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_m F_m$ с неопредел. пока коэф-ми $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ и рассматриваем систему ур-ий, состоящую из ур-ий (9) и (2):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = 0, \quad F_1 = 0, \dots, F_m = 0. \qquad (10)$$

Это система $(n+m)$ ур-ий отн. $(n+m)$ неизвестных: $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Пусть $x_1^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0$ — решение системы (10), т.е. в т. $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ ф-я $\Phi = f + \lambda_1^0 F_1 + \dots + \lambda_m^0 F_m$ удовл. усл. (9).

Тогда т. $M_0$ яв-ся точкой возможного усл. экстр. ф-ии $f$ при условиях связи (2). Воспользуемся тем, что вопрос об усл. экстр. ф-ии $f$ в т. $M_0$ эквивалентен вопросу о безусл. экстр. ф-ии $F$ в т. $M_0'(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)$. Чтобы установить, имеет ли ф-я $F$ экстр. в т. $M_0'$, нужно рассмотреть $d^2 F|_{M_0'}$.

$$d^2 F|_{M_0'} = Q(dx_{m+1}, \dots, dx_n) - \text{кв. форма отн. } dx_{m+1}, \dots, dx_n.$$

Если эта кв. ф. знакоопределенная, то ф-я $F$ имеет в т. $M_0'$ экстремум, а значит ф-я $f$ имеет в т. $M_0$ усл. экстр. при условиях связи (2). Если же эта кв. ф. знакопеременная, то экстр. нет.

Это и есть дост. усл. (наличия или отсутствия в т. $M_0$) усл. экстр. ф-ии $f$ при условиях связи (2).

2005 г. Л. 11.

Практическое вычисление кв. ф. $Q(dx_{m+1}, \dots, dx_n)$ можно произвести след. образом. По ф-ле (6)

$$dF\big|_{M_0'} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)\Phi\big|_{M_0},$$

где $dx_{m+1}, \dots, dx_n$ – диф-лы независ. переменных, а $dx_1, \dots, dx_m$ – диф-лы ф-ий (4) в т. $M_0'$ ($dx_i = d\varphi_i|_{M_0'}$ $(i=1,\dots,m)$). Второй диф-л $d^2F|_{M_0'}$ имеет вид:

$$d^2F\big|_{M_0'} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^2\Phi\big|_{M_0} + \left[\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}(M_0)d^2x_1 + \dots + \frac{\partial\Phi}{\partial x_m}(M_0)d^2x_m\right] \quad (11)$$

В силу (9) $[\dots]=0$ и, сл-но, для нахождения $d^2F|_{M_0'}$ нужно вычислить второй диф-л ф-ии Лагранжа $\Phi$ в т. $M_0$, причём так, как если бы все аргументы $x_1, \dots, x_n$ были независимыми переменными, а затем заменить $dx_1, \dots, dx_m$ дифференциалами неявных ф-ий (4) в т. $M_0'$. В свою очередь, чтобы найти диф-лы $d\varphi_1, \dots, d\varphi_m$ ф-й (4) в т. $M_0'$, не используя явных выражений для этих ф-ей (их у нас нет), поступим так. Предп., что в ур-я (2) вместо $x_1, \dots, x_m$ подставлены ф-ии (4). Тогда получаются тождества отн. $x_{m+1}, \dots, x_n$ ($F_1(\varphi_1, \dots, \varphi_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = 0, \dots, F_m(\varphi_1, \dots, \varphi_m, x_{m+1}, \dots, x_n)=0$), дифференцируя которые в т. $M_0'$ и используя инвариантность формы 1-го диф-ла, приходим к р-вам:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(M_0)\,d\varphi_1\big|_{M_0'} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_m}(M_0)\,d\varphi_m\big|_{M_0'} + \frac{\partial F_1}{\partial x_{m+1}}(M_0)\,dx_{m+1} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(M_0)\,dx_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(M_0)\,d\varphi_1\big|_{M_0'} + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial x_m}(M_0)\,d\varphi_m\big|_{M_0'} + \frac{\partial F_m}{\partial x_{m+1}}(M_0)\,dx_{m+1} + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(M_0)\,dx_n = 0. \end{cases}$$

Это линейная система отн. $d\varphi_1|_{M_0'}, \dots, d\varphi_m|_{M_0'}$ с определителем $\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(x_1, \dots, x_m)}\Big|_{M_0} \neq 0$. Сл-но, из неё можно однозначно выразить $d\varphi_1|_{M_0'}, \dots, d\varphi_m|_{M_0'}$ через $dx_{m+1}, \dots, dx_n$. Подставляя эти выражения в (11) вместо $dx_1, \dots, dx_m$, получим

$$d^2F|_{M_0'} = Q(dx_{m+1}, \dots, dx_n)$$ – искомая кв. форма отн. $dx_{m+1}, \dots, dx_n$.

Пример. Найти экстремумы ф-ии $u = \underbrace{x+y}_{f}$ при условии связи $\underbrace{xy-1}_{F_1}=0$

Решение. $\Phi = x+y+\lambda(xy-1)$ – ф-я Лагранжа.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = 1+\lambda y = 0 & \rightarrow y = -\dfrac{1}{\lambda} \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = 1+\lambda x = 0 & \rightarrow x = -\dfrac{1}{\lambda} \\ F = xy-1 = 0 & \end{cases}$$

$$\frac{1}{\lambda^2} = 1 \rightarrow \lambda = -1, \ \lambda = 1.$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$\lambda = -1$, $M_1(1,1)$ $\quad \Phi = x+y+1-xy$

$$d\Phi = dx + dy - x\,dy - y\,dx$$

$$d^2\Phi = -2\,dx\,dy$$

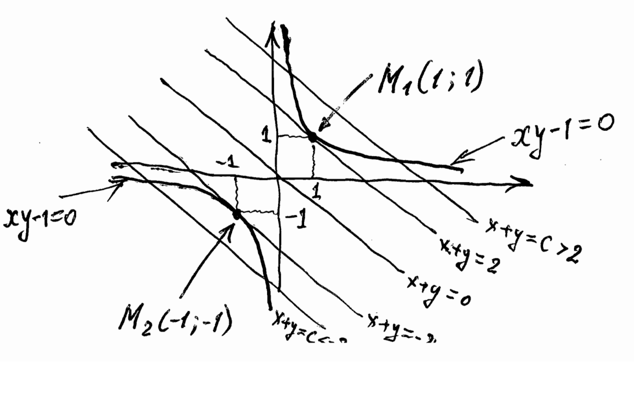
Из усл. связи имеем: $x\,dy + y\,dx = 0 \Rightarrow$ в т. $M_1$ $dy = -dx$,

$$d^2F|_{x=1} = 2(dx)^2 = Q(dx)$$ – положит. опр. кв. ф.

Сл-но, в т. $M_1(1,1)$ ф-я $f = x+y$ имеет усл. min $(f(1,1)=2)$ при усл. связи $xy-1=0$.

Аналогично док-ся, что в т. $M_2(-1,1)$ ф-я $f = x+y$ имеет усл. max $(f(-1,-1)=-2)$ при усл. связи $xy-1=0$.

Геом. иллюстрация




$x+y=c=\text{const}$ – линии уровня ф-ии $u = x+y$.