ВАРИАНТ 3.

1. Исследуйте последовательность $f_n(x) = \frac{1}{\cos^2 x}(\operatorname{tg} x)^n$ на равномерную сходимость на интервалах а) $\left[0, \frac{\pi}{4} - \varepsilon\right], \varepsilon > 0$, б) $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, в) $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. **Совет:** используйте практический критерий.

Решение. Воспользуемся практическим критерием:

а). $\left[0, \frac{\pi}{4} - \varepsilon\right]$ Предельная функция $f = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\left[0,\frac{\pi}{4}-\varepsilon\right]} \left|\frac{1}{\cos^2 x}\left(\operatorname{tg} x\right)^n\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\varepsilon\right)}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\varepsilon\right)\right)^n\right) = 0$$. Равномерно сходится.

б) $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$. Предельная функция $f = 0$ $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)} \left|\frac{1}{\cos^2 x}\left(\operatorname{tg} x\right)^n\right| = 2 \neq 0$. На интервале $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ равномерной сходимости нет. Значит, её нет и на содержащем интервал отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

2. Исследуйте ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{\sqrt{n} + \sqrt{x}}$ на равномерную сходимость на множестве $x \in \left[\varepsilon; \frac{\pi}{2}\right]$, $\varepsilon > 0$.

Решение. Как было показано на семинаре, $\left|S_n\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \cos 2kx\right| \le \frac{1}{\sin^2 x}$. Значит, на отрезке $\left[\varepsilon; \frac{\pi}{2}\right]$ последовательность частичных сумм S_n равномерно ограничена числом $\frac{1}{\sin^2 \varepsilon}$.

Последовательность $b_n\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{x}}$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Покажем, что она монотонная. Рассмотрим отношение

$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\sqrt{n} + \sqrt{x}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{x}} < 1$ при всех n и $x \in \left[\varepsilon; \frac{\pi}{2}\right]$.

Согласно признаку Дирихле-Абеля, ряд равномерно сходится на отрезке $\left[\varepsilon; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Определите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\left(i\right)^n\right)^n}{n} z^{4n}$ и исследуйте сходимость на границе круга. **Совет**: на границе круга сходимость $z = R \cdot e^{i\varphi}$, где R – радиус сходимости.

Решение. $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{\left(1+(i)^n\right)^n}{n}\right|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\left|1+(i)^n\right|}{\sqrt[n]{n}}=2;\ R=\frac{1}{2}$. На границе круга

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+(i)^n\right)^n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{4n}\cdot e^{i4n\varphi}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2^{4k}}{4k}\left(\frac{1}{2}\right)^{4k}\cdot e^{i16k\varphi}+\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{4k-1}e^{i\frac{\pi}{4}(4k-1)}}{4k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{4k-1}e^{i(4k-1)\varphi}+\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{4k-3}e^{-i\frac{\pi}{4}(4k-3)}}{4k-3}\left(\frac{1}{2}\right)^{4k-3}e^{i(4k-3)\varphi}\right)=.$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k}\cdot e^{i16k\varphi}+\frac{1}{(4k-1)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4k-1}e^{i(4k-1)\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}+\frac{1}{4k-3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4k-3}e^{i(4k-3)\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)}\right)$$

Ряды, составленные из последних двух слагаемых в скобках, сходятся абсолютно при всех φ.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k}\cdot e^{i16k\varphi}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\cos 16k\varphi+i\sin 16k\varphi\right)$ сходится условно, согласно признаку Дирихле-Абеля при всех значениях φ, кроме тех, для которых $16\varphi=2\pi m$, то есть, $\varphi=\frac{\pi m}{8},\ m=0,1,\dots,7$, поскольку в этих точках $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k}\cdot e^{i16k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k}$.

4. Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$, используя возможность почленного интегрирования ряда $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$ при $|x|<1$

Решение. Обозначим $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=xS_1(x)$. Требуется найти $S\left(\frac{1}{3}\right)$.

Интегрируя ряд $S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ почленно, получаем $\int_0^x S_1(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$. Откуда

$S_1(x)=\frac{1}{(1-x)^2};\ \ S(x)=xS_1(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$. Тогда $S\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{3}{4}$.

5. Разложите функцию $f(z)=\frac{1}{z(i-z)}$ в ряд Лорана в кольце $1<|z+i|<2$.

Решение.

$$f(z)=\frac{1}{z(i-z)}=\frac{1}{iz}+\frac{1}{i(i-z)}=\frac{1}{i(z+i)+1}-\frac{1}{i}\frac{1}{z+i-2i}=$$

$$=\frac{1}{i(z+i)}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{i(z+i)}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{z+i}{2i}-1}=\frac{1}{i(z+i)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{i(z+i)}\right)^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+i}{2i}\right)^n=$$

$$=-\sum_{n=-\infty}^{-1}(-i)^n(z+i)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}i^n}(z+i)^n.$$