

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. М.В. Ломоносова

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра математики

А.В. Щепетиллов

Лекции по математическому анализу для

экспериментального потока

Третий семестр

Москва, 2011

Оглавление

Предисловие	5
1 Поверхности и поверхностные интегралы	8
1.1 Дифференциальная геометрия поверхностей	8
1.1.1 Определение поверхностей и способы их задания . .	8
1.1.2 Первая квадратичная форма поверхности	10
1.1.3 Вторая квадратичная форма поверхности	13
1.1.4 Вычисление главных кривизн и теорема Гаусса . . .	17
1.1.5 Уравнения для нахождения омбилических точек . .	21
1.1.6 Линии кривизны и канонический репер поверхности	22
1.1.7 Ориентация поверхностей	27
1.1.8 Материал для семинарских занятий	30
1.2 Интегральные формулы	31
1.2.1 Формула Остроградского–Гаусса	31
1.2.2 Формула Стокса	35
1.2.3 Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования	39
2 Скалярные и векторные поля	43
2.1 Основные понятия теории скалярных и векторных полей .	43
2.1.1 Скалярное поле	43
2.1.2 Векторное поле	44
2.1.3 Производная по направлению и градиент скалярно- го поля	45
2.1.4 Дивергенция векторного поля	45
2.1.5 Ротор векторного поля	46
2.1.6 Циркуляция векторного поля	46
2.1.7 Поток векторного поля	47
2.1.8 Инвариантное определение дивергенции векторного поля	48
2.1.9 Инвариантное определение ротора векторного поля	49

2.2	Потенциальные векторные поля	50
2.3	Соленоидальные векторные поля	53
2.4	Оператор Гамильтона и повторные дифференциальные операции	55
2.5	Операции векторного анализа в криволинейных ортогональных координатах	58
2.5.1	Криволинейные ортогональные координаты	58
2.5.2	Параметры Ламе	59
2.5.3	Градиент	61
2.5.4	Дивергенция	62
2.5.5	Ротор	64
2.5.6	Оператор Лапласа	65
3	Числовые ряды и бесконечные произведения	66
3.1	Числовые ряды	67
3.1.1	Основные понятия теории числовых рядов	67
3.1.2	Ряды с неотрицательными членами	70
3.1.3	Абсолютно и условно сходящиеся ряды	78
3.1.4	Арифметические операции над сходящимися рядами	80
3.1.5	Признаки сходимости произвольных рядов	81
3.2	Бесконечные произведения	85
3.2.1	Материал для семинарских занятий	96
4	Функциональные последовательности и ряды	98
4.1	Определения	98
4.2	Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов	100
4.3	Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов	103
4.4	Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов	108
4.4.1	Равномерная сходимость и непрерывность	108
4.4.2	Переход к пределу под знаком интеграла и почленное интегрирование ряда	111
4.4.3	Переход к пределу под знаком производной и почленное дифференцирование ряда	113
4.5	Функциональные евклидовы, нормированные и метрические пространства	115

4.6	Теорема Арцела	129
5	Несобственные интегралы	134
5.1	Несобственный интеграл 1 рода	134
5.2	Признаки сходимости несобственных интегралов 1 рода . .	136
5.3	Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов 1 рода	142
5.4	Несобственные интегралы 2 рода	143
5.5	Главное значение несобственного интеграла	148
5.6	Кратные несобственные интегралы	150
5.6.1	Интеграл от неограниченной функции по ограниченной области	150
5.6.2	Интегралы от неотрицательных функций по ограниченным областям	152
5.6.3	Абсолютная сходимость	155
5.6.4	Признаки абсолютной сходимости	156
5.6.5	Эквивалентность сходимости и абсолютной сходимости кратных несобственных интегралов	158
5.6.6	Несобственные интегралы с неограниченной областью определения	162
5.6.7	Методы вычисления несобственных кратных интегралов	163
6	Интегралы, зависящие от параметров	165
6.1	Собственные интегралы, зависящие от параметра	165
6.2	Несобственные интегралы 1 рода, зависящие от параметра. Признаки равномерной сходимости	168
6.3	О непрерывности, интегрировании и дифференцировании по параметру несобственных интегралов, зависящих от параметра	173
6.4	Вычисление несобственных интегралов с помощью дифференцирования по параметру	176
6.5	Эйлеровы интегралы	179
6.5.1	Свойства Γ -функции	180
6.5.2	Свойства B -функции	185
6.6	Кратные интегралы, зависящие от параметров	187

7	Ряды и интегралы Фурье	196
7.1	Тригонометрические ряды Фурье	196
7.2	Поточечная сходимость тригонометрического ряда Фурье .	200
7.3	Комплексная форма ряда Фурье	211
7.4	Интеграл Фурье	212
7.5	Преобразование Фурье	215
7.6	Понятие общего ряда Фурье	217
7.7	Замкнутые и полные ортогональные системы	220
7.8	Равномерная сходимость и почленное дифференцирование тригонометрического ряда Фурье	227
7.9	Равномерная аппроксимация непрерывной функции три- гонометрическими и алгебраическими многочленами	231
7.10	Замкнутость тригонометрической системы	233
8	Обобщенные функции	235
8.1	Понятие обобщенной функции. Пространство обобщенных функций	235
8.2	Действия над обобщенными функциями	241
8.2.1	Произведение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию	241
8.2.2	Замена переменной в обобщенной функции	241
8.2.3	Дифференцирование обобщенных функций	242
8.3	Разложение δ -функции в ряд Фурье	244
8.4	Преобразование Фурье обобщенных функций	245

Предисловие

В третьем семестре завершается изучение курса математического анализа на физическом факультете. В основу курса положены конспекты В.Ф. Бутузова, читающего много лет курс математического анализа на Физическом факультете МГУ.

В курсе лекций автор стремился не просто дать студентам сумму знаний, но и обозначить границы между тем, что мы строго доказываем и тем, чем мы можем и должны пользоваться, но доказать в курсе не в состоянии, не выходя существенным образом за его рамки. Такая нечеткая граница между известным и неизвестным в любой области, содержащая “контрольную полосу” интуитивно достоверных фактов и утверждений

без четкого обоснования, обычно формируется в сознании каждого человека стихийно. Явным обозначением этой границы автор стремился облегчить формирование этой границы в области математического анализа в сознании студентов именно там, где она, по его мнению, должна проходить.

По сравнению с обычными потоками в лекции для экспериментального потока добавлен ряд дополнительных тем, а некоторые традиционные темы изложены более полно.

Дополнительный материал включает: примеры изометричных поверхностей, нормальную кривизну поверхности, индикатрису кривизны, главные кривизны, формулу Эйлера для кривизн, полную и среднюю кривизну, «блистательную» теорему Гаусса, топологическое определение ориентируемости поверхностей, определение и признаки сходимости бесконечных произведений, формулу Эйлера для дзета-функции Римана, пример Ван-дер-Вардена непрерывной на \mathbb{R} нигде не дифференцируемой функции, тождество параллелограмма для нормы в евклидовых пространствах, неравенство Гельдера, интегральное неравенство Минковского, бесконечные произведения Эйлера и Вейерштрасса для Γ -функции, теорему Фейера, гильбертово пространство ℓ_2 .

В лекциях используются обычные в математической литературе обозначения: курсивом в тексте выделен определяемый в этом месте термин, формула $A =: B$ или $B := A$ означает, что B по определению полагается равным A .

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить В.В. Колыбасову за многочисленные предложения по улучшению текста лекций и компьютерные рисунки, а также тех слушателей, которые своими вопросами побудили его заполнить некоторые пробелы в своих знаниях.

Основная литература:

1. Учебники:

- (a) Ильин В.А., Позняк Э.Г., Основы математического анализа. Часть II. 5-е изд. М. Физматлит, 2004. 464 с.
- (b) Будаков Б.М., Фомин С.В., Кратные интегралы и ряды. Изд. 3-е, М. Физматлит, 2002. 512 с.

2. Задачники:

- (a) Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах. 4-е изд., 2001.

(b) Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Астрель, 2002.

Дополнительная литература:

1. Фихтенгольц Г.М., Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х томах. 8-е изд. М.: Физматлит, 2003. 864 с.
2. Зорич В.А., Математический анализ, часть II, М.: Наука, 1984; МЦНМО, 2002.
3. Постников М.М. Гладкие многообразия, М.: Наука, 1987, лекции 3–5.
4. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ, часть II, М.: ТК Велби, изд-во Проспект, 2004, 368 с.
5. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981, Гл. II Обобщенные функции с. 82–189.
6. Гальперин И. Введение в теорию обобщенных функций, М.: Изд-во иностранной литературы, 1954, 63 с.
7. Агранович М.С. Обобщенные функции. М.: МЦНМО, 2008, 128 с.

Глава 1

Поверхности и поверхностные интегралы

1.1 Дифференциальная геометрия поверхностей

1.1.1 Определение поверхностей и способы их задания

Интуитивно, *непрерывная поверхность* является множеством Γ в трехмерном евклидовом пространстве \mathbb{E}^3 , каждая точка которого имеет окрестность V в Γ , являющуюся *гомеоморфным* (т.е. взаимно однозначным и взаимно непрерывным) образом круга K единичного радиуса на евклидовой плоскости.

Если дополнительно потребовать дифференцируемости соответствующего отображения и обратного к нему, то мы получим *гладкую поверхность*. Техническая проблема для четкой формулировки такого определения состоит в том, что нужно исключить из определения произвол, связанный с выбором конкретного отображения для каждой окрестности (пара, состоящая из окрестности U и соответствующего ей гомеоморфного отображения $h : K \mapsto U$, называется *картой*), и согласовать отображения для разных окрестностей. Этого можно добиться и даже определить поверхность абстрактно без содержащего ее евклидова пространства. На этом пути получаются определения *непрерывного* и *гладкого многообразий* произвольных размерностей [10]. Но этот путь технически слишком сложен для нас и мы по нему не пойдём, ограничившись рассмотрением поверхностей, задаваемых одной картой или явно составленных из небольшого их числа.

В курсе аналитической геометрии мы уже встречались с поверхностями второго порядка: эллипсоидом, гиперболоидом, эллиптическим и гиперболическим параболоидами, цилиндром, которые являются глад-

кими поверхностями. Эти поверхности были заданы неявно уравнением

$$F(x, y, z) = 0,$$

где F — многочлен второго порядка. Заметим, что для многочленов F произвольного порядка такие поверхности называются *алгебраическими*.

Но уже для конуса

$$z^2 = x^2 + y^2 \quad (1.1)$$

точка $(0, 0, 0)$ не обладает окрестностью в конусе, гомеоморфной открытому кругу (поскольку граница этой окрестности состоит из не менее чем двух связных компонент, а граница открытого круга связна). Поверхность куба является гладкой везде, кроме его ребер. Точки, в которых нарушается требование наличия окрестности, гомеоморфной единичному кругу, называются *особыми для непрерывных поверхностей*, а точки, в которых нарушается требование гладкости поверхности — *особыми для гладких поверхностей*. Если рассмотреть половину конуса (1.1), выделенную условием $z \geq 0$, то мы получим непрерывную поверхность, но гладкой она будет везде, за исключением точки $(0, 0, 0)$.

Таким образом, невозможно дать единое определение поверхностей, пригодное для всех встречающихся в математике ситуаций, и при рассмотрении конкретных случаев поверхностей приходится мириться с наличием особых точек.

Простейшим, но важным примером поверхности, заданной одной картой, является поверхность Γ , являющаяся графиком функции

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in \bar{V}, \quad (1.2)$$

где V — область (т.е. открытое связное множество) в \mathbb{R}^2 , а функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частые производные в V и непрерывна в \bar{V} . В этом случае $h(x, y) := (x, y, f(x, y))$ и $\Gamma := U := h(V)$. Взаимнооднозначность соответствия между точками $(x, y) \in V$ и точками поверхности Γ позволяет рассматривать (x, y) как координаты на Γ .

При таком задании поверхности координаты x , y и координата z не равноправны. Они станут равноправными, если удастся ввести новые координаты (u, v) и задать параметризацию точек поверхности Γ в виде:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v), \quad (u, v) \in \bar{V} \subset \mathbb{R}^2,$$

где функции $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$ имеют непрерывные частные производные в области V и непрерывны в \bar{V} . Иначе эту формулу можно

записать в виде

$$\mathbf{r}(u, v) = \varphi(u, v)\mathbf{i} + \psi(u, v)\mathbf{j} + \chi(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in \bar{V} \subset \mathbb{R}^2. \quad (1.3)$$

По определению, если существует касательная плоскость к поверхности в некоторой точке, то вектора \mathbf{r}_u и \mathbf{r}_v ей принадлежат.

Определение 1.1. *Параметризацию (1.3) назовем регулярной, если вектора \mathbf{r}_u и \mathbf{r}_v линейно независимы для всех $(u, v) \in V$ и соответствие $\mathbf{r}(u, v) : V \mapsto \Gamma$ взаимно-однозначно.*

Регулярность параметризации гарантирует существование нормали $\mathbf{n} = [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$ (и, тем самым, касательной плоскости) к поверхности Γ во всех ее точках.

Изначально u и v являются декартовыми координатами в области V , но взаимнооднозначность отображения $\mathbf{r}(u, v) : V \mapsto \Gamma$ позволяет рассматривать их как функции на поверхности Γ или, иначе, как криволинейные координаты на Γ . При этом кривые $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ являются *координатными линиями* на поверхности Γ .

1.1.2 Первая квадратичная форма поверхности

Определение 1.2. *Первой квадратичной формой или метрикой поверхности называется квадратичная форма*

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(u, v) &:= E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2 := ds^2 = \\ &= d\mathbf{r}^2 = \mathbf{r}_u^2 du^2 + 2(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)dudv + \mathbf{r}_v^2 dv^2, \end{aligned}$$

где вектор-функция $\mathbf{r}(u, v)$ задана уравнением (1.3).

Через первую квадратичную форму $\mathbf{I}(u, v)$ можно выразить длины векторов

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv, \quad \delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_u \delta u + \mathbf{r}_v \delta v,$$

лежащих в касательной плоскости, и углы между ними

$$\cos \theta = \frac{(d\mathbf{r}, \delta\mathbf{r})}{|d\mathbf{r}||\delta\mathbf{r}|} = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + \delta u dv) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2} \sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u \delta v + G\delta v^2}}.$$

Тем самым, первая квадратичная форма определяет *внутреннюю геометрию* поверхности, т.е. позволяет находить на поверхности длины кривых и углы между векторами.

Координатные линии $u = c_1 = \text{const}$ и $v = c_2 = \text{const}$ ортогональны, если в точке их пересечения $F = 0$. Криволинейные координаты на поверхности Γ называются *ортогональными*, если все их координатные линии пересекаются под прямыми углами. Это эквивалентно условию $F(u, v) \equiv 0$.

Если на поверхности Γ задана гладкая кривая γ , определенная дифференцируемыми функциями $(u(t), v(t))$, $t \in [a, b]$, то ее длину можно найти по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{E(u(t), v(t))u'^2 + 2F(u(t), v(t))u'v' + G(u(t), v(t))v'^2} dt.$$

Пример 1.1. Для поверхности вращения

$$\mathbf{r}(u, v) = x(v) \cos u \cdot \mathbf{i} + x(v) \sin u \cdot \mathbf{j} + z(v) \cdot \mathbf{k}, \quad 0 \leq u < 2\pi$$

заметаемой кривой $x(v)$, $z(v)$ в плоскости (x, z) (профилем поверхности) при ее вращении вокруг оси Oz , мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u &= -x(v) \sin u \cdot \mathbf{i} + x(v) \cos u \cdot \mathbf{j}, \\ \mathbf{r}_v &= x'(v) \cos u \cdot \mathbf{i} + x'(v) \sin u \cdot \mathbf{j} + z'(v) \cdot \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Следовательно, $E = x(v)^2$, $F = 0$, $G = x'(v)^2 + z'(v)^2$ и

$$\mathbf{I}(u, v) = x(v)^2 du^2 + (x'(v)^2 + z'(v)^2) dv^2.$$

Меридианы (линии $u = \text{const}$) и параллели (линии $v = \text{const}$) поверхности вращения, очевидно, ортогональны. Если параметр v профиля $x(v)$, $z(v)$ является натуральным, т.е. длиной дуги, и тогда $x'(v)^2 + z'(v)^2 = 1$, то

$$\mathbf{I}(u, v) = x(v)^2 du^2 + dv^2.$$

Пример 1.2. Для сферы радиуса 1 с центром в начале координат имеем $x(v) = \cos v$, $z(v) = \sin v$, $-\pi \leq v \leq \pi$ и

$$\mathbf{I}(u, v) = \cos^2 v du^2 + dv^2.$$

Пример 1.3. Линия провеса однородной тяжелой нити называется цепной линией и является графиком гиперболического косинуса $x(v) = \text{ch}(v)$, $z(v) = v$. Соответствующая ей поверхность вращения вокруг оси Oz называется катеноидом и для него

$$\mathbf{I}(u, v) = \text{ch}^2 v (du^2 + dv^2), \quad 0 \leq u < 2\pi, \quad v \in \mathbb{R}.$$

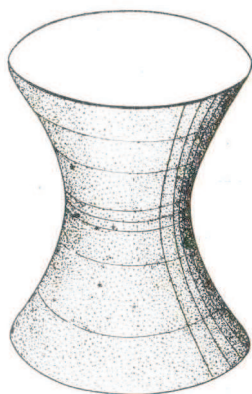


Рис. 1.1: катеноид.

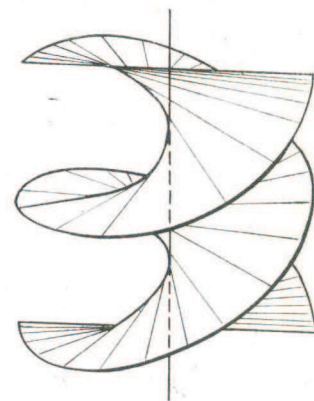


Рис. 1.2: геликоид.

Пример 1.4. Пусть прямая, перпендикулярная оси Oz , равномерно вращается вокруг нее, оставаясь ей перпендикулярной и одновременно поднимаясь винтовым движением на высоту, пропорциональную углу поворота. Поверхность, заметаемая этой прямой, называется геликоидом.¹ Она имеет вид винтового пандуса для въезда автомашин.

Если v — параметр на прямой, а u — угол поворота, то геликоид будет иметь параметризацию

$$\mathbf{r}(u, v) = v \cos u \cdot \mathbf{i} + v \sin u \cdot \mathbf{j} + u \cdot \mathbf{k}, \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Поэтому

$$\mathbf{r}_u = -v \sin u \cdot \mathbf{i} + v \cos u \cdot \mathbf{j} + \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}_v = \cos u \cdot \mathbf{i} + \sin u \cdot \mathbf{j},$$

откуда $E = 1 + v^2$, $F = 0$, $G = 1$ и

$$\mathbf{I}(u, v) = (1 + v^2)du^2 + dv^2.$$

В новых координатах $u = u_1$, $v = \operatorname{sh} v_1$ мы получим $1 + v^2 = 1 + \operatorname{sh}^2 v_1 = \operatorname{ch}^2 v_1$, $du = du_1$, $dv = \operatorname{ch} v_1 dv_1$, и поэтому

$$\mathbf{I}(u_1, v_1) = \operatorname{ch}^2 v_1 (du_1^2 + dv_1^2).$$

Определение 1.3. Взаимно-однозначное отображение поверхностей $\Gamma_1 \mapsto \Gamma_2$, переводящее кривые на поверхности Γ_1 в кривые на поверхности Γ_2 той же длины, называется изометрией Γ_1 на Γ_2 . Эквивалентное сохранению длин кривых требование состоит в том, что квадратичная форма \mathbf{I}_{Γ_1} переводится в форму \mathbf{I}_{Γ_2} .

¹Поверхность, заметаемая прямой линией при ее движении, называется *линейчатой*.

Из рассмотренных примеров мы видим, что разрезанный по меридиану $u = 0$ катеноид изометричен части $0 < u < 2\pi$ геликоида.

Пример 1.5. Рассмотрим верхнюю полу конуса $z^2 = x^2 + y^2$, выделяемую из него условием $z \geq 0$. Введем для нее параметризацию

$$\mathbf{r}(u, v) = v \cos u \cdot \mathbf{i} + v \sin u \cdot \mathbf{j} + v \cdot \mathbf{k}, \quad v \geq 0, 0 \leq u < 2\pi.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u &= -v \sin u \cdot \mathbf{i} + v \cos u \cdot \mathbf{j}, \\ \mathbf{r}_v &= \cos u \cdot \mathbf{i} + \sin u \cdot \mathbf{j} + \mathbf{k}, \end{aligned}$$

откуда $E = v^2$, $F = 0$, $G = 2u$

$$\mathbf{I}(u, v) = v^2 du^2 + 2dv^2.$$

Введем новые координаты (\tilde{x}, \tilde{y}) по формулам

$$\tilde{x} = \sqrt{2}v \cos \frac{u}{\sqrt{2}}, \quad \tilde{y} = \sqrt{2}v \sin \frac{u}{\sqrt{2}},$$

откуда

$$\begin{aligned} d\tilde{x} &= \sqrt{2} \cos \frac{u}{\sqrt{2}} dv - v \sin \frac{u}{\sqrt{2}} du, \quad d\tilde{y} = \sqrt{2} \sin \frac{u}{\sqrt{2}} dv + v \cos \frac{u}{\sqrt{2}} du, \\ d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 &= 2dv^2 + v^2 du^2 = \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Тем самым, верхняя пола конуса, разрезанная по образующей, изометрична некоторому плоскому сектору, что наглядно подтверждается возможностью склеить конус из вырезанного из листа бумаги сектора без ее смятия или растяжения.

1.1.3 Вторая квадратичная форма поверхности

Наряду с первой, можно определить и вторую квадратичную форму поверхности Γ . Пусть кривая γ на поверхности Γ параметризована длиной дуги s , а $\mathbf{r}(s) := \mathbf{r}(u(s), v(s))$ — ее радиус-вектор, $|\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}| = 1$. Тогда

$$0 = \frac{d}{ds} 1 = \frac{d}{ds} \left(\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}, \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \right) = 2 \left(\frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2}, \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \right) \Rightarrow \frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2} \perp \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}.$$

В явном виде:

$$\frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2} = \mathbf{r}_{uu} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2\mathbf{r}_{uv} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \mathbf{r}_{vv} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + \mathbf{r}_u \frac{d^2u}{ds^2} + \mathbf{r}_v \frac{d^2v}{ds^2}. \quad (1.4)$$

Определение 1.4. *Нормальной кривизной $k_\gamma|_{M_0}$ кривой γ в точке $M_0 \in \gamma$ называется проекция скорости поворота вектора $\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}$ на нормаль к поверхности в точке M_0 , т.е.*

$$k_\gamma|_{M_0} := \left(\frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2}, \mathbf{n} \right) \Big|_{M_0}, \quad (1.5)$$

где \mathbf{n} — единичная нормаль к поверхности Γ .

Сейчас мы покажем, что эта величина определяется только самой поверхностью Γ и вектором $\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \Big|_{M_0}$, а значит, она одинакова для всех кривых, проходящих через точку M_0 и имеющих один и тот же касательный вектор.

Подставляя формулу (1.4) в (1.5), получаем с учетом $(\mathbf{r}_u, \mathbf{n}) \equiv (\mathbf{r}_v, \mathbf{n}) \equiv 0$ формулу

$$\begin{aligned} k_\gamma &= (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n}) \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2(\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n}) \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + (\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n}) \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = \\ &= \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{ds^2} =: \frac{\mathbf{II}(u, v)}{\mathbf{I}(u, v)}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $L := (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n})$, $M := (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n})$, $N := (\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n})$, а $\mathbf{II}(u, v) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ — вторая квадратичная форма поверхности Γ .

Поскольку $(\mathbf{r}_u, \mathbf{n}) \equiv (\mathbf{r}_v, \mathbf{n}) \equiv 0$, то $(d\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$ и

$$0 = d(d\mathbf{r}, \mathbf{n}) = (d^2\mathbf{r}, \mathbf{n}) + (d\mathbf{r}, d\mathbf{n}) \Rightarrow \mathbf{II} = (d^2\mathbf{r}, \mathbf{n}) = -(d\mathbf{r}, d\mathbf{n}).$$

Вторая квадратичная форма содержит информацию о том, как поверхность искривлена в объемлющем ее евклидовом пространстве. Тем самым, она отвечает за *внешнюю геометрию* поверхности.

Рассмотрим зависимость нормальной кривизны от направления.

Определение 1.5. *Кривая в касательной плоскости, заданная уравнением*

$$|\mathbf{II}| = |Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2| = 1,$$

называется индикатрисой кривизны или индикатрисой Дюпена.²

Для касательных векторов, концы которых лежат на индикатрисе, получаем из (1.6)

$$|k| = 1/\mathbf{I}.$$

²Дюпен Франсуа Пьер Шарль (1784–1873) — французский математик.

Поэтому в направлении данной точки индикатрисы модуль нормальной кривизны тем больше, чем ближе эта точка к точке касания. Если в каком-то направлении нормальная кривизна равна нулю, то в этом направлении индикатриса уходит на бесконечность.

При $LN - M^2 > 0$ индикатриса Дюпена является эллипсом, а соответствующая точка поверхности называется *эллиптической*. Знак кривизны постоянен.

При $LN - M^2 < 0$ индикатриса Дюпена состоит из двух гипербол

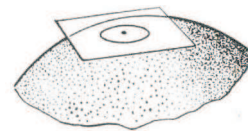


Рис. 1.3: эллиптическая точка.

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = \pm 1 \quad (1.7)$$

с общими асимптотами. В направлении асимптот кривизна равна нулю, а в направлении действительных осей обеих гипербол она принимает два раза максимальное положительное и два раза минимальное отрицательное значение. Соответствующая точка поверхности называется *гиперболической*.

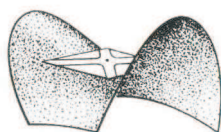


Рис. 1.4: гиперболическая точка.

Пусть теперь $LN - M^2 = 0$, $L^2 + N^2 \neq 0$. Тогда $LN = M^2 \geq 0$ и левая часть уравнения (1.7) является с точностью до знака полным квадратом $(\sqrt{|L|}du \pm \sqrt{|N|}dv)^2$, уравнение (1.7) имеет решения только при одном из знаков правой части (а, значит, вторая квадратичная форма в этом случае знакопостоянна) и индикатриса Дюпена состоит из двух параллельных прямых

$\sqrt{|L|}du \pm \sqrt{|N|}dv = \pm 1$.³ В направлении этих прямых нормальная кривизна k равна нулю, а в перпендикулярном направлении достигает наибольшего (по абсолютной величине) значения, сохраняя все время один и тот же знак. Соответствующая точка поверхности называется *параболической*.

В каждом из трех случаев кривизна дважды достигает своего наибольшего k_1 и дважды наименьшего k_2 значения в перпендикулярных направлениях. Эти значения называются *главными кривизнами*, а соответствующие им направления в касательной плоскости — *главными направлениями*. Для эллиптической точки $k_1k_2 > 0$, для гиперболической — $k_1k_2 < 0$, а для параболической — $k_1 \neq 0, k_2 = 0$.

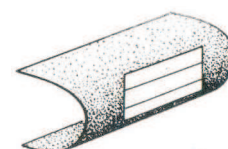


Рис. 1.5: параболическая точка.

³Слева знак фиксирован: либо +, либо -, а справа знак произволен.

На эллипсоиде, двухполостном гиперболоиде и эллиптическом параболоиде все точки эллиптические, на параболическом гиперболоиде – гиперболические, а на цилиндре – параболические. На круговом торе имеются точки всех трех типов. Две окружности на торе, по которым его касаются параллельные плоскости (если положить бублик на одну плоскость и накрыть его другой), состоят из параболических точек и отделяют область эллиптических точек от области гиперболических. В этом предлагается убедиться на семинарах при помощи вычислений.

Если же при $LN - M^2 = 0$ также $L = N = 0$ (и потому $M = 0$), то кривизна k тождественно по направлению равна нулю (а индикатриса Дюпена не определена). Такая точка называется *точкой уплощения* поверхности.

Как известно из курса линейной алгебры, две квадратичные формы, одна из которых положительно определена, одновременно приводятся линейной заменой координат к диагональному виду. Поскольку первая квадратичная форма $\mathbf{I}(u, v)$ положительно определена, мы можем привести в фиксированной точке M_0 поверхности Γ к диагональному виду формы $\mathbf{I}(u, v)$ и $\mathbf{II}(u, v)$:

$$\mathbf{I}|_{M_0} = d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2, \quad \mathbf{II}|_{M_0} = k_1 d\tilde{u}^2 + k_2 d\tilde{v}^2.$$

Тогда

$$k|_{M_0} = \frac{k_1 d\tilde{u}^2 + k_2 d\tilde{v}^2}{d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2}, \quad k_1 \geq k_2.$$

Поскольку $d\tilde{u}$, $d\tilde{v}$ суть декартовы координаты в касательной плоскости, то вводя в этой плоскости полярные координаты ρ , φ по формулам $d\tilde{u} = \rho \cos \varphi$, $d\tilde{v} = \rho \sin \varphi$, получаем следующее значение нормальной кривизны в направлении единичного вектора \mathbf{t} :

$$k(\mathbf{t}) = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi, \quad (1.8)$$

где φ — угол между вектором \mathbf{t} и направлением, в котором кривизна равна k_1 . Эта формула называется *формулой Эйлера*⁴ для кривизны.

⁴Эйлер Леонард (1707–1783) — швейцарский математик, длительное время работавший и умерший в Санкт-Петербурге.

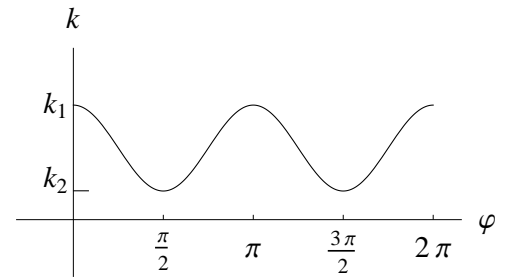


Рис. 1.6: зависимость кривизны от направления.

Обратная к кривизне величина называется *радиусом кривизны* $R := 1/k$. Если в некоторой точке поверхности $k_1 = k_2$, то эта точка называется *омбилической*. Все точки сферы являются омбилическими.

1.1.4 Вычисление главных кривизн и теорема Гаусса

Поскольку k_1 — максимальная, а k_2 — минимальная величина функции

$$\frac{\mathbf{II}(du, dv)}{\mathbf{I}(du, dv)},$$

причем $\mathbf{I}(du, dv) > 0$ при $(du, dv) \neq (0, 0)$, то справедливо неравенство

$$\mathbf{II}(du, dv) - k_2 \mathbf{I}(du, dv) \geq 0,$$

причем его левая часть достигает нулевого значения в некоторой точке $((du)_2, (dv)_2) \neq (0, 0)$. Аналогично,

$$\mathbf{II}(du, dv) - k_1 \mathbf{I}(du, dv) \leq 0,$$

причем равенство достигается в некоторой точке $((du)_1, (dv)_1) \neq (0, 0)$.

Но легко видеть (приводя квадратичную форму к диагональному виду или рассматривая квадратичный трехчлен, получающийся из нее делением на квадрат одной из переменных), что квадратичная форма от двух переменных тогда и только тогда всюду неположительна или неотрицательна и хотя бы в одной точке $(du, dv) \neq (0, 0)$ равна нулю, когда ее ранг меньше двух. Поэтому k_1 и k_2 суть корни квадратного уравнения

$$\begin{vmatrix} L - kE & M - kF \\ M - kF & N - kG \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. уравнения

$$(EG - F^2)k^2 - (EN + GL - 2FM)k + LN - M^2 = 0. \quad (1.9)$$

Определение 1.6. Число $K = k_1 k_2$ называется *полной (или гауссовой) кривизной*, а число $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ — *средней кривизной*.

Из уравнения (1.9) по формулам Виета видно, что

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{1}{2} \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2}. \quad (1.10)$$

Интересно отметить, что из формулы Эйлера (1.8) сразу следует, что средняя кривизна равна полусумме нормальных кривизн в любых двух

перпендикулярных направлениях, а не только в главных. Как известно, дополнительное давление, возникающее из-за поверхностного натяжения на границе жидкости в данной точке есть

$$\Delta p = 2\sigma H,$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения данной жидкости (*закон Лапласа*).

Мыльную пленку, натянутую на проволочный контур произвольной формы, ввиду ее пренебрежимо малого веса, можно считать поверхностью нулевой средней кривизны. Поверхности с нулевой средней кривизной называются *минимальными поверхностями*. Можно проверить, что к ним относятся геликоид и катеноид.

Пример 1.6. Для сферы радиуса R имеем (тут мы рассматриваем параметризацию, несколько отличную от параметризации сферы из примера 1.2)

$$\mathbf{r} = R \sin u \cos v \mathbf{i} + R \sin u \sin v \mathbf{j} + R \cos u \mathbf{k}, \quad 0 \leq v < 2\pi, \quad 0 \leq u \leq \pi,$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \sin u \cos v \mathbf{i} + \sin u \sin v \mathbf{j} + \cos u \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}_{uu} = -\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_{vv} = -R \sin u \cos v \mathbf{i} - R \sin u \sin v \mathbf{j},$$

$$\mathbf{r}_{uv} = -R \cos u \sin v \mathbf{i} + R \cos u \cos v \mathbf{j},$$

$$L = (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n}) = \left(-\mathbf{r}, \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\right) = -|\mathbf{r}| = -R,$$

$$N = (\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n}) = -R \sin^2 u \cos^2 v - R \sin^2 u \sin^2 v = -R \sin^2 u,$$

$$M = (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n}) = -R \cos u \sin u \cos v \sin v + R \sin u \cos u \sin v \cos v = 0,$$

$$\mathbf{II} = -R(du^2 + \sin^2 u dv^2),$$

$$E = \mathbf{r}_u^2 = R^2, \quad F = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) = 0, \quad G = \mathbf{r}_v^2 = R^2 \sin^2 u,$$

$$\mathbf{I} = R^2(du^2 + \sin^2 u dv^2), \quad k = \frac{\mathbf{II}}{\mathbf{I}} = -\frac{1}{R}, \quad K = k^2 = \frac{1}{R^2}.$$

Пример 1.7. Для поверхности вращения, рассмотренной в примере 1.1, получаем

$$[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] = x(v)z'(v) \cos u \mathbf{i} + x(v)z'(v) \sin u \mathbf{j} - x(v)x'(v) \mathbf{k},$$

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{||[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]||} = \frac{z'(v) \cos u \mathbf{i} + z'(v) \sin u \mathbf{j} - x'(v) \mathbf{k}}{\sqrt{x'(v)^2 + z'(v)^2}},$$

$$\mathbf{r}_{uu} = -x(v) \cos u \mathbf{i} - x(v) \sin u \mathbf{j},$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_{uv} &= -x'(v) \sin u \mathbf{i} + x'(v) \cos u \mathbf{j}, \\
 \mathbf{r}_{vv} &= x''(v) \cos u \mathbf{i} + x''(v) \sin u \mathbf{j} + z''(v) \mathbf{k}, \\
 L &= (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n}) = -\frac{x(v)z'(v)}{\sqrt{x'(v)^2 + z'(v)^2}}, \quad M = (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n}) = 0, \\
 N &= (\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n}) = \frac{x''(v)z'(v) - z''(v)x'(v)}{\sqrt{x'(v)^2 + z'(v)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{x'(v)^2 + z'(v)^2}} \begin{vmatrix} x'(v) & z'(v) \\ x''(v) & z''(v) \end{vmatrix}, \\
 K &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{z'(v)}{x(v)(x'(v)^2 + z'(v)^2)^2} \begin{vmatrix} x'(v) & z'(v) \\ x''(v) & z''(v) \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

В формуле (1.10) полная кривизна зависит от коэффициентов первой и второй квадратичных форм. Однако, как обнаружил Гаусс⁵, на самом деле полная кривизна целиком определяется первой квадратичной формой, а именно, выражается через коэффициенты E , G , F и их производные в данной точке.

Доказательство. Из формулы (1.10) с учетом равенства

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{||[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]||} = \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{\sqrt{EG - F^2}}$$

имеем:

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{(\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n})(\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n}) - (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n})^2}{EG - F^2} = \\
 &= \frac{(\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)(\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) - (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)^2}{(EG - F^2)^2} =: \frac{\alpha}{(EG - F^2)^2}.
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Таким образом, нам нужно выразить через коэффициенты E , G , F величину α . Для произвольных векторов $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i, \mathbf{c}_i \in \mathbb{E}^3$, $i = 1, 2$ имеет место формула

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1)(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2) = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) & (\mathbf{a}_1, \mathbf{c}_2) \\ (\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2) & (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) & (\mathbf{b}_1, \mathbf{c}_2) \\ (\mathbf{c}_1, \mathbf{a}_2) & (\mathbf{c}_1, \mathbf{b}_2) & (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) \end{vmatrix}, \tag{1.12}$$

которую легко доказать, если представить левую часть в виде произведения определителей и заменить его на определитель произведения.

С помощью (1.12) мы получим

$$\alpha = \begin{vmatrix} (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_{vv}) & (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_u) & (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_v) \\ (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{vv}) & (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u) & (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) \\ (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{vv}) & (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_u) & (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_{uv}) & (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_u) & (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_v) \\ (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{uv}) & (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u) & (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) \\ (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{uv}) & (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_u) & (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v) \end{vmatrix} = \tag{1.13}$$

⁵Гаусс Карл Фридрих (1777–1855) — немецкий математик, внесший фундаментальный вклад в различные разделы математики.

$$= \begin{vmatrix} (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_{vv}) - \mathbf{r}_{uv}^2 & (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_u) & (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_v) \\ (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{vv}) & E & F \\ (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{vv}) & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_u) & (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_v) \\ (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{uv}) & E & F \\ (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{uv}) & F & G \end{vmatrix}.$$

Дифференцируя по u и v выражения

$$\mathbf{r}_u^2 = E, (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) = F, \mathbf{r}_v^2 = G,$$

получим

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_u) &= \frac{1}{2}E_u, (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_u) = \frac{1}{2}E_v, (\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{r}_v) = \frac{1}{2}G_v, \\ (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_v) &= \frac{1}{2}G_u, (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_v) = F_u - \frac{1}{2}E_v, (\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{r}_u) = F_v - \frac{1}{2}G_u. \end{aligned}$$

Это дает выражение всех элементов определителей из (1.13), кроме элемента $(\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_{vv}) - \mathbf{r}_{uv}^2$, через коэффициенты E, F, G . Для получения выражения этого элемента через коэффициенты E, F, G продифференцируем выражение $(\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_v) = F_u - \frac{1}{2}E_v$ по v , а выражение $(\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_v) = \frac{1}{2}G_u$ — по u , и вычтем результаты. Получим

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_{uvv}, \mathbf{r}_v) + (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_{vv}) - (\mathbf{r}_{uvu}, \mathbf{r}_v) - (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_{vu}) &= (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_{vv}) - \mathbf{r}_{uv}^2 = \\ &= F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} - \frac{1}{2}G_{uu}. \end{aligned}$$

Подставляя эти результаты в формулы (1.13) и (1.11), получаем

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{(EG - F^2)^2} \begin{vmatrix} F_{uv} - \frac{1}{2}(E_{vv} + G_{uu}) & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \\ &\quad - \frac{1}{(EG - F^2)^2} \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

□

В силу определения изометрии отсюда получается *theorema egregium* («блистательная» теорема) Гаусса.

Теорема 1.1. *Полная (гауссова) кривизна поверхности не меняется при ее изометриях, т.е. изометричные поверхности в соответствующих друг другу точках имеют одинаковую полную кривизну.*

Из данной теоремы получается, что никакую сколь угодно малую часть сферы нельзя изометрично отобразить на плоскость. Этот факт является весьма прискорбным для картографов, поскольку он показывает неизбежность искажения расстояний на географических картах. Наиболее употребительны карты, в которых минимальны искажения расстояний вблизи земного экватора и велики искажения вблизи полюсов.

Кроме того, из данной теоремы следует, что гиперболический и эллиптический тип точки поверхности целиком определяется ее первой квадратичной формой, а именно, при $K(M_0) > 0$ точка M_0 — эллиптическая, а при $K(M_0) < 0$ точка M_0 — гиперболическая.

1.1.5 Уравнения для нахождения омбилических точек

Получим уравнения для нахождения омбилических точек в терминах коэффициентов первой и второй квадратичных форм поверхности. Ясно, что условие $k_1 = k_2$ эквивалентно уравнению

$$H^2 = \frac{1}{4}(k_1 + k_2)^2 = k_1 k_2 = K \quad (1.15)$$

при этом левая часть данного уравнения не меньше правой во всех точках поверхности.

С помощью формул (1.10) уравнение (1.15) можно переписать в виде:

$$4(LN - M^2)(EG - F^2) = (EN + GL - 2FM)^2.$$

Теперь перепишем его в виде квадратного уравнения относительно M :

$$p(M) := 4EGM^2 - 4F(EN + GL)M + 4LNF^2 + (EN - GL)^2 = 0.$$

При этом $p(M) \geq 0$ во всех точках поверхности, что можно проверить, вычисляя дискриминант квадратного трехчлена $p(M)$:

$$\begin{aligned} \Delta_p &:= 16(F^2(EN + GL)^2 - EG(4LNF^2 + (EN - GL)^2)) = \\ &= 16(F^2(EN - GL)^2 - EG(EN - GL)^2) = \\ &= -16(EG - F^2)(EN - GL)^2 \leq 0, \end{aligned}$$

т.к. $EG - F^2 > 0$ в силу положительной определенности первой квадратичной формы поверхности.

Таким образом, $k_1 = k_2$ в тех и только в тех точках поверхности, в которых одновременно $EN = GL$ и

$$p(M) = 4EGM^2 - 4F(EN + GL)M + 4LNF^2 =$$

$$= 4(ME - LF)(MG - NF) = 0.$$

Оказывается, что системы

$$EN = GL, ME = LF \quad (1.16)$$

и

$$EN = GL, MG = NF \quad (1.17)$$

эквивалентны и потому каждая из них есть условие омбиличности точки поверхности. Действительно, если выполнено (1.16), то при $L \neq 0$ перемножая уравнения (1.16) и сокращая на $EL \neq 0$ (первая квадратичная форма положительно определена), получаем $MG = NF$. Если же $L = 0$, то из (1.16) $N = M = 0$ и (1.17) выполнено в любом случае. Аналогично устанавливается импликация (1.17) \Rightarrow (1.16).

Поскольку между коэффициентами первой и второй квадратичных форм нет недифференциальных связей, что доказывается в теории поверхностей, то два уравнения (1.16) или (1.17) независимы, а, значит, вообще говоря, омбилические точки расположены на поверхности дискретно. На семинарах предлагается найти омбилические точки на эллипсоиде.

1.1.6 Линии кривизны и канонический репер поверхности

Главные направления в касательной плоскости к поверхности Γ в точке M_0 определяются значениями du , dv , удовлетворяющими вырожденной однородной системе

$$\begin{pmatrix} L - k_i E & M - k_i F \\ M - k_i F & N - k_i G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Это следует из того, что столбец $\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$ должен быть собственным вектором матрицы квадратичной формы, отвечающим нулевому собственному значению. Отсюда

$$\begin{aligned} (L - k_i E)du + (M - k_i F)dv &= 0, \\ (M - k_i F)du + (N - k_i G)dv &= 0, \end{aligned}$$

а значит,

$$k_i = \frac{Ldu + Mdv}{Edu + Fdv} = \frac{Mdu + Ndv}{Fdu + Gdv}.$$

Тем самым,

$$(LF - ME)du^2 + (GL - NE)dudv + (MG - FN)dv^2 = 0. \quad (1.18)$$

Уравнение (1.18) можно записать также в виде

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0. \quad (1.19)$$

Кривые на поверхности Γ , касающиеся в каждой точке главных направлений, называются *линиями кривизны*. Их существование можно доказать средствами теории дифференциальных уравнений. Поскольку в каждой точке поверхности есть два ортогональных главных направления, то линии кривизны образуют два взаимно ортогональных семейства линий на поверхности Γ , причем линии, принадлежащие одному семейству, не пересекаются.

Определим на поверхности Γ новые (вообще говоря, локальные) координаты в окрестности некоторой точки M_0 . Для этого рассмотрим пару линий кривизны L_1, L_2 , проходящих через точку M_0 . На линии L_1 определим строго монотонную функцию \tilde{u} так, что $\tilde{u}(M_0) = 0$, а на другой линии L_2 — строго монотонную функцию \tilde{v} так, что $\tilde{v}(M_0) = 0$. Потребуем также, что бы обе

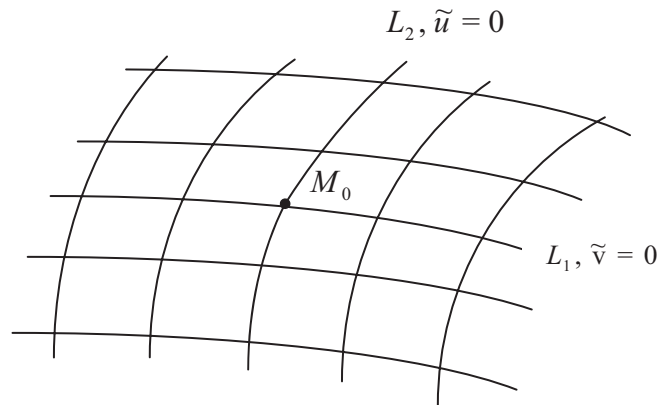


Рис. 1.7: линии кривизны в окрестности точки M_0 .

эти функции были дифференцируемыми достаточное количество раз относительно натуральных параметров на данных кривых. Считая функцию \tilde{u} постоянной на линиях второго семейства, продолжим ее в некоторую окрестность U_1 точки M_0 (не факт, что линии второго семейства, ортогональные линии L_1 , заполняют всю поверхность Γ). Аналогично, продолжим функцию \tilde{v} в некоторую окрестность U_2 точки M_0 , считая ее постоянной на линиях первого семейства.

Таким образом, функции \tilde{u}, \tilde{v} являются ортогональными координатами в окрестности $U := U_1 \cap U_2$ точки M_0 , а линии кривизны являются соответствующими им координатными линиями. Окрестность U может

совпадать, а может не совпадать со всей поверхностью Γ . Далее, не оговаривая это особо, будем проводить все вычисления в окрестности U .

Для упрощения будем далее обозначать координаты \tilde{u} , \tilde{v} через u , v . В этих координатах, по построению, и первая, и вторая квадратичные формы диагональны, а значит, $F = M = 0$. Пусть \mathbf{e}_1 — единичный вектор, касающийся линий $v = \text{const}$, \mathbf{e}_2 — единичный вектор, касающийся линий $u = \text{const}$ на U , а $\mathbf{e}_3 := \mathbf{n} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$. Поскольку эти вектора естественно связаны с поверхностью Γ , то подвижный базис \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 называется *каноническим репером* поверхности Γ .

Легко видеть, что $\mathbf{r}_u = a\mathbf{e}_1$, $\mathbf{r}_v = b\mathbf{e}_2$, где $a := |\mathbf{r}_u|$, $b := |\mathbf{r}_v|$, $E = a^2$, $G = b^2$. Разложим производные векторов канонического репера по самому этому реперу. Ввиду того что $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = 1$, $i = 1, 2, 3$, получим $\mathbf{e}_{iu} \perp \mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_{iv} \perp \mathbf{e}_i$. Итак:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{1u} &= \alpha_{12}\mathbf{e}_2 + \alpha_{13}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_{2u} &= \alpha_{21}\mathbf{e}_1 + \alpha_{23}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_{3u} &= \alpha_{31}\mathbf{e}_1 + \alpha_{32}\mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

В силу того что $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \equiv 0$, получаем $0 = (\mathbf{e}_{1u}, \mathbf{e}_2) + (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_{2u}) = \alpha_{12} + \alpha_{21} \Rightarrow \alpha_{21} = -\alpha_{12}$. Аналогично, $\alpha_{31} = -\alpha_{13}$, $\alpha_{32} = -\alpha_{23}$.

Таким образом, получим разложение производных векторов канонического репера в более простом виде:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{1u} &= \alpha_{12}\mathbf{e}_2 + \alpha_{13}\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_{1v} = \beta_{12}\mathbf{e}_2 + \beta_{13}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_{2u} &= -\alpha_{12}\mathbf{e}_1 + \alpha_{23}\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_{2v} = -\beta_{12}\mathbf{e}_1 + \beta_{23}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_{3u} &= -\alpha_{13}\mathbf{e}_1 - \alpha_{23}\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_{3v} = -\beta_{13}\mathbf{e}_1 - \beta_{23}\mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

Оставшиеся коэффициенты α_{ij} , β_{ij} можно выразить через коэффициенты первой и второй квадратичных форм. Действительно, дифференцируя равенство $\mathbf{r}_u = a\mathbf{e}_1$ по v , получим

$$\mathbf{r}_{uv} = a_v\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_{1v} = a_v\mathbf{e}_1 + a\beta_{12}\mathbf{e}_2 + a\beta_{13}\mathbf{e}_3,$$

откуда ввиду $M = (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{e}_3) = 0$ получаем $\beta_{13} = 0$. Дифференцируя равенство $\mathbf{r}_v = b\mathbf{e}_2$ по u , получим

$$\mathbf{r}_{vu} = b_u\mathbf{e}_2 + b\mathbf{e}_{2u} = b_u\mathbf{e}_2 - b\alpha_{12}\mathbf{e}_1 + b\alpha_{23}\mathbf{e}_3.$$

Отсюда $\alpha_{23} = 0$.⁶ Приравнивая \mathbf{r}_{uv} и \mathbf{r}_{vu} , получим

$$a_v = -b\alpha_{12}, \quad a\beta_{12} = b_u, \quad \text{т.е. } \alpha_{12} = -a_v/b, \quad \beta_{12} = b_u/a.$$

⁶Таким образом, мы видим, что условие $M = (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n}) = 0$, характеризующее линии кривизны среди других пар семейств ортогональных линий, эквивалентно тому, что на этих линиях $\mathbf{n}_u \parallel \mathbf{e}_1$ и $\mathbf{n}_v \parallel \mathbf{e}_2$, соответственно, что можно записать единообразно в виде $d\mathbf{n} \parallel d\mathbf{r}$.

Наконец, $\mathbf{r}_{uu} = a_u \mathbf{e}_1 + a \mathbf{e}_{1u} = a_u \mathbf{e}_1 + a\alpha_{12} \mathbf{e}_2 + a\alpha_{13} \mathbf{e}_3$, откуда $L = (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{e}_3) = a\alpha_{13}$, т.е. $\alpha_{13} = L/a$. Аналогично, $\beta_{23} = N/b$.

Итак, мы получаем *дериwационные формулы* канонического репера

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u &= a \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{r}_v = b \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_{1u} &= -\frac{a_v}{b} \mathbf{e}_2 + \frac{L}{a} \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_{1v} = \frac{b_u}{a} \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_{2u} &= \frac{a_v}{b} \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_{2v} = -\frac{b_u}{a} \mathbf{e}_1 + \frac{N}{b} \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_{3u} &= -\frac{L}{a} \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_{3v} = -\frac{N}{b} \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Однако поскольку локально поверхность задается одной функцией двух переменных, то между четырьмя функциями a , b , L , N должны существовать три соотношения. Для их нахождения вычислим смешанные частные производные векторов репера и приравняем их:

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_{1u})_v &= -\left(\frac{a_v}{b}\right)_v \mathbf{e}_2 - \frac{a_v}{b} \left(-\frac{b_u}{a} \mathbf{e}_1 + \frac{N}{b} \mathbf{e}_3\right) + \left(\frac{L}{a}\right)_v \mathbf{e}_3 - \frac{LN}{ab} \mathbf{e}_2 = \\ &= \frac{a_v b_u}{ab} \mathbf{e}_1 - \left(\left(\frac{a_v}{b}\right)_v + \frac{LN}{ab}\right) \mathbf{e}_2 + \left(\left(\frac{L}{a}\right)_v - \frac{a_v N}{b^2}\right) \mathbf{e}_3, \\ (\mathbf{e}_{1v})_u &= \left(\frac{b_u}{a}\right)_u \mathbf{e}_2 + \frac{b_u a_v}{ab} \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Из тождества $(\mathbf{e}_{1u})_v = (\mathbf{e}_{1v})_u$, получаем

$$\left(\frac{a_v}{b}\right)_v + \left(\frac{b_u}{a}\right)_u = -\frac{LN}{ab}, \quad (1.20)$$

$$\frac{a_v N}{b^2} = \left(\frac{L}{a}\right)_v. \quad (1.21)$$

Перестановка координат $u \leftrightarrow v$ соответствует перестановке $a \leftrightarrow b$, $L \leftrightarrow N$. Поэтому при этой перестановке формула (1.21) дает уравнение

$$\frac{b_u L}{a^2} = \left(\frac{N}{b}\right)_u, \quad (1.22)$$

которое можно получить и из тождества $(\mathbf{e}_{2u})_v = (\mathbf{e}_{2v})_u$. Последнее возможное тождество $(\mathbf{e}_{3u})_v = (\mathbf{e}_{3v})_u$ для вторых смешанных производных опять приводит к уравнениям (1.21) и (1.22).

Для рассматриваемой системы координат из формулы (1.10) получим

$$K = \frac{LN}{EG} = \frac{LN}{a^2 b^2};$$

поэтому уравнение (1.20) имеет вид

$$K = -\frac{1}{ab} \left(\left(\frac{a_v}{b} \right)_v + \left(\frac{b_u}{a} \right)_u \right). \quad (1.23)$$

Мы доказали, тем самым, еще раз, что полная кривизна поверхности выражается через коэффициенты первой квадратичной формы. Прямым вычислением можно проверить, что для рассматриваемых координат уравнение (1.14) совпадает с (1.23). Уравнение (1.14) или (1.23) называется *уравнением Гаусса*, а уравнения (1.21) и (1.22) — *уравнениями Петерсона–Майнарди–Кодацци*⁷ (П–М–К).

Уравнения П–М–К в произвольных координатах имеют следующий вид (см., например, [10])

$$2(EG - F^2)(L_v - M_u) - (EN + GL - 2FM)(E_v - F_u) + \begin{vmatrix} E & E_u & L \\ F & F_u & M \\ G & G_u & N \end{vmatrix} = 0,$$

$$2(EG - F^2)(M_v - N_u) - (EN + GL - 2FM)(F_v - G_u) + \begin{vmatrix} E & E_v & L \\ F & F_v & M \\ G & G_v & N \end{vmatrix} = 0.$$

Вернемся к сделанному выше замечанию, о том, что линии кривизны характеризуются среди других пар семейств ортогональных линий условием $d\mathbf{n} \parallel d\mathbf{r}$ на этих линиях. Во-первых, отсюда следует, что линии кривизны на поверхностях вращения, рассмотренных в примерах 1.1 и 1.7, — это параллели (сечения поверхности плоскостями $z = \text{const}$) и меридианы (сечения поверхности плоскостями, содержащими ось Oz).

Во-вторых, мы можем теперь описать геометрический смысл полной кривизны гладкой поверхности. Сопоставим каждой точке поверхности дифференцируемым образом вектор единичной нормали в этой точке. Поскольку полная кривизна — локальное понятие, то нам достаточно сделать это локально, т.е. мы не ограничиваемся только ориентируемыми поверхностями. Это (локальное) отображение поверхности в единичную сферу называется *гауссовым отображением*.

Рассмотрим его дифференциал $d\mathbf{n}$ в некоторой точке поверхности M_0 . Касательные плоскости к поверхности и к единичной сфере в соответствующих точках параллельны, поэтому их можно отождествить и считать, что дифференциал $d\mathbf{n}|_{M_0}$ действует в данной плоскости. Из курса

⁷Петерсон Карл Михайлович (1828–1881) — латышский и российский математик, Майнарди Гаспаре (1800–1879) и Кодацци Дельфино (1824–1873) — итальянские математики.

линейной алгебры известно, что определитель матрицы линейного оператора не зависит от базиса и, тем самым, является характеристикой самого линейного оператора. Тем самым, бесконечно малая площадка $d\sigma$ на поверхности переходит под действием дифференциала $d\mathbf{n}|_{M_0}$ в площадку на сфере $|\det(d\mathbf{n}|_{M_0})| d\sigma$.

Мы видели выше, что $\mathbf{II} = -(\mathbf{dn}, \mathbf{dr})$ и что главные направления в данной точке поверхности являются собственными векторами дифференциала гауссова отображения. Значит $\det(d\mathbf{n}) = k_1 k_2 = K$ и полная кривизна равна якобиану гауссова отображения и равна отношению бесконечно малых соответствующих друг другу посредством гауссова отображения площадей на единичной сфере и поверхности. Это и есть геометрический смысл полной (гауссовой кривизны). Он аналогичен смыслу кривизны плоской кривой, который равен скорости поворота касательного (следовательно и нормального) вектора, а значит равен и отношению длин соответствующих друг другу бесконечно малого участка траектории конца единичной нормали к кривой и участка кривой.

1.1.7 Ориентация поверхностей

Еще одной, наряду с площадью, глобальной характеристикой поверхности является ее ориентируемость.

Понятие стороны поверхности интуитивно ясно для поверхностей, заданных явно уравнением $z = f(x, y)$, и поверхностей, ограничивающих какую-либо трехмерную область. Это интуитивное понятие можно формализовать.

Определение 1.7. *Гладкая поверхность Γ — ориентируемая (двусторонняя), если на ней существует непрерывная вектор-функция единичных нормалей к поверхности, т.е.*

$$\mathbf{n}(M) = n_1(M)\mathbf{i} + n_2(M)\mathbf{j} + n_3(M)\mathbf{k}, \quad |\mathbf{n}(M)| \equiv 1,$$

где n_1, n_2, n_3 — непрерывные функции на поверхности Γ .

Ясно, что если существует одна такая вектор-функция, то их существует в точности две: $\pm\mathbf{n}(M)$. Выбор любой из них называется *ориентацией поверхности*. В частности, для поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$, нормали, соответствующие одной ориентации, составляют острый угол с осью Oz , а нормали, соответствующие второй, составляют тупой угол с осью Oz .

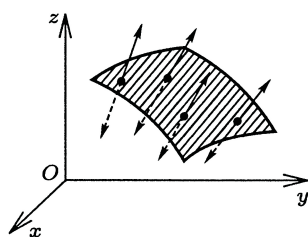


Рис. 1.8: выбор ориентации для поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$.

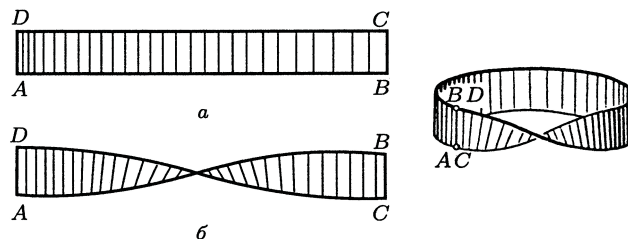


Рис. 1.9: лист Мебиуса.

Если Γ связна, то можно пытаться строить такую непрерывную вектор-функцию единичных нормалей, выбрав нормаль в фиксированной точке $M_0 \in \Gamma$ и перенося ее непрерывно во все другие точки $M \in \Gamma$ вдоль кривых, соединяющих M_0 и M (в силу связности поверхности Γ такие кривые всегда существуют). Но тут можно столкнуться с неоднозначностью результата такого переноса по двум разным кривым, соединяющим точки M_0 и M .

Эквивалентно: при непрерывном переносе нормали по замкнутому контуру можно получить в точке M_0 нормаль, противоположно направленную к исходной. Примером неориентируемой поверхности является лист Мебиуса.⁸

Это приводит к следующему определению.

Определение 1.8. Если для любой точки M_0 , принадлежащей связной гладкой поверхности Γ , и любого замкнутого контура $\gamma \in \Gamma$ такого, что $M_0 \in \gamma$, выбранное в точке M_0 направление нормали при непрерывном продолжении вдоль контура возвращается к исходному, то поверхность Γ называется ориентируемой (двухсторонней).

Если определение 1.7 (или определение 1.8) не выполнено для связной гладкой поверхности Γ , то она называется *неориентируемой* (односторонней).

Если гладкая поверхность Γ состоит из n ориентируемых связных частей (компонент связности), то на каждой из компонент связности возможен выбор одной из двух возможных ориентаций, а значит на всей поверхности Γ можно выбрать 2^n различных ориентаций. Если хотя бы одна из компонент связности неориентируема, то и Γ неориентируема.

⁸Мёбиус Август Фердинанд (1790–1868) — немецкий математик.

Определения 1.7 и 1.8 ориентируемости не подходят для негладких поверхностей.

Пример 1.8. Куб.

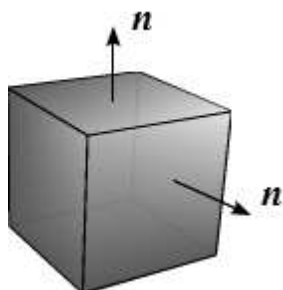


Рис. 1.10: куб.

Возможный выход для негладких поверхностей состоит в том, чтобы забыть про нормаль и дать другое определение для *триангулируемых* поверхностей (не обязательно являющихся гладкими), т.е. поверхностей, которые можно разбить на конечное число криволинейных треугольников непрерывными кривыми (при этом, строго говоря, два криволинейных треугольника либо не пересекаются, либо имеют одну общую вершину, либо имеют одно общее ребро).

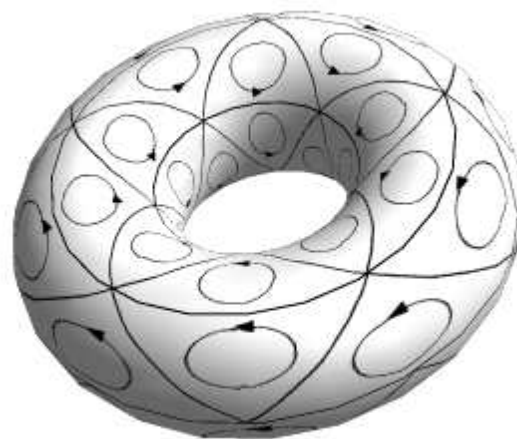


Рис. 1.11: триангуляция поверхности.

Назовем *направлением обхода* *треугольника триангуляции* порядок перечисления его вершин с точностью до циклической перестановки.

Определение 1.9. *Триангулируемая поверхность называется ориентируемой, если на (криволинейных) треугольниках можно выбрать согласованное направление обхода так, что на любой смежной стороне двух треугольников направления обхода противоположны. Выбор таких согласованных направлений обхода (криволинейных) треугольников называется ориентацией.*

Достоинства определения.

1. Нет апелляции к объемлющему пространству.
2. Не требуется гладкость.

Ориентируемость, таким образом, есть *внутреннее* свойство поверхности и *даже не геометрическое, а топологическое*⁹.

Замечание 1.1. *Ориентация на двумерной поверхности порождает ориентацию на одномерной границе этой поверхности посредством задания направления обхода треугольников триангуляции, примыкающих к границе поверхности. Важность этого факта мы увидим далее, когда будем рассматривать формулу Стокса.*

Недостаток определения: оно явно зависит от конкретной триангуляции.

Для преодоления этого недостатка нужно согласовать определение 1.9 ориентируемости для различных триангуляций. В принципе, это можно сделать, но мы этим заниматься не будем.

Для гладких поверхностей определение 1.9 согласуется с определениями 1.7 и 1.8 при помощи правила правого винта. Пользуясь этим согласованием, можно “переносить” нормаль на кусочно-гладких поверхностях через ребро.

1.1.8 Материал для семинарских занятий

Псевдосферой называется поверхность, полученная вращением кривой $x = R \sin v$, $z = \pm R(\ln \operatorname{tg} \frac{v}{2} + \cos v)$, $0 < v \leq \frac{\pi}{2}$, называемой *трактриссой*, вокруг оси Oz . Найти полную кривизну псевдосферы ($K = -1/R^2$), а также полные ($K_c = -\operatorname{ch}^{-4} v$, $K_h = -(1 + v^2)^{-2}$) и средние кривизны катеноида и геликоида ($H_c = H_h = 0$), [10], с. 68, 81, 84–87. Заметим, что полные кривизны катеноида и геликоида в соответствующих точках совпадают, как и должно быть по теореме 1.1.

Вычисляя полную кривизну, убедиться, что на гиперболическом параболоиде все точки – гиперболические, а на круговом торе имеются точки всех трех типов и найти их.

Найти омбилические точки на трехосном эллипсоиде.

⁹ *Топологией* называется раздел математики, в котором понятие непрерывности изучается в наиболее чистом виде. Несколько огрубляя ситуацию, можно сказать, что топология родственна геометрии, но не интересуется расстоянием между точками пространств.

1.2 Интегральные формулы

1.2.1 Формула Остроградского–Гаусса

Определение 1.10. Пусть функции $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ определены и непрерывны в ограниченной замкнутой области $D \in \mathbb{E}^2$, причем $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$. Замкнутую область $G := \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 \mid (x, y) \in D, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$ в евклидовом пространстве \mathbb{E}^3 назовем z -цилиндрической.

Аналогично определяются x -цилиндрическая и y -цилиндрическая замкнутые области.¹⁰

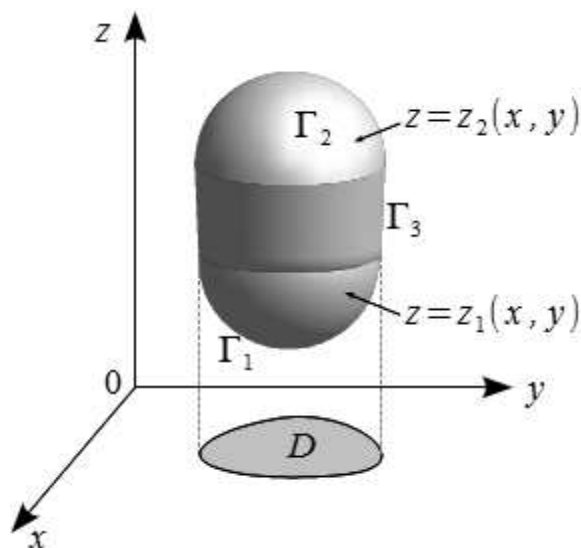


Рис. 1.12: z -цилиндрическая область.

Заметим, что x -цилиндрическая, y -цилиндрическая и z -цилиндрическая области являются ограниченными.

Определение 1.11. Область G назовем простой, если ее можно разбить кусочно-гладкими поверхностями на конечное число x -цилиндрических областей, а также на конечное число y -цилиндрических областей и на конечное число z -цилиндрических областей.

Например, параллелепипед и шар — простые области. Поверхность, ограничивающую область G , будем обозначать через Γ . Заметим, что

¹⁰Под *областью* в математике обычно понимают открытое связное множество, а интегралы определяют по замкнутым множествам. Чтобы не перегружать текст каждый раз разъяснениями этого обстоятельства, договоримся интегрировать по замкнутым областям или замыканиям открытых множеств, а в остальных случаях, если не сказано противное, считать областью открытое связное множество.

простая область ограничена, поскольку разбивается кусочно-гладкими поверхностями на конечное число ограниченных областей.

Теорема 1.2. Пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны в простой области G , ограниченной кусочно-гладкой поверхностью Γ . Тогда

$$\begin{aligned} \iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz &= \iint_{\Gamma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma = \\ &= \iint_{\Gamma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy, \end{aligned} \quad (1.24)$$

где поверхностный интеграл берется по внешней стороне поверхности Γ , а α , β , γ суть углы между внешней нормалью к поверхности Γ и осями координат Ox , Oy и Oz , соответственно.

Формула (1.24) называется формулой Остроградского–Гаусса.¹¹

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда G — z -цилиндрическая область, и докажем справедливость равенства

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\Gamma} R dx dy, \quad (1.25)$$

где интеграл справа берется по внешней стороне поверхности Γ .

Сведя тройной интеграл к повторному, получим

$$\begin{aligned} \iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_D dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) dz = \\ &= \iint_D R(x, y, z) \Big|_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dx dy = \iint_D R(x, y, z_2(x, y)) dx dy - \\ &- \iint_D R(x, y, z_1(x, y)) dx dy = \iint_{\Gamma_2} R dx dy + \iint_{\Gamma_1} R dx dy, \end{aligned} \quad (1.26)$$

¹¹Остроградский Михаил Васильевич (1801–1862) — российский математик, который получил эту формулу в 1828 году, опубликовал в 1831 г. В 1834 г. он обобщил эту формулу на n -мерный случай, опубликовал в 1838 г. Для частного случая $P = x$, $Q = y$, $R = z$ эту формулу получил Гаусс в 1813 г.

где мы выразили двойные интегралы через поверхностные по Γ_2 — верхней и Γ_1 — нижней стороне поверхности Γ , с учетом ориентаций на этих сторонах. На боковой стороне Γ_3 поверхности Γ имеем $\cos \gamma = 0$, поэтому

$$\iint_{\Gamma_3} R \, dx \, dy = \iint_{\Gamma_3} R \cos \gamma \, d\sigma = 0.$$

Теперь равенство (1.26) можно записать в виде

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} \, dx \, dy \, dz = \sum_{i=1}^3 \iint_{\Gamma_i} R \, dx \, dy = \iint_{\Gamma} R \, dx \, dy.$$

Таким образом, формула (1.25) доказана.

Пусть теперь G — простая область. Разобьем ее на конечное число z -цилиндрических областей G_i с границами Γ_i , $i = 1, \dots, n$. Для каждой области G_i справедливо равенство (1.25):

$$\iiint_{G_i} \frac{\partial R}{\partial z} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\Gamma_i} R \, dx \, dy.$$

Суммируя все эти равенства, получим слева

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} \, dx \, dy \, dz, \quad \text{а справа —} \quad \iint_{\Gamma} R \, dx \, dy,$$

поскольку поверхностные интегралы по вспомогательным поверхностям, разделяющим область G на части G_i , берутся дважды, причем один раз по одной стороне каждой такой поверхности, а другой раз — по другой стороне, и поэтому, сумма таких двух интегралов равна нулю. Тем самым, мы доказали равенство (1.25) для простой области.

Аналогично можно доказать для простой области G следующие равенства

$$\iiint_G \frac{\partial P}{\partial x} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\Gamma} P \, dy \, dz, \quad (1.27)$$

$$\iiint_G \frac{\partial Q}{\partial y} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\Gamma} Q \, dz \, dx. \quad (1.28)$$

Складывая (1.25), (1.27) и (1.28), получим равенство (1.24). \square

Замечание 1.2. Можно доказать, что формула Остроградского–Гаусса справедлива для любой ограниченной области G , граница которой состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей (см. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х томах. М.: Физматлит, 2003, т. 3, н°. 638, с. 333).

Следствие 1.1. Если функции P, Q, R таковы, что $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1$, то из формулы Остроградского–Гаусса получаем

$$V(G) = \iiint_G dx dy dz = \iint_{\Gamma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

В частности, если $P = \frac{1}{3}x$, $Q = \frac{1}{3}y$, $R = \frac{1}{3}z$, то $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1$, поэтому

$$V(G) = \frac{1}{3} \iint_{\Gamma} x dy dz + y dz dx + z dx dy.$$

Каждый из интегралов

$$\iint_{\Gamma} x dy dz, \quad \iint_{\Gamma} y dz dx, \quad \iint_{\Gamma} z dx dy$$

равен $V(G)$. Осмыслить этот факт можно на примере z -цилиндрической области G , ограниченной снизу плоскостью Oxy , а сверху — поверхностью $z = f(x, y)$. Тогда

$$V(G) = \iint_{\Gamma} z dx dy = \iint_{\Gamma_2} z dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy$$

— знакомая формула для объема криволинейного цилиндра.

Пример 1.9. Вычислить

$$I = \iint_{\Gamma} (x^2 + f_1(y, z)) dy dz + (\cos y + f_2(x, z)) dz dx + (z + f_3(x, y)) dx dy,$$

где Γ — внешняя сторона сферы, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Здесь $P = x^2 + f_1(y, z)$, $Q = \cos y + f_2(x, z)$, $R = z + f_3(x, y)$, поэтому $\frac{\partial P}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = -\sin y$, $\frac{\partial R}{\partial z} = 1$. По формуле Остроградского–Гаусса получаем

$$I = \iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz =$$

$$= \iiint_G (2x - \sin y + 1) \, dx dy dz = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

т.к. интегралы от нечетных функций $2x$ и $\sin y$ равны нулю.

Пример 1.10. Пусть G — область в \mathbb{E}^3 с произвольной замкнутой кусочно-гладкой границей Γ . Тогда

$$I = \iint_{\Gamma} (y + z) \, dy dz + (x + z) \, dz dx + (x + y) \, dx dy = 0,$$

т.к. $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial z} = 0$.

1.2.2 Формула Стокса

Определение 1.12. Назовем поверхность Γ «хуз-проектируемой», если она взаимно-однозначно проектируется на каждую координатную плоскость прямоугольной системы координат $Oxyz$.

Поверхность Γ , являющуюся «хуз-проектируемой», можно задать любым из трех уравнений:

$$\begin{aligned} z &= f_1(x, y), \quad (x, y) \in D_1, \\ x &= f_2(y, z), \quad (y, z) \in D_2, \\ y &= f_3(z, x), \quad (z, x) \in D_3, \end{aligned} \tag{1.29}$$

где D_i , $i = 1, 2, 3$ — проекции поверхности Γ на координатные плоскости. Простейшим примером такой поверхности является часть плоскости, заданной уравнением $x + y + z = 1$ и удовлетворяющая условиям $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Под гладкой «хуз-проектируемой» поверхностью будем понимать такую поверхность, что каждая из функций (1.29) имеет в соответствующей замкнутой области D_i непрерывные частные производные первого порядка, а границей поверхности является кусочно-гладкий контур L , взаимно-однозначно проектирующийся на границу каждой области D_i , $i = 1, 2, 3$.

Теорема 1.3. Пусть

1) функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ и их частные производные первого порядка непрерывны в некоторой области G ;

2) гладкая «хуз-проектируемая» поверхность Γ , ограниченная замкнутым контуром L , расположена внутри области G .

Тогда справедлива формула

$$\begin{aligned} \oint_L P dx + Q dy + R dz &= \iint_{\Gamma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \\ &+ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx = \\ &= \iint_{\Gamma} \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta \right] d\sigma, \end{aligned} \quad (1.30)$$

в которой направление обхода контура L согласовано с ориентацией поверхности Γ , а α , β , γ — углы между вектором нормали $\mathbf{n}(M)$ к поверхности Γ и осями координат.

Формула (1.30) называется формулой Стокса.¹² Она выражает криволинейный интеграл второго рода по замкнутому контуру L через поверхностный интеграл второго рода по поверхности Γ , ограниченной контуром L .

Доказательство. Запишем уравнение поверхности Γ в виде

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D_1,$$

где D_1 — проекция поверхности Γ на плоскость Oxy . Обозначим через ℓ проекцию кривой L на плоскость Oxy . Контур ℓ является границей плоской области D_1 . Рассмотрим первое слагаемое

$$\oint_L P dx$$

в левой части (1.30) и преобразуем его в интеграл по поверхности Γ по следующей схеме:

$$\oint_L \xrightarrow{(1)} \oint_{\ell} \xrightarrow{(2)} \iint_{D_1} \xrightarrow{(3)} \iint_{\Gamma}.$$

¹²Стокс Джордж Габриэль (1819–1903) — английский физик и математик.

1. Для определенности будем рассматривать верхнюю сторону поверхности Γ и согласованное с этой ориентацией поверхности Γ направление обхода контура L . При проектировании на плоскость Oxy это направление обхода контура L переходит в направление контура ℓ , положительно согласованное с областью D_1 . Поэтому

$$\oint_L P(x, y, z) dx = \oint_{\ell} P(x, y, f(x, y)) dx$$

поскольку интегральные суммы этих двух интегралов совпадают.

2. По формуле Грина

$$\begin{aligned} \oint_{\ell} P(x, y, f(x, y)) dx &= - \iint_{D_1} \frac{\partial}{\partial y} [P(x, y, f(x, y))] dx dy = \\ &= - \iint_{D_1} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

3. Поскольку

$$\begin{aligned} \mathbf{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} &= \frac{\{-f_x, -f_y, 1\}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \text{ то} \\ \cos \gamma &= (1 + f_x^2 + f_y^2)^{-1/2}, \text{ и } -f_y = \frac{\cos \beta}{\cos \gamma}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &- \iint_{D_1} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \\ &= \iint_{D_1} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy = \\ &= \iint_{\Gamma} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Итак,

$$\oint_L P dx = \iint_{\Gamma} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) d\sigma. \quad (1.31)$$

Аналогично можно доказать, что

$$\oint_L Q dy = \iint_{\Gamma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos \gamma - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos \alpha \right) d\sigma, \quad (1.32)$$

$$\oint_L R dz = \iint_{\Gamma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cos \beta \right) d\sigma. \quad (1.33)$$

Складывая равенства (1.31)–(1.33), получаем

$$\begin{aligned} & \oint_L P dx + Q dy + R dz = \\ & = \iint_{\Gamma} \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta \right] d\sigma, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. \square

Замечание 1.3. Формула Стокса остается справедливой, если поверхность Γ можно разбить кусочно-гладкими кривыми на конечное число «хуз-проектируемых» частей. Доказательство просто: складываем формулы Стокса для каждой части и учитываем, что по общим частям границы прилегающих друг к другу частей криволинейные интегралы сокращаются. Примером такой поверхности является сфера, разбитая тремя попарно перпендикулярными плоскостями, проходящими через ее центр, на восемь «хуз-проектируемых» частей.

Замечание 1.4. Формула Стокса справедлива и для плоских областей, параллельных какой либо координатной плоскости, хотя они и не являются «хуз-проектируемыми». В этом случае она переходит в формулу Грина.

Замечание 1.5. Слагаемые в обеих частях формулы Стокса получают друг из друга циклической заменой, поэтому достаточно запомнить вид первого из них, т.е. формулу Грина.

Замечание 1.6. Формула Стокса остается справедливой, если граница L поверхности Γ состоит из нескольких связных компонент. При этом в левой части должна быть сумма интегралов по всем связным компонентам контура L .

Замечание 1.7. В формулах Ньютона–Лейбница, Стокса и Гаусса–Остроградского имеется единообразие, состоящее в том, что с одной стороны в каждой из них стоит интеграл по n -мерному множеству, а с другой стороны — интеграл по $(n - 1)$ -мерной границе этого множества для $n = 1, 2, 3$. С помощью понятия дифференциальной формы, лежащего за рамками нашего курса, можно записать все эти формулы и их аналоги для произвольного $n \in \mathbb{N}$ единообразно. Соответствующая общая формула, справедливая для гладких многообразий, также носит название формулы Стокса.

1.2.3 Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

Пусть G — область в пространстве \mathbb{E}^3 , а Γ — кусочно-гладкая ориентируемая поверхность в пространстве \mathbb{E}^3 . Будем называть область G *поверхностно односвязной*, если для любого кусочно-гладкого замкнутого контура L , лежащего в G , существует ориентируемая кусочно-гладкая поверхность, ограниченная контуром L , также целиком лежащая в G . Аналогично, будем называть поверхность Γ *односвязной*, если для любого кусочно-гладкого замкнутого контура L , лежащего в Γ , существует кусочно-гладкая поверхность, ограниченная контуром L , также целиком лежащая в Γ .

Примерами поверхностно односвязных областей являются шар, область между двумя концентрическими сферами и области, гомеоморфные каждой из этих двух областей, например, все пространство \mathbb{E}^3 . Примером односвязной поверхности является сфера и любая поверхность, ей гомеоморфная. Напротив, утолщенная поверхность тора и полноторие не являются поверхностно односвязными областями, а тор не является односвязной поверхностью. Доказательства этих фактов мы дать не можем, поскольку это требует углубления в топологию.¹³

Теорема 1.4. 1. Пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ определены и непрерывны в области G . Тогда следующие три условия эквивалентны (т.е. из каждого из них следуют два других):

¹³Существование в шаре непрерывной ориентируемой поверхности, ограниченной произвольным наперед заданным контуром, лежащим в данном шаре, доказана, например, в брошюре В.В. Прасолов «Наглядная топология», М.: МЦНМО, 1995, с. 22, теорема Франкля–Понтрягина–Зейферта.

(a) Для любого замкнутого контура $L \subset G$:

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = 0.$$

(b) Для любых двух точек $A, B \in G$ криволинейный интеграл

$$\int_{AB} P dx + Q dy + R dz$$

не зависит от пути интегрирования, т.е. от выбора кривой, соединяющей точки A и B и целиком лежащей в области G .

(c) Выражение $P dx + Q dy + R dz$ является полным дифференциалом, т.е. в области G существует дифференцируемая функция $u(x, y, z) = u(M)$ такая, что $du = P dx + Q dy + R dz$. Отсюда следует, в частности, что

$$\int_{AB} P dx + Q dy + R dz = u(B) - u(A) \quad \forall A, B \in G.$$

2. Если функции P, Q, R имеют в области G непрерывные частные производные первого порядка, то из любого из условий (a)–(c) следует условие

$$(d) \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad \text{в области } G.$$

Если, кроме того, область G поверхностно односвязна, то и наоборот, из условия (d) следуют условия (a) – (c).

Доказательство. Докажем первое утверждение теоремы по схеме (a) \rightarrow (b) \rightarrow (c).

Пусть выполнено условие (a) и пусть $L_i, i = 1, 2$ — два контура, соединяющие точки A и B и целиком лежащие в области G . Тогда разность интегралов

$$\int_{L_1} P dx + Q dy + R dz - \int_{L_2} P dx + Q dy + R dz$$

является интегралом по замкнутому контуру и потому равна нулю. Тем самым, справедливо условие (b).

Пусть выполнено условие (b) и пусть A — фиксированная точка в области G . Тогда в области G корректно определена функция

$$u(x, y, z) := \int_{AB(x, y, z)} P dx + Q dy + R dz.$$

Рассматривая приращения функции u вдоль координатных осей, по формуле среднего значения легко показать, что $u_x(x, y, z) = P(x, y, z)$, $u_y(x, y, z) = Q(x, y, z)$ и $u_z(x, y, z) = R(x, y, z)$, а значит, в силу непрерывности функций P, Q, R , функция $u(x, y, z)$ дифференцируема в G .

Импликация (c) \rightarrow (a) очевидна.

Докажем второе утверждение теоремы. Поскольку уже доказана эквивалентность условий (a) — (c), то достаточно доказать импликацию (c) \rightarrow (d) и, в предположении о поверхностной односвязности области G , импликацию (d) \rightarrow (a).

Пусть $P dx + Q dy + R dz = du$, тогда $P = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$, $R = \frac{\partial u}{\partial z}$. По условию, функции P, Q, R имеют непрерывные частные производные, поэтому функции $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ непрерывны в области G . Следовательно, по соответствующему утверждению второго семестра, смешанные частные производные равны $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, т.е. $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Аналогично доказывается, что $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$ в области G . Тем самым, доказана импликация (c) \rightarrow (d).

Пусть теперь область G поверхностно односвязна и выполнено условие (d). Возьмем произвольный замкнутый контур $L \subset G$. Пусть Γ — гладкая ориентируемая поверхность, расположенная в области G и ограниченная контуром L . По формуле Стокса¹⁴

$$\begin{aligned} \oint_L P dx + Q dy + R dz &= \iint_{\Gamma} \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)}_{=0} dx dy + \\ &+ \underbrace{\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)}_{=0} dy dz + \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)}_{=0} dz dx = 0, \end{aligned}$$

что означает справедливость условия (a). □

Замечание 1.8. Условия (a) и (b) непосредственно проверить сложно, поскольку в них фигурирует несчетное множество путей интегрирования, которое не имеет явной параметризации.

¹⁴Для возможности ее применения нам и нужна ориентируемость поверхности Γ .

Условие (с) можно проверить, строя функцию $\tilde{u}(x, y, z)$ как интеграл

$$\tilde{u}(x, y, z) = \int_{L_{M_0M}} P dx + Q dy + R dz,$$

где L_{M_0M} — каким-то образом выбранные пути, соединяющие точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с точкой $M(x, y, z)$ (например, эти пути могут быть ломаными, составленными из отрезков координатных линий), а затем проверяя дифференцируемость функции $\tilde{u}(x, y, z)$ и сравнивая дифференциал $d\tilde{u}(x, y, z)$ и $P dx + Q dy + R dz$. Однако построенная таким образом функция $\tilde{u}(x, y, z)$ может не быть даже непрерывной.

Проще всего, конечно, проверяется условие (d).

Глава 2

Скалярные и векторные поля

2.1 Основные понятия теории скалярных и векторных полей

2.1.1 Скалярное поле

Определение 2.1. Если каждой точке M области G (на плоскости или в пространстве) поставлено в соответствие некоторое число $u(M)$, то говорят, что в области G задано скалярное поле.

Физические примеры скалярных полей: поле температур какого-либо тела, поле плотности массы какого-либо тела, поле плотности электрического заряда в области или на поверхности.

Величина u есть функция точки M ; если ввести ортогональную систему координат $Oxyz$, то скалярное поле будет описываться функцией трех переменных: $u = u(x, y, z)$. В разных системах координат эта функция может иметь различный вид. Но при фиксированной системе координат задание функции $u = u(x, y, z)$ эквивалентно заданию скалярного поля. Мы будем считать, что фиксирована некоторая прямоугольная система координат, и поэтому будем говорить, что функция $u = u(x, y, z)$, $(x, y, z) \in G$ задает скалярное поле в области G . Подмножество области G , заданное уравнением $u(x, y, z) = c = \text{const}$, называется множеством уровня функции $u(x, y, z)$.

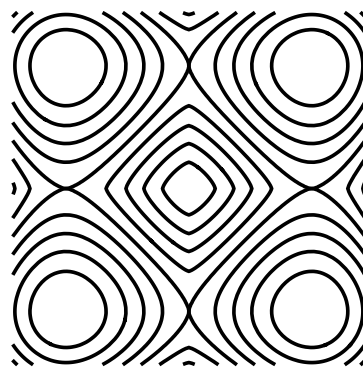


Рис. 2.1: линии уровня функции двух переменных.

Все это выглядит достаточно тривиальным, однако тут есть и весьма нетривиальный момент. Известно, что любое замкнутое подмноже-

ство пространства \mathbb{R}^n является множеством уровня некоторой бесконечно дифференцируемой функции (теорема Уитни)¹. В то же время известно, что замкнутые множества могут быть весьма нерегулярными; примером является канторово подмножество отрезка $[0, 1]$. Оно не содержит ни одного интервала, является так называемым *нуль множеством* (т.е. может быть покрыто конечной или счетной системой интервалов сколь угодно малой суммарной длины), и при этом несчетно. Однако для данной бесконечно дифференцируемой функции u множество тех значений $c \in \mathbb{R}$, для которых множество уровня не является гладкой поверхностью, является нуль множеством, при этом требование на гладкость функции можно понизить (теорема Сарда).

2.1.2 Векторное поле

Определение 2.2. Если каждой точке M области G (на плоскости или в пространстве) поставлен в соответствие некоторый вектор $\mathbf{a}(M)$, то говорят, что в области G задано векторное поле.

Физические примеры векторных полей: электрическое поле $\mathbf{E}(M)$, магнитное поле $\mathbf{B}(M)$, поле тяготения какой-либо массы $\mathbf{F}(M)$, поле скоростей жидкости $\mathbf{v}(M)$.

При фиксированной системе координат $Oxyz$ векторное поле задается вектор-функцией $\mathbf{a}(x, y, z)$ или тремя скалярными функциями — ее координатами:

$$\mathbf{a}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}. \quad (2.1)$$

Определение 2.3. Гладкая кривая L называется векторной линией векторного поля $\mathbf{a}(M)$, если в каждой точке M кривой L вектор $\mathbf{a}(M)$ направлен по касательной к кривой L .

В дальнейшем будем считать, что функции, задающие скалярное или векторное поле, имеют непрерывные частные производные первого порядка.

¹Уитни Хаслер (1907–1989) — американский математик.

2.1.3 Производная по направлению и градиент скалярного поля

Во втором семестре для скалярного поля (скалярной функции) $u(x, y, z)$ были введены понятия градиента и производной по направлению:

$$\text{grad } u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\} = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} = (\text{grad } u, \mathbf{l}),$$

где \mathbf{l} — единичный вектор заданного направления.

Данное определение градиента связано с выбором системы координат. Однако было показано, что на самом деле вектор $\text{grad } u$ не зависит от выбора системы координат, поскольку его направление есть направление наибольшего роста скалярной величины u , а $|\text{grad } u|$ есть скорость роста величины u в этом направлении. Если ввести другую систему координат, то координаты вектора $\text{grad } u$ изменятся, но сам вектор, т.е. его длина и направление, останутся без изменения.

Определение 2.4. Векторное поле называется потенциальным в области G , если его можно представить в этой области как градиент некоторого скалярного поля $u(M)$:

$$\mathbf{a}(M) = \text{grad } u(M) = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (2.2)$$

Функция $u(M)$ называется скалярным потенциалом векторного поля $\mathbf{a}(M)$.

Пример 2.1. Потенциал электрического поля точечного заряда q равен $u(M) = \frac{q}{r}$, а само электрическое поле есть

$$\mathbf{E}(M) = -\text{grad } u(M) = \frac{q}{r^3} \mathbf{r} \quad \text{при} \quad r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \neq 0, \quad (2.3)$$

где $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ — радиус-вектор.

2.1.4 Дивергенция векторного поля

Определение 2.5. Дивергенцией векторного поля (2.1) называется скалярная функция

$$\text{div } \mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Это определение $\operatorname{div} \mathbf{a}$ связано с выбором системы координат. Мы покажем, что на самом деле функция $\operatorname{div} \mathbf{a}(M)$, $M = M(x, y, z)$ не зависит от выбора системы координат.

Пример 2.2. Вычислим дивергенцию электрического поля (2.3) точечного заряда q , помещенного в начало координат.

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = q \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^3} \right) \right],$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3x}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}.$$

Аналогично:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = q \frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0, \quad r \neq 0.$$

2.1.5 Ротор векторного поля

Определение 2.6. Ротором векторного поля (2.1) называется вектор-функция

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Ниже мы покажем, что ротор векторного поля, так же как и дивергенция векторного поля, не зависит от выбора системы координат.

Слушателям предлагается самостоятельно убедиться, что $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$, $r \neq 0$ для электрического поля (2.3) точечного заряда q , помещенного в начало координат.

2.1.6 Циркуляция векторного поля

Определение 2.7. Пусть в области G задано векторное поле (2.1) и пусть AB — кусочно-гладкая кривая, лежащая в области G . Криволинейный интеграл второго рода

$$\int_{AB} P dx + Q dy + R dz$$

называется циркуляцией векторного поля \mathbf{a} вдоль кривой AB .

Если $d\mathbf{l} = \mathbf{t} ds =: \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz$ — касательный вектор к кривой AB (в точках ее гладкости), \mathbf{t} — единичный касательный вектор, а ds — дифференциал длины дуги, то циркуляцию можно записать в виде криволинейного интеграла второго или первого рода

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{AB} (\mathbf{a}, d\mathbf{l}) = \int_{AB} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds.$$

Данная форма записи циркуляции показывает, что циркуляция не зависит от выбора системы координат.

Работа силового поля \mathbf{F} при перемещении материальной точки, на которую оно действует, по контуру L является циркуляцией поля \mathbf{F} по контуру L .

2.1.7 Поток векторного поля

Определение 2.8. Пусть в области G задано векторное поле (2.1) и пусть Γ — кусочно-гладкая двухсторонняя поверхность, лежащая в области G . Выберем одну из сторон поверхности Γ , зафиксировав непрерывное векторное поле единичных нормалей $\mathbf{n}(M) = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$, т.е. ориентируем поверхность. Поверхностный интеграл второго рода

$$\iint_{\Gamma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma \tag{2.4}$$

называется потоком векторного поля \mathbf{a} через ориентированную поверхность Γ .

Поток (2.4) можно также записать в виде

$$\begin{aligned} \iint_{\Gamma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma &= \iint_{\Gamma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma = \\ &= \iint_{\Gamma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy. \end{aligned}$$

Очевидно, что поток векторного поля через ориентированную поверхность не зависит от выбора системы координат.

Физическими примерами потоков через поверхность Γ являются: при $\mathbf{a} = \mathbf{v}$ — поток жидкости, при $\mathbf{a} = \mathbf{B}$ — поток магнитного поля.

2.1.8 Инвариантное определение дивергенции векторного поля

С помощью введенных понятий дивергенции и потока векторного поля формулу Гаусса–Остроградского можно записать в виде:

$$\iiint_G \operatorname{div} \mathbf{a} \, dx dy dz = \iint_{\Gamma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) \, d\sigma, \quad (2.5)$$

т.е. поток векторного поля через внешнюю сторону замкнутой поверхности Γ равен интегралу от дивергенции поля по области G , ограниченной поверхностью Γ .

По формуле среднего значения левую часть (2.5) можно записать в виде

$$\iiint_G \operatorname{div} \mathbf{a} \, dx dy dz = \operatorname{div} \mathbf{a}(M^*) \cdot \iiint_G dx dy dz = \operatorname{div} \mathbf{a}(M^*) \cdot V(G), \quad M^* \in G.$$

Поэтому

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M^*) = \frac{1}{V(G)} \iint_{\Gamma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) \, d\sigma.$$

Будем теперь стягивать поверхность Γ к некоторой точке $M \in G$. При этом $V(G) \rightarrow 0$, $M^* \rightarrow M$ и

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = \lim_{\Gamma \rightarrow M} \frac{1}{V(G)} \iint_{\Gamma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) \, d\sigma. \quad (2.6)$$

Так как объем области G и поток поля \mathbf{a} через поверхность Γ не зависят от выбора системы координат, то и величина $\operatorname{div} \mathbf{a}(M)$ не зависит от выбора системы координат, а зависит только от самого поля $\mathbf{a}(M)$.

Обсудим теперь физический смысл дивергенции. Пусть полем \mathbf{a} является электрическое поле \mathbf{E} , созданное набором N точечных электрических зарядов q_i , $i = 1, \dots, N$, расположенных в области G . Удалим из области G малые шары с центрами, совпадающими с данными зарядами, и вычислим поток через границу Γ' получившейся области G' . С одной стороны, поскольку дивергенция поля точечного заряда (а значит, и их суперпозиции) равна нулю всюду, кроме точки расположения самого точечного заряда, то по формуле Гаусса–Остроградского поток электрического поля через поверхность Γ' равен нулю. С другой стороны, он складывается из потока через границу Γ области G и потоков

через внутренние поверхности малых сфер. Устремляя радиусы малых сфер к нулю, получаем, что поток через i -ую сферу есть $-4\pi q_i$, а значит,

$$\iint_{\Gamma} (\mathbf{E}, \mathbf{n}) d\sigma = 4\pi Q,$$

где Q — полный электрический заряд области G . Данная формула, называемая в электростатике *теоремой Гаусса*, не зависит от количества точечных зарядов в области G , а потому справедлива и в предельном случае непрерывного распределения заряда в области G с объемной плотностью ρ . Подставляя теперь данное значение потока в формулу (2.6), мы получаем равенство

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(M) = 4\pi\rho(M).$$

Таким образом, дивергенция является, с точностью до множителя, объемной плотностью источников векторного поля.

С помощью операции дивергенции записываются уравнения Максвелла для вектора электрического смещения \mathbf{D} и вектора магнитной индукции \mathbf{B} :

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho(M), \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

2.1.9 Инвариантное определение ротора векторного поля

С помощью введенных понятий циркуляции и потока векторного поля формулу Стокса можно записать в виде:

$$\oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{l}) = \iint_{\Gamma} (\operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma, \quad (2.7)$$

т.е. поток ротора векторного поля через ориентированную поверхность Γ равен циркуляции этого векторного поля по границе L поверхности Γ , направление обхода которой согласовано по правилу правого винта с ориентацией поверхности Γ .

По формуле среднего значения правую часть (2.7) можно записать в виде

$$\iint_{\Gamma} (\operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma = (\operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{n})|_{M^*} \iint_{\Gamma} d\sigma = S(\Gamma) (\operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{n})|_{M^*}, \quad \text{где } M^* \in \Gamma.$$

Поэтому

$$(\operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{n})|_{M^*} = \frac{1}{S(\Gamma)} \oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{l}).$$

Будем теперь стягивать границу L к некоторой точке $M \in \Gamma$ так, чтобы нормаль к поверхности Γ в точке M была постоянной. При этом $S(\Gamma) \rightarrow 0$, $M^* \rightarrow M$ и

$$(\operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{n})|_M = \lim_{L \rightarrow M} \frac{1}{S(\Gamma)} \oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{l}). \quad (2.8)$$

Так как площадь поверхности Γ и циркуляция векторного поля \mathbf{a} по контуру L не зависят от выбора системы координат, то и величина $(\operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{n})|_M$ не зависит от выбора системы координат, а зависит только от самого поля $\mathbf{a}(M)$.

Обсудим теперь физический смысл ротора. Циркуляция $\oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{l})$ является количественной мерой *завихренности* векторного поля \mathbf{a} (т.е. его способности совершать ненулевую работу вдоль замкнутых кривых) вдоль границы поверхности Γ , поэтому отношение

$$\frac{1}{S(\Gamma)} \oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{l})$$

можно рассматривать как среднюю завихренность поля \mathbf{a} на поверхности Γ , а предел этого отношения при $L \rightarrow M$ — как завихренность поля \mathbf{a} в точке M в фиксированном направлении \mathbf{n} . Тем самым вектор $\operatorname{rot} \mathbf{a}(M)$ характеризует завихренность векторного поля \mathbf{a} в точке M .

С помощью операции ротора записываются уравнения Максвелла, связывающие электрическое и магнитное поля:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Здесь c — скорость света в вакууме, \mathbf{H} — напряженность магнитного поля, а \mathbf{j} — плотность электрического тока.

2.2 Потенциальные векторные поля

Обсудим свойства потенциальных векторных полей.

Если векторное поле $\mathbf{a}(M) = \{P, Q, R\}$ потенциально в области G , то, сравнивая (2.1) с (2.2), получаем

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Следовательно, выражение

$$P dx + Q dy + R dz = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

является полным дифференциалом функции $u(x, y, z)$ в области G . Это означает, что выполнено условие (с) теоремы 1.4 об условиях независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Поэтому, по данной теореме, потенциальное в области G векторное поле $\mathbf{a}(M)$ обладает следующими свойствами:

1. Циркуляция потенциального поля $\mathbf{a}(M)$ вдоль любого замкнутого контура $L \subset G$ равна нулю:

$$\oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{l}) = \oint_L P dx + Q dy + R dz = 0.$$

Иногда это свойство принимают за определение потенциального поля.

2. $\forall A, B \in G$ циркуляция потенциального поля $\mathbf{a}(M) = \text{grad } u(M)$ вдоль кривой, соединяющей точки A и B и целиком лежащей в области G , не зависит от вида этой кривой и равна разности значений потенциала u в точках A и B :

$$\int_{AB} (\mathbf{a}, d\mathbf{l}) = u(B) - u(A).$$

3. Если функции P, Q, R имеют непрерывные частные производные первого порядка и если поле $\mathbf{a}(M) = \{P, Q, R\}$ потенциально, то справедливо равенство

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}. \quad (2.9)$$

Эти равенства означают, что $\text{rot } \mathbf{a} = \text{rot grad } u = 0$, т.е. *потенциальное поле является безвихревым*.

Рассмотрим обратный вопрос: верно ли, что безвихревое поле в области G является потенциальным? Это зависит от области. Если область G поверхностно односвязна, то в силу теоремы 1.4 из условия $\text{rot } \mathbf{a} = 0$, т.е. из условия (2.9), следует существование функции u , определенной в области G и такой, что $\mathbf{a} = \text{grad } u$, что означает потенциальность векторного поля \mathbf{a} .

Если же область G не является поверхностно односвязной, то безвихревое поле в этой области может не быть потенциальным. Действительно, пусть в пространстве \mathbb{E}^3 введена декартова система координат $x y z$ и область G получена удалением из \mathbb{E}^3 оси Oz . Определим векторное поле \mathbf{a} в G формулой

$$\mathbf{a}(x, y, z) = \left\{ \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right\}. \quad (2.10)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{a} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j} + \\ &+ \left(\frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) = 0 \text{ в области } G. \end{aligned}$$

Рассмотрим замкнутый контур $L : x = \cos t, y = \sin t, z = \text{const}, 0 \leq t \leq 2\pi$

$$\oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{l}) = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sin t \cdot d \cos t}{\sin^2 t + \cos^2 t} + \frac{\cos t \cdot d \sin t}{\sin^2 t + \cos^2 t} \right) = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

Таким образом, хотя $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$, но поле \mathbf{a} не является потенциальным в области G .²

Пример 2.3. Электрическое поле $\mathbf{E}(M) = \frac{q}{r^3} \mathbf{r}$ точечного заряда q является потенциальным: $\mathbf{E}(M) = -\operatorname{grad} u$, где $u = \frac{q}{r}$ — электрический потенциал. Аналогичным образом потенциальным является и гравитационное поле точечной массы $\mathbf{F}(M) = -\frac{\gamma m}{r^3} \mathbf{r}$.

²Наличию безвихревых векторных полей в поверхностно не односвязных областях обязан своим существованием так называемый эффект Ааронова–Бома (1959 г.). Пусть имеется длинный тонкий соленоид с током. Вне соленоида магнитный потенциал, с точностью до постоянного множителя, равен (2.10), и ему соответствует нулевое магнитное поле. Поэтому соленоид вне себя не оказывает влияния на движение классической заряженной частицы (сила Лоренца равна нулю). Однако в уравнение Шредингера для квантовой частицы входит не само магнитное поле \mathbf{H} , а его векторный потенциал \mathbf{A} , $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{H}$, что приводит к дискретному спектру ее энергий и рассеянию на соленоиде. Подробнее см. И.М. Тернов, В.Ч. Жуковский, А.В. Борисов. Квантовая механика и макроскопические эффекты. МГУ, 1993. С. 15–26.

2.3 Соленоидальные векторные поля

Векторное поле $\mathbf{a}(M)$ называется *соленоидальным* (по греч. “трубчатым”) в области G , если в этой области $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$, т.е. в области соленоидальности нет источников векторного поля.

Пример 2.4. *Электрическое поле точечного заряда $\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{r^3}$ в любой области G , не содержащей заряда.*

Если векторное поле можно представить в виде

$$\mathbf{a} = \operatorname{rot} \mathbf{b},$$

то векторное поле \mathbf{a} является соленоидальным (поскольку легко проверяется, что $\operatorname{div} \circ \operatorname{rot} \equiv 0$), а векторное поле \mathbf{b} называется векторным потенциалом векторного поля \mathbf{a} .

Верно ли, что произвольное соленоидальное векторное поле в области G имеет векторный потенциал? Это зависит от области, и существуют области, в которых это неверно.

Пример 2.5. *Рассмотрим электрическое поле $\mathbf{E} = q\mathbf{r}/r^3$ точечного заряда q , расположенного в начале координат, в области G , заключенной между двумя концентрическими сферами с центром в начале координат. Как мы видели выше, в области G справедливо равенство $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, но если бы в области G существовал векторный потенциал \mathbf{b} такой, что $\mathbf{E} = \operatorname{rot} \mathbf{b}$, то для третьей сферы S , концентрической с первыми двумя и расположенной между ними, в силу электростатической теоремы Гаусса и формулы Стокса было бы выполнено равенство*

$$4\pi q = \iint_S (\mathbf{E}, \mathbf{n}) d\sigma = \iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{b}, \mathbf{n}) d\sigma = \int_{\partial S} (\mathbf{b}, \boldsymbol{\tau}) dl = 0,$$

поскольку $\partial S = \emptyset$.

Полученное противоречие показывает отсутствие векторного потенциала для данного соленоидального поля.

Область G называется *объемно односвязной*, если для любой ориентированной кусочно-гладкой замкнутой (= без границы) поверхности $\Gamma \subset G$ существует область $G_1 \subset G$ с границей Γ .

Шар, параллелепипед — объемно односвязные области. Область G , заключенная между двумя сферами (не обязательно концентрическими),

не является объемно односвязной (но является поверхностно односвязной), поскольку (деформированная) сфера, заключенная между двумя граничными сферами, не является границей никакой подобласти области G . Полноторие является объемно односвязной областью, но не является поверхностно односвязной.

Мы не можем доказать эти факты, поскольку это требует углубления в топологию.

Соленоидальное поле в объемно односвязной области G обладает следующим свойством: *поток соленоидального поля через любую кусочно-гладкую замкнутую поверхность Γ , расположенную в области G , равен нулю*. Действительно, пусть поверхность Γ является границей области $G_1 \subset G$. По формуле Остроградского–Гаусса имеем

$$\iint_{\Gamma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma = \iiint_{G_1} \operatorname{div} \mathbf{a} \, dx dy dz = \iiint_{G_1} 0 \, dx dy dz = 0.$$

Как следует из примера 2.5, для областей, не являющихся объемно односвязными, данное свойство соленоидальных полей не имеет места.

Это свойство соленоидального поля показывает, что векторные линии соленоидального поля не могут начинаться и заканчиваться внутри области соленоидальности (как векторные линии электростатического поля, начинающиеся и заканчивающиеся на зарядах). Они либо начинаются и заканчиваются на границе области (пример: электростатическое поле в области, не содержащей зарядов), либо являются замкнутыми линиями (пример: магнитное поле длинного проводника).

Для соленоидального поля имеет место **закон сохранения интенсивности векторной трубки**, т.е. трубки, составленной из векторных линий.

Поскольку

$$\iint_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma = 0 \quad \text{и} \quad \iint_{\Gamma_3} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma = 0,$$

в силу того, что поле \mathbf{a} касается боковой поверхности трубки, то

$$\iint_{\Gamma_1} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma = - \iint_{\Gamma_2} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma.$$

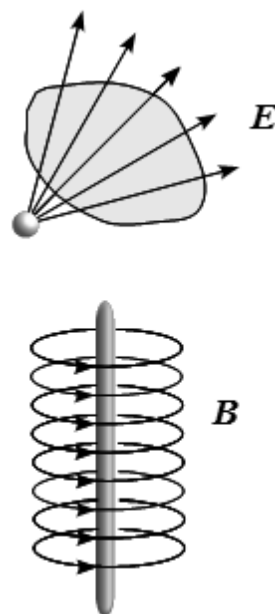


Рис. 2.2: соленоидальные поля.

Изменив ориентацию поверхности Γ_2 , получим

$$\iint_{\Gamma_1} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma = \iint_{\Gamma_2} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma,$$

т.е. поток соленоидального векторного поля через все сечения векторной трубки постоянен.

Замечание 2.1. Любое векторное поле \mathbf{a} можно представить в виде суммы потенциального и соленоидального векторных полей: $\mathbf{a} = \text{grad } u + \mathbf{b}$, где $\text{div } \mathbf{b} = 0$.

Действительно, взяв дивергенцию от равенства $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \text{grad } u$, получим уравнение Пуассона³ $\text{div grad } u \equiv \Delta u = \text{div } \mathbf{a}$, которое имеет решение (с большим произволом в виде граничных условий), что доказывается в курсе ММФ. Полагая теперь $\mathbf{b} := \mathbf{a} - \text{grad } u$, получаем искомое разложение. Заметим, что оператор $\text{div} \circ \text{grad}$, действующий на скалярных функциях, называется *оператором Лапласа*.

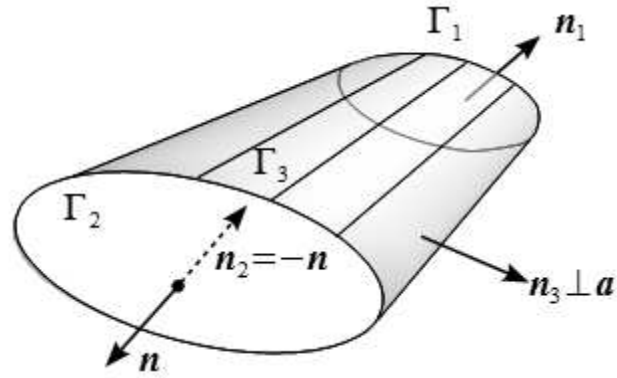


Рис. 2.3: трубка векторного поля.

2.4 Оператор Гамильтона и повторные дифференциальные операции

Оператор Гамильтона⁴ (или оператор “набла”⁵) определяется формулой

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}.$$

При операциях с этим оператором нужно учитывать его двоякую векторно-дифференциальную природу. Как вектор он удовлетворяет тождествам векторной алгебры, а как оператор — правилам дифференцирования.

³Пуассон Симеон Дени (1781–1840) — французский математик.

⁴Гамильтон Уильям Роуан (1805–1865) — ирландский математик.

⁵По древнегречески слово “набла” означает род арфы с треугольным остовом.

С помощью оператора Гамильтона можно записать операции векторного анализа в следующей форме:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} u &= \nabla u = \mathbf{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \operatorname{div} \mathbf{a} &= (\nabla, \mathbf{a}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \quad \text{где } \mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{a} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = [\nabla, \mathbf{a}], \quad \Delta = (\nabla, \nabla). \end{aligned}$$

Зафиксируем некоторую (открытую) область G в пространстве \mathbb{E}^3 . Обозначим через \mathcal{F} линейное пространство бесконечное число раз дифференцируемых скалярных функций на G . Поскольку при умножении функций из \mathcal{F} друг на друга и на вещественные числа результат будет опять лежать в \mathcal{F} , то линейное пространство \mathcal{F} является (*коммутативной*) алгеброй. Обозначим через \mathcal{X} линейное пространство бесконечное число раз дифференцируемых вектор-значных функций на G . При умножении функций из \mathcal{X} на функции из коммутативной алгебры \mathcal{F} мы получаем функции из \mathcal{X} . Поэтому линейное пространство \mathcal{X} является *модулем* над алгеброй \mathcal{F} .

Теперь из операций grad , rot , div можно составить следующую последовательность отображений

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\operatorname{grad}} \mathcal{X} \xrightarrow{\operatorname{rot}} \mathcal{X} \xrightarrow{\operatorname{div}} \mathcal{F},$$

причем, как мы уже видели ранее, выполнение двух последовательных отображений из этой последовательности дает нуль (последовательность пространств и отображений с такими свойствами называется *цепным комплексом*).

Кроме этих двух нулевых повторных операций возможны еще три повторные операции:

$$\operatorname{div} \circ \operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} =: \Delta u$$

— оператор Лапласа и операции $\operatorname{rot} \circ \operatorname{rot}$, $\operatorname{grad} \circ \operatorname{div}$, связанные тождеством

$$\operatorname{rot} \circ \operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{grad} \circ \operatorname{div} \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a},$$

получаемым из известной формулы векторного анализа

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

которая в данном случае записывается в виде

$$[\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]] = \nabla(\nabla, \mathbf{a}) - (\nabla, \nabla)\mathbf{a}$$

и где операция Δ применяется к векторному полю \mathbf{a} покомпонентно.

Уравнение Пуассона $\Delta u = f$ и его частный случай — уравнение Лапласа⁶ $\Delta u = 0$ являются важными уравнениями математической физики. Важность оператора Лапласа объясняется тем фактом, что он является с точностью до постоянного множителя единственным дифференциальным оператором второго порядка из \mathcal{F} в \mathcal{F} , сохраняющим свой вид во всех декартовых системах координат. Более того, все дифференциальные операторы из \mathcal{F} в \mathcal{F} , сохраняющие свой вид во всех декартовых системах координат, являются многочленами с постоянными коэффициентами от оператора Δ .

Функции, удовлетворяющие в области G уравнению Лапласа, называются *гармоническими* в этой области. Примеры гармонических функций: $u = Ax + By + Cz$, $A, B, C = \text{const}$; $u = 1/r$, $r \neq 0$.

Пример 2.6. Пусть векторное поле \mathbf{a} является потенциальным и соленоидальным. Тогда $\mathbf{a} = \text{grad } u$, $\Delta u = \text{div grad } u = \text{div } \mathbf{a} = 0$, т.е. скалярный потенциал векторного поля, являющегося потенциальным и соленоидальным, есть гармоническая функция.

Пример 2.7. Пусть векторное поле $\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ является соленоидальным и безвихревым, т.е. $\text{div } \mathbf{a} = 0$ и $\text{rot } \mathbf{a} = 0$, а его компоненты — дважды непрерывно дифференцируемы. Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}.$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \Rightarrow \\ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0, \quad \Rightarrow \Delta P = 0. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что $\Delta Q = 0$, $\Delta R = 0$. Таким образом, компоненты соленоидального безвихревого поля являются гармоническими функциями.

⁶Лаплас Пьер Симон де (1749–1827) — французский математик.

Пример 2.8. Пусть векторное поле $\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ является соленоидальным и безвихревым. Тогда

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Это в точности условия Коши–Римана для функции комплексной переменной $f(z) = Q(x, y) + iP(x, y)$, $z = x + iy$, которая, в предположении существования непрерывных частных производных у функций P, Q в области D , является аналитической в D .

2.5 Операции векторного анализа в криволинейных ортогональных координатах

Градиент, дивергенция и ротор были введены в прямоугольной системе координат $Oxyz$. Во многих задачах математической физики удобнее пользоваться выражениями для этих операций в других системах координат, например, в цилиндрической или сферической. Мы выведем выражения для grad , div и rot в так называемых криволинейных ортогональных координатах, частными случаями которых являются цилиндрическая и сферическая системы.

2.5.1 Криволинейные ортогональные координаты

При изучении тройного интеграла уже рассматривались замены переменных вида

$$x = \varphi(u, v, w), \quad y = \psi(u, v, w), \quad z = \chi(u, v, w).$$

Тройку чисел (u, v, w) , соответствующую тройке чисел (x, y, z) , можно рассматривать как криволинейные координаты точки $M(x, y, z)$, принадлежащей некоторой области G , которая может совпадать со всем пространством \mathbb{E}^3 . Эти координаты называются криволинейными потому, что соответствующие им координатные поверхности ($u = \operatorname{const}$, $v = \operatorname{const}$ или $w = \operatorname{const}$) и координатные линии (множества постоянства пары координат) являются, вообще говоря, кривыми поверхностями и линиями.

В данном параграфе будем обозначать криволинейные координаты через q_1, q_2, q_3 , а формулы, связывающие координаты (x, y, z) с координатами (q_1, q_2, q_3) , будем записывать в виде

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3),$$

считая функции $x(q_1, q_2, q_3)$, $y(q_1, q_2, q_3)$, $z(q_1, q_2, q_3)$ дифференцируемыми достаточное количество раз. Через каждую точку пространства проходят три координатные линии, на каждой из которых изменяется только одна из координат: q_1 , q_2 или q_3 . Криволинейные координаты называются *ортогональными*, если в любой точке три координатные линии, проходящие через эту точку, попарно ортогональны, т.е. касательные к координатным линиям в этой точке попарно перпендикулярны.

2.5.2 Параметры Ламе

Пусть q_1, q_2, q_3 — криволинейные ортогональные координаты. Рассмотрим криволинейный параллелепипед, ограниченный тремя парами близких криволинейных координатных поверхностей. Пусть точка M соответствует тройкам координат q_1, q_2, q_3 и x, y, z , а вдоль криволинейного отрезка $[M, M_i]$ координатной линии координата q_i увеличивается на величину $\Delta q_i > 0$, $i = 1, 2, 3$. Вычислим длины $\Delta \ell_i$ ребер $[M, M_i]$, $i = 1, 2, 3$ параллелепипеда, площади его граней и его объем в первом ненулевом порядке по $\Delta q_1, \Delta q_2, \Delta q_3$. Пусть декартовы прямоугольные координаты точки M_1 равны $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Тогда

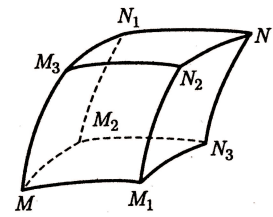


Рис. 2.4: криволинейный параллелепипед.

$$\Delta x = x(q_1 + \Delta q_1, q_2, q_3) - x(q_1, q_2, q_3) = \frac{\partial x}{\partial q_1}(M)\Delta q_1 + O(\Delta q_1^2).$$

Аналогично,

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1}(M)\Delta q_1 + O(\Delta q_1^2), \quad \Delta z = \frac{\partial z}{\partial q_1}(M)\Delta q_1 + O(\Delta q_1^2).$$

Поэтому $\Delta \ell_1 = H_1 \Delta q_1 + O(\Delta q_1^2)$, где

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}.$$

Аналогично, $\Delta \ell_2 = H_2 \Delta q_2 + O(\Delta q_2^2)$, $\Delta \ell_3 = H_3 \Delta q_3 + O(\Delta q_3^2)$, где

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2},$$

$$H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}.$$

Величины H_1 , H_2 , H_3 называются *параметрами Ламе*⁷ для криволинейных координат q_1 , q_2 , q_3 или *масштабными множителями*. Они характеризуют изменение длины координатных линий в зависимости от изменения соответствующей криволинейной координаты.

Площади граней параллелепипеда равны, соответственно,

$$\begin{aligned}\Delta s_1 &= \Delta \ell_2 \Delta \ell_3 + O(\Delta_3) = H_2 H_3 \Delta q_2 \Delta q_3 + O(\Delta_3), \\ \Delta s_2 &= \Delta \ell_1 \Delta \ell_3 + O(\Delta_3) = H_1 H_3 \Delta q_1 \Delta q_3 + O(\Delta_3), \\ \Delta s_3 &= \Delta \ell_1 \Delta \ell_2 + O(\Delta_3) = H_1 H_2 \Delta q_1 \Delta q_2 + O(\Delta_3),\end{aligned}$$

а его объем —

$$V(G') = H_1 H_2 H_3 \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3 + O(\Delta_4), \quad (2.11)$$

где Δ_i , $i = 3, 4$ — сумма всех возможных мономов i -ых степеней от переменных Δq_1 , Δq_2 , Δq_3 .

Пример 2.9. Для цилиндрических координат $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$, $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$, и мы получаем

$$\begin{aligned}H_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi + 0} = 1, \\ H_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{(r \sin \varphi)^2 + (r \cos \varphi)^2 + 0} = r, \\ H_3 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{0 + 0 + 1} = 1.\end{aligned}$$

Это можно усмотреть и без вычислений из рисунка 2.5.

Пример 2.10. Для сферических координат (см. рис. 2.6) $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$, $q_1 = r \geq 0$, $q_2 = \theta \in [0, \pi]$, $q_3 = \varphi \in [0, 2\pi)$, и мы получаем

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} =$$

⁷Ламе Габриэль (1795–1870) — французский математик.

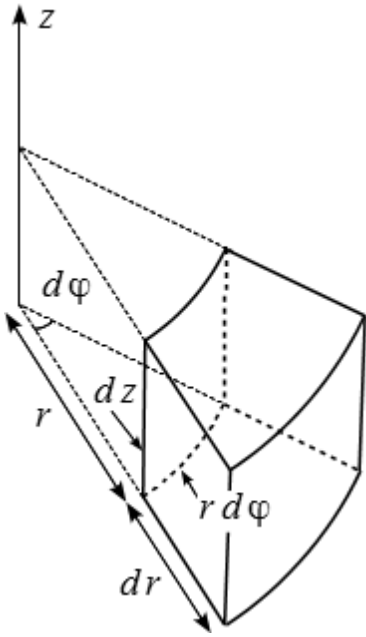


Рис. 2.5: цилиндрические координаты

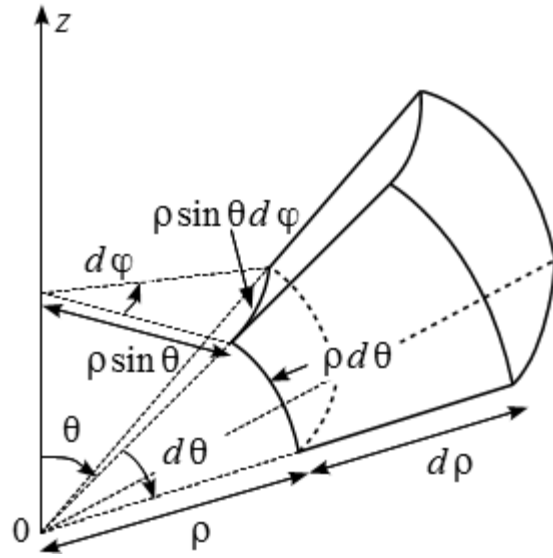


Рис. 2.6: сферические координаты

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta} = 1, \\
 H_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} = \\
 &= \sqrt{(r \cos \theta \cos \varphi)^2 + (r \cos \theta \sin \varphi)^2 + (r \sin \theta)^2} = r, \\
 H_3 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \\
 &= \sqrt{(r \sin \theta \sin \varphi)^2 + (r \sin \theta \cos \varphi)^2 + 0} = r \sin \theta.
 \end{aligned}$$

2.5.3 Градиент

Пусть, как и выше, $M(q_1, q_2, q_3)$ и пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — ортогональный базис, состоящий из единичных касательных векторов к координатным линиям в точке M , направленных в сторону возрастания соответствующих координат. Заметим, что при движении точки M направления векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ будут, вообще говоря, меняться.⁸ Пусть $u(M), M \in G$ — некоторая дифференцируемая в области G функция. Разложим $\text{grad } u(M)$ по базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

⁸Такой базис называется *подвижным репером*.

Координаты вектора $\text{grad } u(M)$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — это проекции вектора $\text{grad } u(M)$ на базисные векторы. Но проекция $\text{grad } u(M)$ на вектор \mathbf{e}_i равна скалярному произведению $(\text{grad } u(M), \mathbf{e}_i)$, что совпадает с производной функции u по направлению \mathbf{e}_i . Поэтому

$$\begin{aligned} (\text{grad } u(M), \mathbf{e}_1) &= \frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}_1} = \lim_{\Delta \ell_1 \rightarrow 0} \frac{u(q_1 + \Delta q_1, q_2, q_3) - u(q_1, q_2, q_3)}{\Delta \ell_1} = \\ &= \frac{1}{H_1} \lim_{\Delta q_1 \rightarrow 0} \frac{u(q_1 + \Delta q_1, q_2, q_3) - u(q_1, q_2, q_3)}{\Delta q_1} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1}. \end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}_i} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial u}{\partial q_i}, \quad i = 2, 3.$$

Окончательно,

$$\text{grad } u(M) = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \mathbf{e}_3.$$

Слушателям предлагается выписать формулы для градиента в цилиндрической и сферической системах координат.

2.5.4 Дивергенция

Пусть $\mathbf{a}(M) = \sum_{i=1}^3 a_i(M) \mathbf{e}_i(M)$ — дифференцируемое векторное поле в области G . Для получения выражения $\text{div } \mathbf{a}(M)$ в ортогональных криволинейных координатах будем использовать инвариантное определение дивергенции:

$$\text{div } \mathbf{a}(M) = \lim_{\Gamma \rightarrow M} \frac{1}{V(G')} \iint_{\Gamma} (\mathbf{a}(M), \mathbf{n}) d\sigma, \quad (2.12)$$

где поверхность Γ ограничивает область G' , содержащую точку M , и стягивается в пределе к этой точке. В качестве области G' мы возьмем криволинейный параллелепипед, изображенный на рисунке 2.4 (тот факт, что точка M лежит на его границе Γ , не играет роли) и перейдем в (2.12) к пределу при $\Delta q_i \rightarrow 0$, $i = 1, 2, 3$. Поскольку $V(G')$ — величина третьего порядка малости относительно Δq_i , то для вычисления предела в (2.12) нам нужно вычислить интеграл

$$\iint_{\Gamma} (\mathbf{a}(M), \mathbf{n}) d\sigma \quad (2.13)$$

с точностью до членов третьего порядка малости.⁹

Пусть $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3$ — координаты переменной точки в параллелепипеде G' . Обозначим через Γ_i грань параллелепипеда, лежащую на поверхности $\tilde{q}_i = q_i$, а через Γ'_i — грань параллелепипеда, лежащую на поверхности $\tilde{q}_i = q_i + \Delta q_i$. Тогда

$$\iint_{\Gamma} (\mathbf{a}(M), \mathbf{n}) d\sigma = \sum_{i=1}^3 \iint_{\Gamma_i \cup \Gamma'_i} (\mathbf{a}(M), \mathbf{n}) d\sigma.$$

Поскольку нормаль к граням Γ_1 и Γ'_1 параллелепипеда G' параллельна координатной линии \tilde{q}_1 , то первый интеграл можно представить по формуле среднего значения и формуле конечных приращений в виде:

$$\begin{aligned} \iint_{\Gamma_1 \cup \Gamma'_1} (\mathbf{a}(M), \mathbf{n}) d\sigma &= \iint_{\substack{q_2 \leq \tilde{q}_2 \leq q_2 + \Delta q_2 \\ q_3 \leq \tilde{q}_3 \leq q_3 + \Delta q_3}} [(a_1 H_2 H_3)(q_1 + \Delta q_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3) - \\ &- (a_1 H_2 H_3)(q_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3)] d\tilde{q}_2 d\tilde{q}_3 = [(a_1 H_2 H_3)(q_1 + \Delta q_1, q_2^*, q_3^*) - \\ &- (a_1 H_2 H_3)(q_1, q_2^*, q_3^*)] \Delta q_2 \Delta q_3 = \left. \frac{\partial}{\partial q_1} (a_1 H_2 H_3) \right|_{(q_1^*, q_2^*, q_3^*)} \cdot \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3, \end{aligned}$$

где $q_i \leq q_i^* \leq q_i + \Delta q_i$, $i = 1, 2, 3$. Применяя циклическую перестановку, получим

$$\begin{aligned} \iint_{\Gamma} (\mathbf{a}(M), \mathbf{n}) d\sigma &= \left[\left. \frac{\partial}{\partial q_1} (a_1 H_2 H_3) \right|_{(q_1^*, q_2^*, q_3^*)} + \left. \frac{\partial}{\partial q_2} (a_2 H_1 H_3) \right|_{(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3)} + \right. \\ &\left. + \left. \frac{\partial}{\partial q_3} (a_3 H_1 H_2) \right|_{(\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3)} \right] \cdot \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3, \end{aligned}$$

где $q_i \leq \bar{q}_i$, $\hat{q}_i \leq q_i + \Delta q_i$, $i = 1, 2, 3$. Учитывая выражение (2.11) для объема криволинейного параллелепипеда, по формуле (2.12) получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{a}(M) &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \lim_{\Delta q_i \rightarrow 0} \left[\left. \frac{\partial}{\partial q_1} (a_1 H_2 H_3) \right|_{(q_1^*, q_2^*, q_3^*)} + \right. \\ &\left. + \left. \frac{\partial}{\partial q_2} (a_2 H_1 H_3) \right|_{(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3)} + \frac{\partial}{\partial q_3} (a_3 H_1 H_2) \right] = \end{aligned} \quad (2.14)$$

⁹Отметим, что в книге Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. Изд. 3-е, М., Физматлит, 2002 формула для дивергенции в ортогональных криволинейных координатах получена нестрого, поскольку при вычислении интеграла (2.13) рассуждения ведутся с точностью только до второго порядка малости. Аналогичное замечание справедливо для вычисления ротора.

$$= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (a_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (a_2 H_1 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (a_3 H_1 H_2) \right]_{(q_1, q_2, q_3)}.$$

Слушателям предлагается выписать формулы для дивергенции в цилиндрической и сферической системах координат.

2.5.5 Ротор

Для получения выражения $\text{rot } \mathbf{a}(M)$ в ортогональных криволинейных координатах будем использовать инвариантное определение ротора:

$$(\text{rot } \mathbf{a}(M), \mathbf{n}(M)) = \lim_{L \rightarrow M} \frac{1}{S(\Gamma_0)} \oint_L (\mathbf{a}(M), d\mathbf{l}), \quad (2.15)$$

где замкнутая кривая L ограничивает поверхность Γ_0 , содержащую точку M , и стягивается в пределе к этой точке, а направление обхода кривой L связано правилом правого винта с полем единичных нормалей \mathbf{n} на поверхности Γ_0 . В качестве поверхности Γ_0 мы возьмем грань Γ_1 нашего криволинейного параллелепипеда, изображенного на рисунке 2.4, в качестве нормали к поверхности Γ_0 выберем внутреннюю нормаль к параллелепипеду и перейдем в (2.15) к пределу при $\Delta q_i \rightarrow 0$, $i = 1, 2, 3$. Поскольку $S(\Gamma_0)$ — величина второго порядка малости относительно Δq_i , то для вычисления предела в (2.15) нам нужно вычислить интеграл

$$\oint_L (\mathbf{a}(M), d\mathbf{l}) \quad (2.16)$$

с точностью до членов второго порядка малости.

Вычислим интеграл (2.16) по формуле среднего значения и формуле конечных приращений:

$$\begin{aligned} \oint_L (\mathbf{a}(M), d\mathbf{l}) &= \int_{q_2}^{q_2 + \Delta q_2} [(a_2 H_2)(q_1, \tilde{q}_2, q_3) - (a_2 H_2)(q_1, \tilde{q}_2, q_3 + \Delta q_3)] d\tilde{q}_2 + \\ &+ \int_{q_3}^{q_3 + \Delta q_3} [(a_3 H_3)(q_1, q_2 + \Delta q_2, \tilde{q}_3) - (a_3 H_3)(q_1, q_2, \tilde{q}_3)] d\tilde{q}_3 = \\ &= [(a_2 H_2)(q_1, q_2^*, q_3) - (a_2 H_2)(q_1, q_2^*, q_3 + \Delta q_3)] \Delta q_2 + \\ &+ [(a_3 H_3)(q_1, q_2 + \Delta q_2, q_3^*) - (a_3 H_3)(q_1, q_2, q_3^*)] \Delta q_3 = \end{aligned}$$

$$= \left[- \frac{\partial}{\partial q_3} (a_2 H_2) \Big|_{(q_1, q_2^*, \bar{q}_3)} + \frac{\partial}{\partial q_2} (a_3 H_3) \Big|_{(q_1, \bar{q}_2, q_3^*)} \right] \cdot \Delta q_2 \Delta q_3,$$

где $q_i \leq \bar{q}_i$, $q_i^* \leq q_i + \Delta q_i$, $i = 2, 3$. Отсюда по формуле (2.15)

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \mathbf{a}(M), \mathbf{e}_1) &= \frac{1}{H_2 H_3} \lim_{\substack{\Delta q_2 \rightarrow 0 \\ \Delta q_3 \rightarrow 0}} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (a_3 H_3) \Big|_{(q_1, \bar{q}_2, q_3^*)} - \frac{\partial}{\partial q_3} (a_2 H_2) \Big|_{(q_1, q_2^*, \bar{q}_3)} \right] = \\ &= \frac{1}{H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (a_3 H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (a_2 H_2) \right] \Big|_{(q_1, q_2, q_3)}. \end{aligned}$$

Производя циклическую перестановку индексов, получим

$$\operatorname{rot} \mathbf{a}(M) = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \begin{vmatrix} H_1 \mathbf{e}_1 & H_2 \mathbf{e}_2 & H_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ H_1 a_1 & H_2 a_2 & H_3 a_3 \end{vmatrix}. \quad (2.17)$$

Слушателям предлагается выписать формулы для ротора в цилиндрической и сферической системах координат.

2.5.6 Оператор Лапласа

Выражение для оператора Лапласа в ортогональных криволинейных координатах получается композицией операторов div и grad :

$$\Delta u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right].$$

Слушателям предлагается выписать формулы для оператора Лапласа в цилиндрической и сферической системах координат.

Глава 3

Числовые ряды и бесконечные произведения

Самостоятельное значение понятие числового и функционального ряда приобрело в 17 веке, особенно после работ И. Ньютона, посвященных степенным рядам, работ Г. Лейбница и Я. Бернулли о применении рядов для вычисления определенных интегралов и интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. В 1712 г. Б. Тейлор нашел формулу разложения функций в степенные ряды, носящую теперь его имя (опубликована в 1715 г.). В несколько ином виде этот ряд был ранее известен Лейбницу и Я. Бернулли.

В 18 веке ряды широко использовались для проведения численных расчетов, в частности в задачах небесной механики, с точностью, недостижимой в предыдущие века. Например, задачей вычисления числа π с возможно большей точностью математики интересовались еще с античности. В конце 16 века голландский математик Людольф ван Цейлен, затратив десять лет на вычисления числа π при помощи правильного n -угольника при $n = 60 \cdot 2^{29}$, получил 20 точных знаков. Однако в начале 18 века при помощи ряда

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad (3.1)$$

при значительно меньших затратах было получено значительно больше точных десятичных знаков числа π . При $x = 1$ члены ряда (3.1) слишком медленно убывают, однако используя формулы

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$$

и ряд (3.1), математикам удалось вычислить свыше ста точных десятичных цифр. Например, Эйлер, бывший, кроме прочего, уникальным

вычислителем, получил 153 точных десятичных знаков числа π за 80 часов, что более чем достаточно для всех практических приложений.¹

3.1 Числовые ряды

3.1.1 Основные понятия теории числовых рядов

Формальная сумма

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots, a_k \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

называется *числовым рядом*, а соответствующая ей последовательность

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

— *последовательностью частичных сумм числового ряда*.

Определение 3.1. Числовой ряд (3.2) называется *сходящимся*, если сходится последовательность S_n . При этом $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ называется *суммой ряда* (3.2). Если же последовательность S_n не сходится к конечному пределу, то ряд (3.2) называется *расходящимся*.

При исследовании сходимости числовых рядов мы следим за малостью членов a_k , т.е. за скоростью изменения членов последовательности S_n , в то время как при непосредственном исследовании сходимости последовательности S_n мы следим за приближением ее членов к некоторому пределу. Таким образом, мы видим, что сходимость числовых рядов представляет собой иной взгляд на понятие сходимости по отношению к сходимости последовательностей.

Пример 3.1. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}$$

расходится, поскольку последовательность его частичных сумм $S_n = \frac{1}{2}(1 - (-1)^n)$ не имеет предела.

¹По состоянию на 2011 год вычислено 10 триллионов десятичных знаков числа π . Примеры эффективных вычислений вручную с помощью рядов см. в книге Фихтенгольц Г.М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т. 2, п. 409-412.

Пример 3.2. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1},$$

составленный из членов геометрической прогрессии. Его частичная сумма S_n при $q \neq 1$ имеет вид

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q}.$$

Очевидно, что при $|q| < 1$ последовательность частичных сумм S_n сходится и имеет предел, равный $\frac{1}{1-q}$. Таким образом, при $|q| < 1$ рассматриваемый ряд сходится и имеет сумму, равную $\frac{1}{1-q}$.

При $|q| \geq 1$ последовательность S_n расходится, а значит, расходится и рассматриваемый ряд.

Пример 3.3. Пусть $x \in \mathbb{R}$. Докажем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \quad (3.3)$$

сходится к сумме e^x .

Действительно, в первом семестре было получено разложение функции e^x по формуле Маклорена

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Отсюда

$$\left| 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - e^x \right| \leq \frac{|x|^n}{n!} e^{|x|} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, ряд (3.3) сходится к функции e^x .

Пример 3.4. Аналогично, используя формулу Маклорена для функций $\sin x$ и $\cos x$, можно доказать, что ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-2}}{(2k-2)!}$$

сходятся при любом x и имеют суммы, соответственно, $\sin x$ и $\cos x$.

Следующие два свойства рядов сразу следуют из определения сходимости.

Предложение 3.1. 1. Отбрасывание конечного числа членов ряда (или добавление к ряду конечного числа членов) не влияет на сходимость или расходимость этого ряда.

2. Если $c = \text{const} \neq 0$, то ряд $\sum_{k=1}^n ca_k$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{k=1}^n a_k$.

Теорема 3.1 (критерий Коши²). Для того чтобы ряд (3.2) сходился, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ такое, что $\forall n > N$ и $\forall p \in \mathbb{N}$ было выполнено неравенство

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon. \quad (3.4)$$

Доказательство. Доказательство критерия Коши сразу получается из критерия Коши для сходимости последовательности частичных сумм S_n , поскольку $S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$. \square

Следствие 3.1. Величина $r_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ называется n -ым остатком ряда (3.2). Если ряд (3.2) сходится, то последовательность r_n является бесконечно малой.

Доказательство. Поскольку ряд для r_n отличается лишь конечным числом слагаемых от ряда (3.2), то из сходимости последнего следует сходимость первого. Если же при этом перейти в левой части неравенства (3.4) к пределу при $p \rightarrow +\infty$, то мы получим, что $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ такое, что $\forall n > N$ выполнено неравенство

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| < \varepsilon.$$

Это и означает, что $r_n \rightarrow 0$. \square

Аналогичным образом, полагая в (3.4) $p = 1$, получаем

²Коши Огюстен Луи (1789–1857) — французский математик.

Следствие 3.2 (необходимый признак сходимости ряда). *Если ряд (3.2) сходится, то $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.*

При исследовании вопроса о сходимости ряда полезно сначала проверить выполнение необходимого признака сходимости.

Пример 3.5.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

— гармонический ряд. *Необходимое условие сходимости для данного ряда, очевидно, выполнено. Однако данный ряд расходится. Действительно, если положить в критерии Коши $p = n$, то $\forall n$ имеем*

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n} n = \frac{1}{2} =: \varepsilon,$$

что влечет расходимость гармонического ряда.

Частичные суммы

$$H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

гармонического ряда называются гармоническими числами и играют существенную роль в теории чисел.

3.1.2 Ряды с неотрицательными членами

Рассмотрим сначала вопрос о сходимости рядов со знакопостоянными членами, поскольку для них последовательность S_n монотонна. Для определенности будем рассматривать ряды с неотрицательными членами, поскольку одновременная замена знаков всех членов ряда не влияет на его сходимости.

Из свойств монотонных последовательностей вытекает следующая теорема.

Теорема 3.2. *Для сходимости ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k, \quad p_k \geq 0 \tag{3.5}$$

с неотрицательными членами необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена.

Доказательство. Как уже было сказано, последовательность частичных сумм ряда (3.5) монотонно не убывает, поэтому, если она ограничена, то она сходится. С другой стороны, как уже было доказано в первом семестре, всякая сходящаяся последовательность ограничена. \square

Следующие две теоремы, называемые признаками сравнения рядов, позволяют сделать вывод о сходимости или расходимости знакопостоянного ряда с помощью его сравнения с заведомо сходящимся или расходящимся рядом.

Теорема 3.3. Пусть имеется ряд (3.5) и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} p'_k, \quad p'_k \geq 0, \quad (3.6)$$

причем выполнено неравенство

$$p_k \leq p'_k. \quad (3.7)$$

Тогда из сходимости ряда (3.6) следует сходимость ряда (3.5), а из расходимости ряда (3.5) следует расходимость ряда (3.6).

Доказательство. Пусть $S_n := \sum_{k=1}^n p_k$, $S'_n := \sum_{k=1}^n p'_k$, тогда по условию теоремы $S_n \leq S'_n$. Последнее неравенство означает, что ограниченность последовательности S'_n влечет ограниченность последовательности S_n , а неограниченность последовательности S_n влечет неограниченность последовательности S'_n . В силу теоремы 3.2 этого достаточно для доказательства теоремы. \square

Замечание 3.1. На основании п. 1 предложения 3.1 теорема 3.3 остается справедливой, если в ее условии потребовать выполнение неравенства (3.7) не для всех номеров k , а лишь начиная с некоторого номера.

Замечание 3.2. На основании п. 2 предложения 3.1 теорема 3.3 остается справедливой, если в ее условии заменить неравенство (3.7) неравенством

$$p_k \leq c p'_k,$$

где c — произвольная положительная постоянная.

Следствие 3.3. *Признак сравнения из теоремы 3.3 можно сформулировать и в предельной форме: если существует предел*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{p'_k} = L, \quad 0 \leq L \leq +\infty, \quad (3.8)$$

то при $L < +\infty$ из сходимости ряда (3.6) следует сходимость ряда (3.5), а при $L > 0$ из расходимости ряда (3.6) следует расходимость ряда (3.5). В частности, при $0 < L < +\infty$ ряды (3.5) и (3.6) сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Пусть выполнено неравенство (3.8) при $L < +\infty$. Тогда, по определению предела, для некоторого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что при $k \geq N$ выполняется неравенство

$$L - \varepsilon < \frac{p_k}{p'_k} < L + \varepsilon.$$

Поэтому, при $k \geq N$ справедливо неравенство $p_k < (L + \varepsilon)p'_k$. В силу замечания 3.2 это доказывает следствие при $L < +\infty$.

При $L > 0$ мы имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p'_k}{p_k} = \frac{1}{L} < \infty$, откуда по уже доказанному из сходимости ряда (3.5) следует сходимость ряда (3.6). Поэтому, если ряд (3.6) расходится, то расходится и ряд (3.5). \square

Пример 3.6. *Рассмотрим ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln \frac{k+1}{k} \right). \quad (3.9)$$

Сравнивая производные, легко убедиться, что $\frac{1}{k} - \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) > 0$. Кроме того,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k} - \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2},$$

поэтому ряд (3.9) сходится по следствию 3.3. Его сумма обозначается C и называется постоянной Эйлера. До сих пор не известно, является ли она рациональным числом. Ее приближенное численное значение равно 0,5772.

Поскольку частичные суммы ряда (3.9) равны $H_n - \ln(1+n)$, справедлива асимптотическая формула для гармонических чисел

$$H_n = \ln n + C + o(1).$$

Теорема 3.4. Пусть для всех номеров $k \geq 1$ справедливо неравенство

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq \frac{p'_{k+1}}{p'_k}. \quad (3.10)$$

Тогда сходимость ряда (3.6) влечет за собой сходимость ряда (3.5), а расходимость ряда (3.5) влечет за собой расходимость ряда (3.6).

Доказательство. Перемножая неравенства (3.10) при $k = 1, \dots, n-1$ между собой, получим $\frac{p_n}{p_1} \leq \frac{p'_n}{p'_1}$ или $p_n \leq \frac{p_1}{p'_1} p'_n$. В силу замечания 3.2 последнее неравенство завершает доказательство. \square

Теорема 3.5 (признак д'Аламбера).³

1. Если $\forall k$, начиная с некоторого номера, выполнено неравенство

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1 \quad \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1 \right), \quad (3.11)$$

то ряд (3.5) сходится (расходится).

2. Если существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L, \quad (3.12)$$

то ряд (3.5) сходится при $L < 1$ и расходится при $L > 1$.

Доказательство. Пусть $p'_k := q^k$ ($p'_k := 1$), тогда неравенство (3.11) можно переписать в виде

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq \frac{p'_{k+1}}{p'_k} \quad \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq \frac{p'_{k+1}}{p'_k} \right).$$

Тогда первое утверждение теоремы следует из теоремы 3.4.

Докажем второе утверждение теоремы. Если в (3.12) $L < 1$, то положим $\varepsilon := \frac{1}{2}(1 - L) > 0$, тогда $L + \varepsilon = 1 - \varepsilon$. По определению предела последовательности для указанного ε найдется номер N такой, что при $k \geq N$

$$L - \varepsilon < \frac{p_{k+1}}{p_k} < L + \varepsilon = 1 - \varepsilon. \quad (3.13)$$

В силу уже доказанного первого утверждения данной теоремы ряд (3.5) сходится.

³Д'Аламбер Жан ле Рон (1717–1783) — французский математик и философ.

Если же $L > 1$, то положим $\varepsilon := L - 1 > 0$. Опять, по определению предела последовательности для указанного ε найдется номер N такой, что при $k \geq N$ справедливо $\frac{p_{k+1}}{p_k} > L - \varepsilon = 1$. Тогда, в силу уже доказанного первого утверждения данной теоремы ряд (3.5) расходится. \square

Замечание 3.3. Неравенство (3.11) в теореме 3.5 нельзя заменить на неравенство $\frac{p_{k+1}}{p_k} < 1$. В самом деле, как показано выше, гармонический

ряд расходится, но для этого ряда $\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{k}{k+1} < 1$.

Если в теореме 3.5 $L = 1$, то о сходимости ряда (3.5) нельзя сказать ничего определенного. В самом деле, для расходящегося гармонического ряда $L = 1$, в то же время $L = 1$ и для сходящегося (как мы увидим ниже) ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Пример 3.7. Применим признак д'Аламбера в предельной форме к ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k/2}}{k!}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)^{(k+1)/2} k!}{(k+1)! k^{k/2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k/2} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k/2} = 0 \cdot \sqrt{e} = 0 < 1, \end{aligned}$$

что означает сходимость рассматриваемого ряда.

Теорема 3.6 (признак Коши). 1. Если $\forall k$, начиная с некоторого номера, выполнено

$$\sqrt[k]{p_k} \leq q < 1 \quad (\sqrt[k]{p_k} \geq 1), \quad (3.14)$$

то ряд (3.5) сходится (расходится).

2. Если существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{p_k} = L, \quad (3.15)$$

то ряд (3.5) сходится при $L < 1$ и расходится при $L > 1$.

Доказательство. Пусть $p'_k := q^k$ ($p'_k := 1$), тогда неравенство (3.14) можно переписать в виде

$$p_k \leq p'_k \quad (p_k \geq p'_k).$$

Тогда первое утверждение теоремы следует из теоремы 3.3 и условия сходимости геометрической прогрессии.

Для доказательства второго утверждения теоремы следует дословно повторить рассуждения при доказательстве второго утверждения теоремы 3.5, заменив $\frac{p_{k+1}}{p_k}$ на $\sqrt[k]{p_k}$. Теорема 3.6 доказана. \square

Замечание 3.4. Неравенство (3.14) в теореме 3.6 нельзя заменить на неравенство $\sqrt[k]{p_k} < 1$, поскольку, например, для расходящегося гармонического ряда имеем $\sqrt[k]{p_k} = \frac{1}{\sqrt[k]{k}} < 1$.

Если в теореме 3.6 $L = 1$, то о сходимости ряда (3.5) нельзя сказать ничего определенного, как показывают те же два примера из замечания к предыдущей теореме.

Пример 3.8. Применим признак Коши в предельной форме к ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}.$$

Имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{k}{2^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \exp\left(\frac{\ln k}{k}\right) = \frac{1}{2} \exp\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{k}\right) = \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2} < 1,$$

откуда следует сходимость рассматриваемого ряда.

Оказывается, что признак Коши в предельной форме сильнее признака д'Аламбера в предельной форме. Именно, если существует предел (3.12), то и существует равный ему предел (3.15)⁴. Таким образом, если сходимость числового ряда может быть установлена с помощью признака д'Аламбера, то она может быть установлена и по признаку Коши. Обратное неверно. Действительно, для ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k + 3}{2^{k+1}}$$

предел (3.15) существует и равен $\frac{1}{2}$, а предел (3.12) не существует.

⁴См. Ильин В.А., Позняк Э.Г., Основы математического анализа. Часть I. 3-е изд. М., Физматлит, 1971. С. 422, 448–449. Тот же рассуждение имеется в курсе Г.М. Фихтенгольца.

Теорема 3.7 (интегральный признак Коши–Маклорена). Пусть функция $f(x)$ неотрицательна и не возрастает всюду на полупрямой $x \geq m$, где m — произвольное фиксированное натуральное число. Тогда числовой ряд

$$\sum_{k=m}^{\infty} f(k)$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится последовательность

$$a_n = \int_m^n f(x) dx.$$

Доказательство. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $k \geq m + 1$, тогда, в силу невозрастания функции $f(x)$ при $x \geq m$, справедливо неравенство

$$f(k) \leq f(x) \leq f(k-1), \quad k-1 \leq x \leq k. \quad (3.16)$$

В силу ограниченности и монотонности, функция $f(x)$ интегрируема на любом сегменте, содержащемся в луче $[m, +\infty)$, поэтому из (3.16) получаем

$$f(k) = \int_{k-1}^k f(k) dx \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq \int_{k-1}^k f(k-1) dx = f(k-1). \quad (3.17)$$

Суммируя неравенства (3.17) при $m+1 \leq k \leq n$, получаем:

$$S_n - f(m) = \sum_{k=m+1}^n f(k) \leq a_n = \int_m^n f(x) dx \leq \sum_{k=m}^{n-1} f(k) = S_{n-1}, \quad (3.18)$$

где $S_n := \sum_{k=m}^n f(k)$. Последовательности $\{S_n\}$ и $\{a_n\}$ являются неубывающими. Поэтому они сходятся тогда и только тогда, когда являются ограниченными. Но из неравенства (3.18) следует, что ограниченность одной из них влечет ограниченность другой. \square

Пример 3.9.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \quad \alpha \geq 0$$

— обобщенный гармонический ряд. Функция $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ удовлетворяет условиям теоремы 3.7 и

$$a_n := \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \Big|_1^n = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1; \\ \ln x \Big|_1^n = \ln n, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Отсюда по интегральному признаку Коши–Маклорена получаем, что обобщенный гармонический ряд сходится тогда и только тогда, когда $\alpha > 1$.

Наличие признаков сравнения для исследования сходимости рядов наводит на мысль о поиске такого универсального предельно медленно сходящегося (или расходящегося) ряда, сравнение с которым позволило бы сделать заключение о сходимости (или расходимости) любого наперед заданного ряда с положительными членами.

Докажем, что такого универсального сходящегося ряда не существует. Пусть даны два сходящихся ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$; обозначим символами r_n и r'_n , соответственно, их n -ые остатки. Будем говорить, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ сходится медленнее, чем ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, если $r_n = o(r'_n)$, $n \rightarrow \infty$.

Докажем, что для каждого сходящегося ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ существует ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$, сходящийся медленнее ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$. Положим $p'_k := \sqrt{r_{k-1}} - \sqrt{r_k}$, $k \geq 2$, $p'_1 \geq 0$, тогда $r'_n = \sqrt{r_n}$, $n \geq 2$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{r'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{\sqrt{r_n}} = 0.$$

Докажем теперь отсутствие универсального сходящегося ряда, сравнение с которым позволило бы сделать вывод о сходимости произвольного ряда с неотрицательными членами. В самом деле, если бы такой универсальный сходящийся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ существовал, то, взяв для него построенный выше сходящийся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$, мы получили бы, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{p'_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_{k-1} - r_k}{\sqrt{r_{k-1}} - \sqrt{r_k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\sqrt{r_{k-1}} + \sqrt{r_k}) = 0.$$

Таким образом, из сравнения с рядом $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ нельзя сделать вывод о сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$.

Аналогично доказывается отсутствие универсального расходящегося ряда, сравнение с которым позволило бы сделать вывод о расходимости произвольного ряда с неотрицательными членами.

3.1.3 Абсолютно и условно сходящиеся ряды

Определение 3.2. Назовем ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad A$$

состоящий из чисел произвольного знака, абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|. \quad A1$$

Ряд A называется условно сходящимся, если он сходится, а ряд $A1$ — расходится.

Теорема 3.8. Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши сходимости числового ряда. Пусть сходится ряд $A1$. Тогда по критерию Коши $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ такое, что $\forall n > N$ и $\forall p \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$. Но тогда и

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon,$$

что по критерию Коши влечет сходимость ряда A . \square

Как мы увидим ниже, из сходимости числового ряда не следует его абсолютная сходимость.

Теорема 3.9 (Коши). Если ряд A сходится абсолютно, то любой ряд A' , полученный из ряда A некоторой перестановкой членов, также сходится абсолютно и его сумма $S_{A'}$ равна сумме S_A ряда A .

Доказательство. 1. Проведем доказательство в два приема. Предположим сначала, что все члены ряда A неотрицательны.

Рассмотрим произвольную частичную сумму A'_k ряда A' . Так как все члены ряда A' , содержащиеся в частичной сумме A'_k , содержатся в некоторой частичной сумме A_{n_k} ряда A , то $A'_k \leq A_{n_k} \leq S_A$. Поскольку последовательность A'_k монотонно не убывает, то это неравенство означает сходимость ряда A' , причем $S_{A'} \leq S_A$.

Но ряд A также получен из ряда A'_k некоторой перестановкой членов. Поэтому $S_A \leq S_{A'}$ и, значит, $S_A = S_{A'}$.

2. Пусть теперь A будет произвольным абсолютно сходящимся рядом. Поскольку при любой перестановке членов ряд A_1 сохранит свою сходимость, то и ряд A также сохранит свою абсолютную сходимость, а значит и просто сходимость. Остается доказать лишь, что сумма его при этом не изменится.

Пусть P и Q — ряды, составленные соответственно из неотрицательных и модулей отрицательных членов ряда A . Из абсолютной сходимости ряда A , очевидно, следует сходимость рядов P и Q . Частичная сумма A_n ряда A равна

$$A_n = P_k - Q_m \quad (3.19)$$

для некоторых частичных сумм P_k и Q_m рядов P и Q . При $n \rightarrow \infty$ имеем $k, m \rightarrow \infty$, поэтому $S_A = S_P - S_Q$.

Но, по доказанному, при перестановке членов ряда A ряды P и Q сохраняют свои суммы, поэтому сохраняет свою сумму и ряд A . \square

Теорема 3.10 (Риман). *Если ряд A сходится условно, то $\forall S \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ можно так переставить члены ряда, что сумма полученного ряда A' будет равна S .*

Доказательство. Для условно сходящегося ряда A неотрицательные ряды $P =: \sum_{i=1}^{\infty} p_i$ и $Q =: \sum_{i=1}^{\infty} q_i$ из доказательства предыдущей теоремы расходятся. Действительно, если один из них сходится, то, в силу равенства (3.19) и сходимости ряда A , сходится и другой, а тогда сходятся и частичные суммы $A_{1n} = P_k + Q_m$ ряда A_1 , т.е. ряд A сходится абсолютно, что противоречит условию.

Поэтому частичные суммы P_k и Q_k стремятся к $+\infty$. Если S — конечное число любого знака, то можно найти такую частичную сумму P_{n_1}

ряда P , что $P_{n_1} \geq S$, причем возьмём членов ряда P в частичной сумме P_{n_1} не более, чем требуется для выполнения данного неравенства.

Затем вычтем из этой суммы некоторый начальный отрезок $q_1 + q_2 + \dots + q_{m_1}$ ряда Q так, что результат станет не больше S , причем опять возьмем для этого членов ряда Q не более, чем требуется для выполнения данного неравенства.

Затем добавим к результату минимально возможный отрезок $p_{n_1+1} + p_{n_1+2} + \dots + p_{n_2}$ ряда P так, чтобы опять сумма была не меньше, чем S .

Затем вычтем из результата минимально возможный отрезок $q_{m_1+1} + q_{m_1+2} + \dots + q_{m_2}$ ряда Q так, чтобы опять сумма была не больше, чем S , и так далее.

В результате мы получим ряд, составленный из сумм

$$(p_1 + p_2 + \dots + p_{n_1}) - (q_1 + q_2 + \dots + q_{m_1}) + \quad (3.20) \\ + (p_{n_1+1} + p_{n_1+2} + \dots + p_{n_2}) - (q_{m_1+1} + q_{m_1+2} + \dots + q_{m_2}) + \dots,$$

сходящийся к S , поскольку отличие его частичной суммы S_n от числа S не превосходит модуля некоторого члена ряда A (кроме, может быть, суммы $p_1 + \dots + p_{n_1}$ при отрицательном S , что несущественно), и следовательно, стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

После раскрытия скобок в ряде (3.20) мы получим ряд A' , отличный от ряда A некоторой перестановкой членов, который сходится к тому же числу S , поскольку частичные суммы ряда A' меняются внутри (опущенных) скобок монотонно между частичными суммами ряда (3.20).

Если теперь $S = +\infty$, то выберем такую последовательность n_k , что $p_{n_k+1} + p_{n_k+2} + \dots + p_{n_{k+1}} \geq 2$. Тогда ряд, составленный из таких сумм и чисел $(-q_k)$,

$$(p_1 + p_2 + \dots + p_{n_1}) - q_1 + (p_{n_1+1} + p_{n_1+2} + \dots + p_{n_2}) - q_2 + \dots + \\ + (p_{n_{k-1}+1} + p_{n_{k-1}+2} + \dots + p_{n_k}) - q_k + \dots$$

является некоторой перестановкой членов ряда A и сходится к $+\infty$, поскольку выражение, стоящее в каждой из скобок, ≥ 2 , а $q_k \rightarrow 0$.

Для $S = -\infty$ доказательство аналогично. \square

3.1.4 Арифметические операции над сходящимися рядами

Рассмотрим вопрос о возможности почленного сложения и перемножения сходящихся рядов.

Теорема 3.11. Если два ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ сходятся и имеют суммы, соответственно равные U и V , то и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (u_k \pm v_k)$ сходится и имеет сумму, равную $U \pm V$.

Доказательство. Обозначим через U_n , V_n и S_n частичные суммы рядов $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} (u_k \pm v_k)$, соответственно. Тогда $S_n = U_n \pm V_n$, поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (U_n \pm V_n) = U \pm V$. \square

Теорема 3.12. Если два ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ сходятся абсолютно и имеют суммы, соответственно равные U и V , то и ряд $\sum_{k,l=1}^{\infty} u_k v_l$, суммируемый в произвольном порядке, также сходится абсолютно, и его сумма равна UV .

Доказательство. Обозначим через w_j произведения $u_k v_l$, занумерованные в каком угодно порядке. Докажем, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty} |w_j|$ сходится. Пусть S_n — n -ая частичная сумма этого ряда. Она состоит из членов вида $|u_k v_l|$. Среди индексов k и l , входящих в эту сумму, найдется наибольший, который мы обозначим через m . Тогда

$$S_n \leq \sum_{k=1}^m |u_k| \sum_{l=1}^m |v_l|.$$

В силу абсолютной сходимости рядов $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{l=1}^{\infty} v_l$, суммы $\sum_{k=1}^m |u_k|$ и $\sum_{l=1}^m |v_l|$ ограничены величиной, не зависящей от m . Поэтому частичные суммы S_n также ограничены, что влечет абсолютную сходимость ряда $\sum_{j=1}^{\infty} w_j$.

Докажем, что сумма ряда $\sum_{j=1}^{\infty} w_j$ равна UV . В силу теоремы 3.9⁵ сумма этого ряда не зависит от порядка, в котором мы его суммируем. Но подпоследовательность

$$W_m := \sum_{k=1}^m u_k \sum_{l=1}^m v_l$$

частичных сумм данного ряда сходится именно к UV . \square

3.1.5 Признаки сходимости произвольных рядов

Ни один из рассмотренных выше признаков не позволяет установить условную сходимость числового ряда. Перейдем к рассмотрению признаков, позволяющих это сделать.

⁵Вот пример использования теоремы Коши о перестановке членов равномерно сходящегося ряда.

Теорема 3.13 (признак Лейбница). ⁶ Пусть $\{p_k\}$, $p_k \geq 0$ — невозрастающая бесконечно малая последовательность. Тогда знакочередующийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} p_k \quad (3.21)$$

сходится.

Доказательство. Поскольку

$$S_{2n} = (p_1 - p_2) + (p_3 - p_4) + \dots + (p_{2n-1} - p_{2n})$$

и каждая круглая скобка неотрицательна, то последовательность S_{2n} неотрицательна и не убывает. С другой стороны

$$S_{2n} = p_1 - (p_2 - p_3) - (p_4 - p_5) + \dots - (p_{2n-2} - p_{2n-1}) - p_{2n},$$

откуда $S_{2n} \leq p_1$. Тем самым, последовательность S_{2n} сходится к некоторому пределу S . Поскольку $S_{2n+1} = S_{2n} + p_{2n+1}$ и $p_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то $S_{2n+1} \rightarrow S$. Таким образом, ряд (3.21) сходится к S . \square

Замечание 3.5. Из равенства

$$S_{2n-1} = p_1 - (p_2 - p_3) - (p_4 - p_5) - \dots - (p_{2n-2} - p_{2n-1})$$

вытекает, что последовательность S_{2n-1} сходится к пределу S , не возрастая. Таким образом

$$S_{2n} \leq S \leq S_{2n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ввиду равенства $S_{2n-1} - S_{2n} = p_{2n}$, отсюда вытекает неравенство

$$|S - S_n| \leq p_n,$$

показывающее, что частичная сумма ряда приближает его сумму с ошибкой, не превышающей абсолютной величины последнего члена ряда в частичной сумме.

Пример 3.10. Ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \quad (3.22)$$

⁶Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646–1716) — немецкий философ, математик (наряду с Ньютоном является основоположником дифференциального и интегрального исчисления), физик (ввел понятие кинетической энергии («живой силы»), закон сохранения «живых сил», принцип наименьшего действия), изобретатель, юрист, историк и языковед.

сходятся по признаку Лейбница. При этом соответствующие ряды из модулей расходятся. Для первого ряда это вытекает из расходимости гармонического ряда, а для второго из оценки $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} > \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Таким образом образом, ряды (3.22) сходятся условно.

Замечание 3.6. Требование монотонности последовательности $\{p_k\}$ в признаке Лейбница не является излишним, как показывает пример ряда

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \dots \quad (3.23)$$

Для него выполнены все условия признака Лейбница, кроме монотонности убывания модуля общего члена ряда, поскольку $\frac{1}{\sqrt{k}+1} < \frac{1}{\sqrt{k+1}-1}$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}-1} - \frac{1}{\sqrt{k}+1} \right) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k-1}.$$

Он расходится по асимптотическому признаку сравнения с гармоническим рядом. А поскольку расходящаяся последовательность его частичных сумм является подпоследовательностью последовательности частичных сумм ряда (3.23), то ряд (3.23) также расходится.

Признаки Дирихле и Абеля относятся к рядам вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \quad (\text{AB})$$

и являются наиболее употребительными признаками исследования сходимости рядов, не сходящихся абсолютно.⁷

Теорема 3.14 (Дирихле).⁸ Если частичные суммы $B_n := \sum_{k=1}^n b_k$ ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad (\text{B})$$

⁷В ряде учебников первый признак называется также признаком Дирихле–Абеля, но мы будем придерживаться терминологии, принятой в Математической энциклопедии, Математическом энциклопедическом словаре, курсе Г.М. Фихтенгольца и в ряде других книг.

⁸Дирихле Петер Густав Лежён (1805–1859) — немецкий математик.

в совокупности ограничены:

$$|B_n| \leq M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},$$

а последовательность $\{a_k\}$, монотонно убывая, стремится к нулю ($a_k \downarrow 0$), то ряд (АВ) сходится.

Доказательство. Установим сначала следующее тождество Абеля⁹

$$\sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + B_{n+p} a_{n+p} - B_{n-1} a_n. \quad (3.24)$$

В этом тождестве на числа $a_k, b_k, k = 1, \dots, n+p$ не накладывается никаких ограничений.¹⁰

В самом деле, подставляя равенство $b_k = B_k - B_{k-1}$ в левую часть (3.24), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k &= \sum_{k=n}^{n+p} a_k B_k - \sum_{k=n}^{n+p} a_k B_{k-1} = \sum_{k=n}^{n+p} a_k B_k - \sum_{k=n-1}^{n+p-1} a_{k+1} B_k = \\ &= \sum_{k=n}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + B_{n+p} a_{n+p} - B_{n-1} a_n. \end{aligned}$$

Перейдем теперь к собственно доказательству теоремы Дирихле. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и убедимся в выполнении для ряда (АВ) условий критерия Коши. По условию, существует такое число $M > 0$, что $|B_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. Поскольку $a_k \downarrow 0$, то $\exists N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$0 \leq a_k < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ при } \forall k > N. \quad (3.25)$$

Используя теперь тождество Абеля, данные оценки и неравенство $a_k \geq a_{k+1}$, получим

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k \right| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} |B_k| (a_k - a_{k+1}) + |B_{n+p}| a_{n+p} + |B_{n-1}| a_n \leq$$

⁹Абель Нильс Хенрик (1802–1829) — норвежский математик.

¹⁰Если записать тождество Абеля в виде

$$\sum_{k=n}^{n+p} a_k (B_k - B_{k-1}) = B_{n+p} a_{n+p} - B_{n-1} a_n - \sum_{k=n}^{n+p-1} (a_{k+1} - a_k) B_k,$$

то станет ясно, что оно является конечно-разностным аналогом формулы интегрирования по частям.

$$\begin{aligned} &\leq M \left(\sum_{k=n}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) + a_{n+p} \right) + Ma_n = Ma_n + Ma_n = 2Ma_n < \\ &< 2M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon \quad \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

В силу критерия Коши, из этого следует сходимость ряда (АВ). \square

Замечание 3.7. *Признак Лейбница является частным случаем признака Дирихле при $b_k = (-1)^{k-1}$.*

Теорема 3.15 (Абель). *Если ряд (В) сходится, а последовательность $\{a_k\}$ монотонна и ограничена (и потому сходится к некоторому пределу a), то ряд (АВ) сходится.*

Доказательство. Рассмотрим ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a)b_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} ab_k. \quad (3.26)$$

В предположениях признака Абеля, второй ряд из (3.26) сходится, а к первому ряду применим признак Дирихле, поэтому он также сходится. Остается заметить, что ряд (АВ) является суммой рядов из (3.26) и применить теорему 3.11. \square

Замечание 3.8. *Аналог признака сравнения знакопостоянных рядов в предельной форме (следствие 3.3) для знакопеременных рядов не имеет места. Действительно, рассмотрим ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k,$$

при $a_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$, $b_k = a_k + \frac{1}{k}$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по признаку Лейбница, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится как сумма сходящегося и расходящегося рядов. Тем не менее $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = 1$.

3.2 Бесконечные произведения

Аналогично числовым рядам можно рассматривать и формальные бесконечные произведения

$$\prod_{k=1}^{\infty} p_k = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n \cdot \dots, \quad p_k \in \mathbb{R}, \quad (3.27)$$

для которых аналогично частичным суммам определяются частичные произведения $P_n = \prod_{k=1}^n p_k$.

Определение 3.3. Если последовательность частичных произведений P_n сходится к конечной или бесконечной величине P при $n \rightarrow \infty$, то эта величина называется значением бесконечного произведения (3.27). Если эта величина конечна и $P \neq 0$, то бесконечное произведение (3.27) называется сходящимся, в противном случае — расходящимся. Если же $P = 0$, то бесконечное произведение (3.27) называется расходящимся к нулю.

Требование $P \neq 0$, хотя и идет вразрез с терминологией для бесконечных рядов, тем не менее общепринято, поскольку облегчает формулировку многих теорем. Если одно из чисел $p_k = 0$, то $P = 0$. В дальнейшем, мы всегда будем считать все $p_k \neq 0$.

Подобно изучению сходимости рядов, изучение сходимости бесконечных произведений является лишь еще одним подходом к понятию предела.

Пример 3.11. Рассмотрим бесконечное произведение

$$\prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

Имеем

$$P_n = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} k \prod_{k=3}^{n+1} k}{\prod_{k=2}^n k^2} = \frac{1}{n} \frac{n+1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Величина

$$\pi_n := \prod_{k=n+1}^{\infty} p_k \tag{3.28}$$

называется *остаточным произведением* бесконечного произведения (3.27).

Пример 3.12. Получим формулу Валлиса:¹¹

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{2k-1} \frac{2k}{2k+1}. \tag{3.29}$$

¹¹Джон Валлис (John Wallis 1616 - 1703) — английский математик.

Имеем

$$p_{2k} = \frac{2k}{2k+1} < 1, \quad p_{2k-1} = \frac{2k}{2k-1} > 1,$$

$$p_{2k-1}p_{2k} = \frac{4k^2}{4k^2-1} > 1, \quad p_{2k}p_{2k+1} = \frac{4k(k+1)}{(2k+1)^2} < 1,$$

откуда

$$P_{2k} < P_{2k+2} < P_{2k+1} < P_{2k-1}.$$

Таким образом, четные частичные произведения возрастают и ограничены сверху нечетными, а нечетные убывают и ограничены снизу четными, значит последовательности четных и нечетных частичных произведений сходятся, причем к общему пределу P , т.к. отношение $p_{2k}/p_{2k-1} \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$.

Докажем, что $P = \frac{\pi}{2}$. Для этого рассмотрим последовательность

$$a_m := \int_0^\pi \sin^m x \, dx.$$

Ясно, что $a_0 = \pi$, $a_1 = 2$ и

$$a_{m+1} = \int_0^\pi \sin^{m+1} x \, dx = - \int_0^\pi \sin^m x \, d \cos x = - \sin^m x \, d \cos x \Big|_0^\pi +$$

$$+ m \int_0^\pi \cos^2 x \sin^{m-1} x \, dx = m \int_0^\pi (1 - \sin^2 x) \sin^{m-1} x \, dx = m a_{m-1} - m a_{m+1},$$

откуда

$$a_{m+1} = \frac{m}{m+1} a_{m-1}. \quad (3.30)$$

Из этой рекуррентной формулы получаем¹²

$$a_{2m} = \pi \prod_{k=1}^m \frac{2k-1}{2k}, \quad a_{2m+1} = 2 \prod_{k=1}^m \frac{2k}{2k+1}. \quad (3.31)$$

Из определения интеграла ясно, что a_m убывает с ростом m , поэтому $\frac{a_{2m}}{a_{2m-1}} < 1$. Из (3.30) теперь получаем

$$a_{2m} > a_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} a_{2m-1} \Rightarrow \frac{a_{2m}}{a_{2m-1}} > \frac{2m}{2m+1}.$$

¹²Сумма нулевого числа слагаемых считается равной нулю, а произведение нулевого числа сомножителей считается равным единице.

Итак,

$$1 > \frac{a_{2m}}{a_{2m-1}} > \frac{2m}{2m+1} \rightarrow 1, \quad m \rightarrow \infty,$$

и, тем самым,

$$\frac{a_{2m-1}}{a_{2m}} \rightarrow 1, \quad m \rightarrow \infty.$$

Подставляя теперь в это предельное соотношение формулы (3.31), получаем

$$\frac{2}{\pi} \prod_{k=1}^{m-1} \frac{2k}{2k+1} \prod_{k=1}^m \frac{2k}{2k-1} \rightarrow 1, \quad m \rightarrow \infty,$$

откуда

$$\prod_{k=1}^m \left(\frac{2k}{2k-1} \frac{2k}{2k+1} \right) \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Перейдем теперь к систематическому изучению вопроса сходимости бесконечных произведений. Утверждения про бесконечные произведения, во многом аналогичные соответствующим утверждениям про бесконечные ряды.

Предложение 3.2. *Поскольку частичные произведения бесконечного произведения (3.28) отличаются лишь постоянным множителем от частичных произведений бесконечного произведения (3.27), то сходимость (расходимость) бесконечного произведения (3.27) влечет сходимость (расходимость) бесконечного произведения (3.28) и наоборот. Это показывает, что конечное число ненулевых множителей не влияет на сходимость бесконечного произведения.*

Предложение 3.3. *Если бесконечное произведение (3.27) сходится, то из равенства $\pi_n = P/P_n$ следует, что $\pi_n \rightarrow 1$.*

Предложение 3.4. *Если бесконечное произведение (3.27) сходится, то из равенства $p_n = P_n/P_{n-1}$ следует, что $p_n \rightarrow 1$. Это аналог необходимого признака сходимости рядов. Поэтому у сходящихся бесконечных произведений все сомножители, начиная с некоторого, положительны. Далее мы будем считать, что все $p_k > 0$.*

Предложение 3.5. *Рассмотрим ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln p_k. \quad (3.32)$$

Поскольку частичные суммы L_n данного ряда связаны с частичными произведениями бесконечного произведения (3.27) равенством $L_n = \ln P_n$, то сходимость ряда (3.32) эквивалентна сходимости бесконечного произведения (3.27) (тут мы пользуемся оговоренным выше условием $P \neq 0$).

Предложение 3.6. Положим $p_k = 1 + a_k$. Если $a_k > 0$ или $a_k < 0$ для всех достаточно больших k , то сходимость бесконечного произведения

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k) \quad (3.33)$$

эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k. \quad (3.34)$$

Действительно, для сходимости произведения (3.33), равно как и ряда (3.34), необходимо равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$. Предположим, что это равенство выполнено, тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + a_k)}{a_k} = 1. \quad (3.35)$$

В таком случае, ввиду того, что члены рядов (3.34) и (3.32) сохраняют определенный знак, начиная с некоторого номера, по признаку сравнения рядов в предельной форме эти ряды сходятся и расходятся одновременно.

Пример 3.13. Пусть $P_n := \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$. Положим $p_1 = 1$,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &:= \frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{(n+1)en^{n+\frac{1}{2}}}{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}} = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}} = \\ &= \exp\left(1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \\ &= \exp\left(1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right) = \\ &= \exp\left(O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = 1 + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Тогда по предложению (3.6)

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} P_n =: A \in (0, +\infty),$$

откуда

$$P_n = A(1 + \varepsilon_n), \quad \varepsilon_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

и

$$n! = An^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}(1 + \varepsilon_n) \quad (3.36)$$

– формула Муавра.¹³ Вычислим значение A . Из формулы Валлиса (3.29) легко следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\pi n} \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} = 1,$$

а по формуле (3.36)

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} &= \prod_{k=1}^n \frac{(2k-1)2k}{(2k)^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{A(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}(1 + \varepsilon_{2n})}{2^{2n}A^2n^{2n+1}e^{-2n}(1 + \varepsilon_n)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}(1 + \varepsilon_{2n})}{A\sqrt{n}(1 + \varepsilon_n)^2}. \end{aligned}$$

Сравнение двух последних формул дает $A = \sqrt{2\pi}$. Отсюда получаем формулу Стирлинга.¹⁴

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + \varepsilon_n). \quad (3.37)$$

В случае знакопеременных a_k в произведении (3.33) возможна как сходимость произведения (3.33) при расходимости ряда (3.34), так и расходимость произведения (3.33) при сходимости ряда (3.34). Первый случай демонстрируется в следующем примере, а второй — ниже, в примере 3.17.

Пример 3.14.¹⁵ Пусть δ_k — бесконечно малая последовательность, причем $\forall k \quad |\delta_k| < 1$. Положим $a_{2k-1} = -\delta_k$, $a_{2k} = \frac{\delta_k}{1 - \delta_k}$. Тогда $(1 +$

¹³Абрахам де Муавр (Abraham de Moivre, 1667 – 1754) — английский математик французского происхождения.

¹⁴Джеймс Стирлинг (James Stirling, 1692 – 1770) — шотландский математик. Историки математики считают, что фактически Стирлинг лишь нашел постоянную в формуле Муавра.

¹⁵Математическое просвещение, №4 (2000), с. 223–224, А.Я. Белов. Аналогичные примеры имеются в задачнике Б.П. Демидовича, №3098, 3099.

$a_{2k-1})(1 + a_{2k}) = 1$, произведение $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k)$ сходится и равно 1. С другой стороны, в предположении сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{j=1}^{\infty} (a_{2j-1} + a_{2j}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta_j^2}{1 - \delta_j}. \quad (3.38)$$

Положим теперь $\delta_j := j^{-1/2}$, тогда последний ряд в (3.38) расходится по признаку сравнения с гармоническим рядом в предельной форме, а значит, расходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Предложение 3.7. Если вместе с рядом (3.34) сходится и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2, \quad (3.39)$$

то бесконечное произведение (3.33) сходится независимо от знаков a_k .

Действительно, пользуясь асимптотической формулой

$$\ln(1 + a_k) = a_k - \frac{1}{2}a_k^2 + o(a_k^2),$$

получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k - \ln(1 + a_k)}{a_k^2} = \frac{1}{2}. \quad (3.40)$$

Поэтому, по признаку сравнения рядов в предельной форме, сходимость ряда (3.39) влечет за собой сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - \ln(1 + a_k)), \quad (3.41)$$

знакопостоянного, начиная с некоторого номера, а так как ряд (3.34) сходится, то сходится и ряд (3.32), что влечет сходимость бесконечного произведения (3.33).

Предложение 3.8. Из связи между частичной суммой ряда (3.32) и частичным произведением бесконечного произведения (3.27) сразу следует, что бесконечное произведение (3.27) расходится к нулю, тогда и только тогда, когда ряд (3.32) расходится к $-\infty$.

В частности, это будет так, если $-1 < a_k < 0$ и ряд (3.34) расходится или, независимо от знаков a_k , если ряд (3.34) сходится, но расходится ряд (3.39).

Действительно, если $-1 < a_k < 0$ и ряд (3.34) расходится, то он расходится к $-\infty$.

Если при этом $a_k \rightarrow 0$, то в силу (3.35) расходится и ряд (3.32), а поскольку $\ln(1 + a_k) < 0$, то ряд (3.32) расходится к $-\infty$. Тогда, как показано выше, бесконечное произведение (3.27) расходится к нулю.

Если же при этом $a_k \not\rightarrow 0$, то $0 > \ln p_k = \ln(1 + a_k) \not\rightarrow 0$ и тем более ряд (3.32) расходится к $-\infty$. Тогда опять бесконечное произведение (3.27) расходится к нулю.

Пусть теперь ряд (3.34) сходится, но расходится ряд (3.39). Тогда $a_k \rightarrow 0$, и, в силу (3.40), ряд (3.41) расходится к $+\infty$ будучи знакоположительным при достаточно больших k . Но тогда, в силу сходимости ряда (3.34), ряд (3.32) расходится к $-\infty$, что опять влечет расходимость бесконечного произведения (3.27) к нулю.

Определение 3.4. *Бесконечное произведение (3.27) сходится абсолютно, если абсолютно сходится ряд (3.32); если же этот ряд сходится условно, то и бесконечное произведение (3.27) также сходится условно.*

Из свойств абсолютно сходящихся рядов и рассмотренной выше связи между рядами и бесконечными произведениями сразу вытекает, что абсолютно сходящиеся бесконечные произведения обладают переместительным свойством, а условно сходящиеся — не обладают.

Предложение 3.9. *Для абсолютной сходимости бесконечного произведения (3.27) необходима и достаточна абсолютная сходимость ряда (3.34).*

Действительно, по определению, абсолютная сходимость бесконечного произведения (3.27) эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\ln(1 + a_k)| = \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + o(|a_k|)),$$

сходимость которого по признаку сравнения числовых рядов в предельной форме эквивалентна сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Пример 3.15. *Бесконечное произведение*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k^x}\right), \quad (x > 0)$$

сходится при $x > 1$ и расходится при $x \leq 1$ в соответствии с таким же поведением ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$ (предложение 3.6).

Пример 3.16. Бесконечное произведение

$$\prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k^x}\right), \quad (x > 0)$$

сходится при $x > 1$ (предложение 3.6) и расходится к нулю при $0 < x \leq 1$ (предложение 3.8).

Пример 3.17. Бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k^x}\right), \quad (x > 0)$$

сходится при $x > 1/2$: именно, при $x > 1$ оно абсолютно сходится (предложение 3.9); при $1/2 < x \leq 1$ оно сходится условно, поскольку сходятся ряды $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2x}}$, но ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$ расходится (предложение 3.7, 3.9). Наконец, при $0 < x \leq 1/2$ рассматриваемое бесконечное произведение расходится к нулю, поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x}$ сходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2x}}$ расходится (предложение 3.8).

Пример 3.18. Рассмотрим пример бесконечного произведения, интересный для теории чисел. Если перенумеровать простые целые числа в порядке возрастания $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, \dots$, то при вещественных $x > 1$ имеет место формула Эйлера

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^x}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} =: \zeta(x), \quad (3.42)$$

где $\zeta(x)$ — дзета-функция Римана.¹⁶

¹⁶Хотя Эйлер и другие математики рассматривали дзета-функцию $\zeta(x)$ как функцию вещественной переменной, но только Рيمان (Риман Георг Фридрих Бернхард (1826–1866) — немецкий математик, основатель римановой геометрии) рассмотрел ее аналитическое продолжение во всю комплексную плоскость и доказал, что она имеет однозначное продолжение, единственный полюс первого порядка в точке $x = 1$, значение $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ и нули в точках $x = -2k, k \in \mathbb{N}$, называемые тривиальными нулями. Наиболее старая, трудная, нерешенная проблема в математике состоит в доказательстве (или опровержении) гипотезы Римана, которая утверждает, что все нули дзета-функции $\zeta(x)$, отличные от тривиальных, лежат на оси $\operatorname{Re} x = \frac{1}{2}$. Численные расчеты подтверждают эту гипотезу, но строгого доказательства до сих пор нет. Доказательство гипотезы Римана является одной из шести Millennium prize problems Института Клея (финансируемого американским филантропом Ландоном Клеем), оцененных в 1 млн. долларов каждая.

Действительно, по формуле суммы геометрической прогрессии справедливо равенство

$$1 - \frac{1}{p_k^x} = \frac{1}{p_k^x} + \frac{1}{(p_k^x)^2} + \dots + \frac{1}{(p_k^x)^m} + \dots$$

Если перемножить конечное число таких рядов, отвечающих всем простым числам, не превосходящим данного натурального числа N , то произведение по теореме 3.12 окажется равным

$$P_x^{(N)} = \prod_{p_k \leq N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^x}} = \sum'_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} + \sum'_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, \quad (3.43)$$

где штрих у знака суммы означает, что суммирование распространяется не на все натуральные числа, а лишь на те из них (не считая единицы), которые в своем разложении на простые множители содержат только простые числа, не превосходящие числа N . Отсюда

$$0 < P_x^{(N)} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} = \sum'_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$, получаем равенство (3.42).

При $x = 1$ по теореме 3.12 равенство (3.43) еще справедливо, поэтому

$$P_1^{(N)} = \prod_{p_k \leq N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} > \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \rightarrow \infty \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Значит, произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \quad (3.44)$$

расходится к $+\infty$.

Отсюда следует доказательство Эйлера бесконечности множества простых чисел (не первое, не самое простое и далеко не единственное, но, тем не менее, устанавливающее связь между, на первый взгляд, далекими областями: теорией чисел и анализом). Именно, если бы простых целых чисел было бы конечное число, то произведение

$$P_1 = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$$

было бы конечным и потому сходящимся, но оно расходится, а потому множество простых целых чисел бесконечно.¹⁷

Кроме того, раз произведение (3.44) расходится к $+\infty$, то произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

расходится к нулю, а потому, в силу предложения 3.8, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k}$$

расходится к бесконечности, что оценивает сверху скорость роста простых чисел.

На самом деле, известно, что $p_k \sim k \ln k$. Большие исследования велись в направлении получения дальнейших членов этого асимптотического разложения.

Бесконечные произведения используются в ТФКП при разложении целых функций в произведение сомножителей, соответствующих их нулям. Так, любую целую функцию $f(z)$ можно разложить в конечное или бесконечное произведение, соответствующее ее нулям a_n , вида:

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \exp\left(\sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_k}\right)^k\right),$$

где m – порядок нуля функции $f(z)$ в точке $z = 0$, $g(z)$ – некоторая целая функция, а p_n – некоторые натуральные числа.¹⁸

Например, справедлива формула

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (3.45)$$

полученная еще Эйлером.¹⁹ Полагая в этой формуле $z = \pi/2$, получим формулу Валлиса (3.29), а сравнивая члены, пропорциональные z^3 , по-

¹⁷Напомним доказательство Евклида бесконечности множества простых чисел. Пусть p_1, \dots, p_n – все простые числа и пусть $N := 1 + \prod_{k=1}^n p_k$. Тогда число N не делится на p_1, \dots, p_n . Значит оно либо простое, либо имеет простой делитель, отличный от p_1, \dots, p_n . И то и другое ведет к противоречию.

¹⁸см., например, Б.В. Шабат, Введение в комплексный анализ, М.: Наука, 1985, Т. 1, с. 270-272.

¹⁹Ее доказательство, не требующее знания общей теории из комплексного анализа, можно найти в книгах Ильин В.А., Позняк Э.Г., Основы математического анализа, Часть I, 3-е изд., М.: Наука, 1971, с. 448-452 и Фихтенгольц Г.М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т. 2, 8-е изд., М.: Физматлит, 2003, с. 407-411.

лучим:²⁰

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

3.2.1 Материал для семинарских занятий

[6], раздел V, параграф 9.

3051. Разобран в лекциях, см. пример 3.11. Аналогично решаются **3052, 3053, 3061, 3062, 3063, 3067.**

3056. Домножая и деля частичное произведение $P_n = \prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k}$ на $\sin \frac{x}{2^n}$ и применяя n раз формулу $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$, получаем

$$P_n = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} \rightarrow \frac{\sin x}{x}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Аналогично вычисляются бесконечные произведения **3057** и **3058**, причем последнее должно иметь вид

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + x^{2^n}) = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

Бесконечное произведение **3054** должно иметь вид

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{1}{2} \right)^{2^n} \right) = 2,$$

т.е. является частным случаем **3058** при $x = \frac{1}{2}$.

Бесконечное произведение **3055** является частным случаем бесконечного произведения **3056** при $x = \pi/2$. Бесконечное произведение **3059** (исторически первое нетривиальное бесконечное произведение, вычисленное Ф. Виетом²¹) является обратным к бесконечному произведению **3055** в силу формулы $\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha}$, $0 \leq \alpha \leq \pi/4$.

Бесконечное произведение **3060** получается из формулы (3.45) при $x = \pi/3$.

3064. Применяя теорему Абеля о сумме степенного ряда на границе круга сходимости к ряду для функции $-\ln(1+x)$, получаем

$$\prod_{n=1}^{\infty} a^{\frac{(-1)^n}{n}} = a^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}} = a^{-\ln 2}.$$

²⁰Именно таким путем нашел эту сумму Л. Эйлер в 1735 году решив, тем самым, так называемую Базельскую проблему, стоявшую с 1644 года.

²¹Франсуа Виет (1540 – 1603) – французский математик, основоположник символической алгебры.

3065. а) Из сходимости произведений $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ и $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ следует, в силу необходимого признака сходимости, что $p_n, q_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому $p_n + q_n \rightarrow 2$, и произведение $\prod_{n=1}^{\infty} (p_n + q_n)$ расходится.

Сходимость произведений в пунктах б), в), г) следует из того, что соответствующие частичные произведения выражаются через частичные произведения исходных рядов.

3066. Поскольку бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} n$ расходится к бесконечности, то бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится к нулю.

Задачи **3068**, **3069** рассмотрены выше в примерах 3.15 и 3.16.

Сходимость произведения **3070** при любом p следует из асимптотики

$$\left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}\right)^p = 1 - \frac{2p}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

и сходимости ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ или того, что оно является p -ой степенью сходящегося бесконечного произведения

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Аналогично решаются задачи **3073–3081**.

Бесконечные произведения **3088**, **3094**, **3095** сходятся в силу предложения 3.7, но абсолютно не сходятся в силу предложения 3.9. Поэтому они сходятся условно.

Бесконечные произведения **3089**, **3091** расходятся к нулю в силу предложения 3.8. Бесконечное произведение **3092** является обратным к бесконечному произведению $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$, которое расходится к нулю аналогично бесконечному произведению **3089**. Поэтому бесконечное произведение **3092** расходится к $+\infty$.

Бесконечное произведение **3090** рассмотрено в примере 3.17.

Бесконечное произведение **3093** расходится в силу предложения 3.4.

Глава 4

Функциональные последовательности и ряды

Наряду с числовыми последовательностями и рядами можно рассматривать последовательности и ряды, состоящие из функций. Естественно, что важнейшим свойством таких последовательностей и рядов по-прежнему является их сходимость. Однако некоторые свойства функций, образующих сходящуюся последовательность или ряд, такие как непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость, могут передаваться или не передаваться предельной функции или сумме ряда. Выяснению условий, обеспечивающих наследование предельной функцией или суммой ряда свойств членов последовательности или ряда, и посвящена, в основном, данная глава.

4.1 Определения

Последовательность функций $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $x \in X$, определенных на некотором фиксированном множестве X , называется *функциональной последовательностью*.

Если зафиксировать некоторое значение $x = x_0$, то мы получим числовую последовательность $\{f_k(x_0)\}_{k=1}^{\infty}$. Если полученная числовая последовательность сходится (расходится), то говорят, что *функциональная последовательность сходится (расходится) в точке x_0* , а точка x_0 называется *точкой сходимости (расходимости)* функциональной последовательности $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$.

Если функциональная последовательность $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится при всех $x \in X$, то говорят, что она *сходится на множестве X* . В этом случае $f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ есть *предельная функция последовательности $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$* . В этом случае используется также обозначение $f_k(x) \rightarrow f(x)$.

Пример 4.1. Функциональная последовательность $f_k(x) = x^k$, $x \in \mathbb{R}$ сходится к функции $f(x) := \begin{cases} 0, & -1 < x < 1, \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ и расходится при $x \notin (-1, 1]$. При этом предельная функция $f(x)$ является разрывной в точке 1.

Аналогичные определения вводятся для функциональных рядов.

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x),$$

составленный из функций $u_k(x)$, определенных на некотором фиксированном множестве X , называется *функциональным рядом*.

Если для $x_0 \in X$ числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0)$$

сходится (расходится), то говорят, что *функциональный ряд сходится (расходится) в точке x_0* , а точка x_0 называется *точкой сходимости (расходимости)* данного функционального ряда. Для исследования вопроса о сходимости функционального ряда в данной точке можно использовать признаки сходимости числовых рядов.

Если данный функциональный ряд сходится при всех $x \in X$, то говорят, что он *сходится на множестве X* . В этом случае его сумма

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

является функцией, определённой на множестве X .

Пример 4.2. Функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k, \quad x \in \mathbb{R},$$

являющийся суммой бесконечной геометрической прогрессии, сходится на интервале $(-1, 1)$, и его сумма есть

$$S(x) = \frac{x}{1-x}.$$

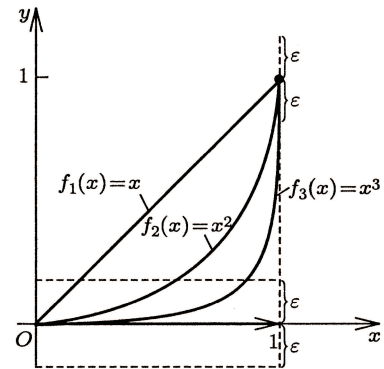


Рис. 4.1: последовательность x^k и ее предел.

Во всех остальных точках вещественной оси ряд расходится. Отметим, что члены и сумма ряда $S(x)$ являются непрерывными функциями на $X = (-1, 1)$.

Может, однако, случиться и так, что сумма ряда из непрерывных функций является разрывной функцией.

Пример 4.3. Функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-x)x^k, \quad x \in \mathbb{R},$$

члены которого отличаются от членов предыдущего ряда множителем $1-x$, не зависящим от k , сходится на полуинтервале $(-1, 1]$, и его сумма

$$S(x) = \begin{cases} x, & -1 < x < 1, \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

является разрывной в точке 1 функцией.

Таким образом, предел функциональной последовательности непрерывных функций и сумма ряда, составленного из непрерывных функций, могут быть разрывными функциями. Ответ на вопрос о том, когда этого не происходит, связан с понятием *равномерной сходимости*.

4.2 Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов

Определение 4.1. Функциональная последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится к функции $f(x)$ на множестве X

$$(\text{обозначение: } f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)),$$

если $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > N$ и $\forall x \in X: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

С геометрической точки зрения неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ означает, что при $n > N$ график любой функции $f_n(x)$ лежит в ε -окрестности графика функции $f(x)$.

Сформулируем второе (эквивалентное) определение равномерной сходимости функциональной последовательности, часто легче проверяемое.

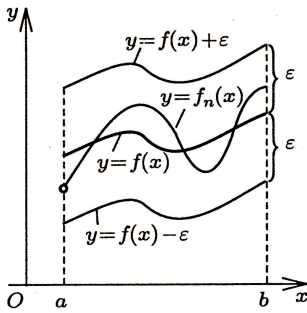


Рис. 4.2: равномерная сходимость последовательности функций.

Определение 4.2. Функциональная последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится к функции $f(x)$ на множестве X , если $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_X |f_n(x) - f(x)| = 0$.

Отметим, что $\sup_X |f_n(x) - f(x)|$ — числовая последовательность. Два определения равномерной сходимости эквивалентны. Это следует из того, что $\sup_X |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in X$.

Пример 4.4. Рассмотрим вопрос о равномерной сходимости двух функциональных последовательностей на двух разных множествах.

1. $f_n(x) = x^n$.

(a) $X = [0, \frac{1}{2}]$: $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$; $\sup_{[0, \frac{1}{2}]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{[0, \frac{1}{2}]} x^n = (\frac{1}{2})^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, $x^n \Rightarrow 0$ на $[0, \frac{1}{2}]$.

(b) $X = [0, 1]$:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

$\sup_{[0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{[0, 1)} x^n = 1 \not\rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, функциональная последовательность $\{x^n\}$ сходится к $f(x)$ на отрезке $[0, 1]$ неравномерно.

(c) Вопросы для студентов.

- i. Сходится ли функциональная последовательность $\{x^n\}$ к функции $f(x) = 0$ равномерно на $[0, 1]$? (Нет.)
- ii. Сходится ли функциональная последовательность $\{x^n\}$ к функции $f(x) = 0$ равномерно на $[0, 1 - \delta]$, $\delta > 0$? (Да.)

$$2. f_n(x) = \frac{n}{x+n}.$$

(a) $X = [0, +\infty)$: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1 =: f(x)$. Поскольку функция $\frac{x}{x+n}$ монотонно растет с ростом x , то

$$\sup_{x \in [0, +\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, +\infty)} \left| \frac{n}{x+n} - 1 \right| = \sup_{x \in [0, +\infty)} \left| \frac{x}{x+n} \right| = 1 \not\rightarrow 0$$

при $n \rightarrow +\infty$. Следовательно, последовательность $\left\{ \frac{n}{x+n} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ на множестве $[0, +\infty)$ сходится к своему пределу 1 неравномерно.

(b) $X = [0, a]$, $a \in (0, +\infty)$:

$$\sup_{[0, a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{[0, a]} \left| \frac{n}{x+n} - 1 \right| = \sup_{[0, a]} \left| \frac{x}{x+n} \right| = \frac{a}{a+n} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow +\infty$. Следовательно, последовательность $\left\{ \frac{n}{x+n} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ на множестве $[0, a]$ равномерно сходится к своему пределу 1.

Определение 4.3. Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно сходится к своей сумме $S(x)$ на множестве X

$$\left(\text{обозначение: } \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x) \right),$$

если последовательность его частичных сумм S_n равномерно сходится к $S(x)$ на X .

Это означает, согласно определению 4.1, что $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$ (один и тот же для всех $x \in X$) такой, что $\forall n > N$ и $\forall x \in X$ выполнено

$$|S(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| < \varepsilon,$$

т.е. при $n > N$ остаток ряда меньше ε сразу для всех $x \in X$, или, согласно определению 4.2, что

$$\sup_{x \in X} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Пример 4.5. 1. $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$, $X = [0 \leq x \leq \frac{1}{2}]$, $S(x) = \frac{x}{1-x}$; $|S(x) - S_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}$. Поскольку сумма $\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k$ растёт с ростом x , то

$$\sup_{[0, \frac{1}{2}]} |S(x) - S_n(x)| = \frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, данный ряд сходится равномерно к своей сумме на $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

2. Тот же ряд, но $X = [0, 1)$. $S(x) = \frac{x}{1-x}$; $|S(x) - S_n(x)| = \frac{x^{n+1}}{1-x}$,

$$\sup_{[0, 1)} \frac{x^{n+1}}{1-x} = \infty.$$

Следовательно, на $[0, 1)$ данный ряд сходится неравномерно.

4.3 Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов

Теорема 4.1 (критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности). Для того чтобы функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходилась равномерно к некоторой функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$ (не зависящий от $x \in X$) такой, что $\forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in X$ выполнялось неравенство

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N$ и $\forall x \in X$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

а т.к. $n + p > n, p \in \mathbb{N}$, то

$$|f_{n+p}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому $\forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in X$:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = |f_{n+p}(x) - f(x) - (f_n(x) - f(x))| \leq$$

$$\leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. Достаточность. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $\forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in X$ выполнено неравенство

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.1)$$

Это означает, что $\forall x \in X$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ является фундаментальной и, следовательно, сходится к некоторому числу, зависящему от x . Таким образом, последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится на множестве X при $n \rightarrow \infty$ к некоторой функции $f(x)$. Поэтому, переходя в неравенстве (4.1) к пределу при $p \rightarrow \infty$, получим

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall n > N \text{ и } \forall x \in X.$$

Но это и означает, что $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$.

□

Теорема 4.2 (критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда). *Для того чтобы $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \xrightarrow{X} S(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$ (не зависящий от $x \in X$) такой, что $\forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in X$ выполнялось неравенство*

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Доказательство теоремы 4.2 дословно повторяет доказательство теоремы 4.1 с заменой $f_n(x)$ на $S_n(x)$ и $f(x)$ на $S(x)$. □

Определение 4.4. Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ с неотрицательными членами называется мажорантным (или мажорирующим) для функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ на множестве X , если $\forall k$ и $\forall x \in X: |u_k(x)| \leq p_k$.

Теорема 4.3 (признак Вейерштрасса¹). *Если для функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ на множестве X существует сходящийся мажорантный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, то функциональный ряд сходится равномерно на множестве X .*

¹Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм (1815–1897) — немецкий математик.

Доказательство. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. По критерию Коши для числовых рядов $\exists N \in \mathbb{N}$ такой, что $\forall n > N$ и $\forall p \in \mathbb{N}$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} p_k \right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} p_k < \varepsilon.$$

Поскольку $|u_k(x)| \leq p_k$, то $\forall n > N$, $\forall p \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in X$ выполняется

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} p_k < \varepsilon.$$

Таким образом, для функционального ряда выполнено условие критерия Коши равномерной сходимости. Следовательно, функциональный ряд сходится равномерно. \square

Замечание 4.1. При выполнении условий теоремы 4.3 функциональный ряд сходится абсолютно.

Замечание 4.2. Верно ли утверждение, обратное утверждению теоремы 4.3? Иначе говоря, следует ли из равномерной сходимости на множестве X функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ существование сходящегося мажорантного ряда?

Ответ отрицательный.

Действительно, пусть числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится условно. Рассмотрим функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, $u_k(x) = a_k = \text{const}$ на произвольном множестве X . Если бы для него существовал сходящийся мажорантный ряд, то по предыдущему замечанию ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сошелся бы абсолютно, что не верно.

Пример 4.6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}$, $\alpha > 1$, $|u_k(x)| = \frac{|\sin kx|}{k^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} =: p_k$; ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ при $\alpha > 1$ сходится, следовательно, функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}$ сходится равномерно на всей числовой прямой.

Ниже мы увидим, что при $0 < \alpha \leq 1$ данный ряд сходится неравномерно на \mathbb{R} , но для доказательства этого факта нужен признак более тонкий, чем признак Вейерштрасса.

Определение 4.5. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$, $x \in X$ называется равномерно ограниченной на множестве X , если $\exists A > 0$ такое, что $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in X$ выполняется неравенство

$$|f_n(x)| < A.$$

Пример 4.7. 1. Функциональная последовательность $\sin nx$ равномерно ограничена на \mathbb{R} .

2. Рассмотрим функциональную последовательность $f_n(x) = \frac{xn}{x+n}$, $x \geq 0$. Поскольку

$$f_n(x) = \frac{x(n+x) - x^2}{x+n} = x - \frac{x^2}{x+n} < x,$$

$$f_n(x) = \frac{(x+n)n - n^2}{x+n} = n - \frac{n^2}{x+n} < n,$$

то последовательность $f_n(x)$ состоит из ограниченных функций, и, кроме того, при каждом x числовая последовательность $|f_n(x)|$ ограничена. Однако поскольку $f_n(n) = \frac{n}{2} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то последовательность $f_n(x)$ не является равномерно ограниченной.

Как и для числовых рядов, признак Дирихле относится к рядам вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)b_k(x). \quad (4.2)$$

Введем обозначение: $B_n(x) = \sum_{k=1}^n b_k(x)$.

Теорема 4.4 (признак Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов). Пусть

- 1) $a_n(x) \searrow 0$, т.е. функциональная последовательность $\{a_n(x)\}$ не возрастает при каждом $x \in X$ и сходится к нулю равномерно на множестве X ;
- 2) последовательность $\{B_n(x)\}$ равномерно ограничена на множестве X .

Тогда ряд (4.2) равномерно сходится на множестве X .

Доказательство. Доказательство теоремы 4.4 дословно повторяет доказательство теоремы о признаке Дирихле для числовых рядов, но теперь нужно опираться на критерий Коши равномерной сходимости рядов:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x) \right| \leq 2Ma_{n+1}(x) < \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in X,$$

где $|B_n(x)| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X$. □

Пример 4.8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$. Мы уже видели ранее, что при фиксированном $\alpha > 1$ этот ряд сходится равномерно по $x \in \mathbb{R}$. Пусть $b_k(x) := \sin kx$, $a_k(x) := \frac{1}{k^\alpha} \searrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, т.е. условие 1 теоремы 4.4 выполнено; исследуем вопрос о равномерной ограниченности частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx$.

Из формулы $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$ при $x \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$ получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sin kx \sin \frac{x}{2} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\cos \left(k - \frac{1}{2} \right) x - \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) x \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{n+1}{2} x - \frac{n}{2} x \right) - \right. \\ &\quad \left. - \cos \left(\frac{n+1}{2} x + \frac{n}{2} x \right) \right) = \sin \frac{n+1}{2} x \sin \frac{n}{2} x \Rightarrow \\ &\boxed{\sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \sin \frac{n}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}}. \end{aligned}$$

Отсюда мы видим, что

$$\begin{aligned} |B_n(x)| &= \left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \leq \frac{1}{|\sin \frac{\delta}{2}|} \quad \forall \delta : 0 < \delta < 2\pi, \\ \forall x \in X &:= \bigcup_{m=-\infty}^{+\infty} [2m\pi + \delta, 2(m+1)\pi - \delta]. \end{aligned}$$

Таким образом, условие 2 теоремы 4.4 выполнено на множестве X , и данный ряд сходится на X равномерно.

Понятно, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$ сходится к нулю и при $x = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, но сходится ли он равномерно на \mathbb{R} ? Ответ отрицательный.

Докажем, что данный ряд не сходится равномерно на $[-\varepsilon, \varepsilon] \quad \forall \varepsilon > 0$.

Действительно, в силу выпуклости вверх графика синуса на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, имеем $\sin t \geq \frac{2t}{\pi}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Пусть натуральное число

$N \geq \frac{\pi}{4\varepsilon}$. Тогда

$$\begin{aligned} \sup_{|x| \leq \varepsilon} \left| \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{\sin kx}{k^\alpha} \right| &\geq \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{\sin \left(k \frac{\pi}{4N}\right)}{k} \geq \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{2}{\pi k} \frac{\pi k}{4N} = \\ &= \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{2N} = \frac{N}{2N} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, условия критерия Коши (теорема 4.2) равномерной сходимости рассматриваемого ряда не выполнены.

4.4 Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов

4.4.1 Равномерная сходимость и непрерывность

Мы уже отмечали в примере 4.1, что последовательность непрерывных функций может сходиться к разрывной функции, а пример 4.3 показывает, что сумма ряда, составленного из непрерывных функций, может оказаться разрывной функцией.

Следующая теорема дает достаточные условия непрерывности предела функциональной последовательности.

Теорема 4.5. Пусть функции $f_n(x)$ непрерывны на промежутке X и пусть $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ на X . Тогда функция $f(x)$ непрерывна на X .

Доказательство. Докажем непрерывность функции $f(x)$ в произвольной точке $x_0 \in X$. Требуется доказать, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. В силу $\{f_n\} \xrightarrow{X} f(x)$, $\exists N = N(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > N$ и $\forall x \in X$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (4.3)$$

и, в частности,

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4.4)$$

Возьмем какую-нибудь функцию $f_n(x)$ с фиксированным номером $n > N$. Так как $f_n(x)$ непрерывна в точке x_0 , то для заданного $\varepsilon \exists \delta > 0$ такое, что

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при} \quad |x - x_0| < \delta. \quad (4.5)$$

Из (4.3)–(4.5) следует, что при $|x - x_0| < \delta$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Использованный при доказательстве прием называется « $\frac{\varepsilon}{3}$ -приемом».

Равномерная сходимость — только достаточное, но не необходимое условие непрерывности предельной функции последовательности непрерывных функций. В примере 4.4.2 уже была рассмотрена функциональная последовательность, неравномерно сходящаяся к своему непрерывному пределу.

Теорема 4.6. *Если все функции $u_k(x)$ непрерывны на промежутке X и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на X , то сумма ряда $S(x)$ непрерывна на X .*

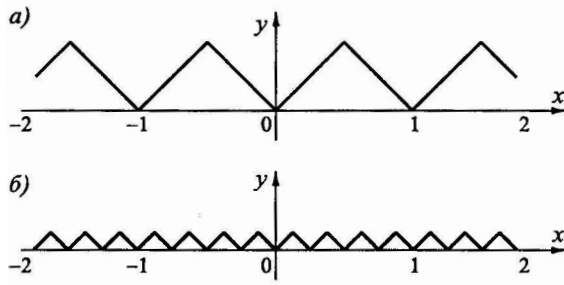
Доказательство. Так как функция $u_k(x)$ непрерывна, то частичная сумма $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ непрерывна на X . По условию $\{S_n(x)\} \Rightarrow S(x)$ на X . Поэтому по теореме 4.5 функция $S(x)$ непрерывна на X . □

Пример 4.9 (пример Ван-дер-Вардена² непрерывной на \mathbb{R} , но нигде не дифференцируемой функции). Обозначим через $u_0(x)$ расстояние между числом $x \in \mathbb{R}$ и ближайшим к x целым числом. Эта функция линейна на каждом промежутке вида $\left[\frac{s}{2}, \frac{s+1}{2}\right]$, $s \in \mathbb{Z}$, непрерывна и имеет период 1, см. рис. 4.3 а). Положим $u_k(x) = \frac{1}{4^k} u_0(4^k x)$, $k \in \mathbb{N}$. Функция $u_k(x)$ линейна в промежутках вида $\left[\frac{s}{2 \cdot 4^k}, \frac{s+1}{2 \cdot 4^k}\right]$, $s \in \mathbb{Z}$, непрерывна и имеет период $\frac{1}{4^k}$. Ее графиком является аналогичная ломаная, но с более мелкими зубчиками и угловым коэффициентом ± 1 , см. рис. 4.3 б). Ясно, что

$$0 \leq u_k(x) \leq \frac{1}{2 \cdot 4^k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.6)$$

Пусть $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$. В силу (4.6), по признаку Вейерштрасса и теореме 4.6 функция $f(x)$ непрерывна.

²Ван-дер-Варден Бартел Лендерг (1903–1996) — голландский математик

Рис. 4.3: графики функций а) u_0 и б) u_1 .

Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in \mathbb{R}$ и докажем, что в точке x_0 функция $f(x)$ не дифференцируема. Ясно, что $\forall n \in \mathbb{N} \exists s_n \in \mathbb{Z}$ такое, что

$$x_0 \in \Delta_n := \left[\frac{s_n}{2 \cdot 4^n}, \frac{s_n + 1}{2 \cdot 4^n} \right).$$

Ясно, что $\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$. Пусть $x_n \in \Delta_n$ — такое, что $|x_0 - x_n| = \frac{1}{4^{n+1}}$ — половина длины полуинтервала Δ_n , $\forall n \in \mathbb{N}$. Отсюда $x_n \rightarrow x_0 \in \Delta_n$, $n \rightarrow \infty$. Составим отношение приращений:

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k(x_n) - u_k(x_0)}{x_n - x_0}.$$

При $k > n$ число $\frac{1}{4^{n+1}}$ кратно периоду $\frac{1}{4^k}$ функции $u_k(x)$, так что $u_k(x_n) = u_k(x_0)$, и поэтому

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k(x_n) - u_k(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{k=0}^n \frac{u_k(x_n) - u_k(x_0)}{x_n - x_0}. \quad (4.7)$$

Но функция $u_k(x)$ линейна на $\Delta_k \supset \Delta_n$ при $k \leq n$. Отсюда $\frac{u_k(x_n) - u_k(x_0)}{x_n - x_0} = \pm 1$ (знаки произвольны). Значит, при четных n число (4.7) — нечетное, а при нечетных n — четное. Поэтому последовательность $\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$ не имеет предела при $n \rightarrow \infty$, и предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ также не существует.

Таким образом, функция $f(x)$ не имеет производной ни в одной точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

4.4.2 Переход к пределу под знаком интеграла и почленное интегрирование ряда

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ на промежутке X и пусть все $f_n(x)$ и $f(x)$ — интегрируемые функции. Пусть x_0 и x — произвольные точки из промежутка X . Рассмотрим вопрос о справедливости равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f_n(t) dt \stackrel{?}{=} \int_{x_0}^x \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \right] dt = \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Если это равенство справедливо, то говорят, что *можно переходить к пределу под знаком интеграла* $\int_{x_0}^x f_n(t) dt$.

Следующий пример показывает, что переход к пределу под знаком интеграла не всегда возможен.

Пример 4.10. $f_n(x) = nxe^{-nx^2} \rightarrow f(x) \equiv 0$, $n \rightarrow \infty$, $x \geq 0$. Возьмем $x_0 = 0$ и любое $x > 0$. Тогда

$$\int_0^x f_n(t) dt = \int_0^x nte^{-nt^2} dt = -\frac{1}{2}e^{-nt^2} \Big|_0^x = \frac{1}{2} (1 - e^{-nx^2}) \rightarrow \frac{1}{2}$$

при $n \rightarrow \infty$, $\forall x > 0$, но $\int_0^x f(t) dt = \int_0^x 0 dt = 0$.

Таким образом,

$$\frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x f_n(t) dt \neq \int_0^x \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt = 0.$$

Аналогичный вопрос можно поставить и для сходящегося функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$: верно ли равенство

$$\int_{x_0}^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \right) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u_k(t) dt ?$$

Если это равенство верно, то говорят, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *можно интегрировать почленно от x_0 до x* . Отметим, что для конечной суммы интегрируемых функций это всегда верно. Что касается ряда, то его не всегда

можно интегрировать почленно. Пример такого ряда можно построить из разностей соседних членов последовательности из примера 4.10.

Теорема 4.7. Пусть все функции $f_n(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и $f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x)$. Тогда $\forall x_0 \in [a, b]$

$$\int_{x_0}^x f_n(t) dt \xrightarrow{x \in [a,b]} \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Доказательство. По определению равномерной сходимости нужно доказать, что $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ такое, что $\forall n > N$ и $\forall x \in [a, b]$ выполнено неравенство

$$\left| \int_{x_0}^x f_n(t) dt - \int_{x_0}^x f(t) dt \right| < \varepsilon.$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x)$, то $\exists N$ такое, что $\forall n > N$ и $\forall x \in [a, b]$ выполнено неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/(b-a)$. Тогда $\forall n > N$ и $\forall x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0}^x f_n(t) dt - \int_{x_0}^x f(t) dt \right| &= \left| \int_{x_0}^x (f_n(t) - f(t)) dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f_n(t) - f(t)| dt \right| < \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} |x - x_0| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Замечание 4.3. Отметим, что при выполнении условий теоремы 4.7 справедливо $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$.

Замечание 4.4. В теории интеграла Лебега имеется значительно более сильная теорема Лебега. В ней требуется, чтобы последовательность интегрируемых по Лебегу функций (по модулю) имела интегрируемую мажоранту и сходилась бы почти всюду, т.е. всюду, за исключением точек некоторого нуль множества. Тогда предельная функция интегрируема и возможен переход к пределу под знаком интеграла.

Теорема 4.8. Если все функции $u_k(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \stackrel{[a,b]}{\Rightarrow} S(x)$, то $\forall x, x_0 \in [a, b]$

$$\int_{x_0}^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \right) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u_k(t) dt$$

(т.е. ряд можно интегрировать почленно), причем ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u_k(t) dt$ сходится равномерно по $x \in [a, b]$ при любом x_0 .

Доказательство. Так как $u_k(x)$ — непрерывные функции, то $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ — непрерывная функция на $[a, b]$. По условию теоремы $S_n(x) \stackrel{[a,b]}{\Rightarrow} S(x)$. Поэтому по теореме 4.7 $\int_{x_0}^x S_n(t) dt \stackrel{[a,b]}{\Rightarrow} \int_{x_0}^x S(t) dt, \forall x_0 \in [a, b]$.

Но

$$\int_{x_0}^x S_n(t) dt = \int_{x_0}^x \sum_{k=1}^n u_k(t) dt = \sum_{k=1}^n \int_{x_0}^x u_k(t) dt; \quad \int_{x_0}^x S(t) dt = \int_{x_0}^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \right) dt.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^n \left(\int_{x_0}^x u_k(t) dt \right) \stackrel{[a,b]}{\Rightarrow} \int_{x_0}^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \right) dt.$$

Это означает, что ряд $\sum_{k=1}^n \left(\int_{x_0}^x u_k(t) dt \right)$ равномерно сходится на $[a, b]$ к своей сумме, равной $\int_{x_0}^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \right) dt$. \square

4.4.3 Переход к пределу под знаком производной и почленное дифференцирование ряда

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ на промежутке X и пусть все $f_n(x)$ и $f(x)$ — дифференцируемые функции. Можно ли утверждать, что последовательность $\{f'_n(x)\}$ сходится к $\{f'(x)\}$? Если $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' =$

$f'(x)$, то говорят, что в этой последовательности *можно переходить к пределу под знаком производной*.

Следующий пример показывает, что переход к пределу под знаком производной не всегда возможен.

Пример 4.11. $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n} \rightarrow f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$, причем данная сходимость даже равномерная. Последовательность производных $f'_n(x) = \cos nx$ не сходится к $f'(x) = 0$ ни в одной точке x (она расходится при $x \neq 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, а при $x = 2\pi k$ она сходится к единице).

Аналогичный вопрос можно поставить и для сходящегося функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$: верно ли равенство

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x) ?$$

Если это равенство верно, то говорят, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *можно дифференцировать почленно*. Отметим, что для конечной суммы дифференцируемых функций это равенство всегда верно. Что касается ряда, то оно может не выполняться. Пример такого ряда можно построить из разностей соседних членов последовательности из примера 4.11.

Теорема 4.9. Пусть

- 1) все функции $f_n(x)$ имеют непрерывные производные $f'_n(x)$ на $[a, b]$;
- 2) в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$ $\{f_n(x_0)\} \rightarrow f_0 \in \mathbb{R}, n \rightarrow \infty$;
- 3) $\{f'_n(x)\} \xrightarrow{[a,b]} \varphi(x)$.

Тогда функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на $[a, b]$ к некоторой дифференцируемой функции $f(x)$, $f'(x) = \varphi(x)$, $f(x_0) = f_0$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)'$$

Доказательство. Поскольку $\{f'_n(x)\} \xrightarrow{[a,b]} \varphi(x)$, то по теореме 4.6 $\varphi(x)$ — непрерывная функция на $[a, b]$, а по теореме 4.7 $\forall x \in [a, b]$

$$f_n(x) - f_n(x_0) = \int_{x_0}^x f'_n(t) dt \xrightarrow{[a,b]} \int_{x_0}^x \varphi(t) dt, n \rightarrow \infty.$$

Но $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f_0$, поэтому $\exists f(x) \stackrel{[a,b]}{\Leftarrow} f_n(x), n \rightarrow \infty$, и

$$f(x) - f_0 = \int_{x_0}^x \varphi(t) dt \Rightarrow f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x \varphi(t) dt \Rightarrow \\ \exists f'(x) = \varphi(x).$$

□

Теорема 4.10. Пусть

- 1) все функции $u_k(x)$ имеют непрерывные производные на $[a, b]$;
- 2) в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$ числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0)$ сходится к S_0 ;
- 3) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$ к функции $\varphi(x)$.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно сходится на $[a, b]$ к некоторой дифференцируемой функции $S(x)$, $S(x_0) = S_0$ и $S'(x) = \varphi(x)$ или $\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$, т.е. ряд можно дифференцировать почленно.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что функции $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ имеют непрерывные производные на $[a, b]$, $S_n(x_0) \rightarrow S_0$ и $S'_n(x) \stackrel{[a,b]}{\Rightarrow} \varphi(x)$. Поэтому по теореме 4.9 \exists такая дифференцируемая функция $S(x)$ на $[a, b]$, что $S_n(x) \stackrel{[a,b]}{\Rightarrow} S(x)$, $S(x_0) = S_0$ и $S'(x) = \varphi(x)$. □

4.5 Функциональные евклидовы, нормированные и метрические пространства

В начале 20 века, в связи с изучением дифференциальных уравнений в частных производных, интегральных уравнений, а позднее и квантовой механики, в математике возникла идея рассматривать функции не

изолированно, а как элементы линейных пространств, наделенных некоторыми дополнительными свойствами. Эта идея оказалась очень плодотворной, обогатила теорию дифференциальных уравнений, породила такой раздел математики, как функциональный анализ, и широко использовалась при развитии численных методов.

Мы рассмотрим некоторые начальные понятия, связанные с развитием этой идеи.

В линейной алгебре рассматриваются линейные конечномерные пространства. Основным интересом для анализа представляют пространства функций, не являющиеся конечномерными. Напомним вначале основные факты, относящиеся к евклидовым пространствам.

Определение 4.6. *Вещественное линейное пространство \mathcal{E} , состоящее из элементов любой природы, называется евклидовым, если на множестве пар элементов из \mathcal{E} задана вещественнозначная функция (f, g) , $f, g \in \mathcal{E}$ такая, что для нее выполнены аксиомы линейности, симметричности и положительной определенности:*

$$1) (\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f, h) + \beta(g, h) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall f, g, h \in \mathcal{E};$$

$$2) (f, g) = (g, f) \quad \forall f, g \in \mathcal{E};$$

$$3) (f, f) \geq 0 \quad \forall f \in \mathcal{E}, \text{ и если } (f, f) = 0, \text{ то } f = \theta \in \mathcal{E}.$$

Для вещественных линейных евклидовых пространств справедливо неравенство Коши–Буняковского

$$|(f, g)| \leq \sqrt{(f, f)(g, g)} \quad \forall f, g \in \mathcal{E}.$$

Оно доказывается так: рассмотрим неотрицательный квадратный трехчлен $p_{f,g}(\lambda) = (f + \lambda g, f + \lambda g) = (f, f) + 2\lambda(f, g) + \lambda^2(g, g)$. В силу его неотрицательности, его дискриминант неположителен:

$$D(p_{f,g}) = 4((f, g))^2 - (g, g)(f, f) \leq 0,$$

откуда и следует неравенство Коши–Буняковского.

Заметим, что при доказательстве этого неравенства мы не пользовались условием $(f, f) = 0 \Rightarrow f = \theta \in \mathcal{E}$, поэтому если на вещественном линейном пространстве определена вещественнозначная функция (f, g) , $f, g \in \mathcal{E}$, удовлетворяющая всем аксиомам скалярного произведения, кроме условия $(f, f) = 0 \Rightarrow f = \theta \in \mathcal{E}$, то в таком вещественном линейном пространстве неравенство Коши–Буняковского все равно справедливо.

Определение 4.7. Евклидовы пространства \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 со скалярными произведениями $(\cdot, \cdot)_1$ и $(\cdot, \cdot)_2$, соответственно, изометричны (изоморфны), если существует биективное отображение $\varphi: \mathcal{E}_1 \mapsto \mathcal{E}_2$ такое, что

$$1) \varphi(\alpha f + \beta g) = \alpha \varphi(f) + \beta \varphi(g) \quad \forall f, g \in \mathcal{E}_1, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};$$

$$2) (\varphi(f), \varphi(g))_2 = (f, g)_1 \quad \forall f, g \in \mathcal{E}_1.$$

Отображение φ при этом называется изометрией (изоморфизмом) евклидовых пространств.

Пример 4.12. Рассмотрим линейное пространство $Q[a, b]$ кусочно-непрерывных вещественнозначных функций, определенных на отрезке $[a, b]$, принимающих в каждой точке разрыва значение, равное полусумме правого и левого предельных значений в этой точке, причем в концевых точках отрезка функции предполагаются односторонне непрерывными. Снабдим это пространство скалярным произведением

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx, \quad f, g \in Q[a, b].$$

Аксиомы скалярного произведения проверяются элементарно, при этом условие равенства значения функции в точке разрыва полусумме правого и левого предельных значений в этой точке нужно для выполнения аксиомы $(f, f) = 0 \Rightarrow f = \theta$ скалярного произведения.

Поэтому если не накладывать на кусочно-непрерывные функции условия равенства значения функции в точке разрыва полусумме правого и левого предельных значений в этой точке, то неравенство Коши–Буняковского, имеющее в данном случае вид

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx},$$

все равно будет справедливо.

Более широкий класс линейных пространств, по сравнению с евклидовыми, образуют нормированные пространства.

Определение 4.8. Вещественное линейное пространство \mathcal{L} , состоящее из элементов любой природы, называется нормированным, если на \mathcal{L} задана вещественнозначная функция $\|f\|$, $f \in \mathcal{L}$ такая, что

- 1) $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{L};$
- 2) $\|f\| \geq 0 \quad \forall f \in \mathcal{L}; \quad \|f\| = 0 \Rightarrow f = \theta \in \mathcal{L};$
- 3) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \quad \forall f, g \in \mathcal{L}.$

Первая аксиома называется однородностью нормы, вторая — ее положительной определенностью, а последняя — неравенством треугольника или неравенством Минковского³. Неравенство треугольника гарантирует непрерывность нормы, что означает малость величины $|\|x + \Delta x\| - \|x\||$ при малых $\|\Delta x\|$. Действительно, неравенство $\|x + \Delta x\| \leq \|x\| + \|\Delta x\|$ есть просто неравенство треугольника в других обозначениях, а если в неравенстве треугольника положить $f + g = x$, $f = x + \Delta x$, то $g = -\Delta x$, и $\|x\| - \|x + \Delta x\| \leq \|-\Delta x\| = \|\Delta x\|$. В совокупности полученные неравенства дают $|\|x + \Delta x\| - \|x\|| \leq \|\Delta x\|$, что и означает непрерывность нормы.

Определение 4.9. Нормированные пространства \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 с нормами $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, соответственно, изоморфны, если существует биективное отображение $\varphi: \mathcal{L}_1 \mapsto \mathcal{L}_2$ такое, что

1. $\varphi(\alpha f + \beta g) = \alpha \varphi(f) + \beta \varphi(g) \quad \forall f, g \in \mathcal{L}_1, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};$
2. $\|\varphi(f)\|_2 = \|f\|_1 \quad \forall f \in \mathcal{L}_1.$

Заметим, что любое евклидово пространство \mathcal{E} можно сделать нормированным, введя норму по формуле $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$, $f \in \mathcal{E}$. Проверки требует лишь неравенство треугольника: $\|f + g\|^2 = (f + g, f + g) = (f, f) + 2(f, g) + (g, g) \leq \|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2 \Rightarrow \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

В евклидовых пространствах для нормы выполняется *тождество параллелограмма*:

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2, \quad (4.8)$$

которое интерпретируется как равенство суммы квадратов длин диагоналей параллелограмма сумме квадратов его сторон. В его справедливости легко убедиться, если раскрыть скалярные произведения в левой части равенства (4.8).

³Минковский Герман (1864–1909) — немецкий математик и физик.

Наоборот, если в нормированном пространстве выполнено тождество параллелограмма, то в нем можно ввести скалярное произведение по формуле

$$(x, y) = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2), \quad x, y \in \mathcal{L}. \quad (4.9)$$

Действительно, симметричность и положительная определенность скалярного произведения в данном случае очевидны, и проверки требует только линейность произведения (4.9). Проверим сначала равенство

$$(x + y, z) = (x, z) + (y, z). \quad (4.10)$$

Оно эквивалентно равенству

$$\|x + y + z\|^2 - \|x + y\|^2 - \|z\|^2 = \|x + z\|^2 - \|x\|^2 - \|z\|^2 + \|y + z\|^2 - \|y\|^2 - \|z\|^2,$$

которое, в свою очередь, эквивалентно равенству

$$\|x + y + z\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x + y\|^2 + \|y + z\|^2 + \|x + z\|^2, \quad (4.11)$$

симметричному относительно любой перестановки x, y, z . Для доказательства равенства (4.11) запишем следующие тождества параллелограмма

$$\begin{aligned} \|x + y + z\|^2 + \|x + y - z\|^2 &= 2\|x + y\|^2 + 2\|z\|^2, \\ \|x + y - z\|^2 + \|x - y + z\|^2 &= 2\|x\|^2 + 2\|y - z\|^2, \\ \|x + z + y\|^2 + \|x + z - y\|^2 &= 2\|x + z\|^2 + 2\|y\|^2. \end{aligned}$$

Вычитая из первого равенства второе и прибавляя третье, после сокращения на 2 получим

$$\|x + y + z\|^2 = \|x + y\|^2 + \|z\|^2 - \|x\|^2 - \|y - z\|^2 + \|x + z\|^2 + \|y\|^2.$$

Если теперь в правую часть данного равенства подставить норму $\|y - z\|^2$, выраженную из тождества параллелограмма

$$\|y + z\|^2 + \|y - z\|^2 = 2\|y\|^2 + 2\|z\|^2,$$

то мы получим (4.11), что доказывает (4.10).

Подставляя в (4.10) $y = -x$, получаем $0 = (\theta, z) = (x, z) + (-x, z)$, откуда $(-x, z) = -(x, z)$.

Теперь из (4.10) мы получим очевидной индукцией равенство $(nx, y) = n(x, y) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$, а из него, подстановкой $x = \frac{1}{n}x'$, — равенство $\frac{1}{n}(x', y) = (\frac{1}{n}x', y)$, а значит, и равенство $(\lambda x, y) = \lambda(x, y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{Q}$,

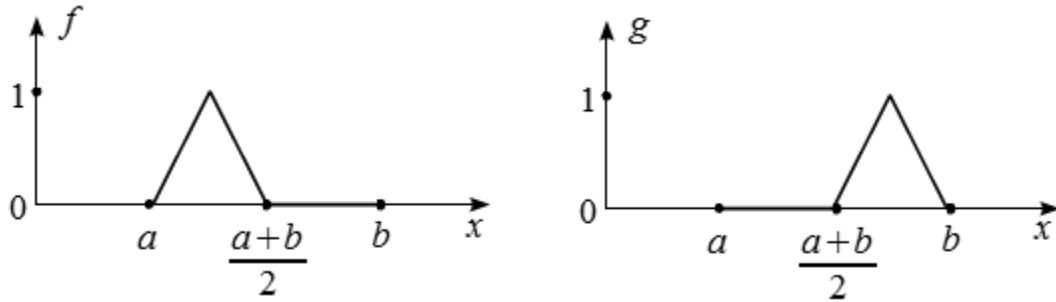


Рис. 4.4: пара функций, не удовлетворяющих тождеству параллелограмма в пространстве $C[a, b]$.

$\forall x, y \in \mathcal{L}$. В силу непрерывности нормы, скалярное произведение (4.9) также непрерывно, поэтому из последнего равенства вытекает

$$(\lambda x, y) = \lambda(x, y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathcal{L}. \quad (4.12)$$

Из равенств (4.10) и (4.12) вытекает линейность скалярного произведения (4.9), что и завершает доказательство.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 4.11. *В нормированном пространстве \mathcal{L} норма $\|\cdot\|$ порождена скалярным произведением тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождеству параллелограмма (4.8).*

Пример 4.13. *Рассмотрим линейное пространство $C[a, b]$ непрерывных вещественнозначных функций, определенных на отрезке $[a, b]$. Снабдим это пространство нормой*

$$\|f\|_C = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Аксиомы нормы проверяются в этом случае без труда.

Поскольку для функций $f, g \in C[a, b]$, графики которых показаны на рисунке 4.4, имеют место равенства $\|f + g\| = \|f - g\| = \|f\| = \|g\| = 1$, то тождество параллелограмма (4.8) в данном случае не выполнено, и в пространстве $C[a, b]$ нельзя ввести скалярное произведение, согласованное с нормой.

Пример 4.14. *Рассмотрим линейное пространство $Q^{(p)}[a, b]$, $p \geq 1$, состоящее из тех же функций, что и пространство $Q[a, b]$, но снабженное на этот раз нормой*

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

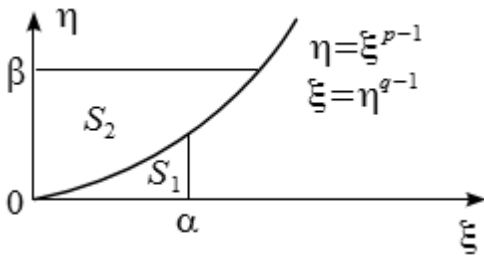


Рис. 4.5: график степенной функции.

Аксиомы 1 и 2 нормы в данном случае очевидны, а проверки требует только третья аксиома.

При $p = 1$ неравенство треугольника сразу следует из того, что $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$. Поэтому рассмотрим далее случай $p > 1$.

Пусть число q — такое, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; тогда $p-1 = \frac{1}{q-1}$. Рассмотрим на декартовой плоскости (ξ, η) кривую, определенную уравнением $\eta = \xi^{p-1}$ ($\xi > 0$) или, что то же самое, уравнением $\xi = \eta^{q-1}$. Из рисунка 4.5 ясно, что при любых неотрицательных числах α, β имеет место неравенство $S_1 + S_2 \geq \alpha\beta$. Вычислим площади S_1 и S_2 :

$$S_1 = \int_0^\alpha \xi^{p-1} d\xi = \frac{\alpha^p}{p}, \quad S_2 = \int_0^\beta \eta^{q-1} d\eta = \frac{\beta^q}{q}.$$

Таким образом, справедливо числовое неравенство Юнга⁴

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}, \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad p, q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (4.13)$$

Докажем теперь неравенство Гельдера⁵ в пространстве $Q^{(p)}[a, b]$:

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q} \quad (4.14)$$

$\forall f, g \in Q[a, b].$

⁴Юнг Вильям Хенри (1863–1942) — английский математик. Альтернативный путь получения неравенства Юнга состоит в следующем. Рассмотрим функцию $\varphi(x) := x^\mu - \mu x$, $x \geq 0$ при $0 < \mu < 1$. Поскольку $\varphi'(x) = \mu(x^{\mu-1} - 1) > 0$ при $0 < x < 1$ и $\varphi'(x) < 0$ при $x > 1$, то $x^\mu - \mu x \leq 1 - \mu$ при $x > 0$. Полагая $x = \frac{a}{b}$, где $a, b > 0$, и обозначая $1 - \mu =: \nu$, получим неравенство

$$a^\mu b^\nu \leq \mu a + \nu b, \quad a, b, \mu, \nu > 0, \quad \mu + \nu = 1.$$

Переобозначения $a^\mu =: \alpha$, $b^\nu =: \beta$, $1/\mu =: p$, $1/\nu =: q$ приводят к неравенству Юнга (4.13).

⁵Гельдер Людвиг Отто (1859–1937) — немецкий математик.

Если хотя бы одна из функций f или g тождественно равна нулю, то неравенство (4.14) обращается в равенство. Если же ни одна из этих функций в тождественный нуль не обращается, то ввиду однородности этого неравенства, можно считать, не ограничивая общности, что

$$\int_a^b |f(x)|^p dx = \int_a^b |g(x)|^q dx = 1. \quad (4.15)$$

Подставив в неравенство (4.13) $\alpha = |f(x)|$, $\beta = |g(x)|$ и проинтегрировав его от a до b , получим с учетом (4.15):

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

что и требуется для доказательства неравенства Гельдера (4.14).

При $p = 2$ неравенство Гельдера переходит в неравенство Коши–Буняковского в пространстве $Q[a, b]$, что соответствует тому, что скалярное произведение в $Q[a, b]$ порождает норму в $Q^{(2)}[a, b]$.

Перейдем теперь к доказательству неравенства треугольника для пространства $Q^{(p)}[a, b]$:

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad (4.16)$$

которое в данном случае носит название интегрального неравенства Минковского.

Проинтегрируем очевидное тождество

$$(|f(x)| + |g(x)|)^p = (|f(x)| + |g(x)|)^{p-1}|f(x)| + (|f(x)| + |g(x)|)^{p-1}|g(x)|$$

от a до b и применим неравенство Гельдера:

$$\begin{aligned} \int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^p dx &= \int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^{p-1}|f(x)| dx + \\ &+ \int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^{p-1}|g(x)| dx \leq \left(\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^{(p-1)q} dx \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left(\left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{1/p} \right) = \\ & = \left(\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^p dx \right)^{1/q} \left(\left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{1/p} \right), \end{aligned}$$

где мы учли, что $(p-1)q = p$. Разделив теперь обе части данного неравенства на $\left(\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^p dx \right)^{1/q}$, мы получим

$$\left(\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

откуда, очевидно, вытекает (4.16).

Таким образом, $Q^{(p)}[a, b]$, $p \geq 1$ является линейным нормированным пространством.

Еще более общий класс пространств образуют метрические пространства.

Определение 4.10. Множество X называется метрическим пространством, если на множестве пар элементов из X определена вещественнозначная неотрицательная функция $\rho(f, g)$, $f, g \in X$, называемая расстоянием, такая, что

- 1) $\rho(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$;
- 2) $\rho(f, g) = \rho(g, f)$ (аксиома симметрии);
- 3) $\rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g)$ (неравенство треугольника).

Первая аксиома означает, что функция $\rho(\cdot, \cdot)$ различает точки множества X .

Легко проверить, что нормированные (а значит, и евклидовы) пространства являются метрическими с функцией $\rho(f, g) = \|f - g\|$. Метрическое пространство не обязано быть линейным, но никаких метрических пространств, отличных от нормированных, мы рассматривать не будем.

Определение 4.11. *Метрические пространства X_1 и X_2 с метриками ρ_1 и ρ_2 , соответственно, изометричны (изоморфны), если существует биективное отображение $\varphi: X_1 \mapsto X_2$ такое, что $\rho_2(\varphi(f), \varphi(g)) = \rho_1(f, g) \quad \forall f, g \in X_1$. При этом отображение φ называется изометрией (изоморфизмом) метрических пространств.*

Определение 4.12. *Последовательность $\{f_n\}$ элементов метрического пространства X сходится к элементу $f \in X$ тогда и только тогда, когда $\rho(f_n, f) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.*

Говоря о сходимости последовательностей в нормированных пространствах, мы будем иметь в виду сходимость по метрике, порожденной нормой.

Определение 4.13. *Последовательность $\{f_n\}$ элементов метрического пространства X называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ такое, что $\rho(f_n, f_m) < \varepsilon$ при $\forall n, m > N$.*

С помощью неравенства треугольника легко проверить, что сходящаяся последовательность элементов метрического пространства является фундаментальной. Однако, в отличие, например, от вещественной оси, в произвольном метрическом пространстве не всякая фундаментальная последовательность сходится.

Определение 4.14. *Метрическое пространство X называется полным, если любая фундаментальная последовательность элементов пространства X сходится к некоторому элементу из X .*

В полном метрическом пространстве X справедлив обычный критерий Коши: последовательность элементов из X сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Поскольку нормированное пространство является метрическим, то на него переносятся определения фундаментальности и полноты.

Пример 4.15. *Множество \mathbb{Q} рациональных чисел является метрическим пространством с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{Q}$. Оно даже является линейным нормированным пространством над самим собой как числовым полем. Однако полным оно не является, в чем и состоит основная причина введения вещественных чисел. Так, в первом семестре доказывалось, что последовательность рациональных чисел $\{x_n\}$, заданная рекуррентной формулой*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad a \in \mathbb{Q}, \quad a > 0, \quad x_1 \in \mathbb{Q}, \quad x_1 > 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

сходится к числу \sqrt{a} , которое для многих $a \in \mathbb{Q}$ является иррациональным. Другая последовательность рациональных чисел

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

сходится к иррациональному числу e .

Заметим, что нормы пространств $C[a, b]$ и $Q^{(p)}[a, b]$ можно вычислять и для многих функций, не принадлежащих пространствам $C[a, b]$ и $Q^{(p)}[a, b]$, соответственно, и эти нормы удовлетворяют всем аксиомам нормы, возможно кроме того, что из $\|f\| = 0$ следует $f(x) \equiv 0$.

Очевидно, что сходимость в пространстве $C[a, b]$ является равномерной сходимостью функциональных последовательностей на сегменте $[a, b]$. Поскольку равномерный предел непрерывных на сегменте функций является непрерывной функцией, пространство $C[a, b]$ является полным.

Сходимость в пространстве $Q^{(1)}[a, b]$ называется *сходимостью в среднем*, а сходимость в пространстве $Q[a, b] = Q^{(2)}[a, b]$ — *сходимостью в среднеквадратичном*. Пространства $Q^{(p)}[a, b]$ полными не являются.

Действительно, рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin \frac{1}{x})$ на сегменте $\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$, доопределив ее в нуле нулем. Данная функция имеет разрывы первого рода в точках $x_k = 1/\pi k$, $k = 1, 2, 3, \dots$ (счетное число точек разрыва), а также разрыв второго рода в точке 0, и поэтому не принадлежит пространству $Q\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$. Вне сколь угодно малой окрестности нуля эта функция имеет лишь конечное число точек разрыва, что в соответствии с достаточным условием интегрируемости ограниченной функции (возможности покрыть все точки разрыва рассматриваемой функции конечным числом интервалов сколь угодно малой общей длины) означает интегрируемость функции $f(x)$ на сегменте $\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$.

Зафиксируем теперь произвольное $p \geq 1$ и рассмотрим последовательность

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x), & \frac{1}{\pi k} < x \leq \frac{2}{\pi}, \\ \frac{(-1)^k}{2}, & x = \frac{1}{\pi k}, \\ 0, & 0 \leq x < \frac{1}{\pi k} \end{cases}$$

функций из пространства $Q^{(p)}\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$. Тогда $\|f_k - f\|_p \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и

по неравенству треугольника $\|f_k - f_m\|_p \leq \|f_k - f\|_p + \|f - f_m\|_p$ последовательность f_k является фундаментальной в пространстве $Q^{(p)} \left[0, \frac{2}{\pi}\right]$.

Предположим, что последовательность f_k сходится также к некоторой функции $g \in Q^{(p)} \left[0, \frac{2}{\pi}\right]$. Тогда у функции $g(x)$ только конечное число точек разрыва и хотя бы в одной из точек $1/(\pi k)$ она непрерывна и отлична от функции $f(x)$, как минимум, в некоторой окрестности точки $1/(\pi k)$, т.е. на некотором интервале. Значит, $\|g - f\|_p > 0$. Однако это противоречит тому, что по неравенству треугольника

$$\|g - f\|_p \leq \|f - f_k\|_p + \|f_k - g\|_p \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Значит у последовательности f_k нет предела в пространстве $Q^{(p)} \left[0, \frac{2}{\pi}\right]$.

Этот пример легко обобщить на пространство $Q^{(p)} [a, b]$ при произвольных вещественных $a < b$.

Можно, конечно, пополнить пространство $Q^{(p)} \left[0, \frac{2}{\pi}\right]$ интегрируемыми по Риману функциями, но и в этом случае оно не станет полным пространством.⁶

Неравенства Гельдера (4.14) и Минковского (4.16) справедливы для всех функций, при которых входящие в эти неравенства интегралы имеют смысл. Поэтому мы будем говорить о сходимости по норме пространства $Q^{(p)} [a, b]$ даже функциональных последовательностей, не входящих в это пространство, но для членов которых интегралы, входящие в нормы, имеют смысл.

⁶См. соответствующий пример, требующий знакомства с критерием Лебега (Лебег Анри Леон (1875–1941) — французский математик, создатель теории меры и обобщения интеграла Римана) интегрируемости функции по Риману, в книге В.А. Зорич. Математический анализ. Часть II. Москва, Наука, 1984, с. 33–34. На самом деле всякое неполное метрическое пространство можно пополнить дополнительными элементами так, что новое метрическое пространство будет полным и будет включать в себя старое. При этом минимальное полное метрическое пространство, содержащее исходное, называется его пополнением и единственно с точностью до изоморфизма. В качестве дополнительных элементов пополнения берутся фундаментальные последовательности исходного пространства, не имеющие в нем пределов. Правда, таких дополнительных элементов слишком много, и нужно отождествить некоторые дополнительные элементы между собой. Так, множество вещественных чисел \mathbb{R} является пополнением множества \mathbb{Q} рациональных чисел. Пополнения пространств $Q^{(p)} \left[0, \frac{2}{\pi}\right]$ можно построить и иначе, введя так называемый интеграл Лебега, который определен для многих функций, для которых не определен интеграл Римана (например, для функции Дирихле), но для функций, интегрируемых по Риману, дающий тот же результат. Этот подход позволяет пополнить пространства $Q^{(p)} [a, b]$ новыми элементами до полных пространств $\mathcal{L}^{(p)} [a, b]$, состоящих в точности из всех функций, для которых интеграл, определяющий норму, имеет смысл. При этом, если пространства $Q^{(p)} [a, b]$ как множества совпадают, то для пространств $\mathcal{L}^{(p)} [a, b]$ справедливы строгие включения: $\mathcal{L}^{(p')} [a, b] \subset \mathcal{L}^{(p)} [a, b]$, $p' > p \geq 1$.

Теорема 4.12. Если последовательность $f_n(x) \in Q^{(p)}[a, b]$ сходится к функции $f(x) \in Q^{(p)}[a, b]$ по норме пространства $Q^{(p)}[a, b]$, $p > 1$, то она сходится к $f(x)$ и по норме любого пространства $Q^{(p')}[a, b]$, $1 \leq p' < p$.

Доказательство. Действительно, в силу неравенства Гельдера (4.14), имеем

$$\|f_n - f\|_{p'}^{p'} = \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^{p'} \cdot 1 \, dx \leq \left(\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^{p' \frac{p}{p'}} \, dx \right)^{p'/p} \cdot \left(\int_a^b 1^{q'} \, dx \right)^{1/q'}$$

$$= |b - a|^{1/q'} \cdot \|f_n - f\|_p^{p'} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

где $\frac{p'}{p} + \frac{1}{q'} = 1$. Значит, и $\|f_n - f\|_{p'} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. □

Следствие 4.1. В условиях теоремы,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f_n(t) \, dt = \int_{x_0}^x f(t) \, dt, \quad x_0 \in [a, b].$$

Доказательство. Действительно,

$$\left| \int_{x_0}^x f_n(t) \, dt - \int_{x_0}^x f(t) \, dt \right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| \, dt = \|f_n - f\|_1 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

□

Теорема 4.13. Если функции $f(x)$, $f_n(x)$ интегрируемы на сегменте $[a, b]$ и $f_n \rightrightarrows f$, то $\forall p \geq 1$ имеет место $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. В силу $f_n \rightrightarrows f$ существует такое N , что $\forall n > N$ и $\forall x \in [a, b]$ выполнено неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{(b - a)^{1/p}}$. Тогда $\forall n > N$ выполнено неравенство⁷

$$\|f_n - f\|_p = \left(\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{(b - a)^{1/p}} \left(\int_a^b dx \right)^{1/p} = \varepsilon.$$

⁷Тут мы пользуемся тем, что если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, а функция $\varphi(x)$ непрерывна на сегменте $[\inf_{x \in [a, b]} f(x), \sup_{x \in [a, b]} f(x)]$, то функция $\varphi(f(x))$ также интегрируема на сегменте $[a, b]$. См. В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов. Математический анализ. Часть 1. 2004. С. 345.

Это и означает, что $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. \square

Замечание 4.5. Можно доказать⁸, что условие интегрируемости функции f в этой теореме следует из остальных, т.е. равномерный предел интегрируемых функций является функцией интегрируемой. Эта теорема означает, в частности, что из равномерной сходимости следует сходимость в среднем и в среднеквадратичном. Как показывает следующий пример, обратное неверно, т.е. из сходимости по норме $\|\cdot\|_p$ не следует даже поточечная сходимость, не говоря уже о равномерной.

Пример 4.16. Для $\forall k \in \mathbb{N}$ определим функциональную последовательность на сегменте $[0, 1]$ формулой:

$$f_{ki}(x) = \begin{cases} 1, & \frac{i-1}{k} < x < \frac{i}{k}, \\ \frac{1}{2}, & x = \frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}, \\ 0, & \text{в остальных точках сегмента } [0, 1], \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Положим $\{f_n(x)\} = \{f_{11}, f_{21}, f_{22}, f_{31}, f_{32}, f_{33}, \dots, f_{k1}, f_{k2}, \dots, f_{kk}, \dots\} \subset Q^{(p)}[0, 1]$. Имеем $\|f_{ki}\|_p = \left(\frac{1}{k}\right)^{1/p} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, $p \geq 1$. Однако ни в одной точке сегмента $[0, 1]$ последовательность $f_n(x)$ не сходится.

Следующий пример показывает, что и из поточечной сходимости не следует сходимость по норме $\|\cdot\|_p$.

Пример 4.17. Определим функциональную последовательность $\{f_n(x)\}$ на сегменте $[0, \pi]$:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^{1/p} (\sin^2 nx)^{1/p}, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{n}, \\ 0, & \frac{\pi}{n} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Ясно, что $f_n(x) \rightarrow 0$ для любого фиксированного x . В то же время,

$$\|f_n\|_p^p = \int_0^{\pi/n} n \sin^2(nx) dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) dt = \frac{\pi}{2}.$$

Значит, $\|f_n\|_p \not\rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

⁸См. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч. II, гл. 1, §2, с. 27.

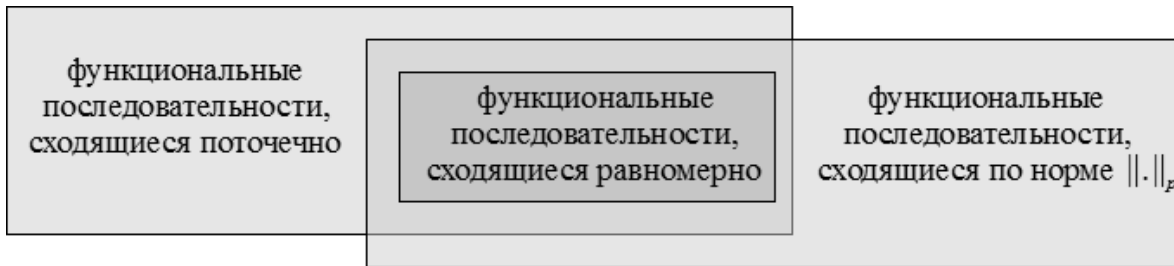


Рис. 4.6: соотношения между различными видами сходимости функциональных последовательностей: по норме $\|\cdot\|_p$, поточечной и равномерной.

Этот пример качественно похож на пример 4.10 на бесконечной полуоси.

Соотношение между различными видами сходимости функциональных последовательностей: равномерной, поточечной и по норме $\|\cdot\|_p$, изображено на рис. 4.6. Заметим, что поточечная сходимость, в отличие от остальных двух, не является метрической.

Определение 4.15. Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится по норме $\|\cdot\|$ к своей сумме $S(x)$ тогда и только тогда, когда $\|S_n - S\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для $S_n(x) := \sum_{k=1}^n u_k(x)$.

Таким образом, для функционального ряда, наряду с равномерной сходимостью, определены понятия сходимости в среднем и сходимости в среднеквадратичном.

4.6 Теорема Арцела

По теореме Больцано–Вейерштрасса, изученной в первом и втором семестрах, из ограниченной числовой последовательности, а также из ограниченной последовательности точек m -мерного евклидова пространства, можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Рассмотрим вопрос о возможности перенесения этого утверждения в бесконечномерное пространство $C[a, b]$. Пусть функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$, $x \in [a, b]$, ограничена в пространстве $C[a, b]$. Для любой фиксированной точки $x_1 \in [a, b]$ числовая последовательность $\{f_n(x_1)\}$ ограничена, и из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{f_{n_k}(x_1)\}$. Для другой точки $x_2 \in [a, b]$ также можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{f_{\bar{n}_i}(x_2)\}$, однако последовательности номеров n_k и \bar{n}_i могут быть различны. Таким образом, ответ

на вопрос о возможности выделения из последовательности $\{f_n(x)\}$ подпоследовательности $\{f_{n_j}(x)\}$, сходящейся по норме пространства $C[a, b]$ или хотя бы поточечно, не является очевидным.

Положительный ответ на этот вопрос при некотором дополнительном условии дает теорема Арцела.⁹

Определение 4.16. *Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$, $x \in X$ называется равномерно непрерывной на промежутке X , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall x', x'' \in X$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$, выполняется неравенство*

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon.$$

Если в этом определении зафиксировать n , то мы получаем просто определение равномерно непрерывной функции $f_n(x)$, поэтому существенно в этом определении то, что δ — общее для всех n и всех $x \in X$.

Пример 4.18. *Функциональная последовательность $\sin nx$, $x \in [0, 1]$ не является равномерно непрерывной, хотя по теореме Кантора¹⁰ каждая функция $f_n(x)$ равномерно непрерывна на $[0, 1]$. В самом деле, возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $x' = \frac{\pi}{2n}$, $x'' = \frac{\pi}{n}$, тогда $\forall \delta > 0 \exists n$ такое, что $|x' - x''| = \frac{\pi}{2n} < \delta$, но при этом*

$$|f_n(x') - f_n(x'')| = \left| \sin \frac{\pi}{2} - \sin \pi \right| = 1 > \varepsilon = \frac{1}{2}.$$

Из формулы конечных приращений Лагранжа легко следует, что достаточным условием равномерной непрерывности последовательности $\{f_n\}$ на промежутке X является равномерная ограниченность последовательности $\{f'_n(x)\}$ на промежутке X .

Теорема 4.14 (Арцела). *Если функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно ограничена и равномерно непрерывна на $[a, b]$, то из нее можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на $[a, b]$.*

Доказательство. Доказательство проведем в два этапа.

1. Из последовательности $\{f_n(x)\}$ выделим подпоследовательность, сходящуюся во всех рациональных точках сегмента $[a, b]$.

⁹Арцела Чезаре (1847–1912) — итальянский математик.

¹⁰Кантор Георг Фердинанд Людвиг Филипп (1845–1918) — немецкий математик, основатель теории множеств.

2. Докажем, что эта подпоследовательность сходится равномерно на $[a, b]$.

1. В силу счетности множества всех рациональных чисел из всех рациональных точек сегмента $[a, b]$ можно образовать числовую последовательность $\{x_n\}$. Рассмотрим числовую последовательность $\{f_n(x_1)\}$.

Она ограничена. Поэтому по теореме Больцано–Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность, которую занумеруем так: $f_{11}(x_1), f_{12}(x_1), \dots, f_{1n}(x_1), \dots$. Итак, функциональная последовательность $f_{11}(x), f_{12}(x), \dots, f_{1n}(x), \dots$ сходится в точке x_1 . Выделим из нее подпоследовательность, сходящуюся в точке x_2 , и занумеруем ее так: $f_{21}(x_1), f_{22}(x_1), \dots, f_{2n}(x_1), \dots$. Эта подпоследовательность сходится в двух точках: x_1 и x_2 . Из нее выделим подпоследовательность, сходящуюся в точке x_3 . Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность подпоследовательностей

$$\begin{array}{cccccc} f_{11}(x), & f_{12}(x), & \dots & f_{1n}(x), & \dots & \\ f_{21}(x), & f_{22}(x), & \dots & f_{2n}(x), & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ f_{n1}(x), & f_{n2}(x), & \dots, & f_{nn}(x), & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Каждая из этих последовательностей является подпоследовательностью предыдущих последовательностей, поэтому подпоследовательность, стоящая в n -ой строчке, сходится в точках x_1, \dots, x_n . Следовательно, *диагональная подпоследовательность*

$$f_{11}(x), f_{22}(x), \dots, f_{nn}(x), \dots$$

сходится во всех рациональных точках $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ отрезка $[a, b]$. В самом деле, для любой точки x_n диагональная подпоследовательность, начиная с номера n , является подпоследовательностью последовательности, стоящей в n -ой строчке, которая сходится в точке x_n . Выделение диагональной подпоследовательности называется *диагональной процедурой Кантора*.

2. Докажем, что подпоследовательность $\{f_{nn}(x)\}$ сходится равномерно на $[a, b]$.

Для этого достаточно доказать, что она удовлетворяет условию критерия Коши равномерной сходимости функциональной последовательности, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ такое, что $\forall n, m > N$ и $\forall x \in [a, b]$ выполнено неравенство $|f_{nn}(x) - f_{mm}(x)| < \varepsilon$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно непрерывна, то $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall n$ и $\forall x', x'' \in [a, b]$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon/3. \quad (4.17)$$

Для указанного δ из последовательности $\{x_n\}$ можно выбрать конечное число точек $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_p}$ так, что они разобьют отрезок $[a, b]$ на частичные сегменты, длины которых меньше δ .¹¹ Тогда $\forall x \in [a, b] \exists x_{n_i}$ такое, что $|x - x_{n_i}| < \delta$. Диагональная подпоследовательность сходится во всех рациональных точках, в том числе и в точках $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_p}$. Поэтому, в силу критерия Коши для числовых последовательностей и конечности числа точек $x_{n_i}, i = 1, \dots, p$, для заданного $\varepsilon \exists N = N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n, m > N$ выполнено неравенство:

$$|f_{mm}(x_{n_i}) - f_{nn}(x_{n_i})| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (4.18)$$

Возьмем теперь любое $x \in [a, b]$ и такое x_{n_i} , что $|x - x_{n_i}| < \delta$. В силу (4.17), получаем:

$$|f_{mm}(x) - f_{mm}(x_{n_i})| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |f_{nn}(x) - f_{nn}(x_{n_i})| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Поэтому, используя (4.18), $\forall n, m > N$ и $\forall x \in [a, b]$ имеем:

$$\begin{aligned} |f_{mm}(x) - f_{nn}(x)| &\leq |f_{mm}(x) - f_{mm}(x_{n_i})| + |f_{mm}(x_{n_i}) - f_{nn}(x_{n_i})| + \\ &+ |f_{nn}(x_{n_i}) - f_{nn}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали выполнение условия критерия Коши равномерной сходимости подпоследовательности $\{f_{nn}(x)\}$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на отрезке $[a, b]$. \square

Условие равномерной ограниченности последовательности $\{f_n(x)\}$ на отрезке $[a, b]$ можно заменить на условие ограниченности этой последовательности в какой либо одной точке этого отрезка, т.к. из этого условия

¹¹Такое разбиение называется δ -сетью.

и равностепенной непрерывности, очевидно, следует равномерная ограниченность последовательности $\{f_n(x)\}$ на всем отрезке.

Чтобы увидеть, как диагональная процедура Кантора работает в другой ситуации, докажем несчетность множества действительных чисел отрезка $[0, 1]$.

Теорема 4.15 (Кантор). *Множество действительных чисел отрезка $[0, 1]$ несчетно.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное счетное множество действительных чисел α_i , $i \in \mathbb{N}$ отрезка $[0, 1]$ и докажем существование на отрезке $[0, 1]$ действительного числа, не принадлежащего данному счетному множеству. Очевидно, что этого достаточно для доказательства теоремы. Запишем числа α_i в виде бесконечных десятичных дробей:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0, a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots a_{1n}, \dots, \\ \alpha_2 &= 0, a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots a_{2n}, \dots, \\ \alpha_3 &= 0, a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots a_{3n}, \dots, \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_n &= 0, a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots a_{nn}, \dots, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

где a_{ki} — i -ая десятичная цифра числа α_k . Построим десятичную дробь $\beta = 0, b_1, b_2, b_3, \dots b_n, \dots$ диагональной процедурой Кантора, а именно: положим $b_n = 2$, если $a_{nn} = 1$, и $b_n = 1$, если $a_{nn} \neq 1$. Эта дробь не может совпасть ни с одним из чисел α_i , поскольку ее i -ый десятичный знак отличен от i -ого десятичного знака дроби α_i , и, в то же время, дробь β не содержит бесконечной серии нулей или девяток, т.е. не принадлежит к тому типу десятичных дробей, для которых нарушается взаимно-однозначное соответствие между действительными числами и десятичными дробями. \square

Глава 5

Несобственные интегралы

Во первом семестре изучались определенные интегралы по Риману от ограниченных функций по конечным сегментам. Однако в математике и ее приложениях широко используются также интегралы от неограниченных функций и интегралы по всей вещественной прямой или полупрямой. Очевидно, что в таких случаях интегральные суммы интеграла по Риману будут неограничены и для корректного определения интеграла нужно модифицировать его определение.

5.1 Несобственный интеграл 1 рода

Определение 5.1. Пусть функция $f(x)$ определена на полупрямой $a \leq x < +\infty$ и пусть $\forall A \geq a$ существует определенный интеграл $\int_a^A f(x) dx$. Независимо от того, существует или нет

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx,$$

будем называть его несобственным интегралом 1 рода от функции $f(x)$ по полупрямой $[a, +\infty)$ и обозначать

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

Если указанный предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.

Геометрический смысл несобственного интеграла 1 рода — площадь бесконечной вправо криволинейной трапеции, взятая со знаком «+» при $f(x) \geq 0$ и взятая со знаком «-» при $f(x) \leq 0$.

Физическая трактовка несобственного интеграла 1 рода: если $f(x)$ — сила, то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ — работа этой силы по перемещению материальной точки из точки a в $+\infty$.

Аналогично определяются несобственные интегралы по полупрямой $(-\infty, a]$ и по всей числовой прямой $(-\infty, \infty)$:

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx := \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^a f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx := \lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ B \rightarrow -\infty}} \int_B^A f(x) dx.$$

Пример 5.1.

$$1. \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^A = \\ = \lim_{A \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} A = \frac{\pi}{2}.$$

$$2. \quad \int_0^{+\infty} \sin x dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \sin x dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} (1 - \cos A)$$

не существует, поэтому интеграл $\int_0^{+\infty} \sin x dx$ расходится.

$$3. \quad \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_a^A, & \alpha \neq 1 \\ \ln x \Big|_a^A, & \alpha = 1 \end{cases} = \\ = \lim_{A \rightarrow +\infty} \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} (A^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}), & \alpha \neq 1 \\ \ln \frac{A}{a}, & \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}, & \alpha > 1 \\ +\infty, & \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

Итак, $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

В примерах 1–3 первообразная вычислялась в элементарных функциях, и поэтому вопрос о сходимости несобственного интеграла сводился к

вопросу о пределе элементарной функции. Однако возможна ситуация, когда первообразная неэлементарна.

Пример 5.2.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} (\mathcal{F}(A) - \mathcal{F}(0)),$$

где $\mathcal{F}(x)$ — первообразная функции $\frac{\sin x}{x}$. Она существует, т.к. функция $\frac{\sin x}{x}$ непрерывна, но не является элементарной.

Как же в этом случае исследовать вопрос о сходимости несобственного интеграла? Как и в случае рядов, нам необходимы *признаки сходимости несобственных интегралов*.

5.2 Признаки сходимости несобственных интегралов 1 рода

Теорема 5.1 (критерий Коши сходимости несобственных интегралов 1 рода). Пусть $\forall A > a \exists \int_a^A f(x) dx$. Для того чтобы несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сошелся, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0 \exists A$ такое, что $\forall A' > A$ и $A'' > A$ выполнялось неравенство

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Доказательство легко получается из критерия Коши существования предела функции и определения несобственного интеграла 1 рода. Действительно, обозначим $\Phi(A) = \int_a^A f(x) dx$. По определению, сходимость несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ эквивалентна существованию предела $\lim_{A \rightarrow +\infty} \Phi(A)$, что, в свою очередь, в силу критерия Коши существования предела функции эквивалентно тому, что $\forall \varepsilon > 0 \exists A$ такое, что $\forall A', A'' > A$ выполнялось неравенство $|\Phi(A') - \Phi(A'')| <$

ε . Остается заметить, что $\Phi(A') - \Phi(A'') = \int_a^{A''} f(x) dx - \int_a^{A'} f(x) dx = \int_{A'}^{A''} f(x) dx$. □

Пример 5.3. Применим критерий Коши к несобственному интегралу $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. С помощью интегрирования по частям $\forall A', A'' > 0$ получаем оценку:

$$\begin{aligned} \left| \int_{A'}^{A''} \frac{\sin x}{x} dx \right| &= \left| \int_{A'}^{A''} \frac{d(-\cos x)}{x} \right| = \left| -\frac{\cos x}{x} \Big|_{A'}^{A''} - \int_{A'}^{A''} \frac{\cos x}{x^2} dx \right| \leq \left| \frac{\cos A'}{A'} \right| + \\ &+ \left| \frac{\cos A''}{A''} \right| + \left| \int_{A'}^{A''} \frac{|\cos x|}{x^2} dx \right| \leq \frac{1}{A'} + \frac{1}{A''} + \left| \int_{A'}^{A''} \frac{dx}{x^2} \right| = \\ &= \frac{1}{A'} + \frac{1}{A''} + \left| -\frac{1}{x} \Big|_{A'}^{A''} \right| \leq \frac{2}{A'} + \frac{2}{A''}. \end{aligned}$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и возьмем $A = \frac{4}{\varepsilon}$. Тогда $\forall A', A'' > A$ получаем: $\left| \int_{A'}^{A''} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \frac{2}{A'} + \frac{2}{A''} < \frac{4}{A} = \varepsilon \Rightarrow$ по критерию Коши $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится.

Однако на практике вместо критерия Коши более удобны достаточные условия сходимости, к изложению которых мы и приступаем.

Теорема 5.2 (признак сравнения). Пусть $0 \leq f(x) \leq g(x)$ при $x \geq a$ и функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на любом сегменте $[a, b]$, $\forall b > a$. Тогда из сходимости интеграла

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx \tag{5.1}$$

следует сходимость интеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx, \tag{5.2}$$

а из расходимости (5.2) следует расходимость (5.1).

Доказательство. $\forall A \geq a$ имеем $\Phi(A) := \int_a^A f(x) dx \leq \int_a^A g(x) dx =: G(A)$.

Отсюда следует, что если интеграл (5.1) сходится, то $G(A)$ — ограниченная функция, поэтому $\Phi(A)$ — также ограниченная функция и, в силу неотрицательности $f(x)$, она монотонно не убывает, т.е. сходится к конечному пределу. Поэтому и интеграл (5.2) сходится.

Если же интеграл (5.2) расходится, то $\Phi(A)$ — неограниченная функция, поэтому $G(A)$ — также неограниченная функция, и, значит, интеграл (5.1) расходится. \square

Следствие 5.1. Если $0 \leq f(x) \leq \frac{c}{x^\alpha}$ при $x \geq a > 0$, $c = \text{const} > 0$ и $\alpha > 1$, то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится. Если же $f(x) \geq \frac{c}{x^\alpha}$ при $x \geq a > 0$, $c = \text{const} > 0$ и $\alpha \leq 1$, то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ расходится.

Следствие 5.2 (признак сравнения в предельной форме). Если $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$ при $x \geq a$ и

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k > 0, \quad (5.3)$$

то интегралы (5.1) и (5.2) сходятся или расходятся одновременно. Если же $k = 0$, то из сходимости (5.1) следует сходимость (5.2).

Доказательство. При $k > 0$ из (5.3) следует наличие такого $A > 0$, что

$$\frac{k}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{3k}{2}, \quad \forall x \geq A.$$

Но тогда $g(x) \leq \frac{2}{k}f(x)$, $f(x) \leq \frac{3}{2}kg(x)$, что по теореме 5.2 означает, что интегралы (5.1) и (5.2) сходятся или расходятся одновременно.

Если же $k = 0$, то из (5.3) следует существование $A > 0$ такого, что $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 1$, $\forall x \geq A$. Но тогда $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \geq A$, и по теореме 5.2 из сходимости (5.1) следует сходимость (5.2). \square

Пример 5.4. 1.

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha \sin \frac{1}{x} dx, \quad 0 \leq f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x} = x^\alpha \left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^{-\alpha+1}}} = 1.$$

Следовательно, интеграл сходится при $-\alpha+1 > 1$, т.е. при $\alpha < 0$, и расходится при $\alpha \geq 0$.

2. Интеграл $\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx$ сходится $\forall \alpha$, т.к. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha e^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = 0$, а $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится.

3. Интеграл Пуассона $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ сходится, т.к. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x^2} = 0$.

Признак сравнения относится к неотрицательным функциям. В этом отношении он аналогичен признаку сравнения для рядов с положительными членами. Для исследования сходимости несобственных интегралов от знакопеременных функций полезен признак Дирихле, аналогичный признаку Дирихле для рядов. Он относится к несобственным интегралам вида $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$.

Теорема 5.3 (признак Дирихле). Пусть

1. функция $f(x)$ непрерывна на $[a, +\infty)$ и имеет на этой полупрямой ограниченную первообразную $F(x)$ (т.е. $F'(x) = f(x)$ и $\exists M > 0$ такое, что $\forall x \in [a, +\infty)$ справедливо неравенство $|F(x)| \leq M$);
2. функция $g(x)$ не возрастает на $[a, +\infty)$, стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$ ($g(x) \downarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$) и имеет непрерывную производную $g'(x)$ на $[a, +\infty)$.

Тогда несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ сходится.

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши (теорема 5.1). С этой целью рассмотрим следующий интеграл:

$$\int_{A'}^{A''} f(x)g(x) dx = \int_{A'}^{A''} g(x) dF(x) = g(x)F(x)|_{A'}^{A''} - \int_{A'}^{A''} F(x)g'(x) dx.$$

Так как $g'(x)$ — непрерывная функция, то интеграл в правой части равенства существует, а поскольку $g(x)$ не возрастает и стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$, то $g'(x) \leq 0$, $g(x) \geq 0$ при $x \geq a$. Пусть $A'' \geq A'$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_{A'}^{A''} f(x)g(x) dx \right| &\leq |g(A'')F(A'') - g(A')F(A')| + M \int_{A'}^{A''} |g'(x)| dx \leq \\ &\leq |g(A'')F(A'')| + |g(A')F(A')| - \int_{A'}^{A''} Mg'(x) dx \leq M(g(A'') + g(A')) - \\ &\quad - M(g(A'') - g(A')) = 2Mg(A'). \end{aligned}$$

Если же $A' \geq A''$, то из этой же оценки получаем, что

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x)g(x) dx \right| \leq 2Mg(A'').$$

Зададим теперь произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $g(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$, то $\exists A > 0$ такое, что $g(A) < \frac{\varepsilon}{2M}$ и, тем более, $\forall A' > A: g(A') \leq g(A) < \frac{\varepsilon}{2M}$.

Следовательно, $\forall A', A'' > A$ имеет место неравенство $\left| \int_{A'}^{A''} f(x)g(x) dx \right| \leq$

$2Mg(A) < \varepsilon$. По критерию Коши несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ сходится. \square

Пример 5.5. 1. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$. Функция $f(x) = \sin x$ непрерывна и имеет на $[1, +\infty)$ ограниченную первообразную $-\cos x$. Если $\alpha > 0$, то функция $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ убывает при $x \geq 1$, стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$ и имеет непрерывную производную $g'(x) = -\alpha x^{-\alpha-1}$. По теореме 5.3 интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ сходится при $\alpha > 0$ (для $\alpha = 1$ мы это уже доказали в примере 5.2).

При $\alpha \leq 0$ этот интеграл расходится. Для $\alpha = 0$ это уже было доказано по определению в примере 5.1.2. Пусть $\alpha < 0$. Воспользуемся критерием Коши. Рассмотрим произвольное $A > 1$. Возьмем $\varepsilon = 1$. Положим $A' = 2\pi n$, $A'' = 2\pi n + \pi$, причем возьмем $n \in \mathbb{N}$ столь большим, чтобы было $A' > A$ и $A'' > A$.

Тогда $\sin x \geq 0$, $\frac{1}{x^\alpha} \geq (2\pi n)^{-\alpha}$ при $A' \leq x \leq A''$, и поэтому

$$\left| \int_{A'}^{A''} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \right| \geq (2\pi n)^{-\alpha} \int_{2\pi n}^{2\pi n + \pi} \sin x dx = 2 \cdot (2\pi n)^{|\alpha|} > 1 = \varepsilon.$$

Отсюда, согласно критерию Коши, следует, что интеграл расходится при $\alpha < 0$.

2. $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ — интеграл Френеля (он используется в оптике).

Представим его в виде $\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$ и во втором слагаемом положим $x^2 = t$. Тогда $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ и интеграл $\int_1^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt$ сходится, как показано в предыдущем примере.

В последнем примере мы использовали замену переменной в несобственном интеграле. Правомерно ли это? Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.4. Пусть

1. функция $f(x)$ непрерывна на $[a, +\infty)$ и $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится;
2. функция $g(t)$ определена и возрастает на $[\alpha, +\infty)$, ее производная $g'(t)$ непрерывна, а множеством значений функции $g(t)$ является $[a, +\infty)$, в частности, $g(\alpha) = a$.

Тогда несобственный интеграл $\int_\alpha^{+\infty} f(g(t))g'(t) dt$ сходится и имеет место равенство $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_\alpha^{+\infty} f(g(t))g'(t) dt$.

Доказательство. Перейдем к пределу при $A \rightarrow +\infty$ в формуле замены переменной в собственном интеграле: $\int_a^A f(x) dx = \int_\alpha^{g^{-1}(A)} f(g(t))g'(t) dt$. □

Сформулируем также теорему об интегрировании по частям для несобственного интеграла первого рода.

Теорема 5.5. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ определены и непрерывны вместе со своими первыми производными во всех точках промежутка $[a, +\infty)$. Тогда имеет место равенство

$$\int_a^{+\infty} u(x) dv(x) = \lim_{b \rightarrow +\infty} u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^{+\infty} v(x) du(x).$$

При этом предполагается, что из двух интегралов и предела существуют и конечны два, тогда существует конечный третий.

Доказательство. Перейдем к пределу при $b \rightarrow +\infty$ в обычной формуле замены переменной в собственном интеграле:

$$\int_a^b u(x) dv(x) = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x) du(x), \quad b > a.$$

При этом если из трех слагаемых, зависящих от b , два имеют конечные предельные значения, то конечное предельное значение имеет и третье слагаемое. \square

Пример интеграла Френеля показывает, что для сходящегося несобственного интеграла первого рода $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ возможно, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq 0$. Это значит, что для него не справедлив аналог необходимого условия $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

5.3 Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов 1 рода

Определение 5.2. Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$. Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ называется условно сходящимся, если он сходится, а интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ расходится.

Отметим, что если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ абсолютно сходится, то он сходится. Это следует из критерия Коши и неравенства $\left| \int_{A'}^{A''} f(x) dx \right| \leq \left| \int_{A'}^{A''} |f(x)| dx \right|$. Если правая часть неравенства $< \varepsilon$, то и левая $< \varepsilon$.

Пример 5.6. Как было показано выше, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ сходится при $\alpha > 0$ и расходится при $\alpha \leq 0$.

Так как $\left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| \leq \frac{1}{x^\alpha}$, то при $\alpha > 1$ этот интеграл сходится абсолютно. Докажем, что при $0 < \alpha \leq 1$ он сходится условно, т.е. при $0 < \alpha \leq 1$ интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx$ расходится.

Поскольку $|\sin x| \geq \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, то для расходимости интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx$ достаточно (в силу признака сравнения) доказать расходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{2x^\alpha} dx$.

В самом деле, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^\alpha} dx$ сходится при $0 < \alpha \leq 1$ (это легко доказать, используя признак Дирихле), а интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^\alpha} dx$ расходится при $0 < \alpha \leq 1$, поэтому расходится и интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{2x^\alpha} dx$.

5.4 Несобственные интегралы 2 рода

Определение 5.3. Пусть функция $f(x)$ определена и не ограничена на полусегменте $(a, b]$, но ограничена на любом сегменте $[a + \delta, b] \subset (a, b]$. Точку a назовем особой точкой функции $f(x)$. Ясно, что функция $f(x)$ не интегрируема по Риману на $(a, b]$. Предположим, что функция $f(x)$ интегрируема на любом сегменте $[a + \delta, b]$ и рассмотрим

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{a+\delta}^b f(x) dx.$$

Не зависимо от того, существует этот предел или нет, назовем его несобственным интегралом 2 рода от функции $f(x)$ по полусегменту $(a, b]$ и будем обозначать так же, как определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$. Если этот предел существует, то говорят, что несобственный интеграл сходится, а если не существует — расходится.

Геометрический смысл несобственного интеграла второго рода: если $f(x) \geq 0$ на $(a, b]$, то $\int_a^b f(x) dx$ есть площадь бесконечной вверх криволинейной трапеции.

Замечание 5.1. 1. Аналогично определяются несобственный интеграл второго рода: а) по полусегменту $[a, b)$, если b — особая точка; б) по интервалу (a, b) , если a и b — особые точки (и других особых точек на $[a, b]$ у функции $f(x)$ нет):

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_a^b f(x) dx &:= \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_a^{b-\delta} f(x) dx; \\ \text{б) } \int_a^b f(x) dx &:= \lim_{\substack{\delta_1 \rightarrow +0 \\ \delta_2 \rightarrow +0}} \int_{a+\delta_1}^{b-\delta_2} f(x) dx. \end{aligned}$$

2. Если особой точкой функции $f(x)$ является внутренняя точка c сегмента $[a, b]$ и других особых точек нет, то по определению полагают:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &:= \lim_{\delta_1 \rightarrow +0} \int_a^{c-\delta_1} f(x) dx + \lim_{\delta_2 \rightarrow +0} \int_{c+\delta_2}^a f(x) dx = \\ &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Если оба предела существуют (хотя бы один не существует), то говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ сходится (расходится).

3. Если на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет несколько особых точек, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ определяется как сум-

ма несобственных интегралов по полусегментам и сегментам, у которых одна или обе граничные точки — особые.

Пример 5.7. У функции $\frac{1}{x^\alpha}$ при $\alpha > 0$ на отрезке $[0, 1]$ есть единственная особая точка 0 и

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_\delta^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\delta \rightarrow +0} \begin{cases} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_\delta^1, & \alpha \neq 1 \\ \ln x \Big|_\delta^1, & \alpha = 1 \end{cases} = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow +0} \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} (1 - \delta^{1-\alpha}), & \alpha \neq 1 \\ -\ln \delta, & \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ +\infty, & \alpha \geq 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Таким образом, интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$, в отличие от интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, который сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Пример 5.8. Аналогичным образом, интегралы $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ и $\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^\alpha}$ сходятся при $\alpha < 1$ и расходятся при $\alpha \geq 1$.

Для несобственных интегралов второго рода имеют место признаки сходимости, аналогичные признакам сходимости несобственных интегралов первого рода. Сформулируем некоторые из них для несобственных интегралов по полусегменту $(a, b]$, где a — единственная особая точка подынтегральных функций.

Теорема 5.6 (критерий Коши). Для того чтобы несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что $\forall \delta'$ и δ'' , удовлетворяющих условию $0 < \delta', \delta'' < \delta$, выполнялось неравенство: $\left| \int_{a+\delta'}^{a+\delta''} f(x) dx \right| < \varepsilon$.

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из того, что сходимость несобственного интеграла $\int_a^b f(x) dx$ по определению эквивалентна существованию конечного предела $\lim_{\delta \rightarrow +0} \Phi(\delta)$, где $\Phi(\delta) := \int_{a+\delta}^b f(x) dx$ и

критерия Коши существования одностороннего предела функции $\Phi(\delta)$ при $\delta \rightarrow +0$. \square

Теорема 5.7 (признак сравнения). *Если $0 \leq f(x) \leq g(x)$ при $a < x \leq b$, то из сходимости интеграла*

$$\int_a^b g(x) dx \quad (5.4)$$

следует сходимость интеграла

$$\int_a^b f(x) dx, \quad (5.5)$$

а из расходимости интеграла (5.5) следует расходимость интеграла (5.4).

Следствие 5.3. *Если $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$ при $a < x \leq b$ и $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = k > 0$, то интегралы (5.4) и (5.5) сходятся или расходятся одновременно, а если $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, то из сходимости интеграла (5.4) следует сходимость интеграла (5.5).*

Доказательства теоремы 5.7 и следствия 5.3 совершенно аналогичны доказательствам признака сравнения (теоремы 5.2) для несобственных интегралов первого рода и следствия 5.1. Слушателям предлагается провести их самостоятельно.

Пример 5.9.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \quad f(x) := \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Возьмем $g(x) := \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, тогда $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^4}} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(1+x)} = \frac{1}{2}$ и интеграл $\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/2}}$ сходится. Следовательно, интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ также сходится.

Понятия абсолютной и условной сходимости для несобственных интегралов второго рода формулируются так же, как и для несобственных интегралов первого рода. Для доказательства условной сходимости также можно использовать следующий признак Дирихле, аналогичный признаку Дирихле сходимости несобственных интегралов первого рода.

Теорема 5.8 (признак Дирихле). Пусть

1. функция $f(x)$ непрерывна на $(a, b]$ и имеет на этом промежутке ограниченную первообразную $F(x)$;
2. функция $g(x)$ не убывает на $(a, b]$, стремится к нулю при $x \rightarrow a+0$ ($g(x) \downarrow 0$ при $x \rightarrow a+0$) и имеет непрерывную производную $g'(x)$ на $(a, b]$.

Тогда несобственный интеграл $\int_a^b f(x)g(x) dx$ сходится.

Доказательство этой теоремы совершенно аналогично доказательству признака Дирихле (теоремы 5.3) для несобственных интегралов первого рода. Слушателям предлагается провести его самостоятельно.

Если промежуток интегрирования является бесконечным и функция $f(x)$ имеет на этом промежутке конечное число особых точек, то интеграл (несобственный) от функции $f(x)$ по этому промежутку представляется в виде суммы несобственных интегралов первого и второго рода. Если все эти интегралы сходятся, то говорят, что исходный интеграл сходится, и полагают его равным сумме этих несобственных интегралов.

Пример 5.10. 1.

$$I := \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx}_{=I_2 - \text{н. у. 2 рода}} + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx}_{=I_1 - \text{н. у. 1 рода}}.$$

В силу $\frac{\sin x}{x^{3/2}} \sim \frac{1}{x^{1/2}}$ при $x \rightarrow 0$ несобственный интеграл I_2 сходится. Несобственный интеграл I_1 также сходится по признаку сравнения ввиду оценки $\left| \frac{\sin x}{x^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{x^{3/2}}$. Таким образом, несобственный интеграл I сходится.

2.

$$I := \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx = \underbrace{\int_0^1 x^{\alpha} e^{-x} dx}_{=I_2 - \text{н. и. 2 рода}} + \underbrace{\int_1^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx}_{=I_1 - \text{н. и. 1 рода}}$$

Интеграл I_2 сходится при $-\alpha < 1$, т.е. при $\alpha > -1$. Интеграл I_1 сходится при любом α . Таким образом, интеграл I сходится при $\alpha > -1$.

3. Интеграл $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ расходится при любом α .

5.5 Главное значение несобственного интеграла

Рассмотрим:

Пример 5.11. Поскольку следующий предел

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dx = \lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ B \rightarrow -\infty}} \int_B^A x dx = \lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ B \rightarrow -\infty}} \frac{1}{2}(A^2 - B^2)$$

не существует, то интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$ расходится. Однако при $B = -A$

$$\text{имеем: } \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A x dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}(A^2 - A^2) = 0.$$

Этот пример мотивирует следующее определение:

Определение 5.4. Пусть функция $f(x)$ определена на \mathbb{R} и интегрируема на любом конечном сегменте. Если существует предел

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x) dx,$$

то он называется главным значением несобственного интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \tag{5.6}$$

в смысле Коши и обозначается¹

$$\text{v. p. } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Очевидно, что если несобственный интеграл (5.6) сходится, то его значение совпадает с v. p. Но, как показывает рассмотренный выше тривиальный пример 5.11, интеграл (5.6) может расходиться, но иметь конечное главное значение.

Рассмотрим теперь несобственный интеграл второго рода

$$\int_a^b f(x) dx, \tag{5.7}$$

причем внутренняя точка c сегмента $[a, b]$ является единственной особой точкой функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Определение 5.5. Если существует предел

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \left(\int_a^{c-\delta} f(x) dx + \int_{c+\delta}^a f(x) dx \right),$$

то он называется главным значением несобственного интеграла (5.7) в смысле Коши и обозначается

$$\text{v. p. } \int_a^b f(x) dx.$$

Отметим, что при этом несобственный интеграл (5.7) может быть расходящимся, т.е. может не существовать конечный предел

$$\lim_{\substack{\delta_1 \rightarrow +0 \\ \delta_2 \rightarrow +0}} \left(\int_a^{c-\delta_1} f(x) dx + \int_{c+\delta_2}^b f(x) dx \right).$$

Пример 5.12. Поскольку

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{x} = \lim_{\substack{\delta_1 \rightarrow +0 \\ \delta_2 \rightarrow +0}} \left(\int_{-1}^{-\delta_1} \frac{dx}{x} + \int_{\delta_2}^2 \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\substack{\delta_1 \rightarrow +0 \\ \delta_2 \rightarrow +0}} \left(\ln \left(\frac{\delta_1}{\delta_2} \right) + \ln 2 \right)$$

¹Это обозначение происходит от французского словосочетания «valeur principale», означающего «главное значение».

и последний предел не существует, то интеграл $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$ расходится. Однако

$$\text{v. p.} \int_{-1}^2 \frac{dx}{x} = \lim_{\delta \rightarrow +0} \left(\int_{-1}^{-\delta} \frac{dx}{x} + \int_{\delta}^2 \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \left(\ln \frac{\delta}{\delta} + \ln 2 \right) = \ln 2.$$

5.6 Кратные несобственные интегралы

Наряду с уже рассмотренными несобственными интегралами по подмножествам вещественной оси, можно определить и кратные несобственные интегралы по областям m -мерного евклидова пространства, а также несобственные криволинейные и поверхностные интегралы. Мы подробно рассмотрим только случай двойных несобственных интегралов; m -кратные интегралы рассматриваются аналогично.

5.6.1 Интеграл от неограниченной функции по ограниченной области

Пусть в ограниченной квадрируемой открытой области Ω на евклидовой плоскости с декартовыми координатами x, y задана функция $f(M) = f(x, y)$, неограниченная в окрестности точки $M_0(x_0, y_0) \in \bar{\Omega}$, и пусть для любой области ω_δ диаметра δ , содержащей внутри себя точку M_0 , существует интеграл по Риману

$$\iint_{\Omega \setminus \omega_\delta} f(M) d\sigma.$$

В такой ситуации точка M_0 называется *особой* для функции $f(M)$ в области Ω . При $\delta \rightarrow 0$ область ω_δ стягивается к точке M_0 .

Определение 5.6. Несобственным интегралом от функции $f(M) = f(x, y)$ по области Ω называется предел (независимо от того, существует он или нет)

$$\iint_{\Omega} f(M) d\sigma := \lim_{\delta \rightarrow 0} \iint_{\Omega \setminus \omega_\delta} f(M) d\sigma. \quad (5.8)$$

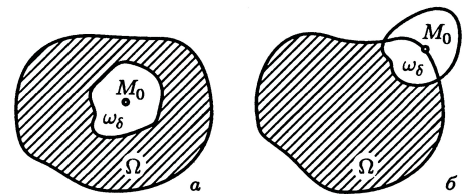


Рис. 5.1: исчерпание области Ω , при наличии особой точки функции f : а) внутри области, б) на границе области.

Если этот предел существует и не зависит от выбора областей ω_δ , то несобственный интеграл

$$\iint_{\Omega} f(M) d\sigma$$

называется сходящимся; в противном случае он называется расходящимся.

Замечание 5.2. Ввиду эквивалентности определений предела функции по Коши и по Гейне, в данном определении двойного несобственного интеграла семейство областей ω_δ , зависящих от непрерывного параметра, можно заменить на произвольную последовательность областей ω_{δ_n} , $\delta_n \rightarrow 0$.

Замечание 5.3. Области $\Omega \setminus \omega_\delta$ и ω_δ не предполагаются связными.

Замечание 5.4. Если точка M_0 лежит внутри области Ω , то исследование на сходимость интеграла (5.8) можно заменить исследованием на сходимость интеграла

$$\iint_{\Omega'} f(M) d\sigma$$

по любой подобласти Ω' области Ω , содержащей внутри себя точку M_0 . Если же точка M_0 лежит на границе области Ω , то в качестве области Ω' можно взять $\Omega \cap \Omega^*$, где Ω^* — произвольная открытая область, содержащая точку M_0 .

Замечание 5.5. Случай, когда функция $f(M)$ имеет произвольное конечное число особых точек в области Ω или на ее границе, рассматривается разбиением области Ω на подобласти Ω_i такие, что каждая $\bar{\Omega}_i$ содержит единственную особую точку функции $f(M)$.

Определение 5.7. Несобственным интегралом от функции $f(M) = f(x, y)$ по области Ω в смысле главного значения называется предел

$$\text{v. p.} \iint_{\Omega} f(M) d\sigma := \lim_{\delta \rightarrow 0} \iint_{\Omega \setminus K_\delta} f(M) d\sigma, \quad (5.9)$$

где K_δ — круг радиуса δ с центром в точке M_0 .

5.6.2 Интегралы от неотрицательных функций по ограниченным областям

Рассмотрим в первую очередь интегралы от знакопостоянных функций, поскольку их исследование проще, и сами они могут быть использованы при исследовании интегралов от знакопеременных функций. Рассмотрим интегралы от неотрицательных функций. Рассмотрение интегралов от неположительных функций совершенно аналогично.

Теорема 5.9 (критерий сходимости несобственного интеграла от неотрицательной неограниченной функции с одной особой точкой по ограниченной области евклидовой плоскости). Пусть функция $f(M)$, $M \in \Omega$ неотрицательна и пусть последовательность δ'_n монотонно убывает к нулю. Тогда для сходимости интеграла (5.8) необходимо и достаточно, чтобы числовая последовательность

$$I_n := \iint_{\Omega \setminus K_{\delta'_n}} f(M) d\sigma, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.10)$$

была ограниченной.

Доказательство. Необходимость условия теоремы сразу вытекает из определения сходимости интеграла (5.8), поскольку если интеграл (5.8) сходится, то сходится и последовательность (5.10), а значит, она ограничена.

Достаточность. Пусть последовательность (5.10) ограничена. Ввиду монотонного убывания последовательности δ'_n к нулю, последовательность областей $\Omega \setminus K_{\delta'_n}$ монотонно расширяется, т.е. $\Omega \setminus K_{\delta'_n} \subset \Omega \setminus K_{\delta'_{n+1}}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Поэтому в силу неотрицательности функции $f(M)$ последовательность (5.10) является неубывающей, а раз она ограничена, то сходится к некоторому пределу J . Нам остается доказать, что при любом выборе последовательности ω_{δ_n} , $\delta_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ стягивающихся к точке M_0 областей соответствующая последовательность интегралов

$$J_n := \iint_{\Omega \setminus \omega_{\delta_n}} f(M) d\sigma, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.11)$$

сойдется к тому же пределу J . Заметим, что при любом достаточно большом n для области ω_{δ_n} можно найти такие круги $K_{\delta'_{p(n)}}$ и $K_{\delta'_{q(n)}}$, чтобы имело место включение

$$K_{\delta'_{q(n)}} \subset \omega_{\delta_n} \subset K_{\delta'_{p(n)}}$$

и чтобы радиусы $\delta'_{p(n)}$ и $\delta'_{q(n)}$ этих кругов стремились к нулю при $n \rightarrow \infty$. Тогда имеет место включение

$$\Omega \setminus K_{\delta'_{p(n)}} \subset \Omega \setminus \omega_{\delta_n} \subset \Omega \setminus K_{\delta'_{q(n)}},$$

из которого, в силу неотрицательности функции $f(M)$, вытекает неравенство

$$\iint_{\Omega \setminus K_{\delta'_{p(n)}}} f(M) d\sigma \leq \iint_{\Omega \setminus \omega_{\delta_n}} f(M) d\sigma \leq \iint_{\Omega \setminus K_{\delta'_{q(n)}}} f(M) d\sigma.$$

Крайние интегралы в этом двойном неравенстве стремятся к J при $n \rightarrow \infty$. Значит и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega \setminus \omega_{\delta_n}} f(M) d\sigma = J.$$

□

В соответствии со следующей теоремой последовательность кругов в условии теоремы 5.9 можно заменить на произвольную последовательность ω_{δ_n} , $\delta_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ стягивающихся к точке M_0 областей.

Теорема 5.10. Пусть функция $f(M)$, $M \in \Omega$ неотрицательна и пусть ω_{δ_n} , $\delta_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ — произвольная последовательность стягивающихся к точке M_0 областей. Тогда для сходимости интеграла (5.8) необходимо и достаточно, чтобы числовая последовательность

$$L_n := \iint_{\Omega \setminus \omega_{\delta_n}} f(M) d\sigma, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.12)$$

была ограниченной.

Доказательство. **Необходимость** условия теоремы устанавливается так же, как и при доказательстве предыдущей теоремы.

Для доказательства **достаточности** возьмем какую-нибудь монотонно стремящуюся к нулю последовательность δ'_n и докажем, что последовательность (5.10) ограничена. Тогда применение теоремы 5.9 завершит доказательство.

Ввиду $\delta_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется такое m , что будет иметь место включение

$$\omega_{\delta_m} \subset K_{\delta'_n},$$

откуда

$$\Omega \setminus K_{\delta'_n} \subset \Omega \setminus \omega_{\delta_m},$$

и, ввиду неотрицательности функции $f(M)$, получим

$$\iint_{\Omega \setminus K_{\delta'_n}} f(M) d\sigma \leq \iint_{\Omega \setminus \omega_{\delta_m}} f(M) d\sigma.$$

В силу ограниченности последовательности (5.12) отсюда и следует ограниченность последовательности (5.10). \square

Пример 5.13. Докажем, что интеграл

$$\iint_{\Omega} \frac{C}{r^\alpha} dx dy, \quad \text{где } C = \text{const} > 0, \alpha = \text{const}, r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (5.13)$$

по ограниченной области Ω , содержащей внутри себя точку $M_0(x_0, y_0)$, сходится при $\alpha < 2$ и расходится при $\alpha \geq 2$.

В соответствии с замечанием 5.4 интеграл (5.13) по области Ω можно заменить интегралом по какой-либо ее подобласти Ω' , содержащей внутри себя точку M_0 . В качестве такой подобласти возьмем круг K_R с центром в точке M_0 и достаточно малым радиусом R и исследуем интеграл

$$\iint_{K_R} \frac{C}{r^\alpha} dx dy. \quad (5.14)$$

Для этого возьмем какую-либо монотонно стягивающуюся последовательность кругов

$$K_R \supset K_{\delta_1} \supset K_{\delta_2} \supset \dots \ni M_0, \quad \text{где } \delta_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow +\infty,$$

и рассмотрим интеграл

$$\iint_{K_R \setminus K_{\delta_n}} \frac{C}{r^\alpha} dx dy.$$

Переходя к полярным координатам, получаем

$$\iint_{K_R \setminus K_{\delta_n}} \frac{C}{r^\alpha} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\delta_n}^R \frac{C}{r^\alpha} r dr = 2\pi C \begin{cases} \frac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha} \Big|_{r=\delta_n}^{r=R} & \text{при } \alpha \neq 2, \\ \ln r \Big|_{r=\delta_n}^{r=R} & \text{при } \alpha = 2. \end{cases} \quad (5.15)$$

При $\alpha < 2$ правая часть (5.15) стремится к конечному пределу при $n \rightarrow \infty$, а при $\alpha \geq 2$ она неограничена, что и доказывает требуемое.

Аналогично в n -мерном евклидовом пространстве интеграл

$$\iint_{\Omega} \frac{C}{r^{\alpha}} dx_1 \cdots dx_n, \text{ где } C = \text{const} > 0, \alpha = \text{const},$$

$$r = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2},$$

по ограниченной области Ω , содержащей внутри себя точку $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$, сходится при $\alpha < n$ и расходится при $\alpha \geq n$. Таким образом, значение степени, равное значению размерности пространства, является критическим для сходимости интеграла от обратной степени расстояния до фиксированной точки.

5.6.3 Абсолютная сходимость

Определение 5.8. Интеграл $\iint_{\Omega} f(M) d\sigma$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\iint_{\Omega} |f(M)| d\sigma$.

Теорема 5.11. Если интеграл $\iint_{\Omega} f(M) d\sigma$ сходится абсолютно, то он сходится.

*Доказательство.*² Заметим, прежде всего, что если интегралы $\iint_{\Omega} f_1(M) d\sigma$ и $\iint_{\Omega} f_2(M) d\sigma$ сходятся, то сходится и интеграл

$$\iint_{\Omega} (\alpha f_1(M) + \beta f_2(M)) d\sigma = \alpha \iint_{\Omega} f_1(M) d\sigma + \beta \iint_{\Omega} f_2(M) d\sigma.$$

Представим подынтегральную функцию $f(M)$ в виде разности двух неотрицательных функций

$$f(M) = f_1(M) - f_2(M), \quad (5.16)$$

где $f_1(M) = |f(M)|$, $f_2(M) = |f(M)| - f(M)$.

Интеграл $\iint_{\Omega} f_1(M) d\sigma = \iint_{\Omega} |f(M)| d\sigma$ сходится по условию. Поскольку

$$f_2(M) = |f(M)| - f(M) \leq 2|f(M)|,$$

²Доказательство этой теоремы не столь просто, как для однократных несобственных интегралов, ввиду отсутствия для сходимости двойных несобственных интегралов критерия Коши.

а интеграл $\iint_{\Omega} 2|f(M)| d\sigma = 2 \iint_{\Omega} |f(M)| d\sigma$ сходится по условию доказываемой теоремы, то, в силу теоремы 5.10, какова бы не была стягивающаяся к точке M_0 последовательность областей ω_{δ_n} , соответствующая ей последовательность интегралов $\iint_{\Omega \setminus \omega_{\delta_n}} 2|f(M)| d\sigma$ ограничена. Поэтому, в силу очевидного неравенства

$$\iint_{\Omega \setminus \omega_{\delta_n}} f_2(M) d\sigma \leq \iint_{\Omega \setminus \omega_{\delta_n}} 2|f(M)| d\sigma$$

последовательность $\iint_{\Omega \setminus \omega_{\delta_n}} f_2(M) d\sigma$ также ограничена. Применяя теорему 5.10 в другую сторону, получаем сходимость интеграла $\iint_{\Omega \setminus \omega_{\delta_n}} f_2(M) d\sigma$. В силу равенства (5.16) будет сходиться и интеграл $\iint_{\Omega} f(M) d\sigma$, причем будет выполняться равенство

$$\iint_{\Omega} f(M) d\sigma = \iint_{\Omega} f_1(M) d\sigma - \iint_{\Omega} f_2(M) d\sigma.$$

□

5.6.4 Признаки абсолютной сходимости

Теорема 5.12 (общий признак сравнения). Пусть всюду в области Ω выполняется неравенство

$$0 \leq |f(M)| \leq g(M), \quad (5.17)$$

причем функции $f(M)$ и $g(M)$ имеют единственную особую точку M_0 , принадлежащую области Ω или ее границе. Тогда

1. если $\iint_{\Omega} g(M) d\sigma$ сходится, то и $\iint_{\Omega} f(M) d\sigma$ сходится абсолютно;
2. если $\iint_{\Omega} f(M) d\sigma$ расходится, то и $\iint_{\Omega} g(M) d\sigma$ расходится.

Доказательство. Возьмем какую-нибудь стягивающуюся к точке M_0 при $\delta_n \rightarrow 0$ последовательность областей ω_{δ_n} . В силу неравенства (5.17) будем иметь

$$\iint_{\Omega \setminus \omega_{\delta_n}} |f(M)| d\sigma \leq \iint_{\Omega \setminus \omega_{\delta_n}} g(M) d\sigma. \quad (5.18)$$

1. Если интеграл $\iint_{\Omega} g(M) d\sigma$ сходится, то остается ограниченной последовательность интегралов $\iint_{\Omega \setminus \omega_{\delta_n}} g(M) d\sigma$, но тогда, в силу неравенства (5.18), последовательность интегралов $\iint_{\Omega \setminus \omega_{\delta_n}} |f(M)| d\sigma$ также ограничена, следовательно по теореме 5.10 интеграл $\iint_{\Omega} |f(M)| d\sigma$ сходится.
2. Если интеграл $\iint_{\Omega} f(M) d\sigma$ расходится, то расходится также и интеграл $\iint_{\Omega} |f(M)| d\sigma$; действительно, если бы последний интеграл сошелся, то сошелся бы по теореме 5.11 также и интеграл $\iint_{\Omega} f(M) d\sigma$. Из расходимости интеграла $\iint_{\Omega} |f(M)| d\sigma$ вытекает, в силу теоремы 5.10, что при любом выборе стягивающейся к точке M_0 последовательности областей ω_{δ_n} последовательность интегралов $\iint_{\Omega \setminus \omega_{\delta_n}} |f(M)| d\sigma$ неограничена; но тогда, в силу неравенства (5.18), неограничена также последовательность интегралов $\iint_{\Omega \setminus \omega_{\delta_n}} g(M) d\sigma$, а следовательно, интеграл $\iint_{\Omega} g(M) d\sigma$ расходится.

□

Из примера 5.13, теоремы 5.11 и теоремы 5.12 вытекает следующий частный признак сравнения кратных несобственных интегралов.

Теорема 5.13. *Если для функции, заданной в области Ω и имеющей единственную особую точку $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащую области Ω или ее границе, выполняется неравенство*

$$|f(M)| = |f(x, y)| < \frac{C}{r^\alpha}, \quad \text{где } C = \text{const} > 0, \quad (5.19)$$

$$\alpha = \text{const} < 2, \quad r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

то интеграл $\iint_{\Omega} f(M) d\sigma$ сходится и притом абсолютно.

Замечание 5.6. *В случае несобственного интеграла по n -мерной области Ω*

$$\int_{\Omega} \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

от функции $f(M) = f(x_1, \dots, x_n)$, имеющей единственную особую точку $M_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ в области Ω или на ее границе, в теореме 5.13 следует положить

$$r = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2} \quad \text{и} \quad \alpha < n.$$

Пример 5.14. Напряженность электрического поля, создаваемого электрическим зарядом плотности ρ , распределенным в области Ω , дается в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ интегралом

$$\mathbf{E}(M_0) = \iiint_{\Omega} \rho(M) \frac{\mathbf{r}_{MM_0}}{r_{MM_0}^3} d\sigma, \quad (5.20)$$

где \mathbf{r}_{MM_0} — вектор, начинающийся в точке M и заканчивающийся в точке M_0 . Если функция $\rho(M)$ непрерывна и ограничена в области $\Omega \subset \mathbb{E}^3$ ($|\rho(M)| \leq \rho_0 = \text{const}$), то подынтегральные функции для компонент вектора $\mathbf{E}(M_0)$ допускают оценку

$$\left| \rho(M) \frac{x_0 - x}{r_{MM_0}^3} \right| \leq \frac{\rho_0}{r_{MM_0}^2},$$

из которой следует абсолютная сходимость интеграла (5.20) в случае $M_0 \in \Omega$.

5.6.5 Эквивалентность сходимости и абсолютной сходимости кратных несобственных интегралов

Теорема 5.14. Пусть в области $\Omega \subset \mathbb{E}^2$ или на ее границе содержится единственная особая точка M_0 функции $f(M)$. Если интеграл $\iint_{\Omega} f(M) dx dy$ сходится, то интеграл $\iint_{\Omega} |f(M)| dx dy$ также сходится.

*Доказательство.*³ Пусть особая точка M_0 функции $f(M)$ лежит в области Ω . Пусть интеграл $\iint_{\Omega} f(M) dx dy$ сходится; предположим, что интеграл $\iint_{\Omega} |f(M)| dx dy$ расходится. Тогда, взяв какую угодно стягивающуюся последовательность концентрических кругов

$$\Omega \supset K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_n \supset \dots \ni M_0 \quad (5.21)$$

³Это доказательство — самое сложное в данной главе.

с центром в точке M_0 , в силу неотрицательности функции $|f(M)|$ получим

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{\Omega \setminus K_n} |f(M)| \, dx dy = +\infty. \quad (5.22)$$

Построим последовательность K_n специальным образом, выбирая круг K_{n+1} по кругу K_n достаточно малым так, чтобы выполнялись неравенства

$$\iint_{K_n \setminus K_{n+1}} |f(M)| \, dx dy > 2 \iint_{\Omega \setminus K_n} |f(M)| \, dx dy + 2n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.23)$$

Идея доказательства теоремы состоит в том, чтобы с помощью последнего неравенства получить неравенство

$$\iint_{\Omega \setminus \omega_n} f(M) \, d\sigma > n$$

для некоторой последовательности ω_n , стягивающихся к точке M_0 областей, откуда будет следовать расходимость интеграла $\iint_{\Omega} f(M) \, d\sigma$, и получить противоречие.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \iint_{K_n \setminus K_{n+1}} f(M) \, dx dy.$$

Последовательностью его частичных сумм является последовательность интегралов

$$I_n := \iint_{K_1 \setminus K_{n+1}} f(M) \, dx dy, \quad (5.24)$$

сходящаяся при $n \rightarrow +\infty$ к интегралу

$$I := \iint_{K_1} f(M) \, dx dy. \quad (5.25)$$

Очевидно, что имеет место хотя бы один из следующих двух случаев: 1) бесконечное число членов последовательности (5.24) не превосходит предельного значения (5.25); 2) бесконечное число членов последовательности (5.24) не меньше предельного значения (5.25). Заменяя, при необходимости, функцию $f(M)$ на $-f(M)$, мы можем считать, что имеет

место первый случай. При этом все рассуждения выше сохранят свою силу. Теперь мы можем выделить монотонно не убывающую подпоследовательность I_{n_k} последовательности I_n . Тогда имеют место неравенства

$$I_{n_{k+1}} - I_{n_k} = \iint_{K_{n_k} \setminus K_{n_{k+1}}} f(M) \, dx dy \geq 0. \quad (5.26)$$

Заменяя теперь последовательность кругов (5.21) ее подпоследовательностью K_{n_k} и возвращаясь к прежним одноиндексным обозначениям, мы можем считать, что справедливы все неравенства

$$I_{n+1} - I_n = \iint_{K_n \setminus K_{n+1}} f(M) \, dx dy \geq 0. \quad (5.27)$$

Введем функции

$$f_+(M) = \frac{1}{2} (|f(M)| + f(M)), \quad f_-(M) = \frac{1}{2} (|f(M)| - f(M)).$$

Очевидно, что $f_+(M) \geq 0$, $f_-(M) \geq 0$ и

$$f(M) = f_+(M) - f_-(M), \quad |f(M)| = f_+(M) + f_-(M). \quad (5.28)$$

Неравенство (5.27) можно теперь переписать в виде

$$\iint_{K_n \setminus K_{n+1}} f_+(M) \, dx dy \geq \iint_{K_n \setminus K_{n+1}} f_-(M) \, dx dy. \quad (5.29)$$

При этом неравенство (5.23) сохранит свою силу, т.к. $n_k \geq k$. Ввиду (5.28) и (5.29) из (5.23) получаем

$$\begin{aligned} 2 \iint_{K_n \setminus K_{n+1}} f_+(M) \, dx dy &\stackrel{(5.29)}{\geq} \iint_{K_n \setminus K_{n+1}} (f_+(M) + f_-(M)) \, dx dy \stackrel{(5.28)}{=} \\ &\stackrel{(5.28)}{=} \iint_{K_n \setminus K_{n+1}} |f(M)| \, dx dy \stackrel{(5.23)}{>} 2 \iint_{\Omega \setminus K_n} |f(M)| \, dx dy + 2n, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

откуда

$$\iint_{K_n \setminus K_{n+1}} f_+(M) \, dx dy > \iint_{\Omega \setminus K_n} |f(M)| \, dx dy + n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.30)$$

Разобьем теперь кольцо $K_n \setminus K_{n+1}$ на малые квадратируемые ячейки и обозначим через $m_i^{f_+}$ точную нижнюю грань функции f_+ на i -ой ячейке. Тогда, если ячейки достаточно малы, то из неравенства (5.30) мы получим неравенство для нижней интегральной суммы интеграла

$$\iint_{K_n \setminus K_{n+1}} f_+(M) \, dx dy$$

$$\sum_i m_i^{f_+} \Delta_i > \iint_{\Omega \setminus K_n} |f(M)| \, dx dy + n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.31)$$

На всех этих ячейках $m_i^{f_+} \geq 0$, поскольку $f_+ \geq 0$ всюду. Не нарушая неравенства (5.31), отбросим из суммы $\sum_i m_i^{f_+} \Delta_i$ все слагаемые, для которых $m_i^{f_+} = 0$. Если обозначить через G_n область, составленную из ячеек, соответствующих оставшимся слагаемым, то, очевидно, на этой области $f(M) = f_+(M)$ и

$$\iint_{G_n} f(M) \, dx dy = \iint_{G_n} f_+(M) \, dx dy \geq \sum_{\Delta_i \subset G_n} m_i^{f_+} \Delta_i > \iint_{\Omega \setminus K_n} |f(M)| \, dx dy + n,$$

$$n = 1, 2, \dots \quad (5.32)$$

Складывая теперь неравенство (5.32) с очевидным неравенством

$$\iint_{\Omega \setminus K_n} f(M) \, dx dy \geq - \iint_{\Omega \setminus K_n} |f(M)| \, dx dy, \quad n = 1, 2, \dots,$$

получаем ввиду $G_n \subset K_n \setminus K_{n+1}$ неравенство

$$\iint_{H_n} f(M) \, dx dy > n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.33)$$

где $H_n := (\Omega \setminus K_n) \cup G_n$. Тогда $\Omega \setminus K_n \subset H_n \subset \Omega \setminus K_{n+1} \Rightarrow K_{n+1} \subset \Omega \setminus H_n \subset K_n$, и если обозначить $\omega_n := \Omega \setminus H_n$, то $H_n = \Omega \setminus \omega_n$ и $\text{diam } \omega_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Следовательно, из (5.33) вытекает расходимость интеграла $\iint_{\Omega} f(M) \, dx dy$, что противоречит условию теоремы.

Итак, предположение о расходимости интеграла $\iint_{\Omega} |f(M)| \, dx dy$ привело к противоречию, следовательно, он сходится.

Если же особая точка M_0 функции $f(x)$ лежит на границе области Ω , то проведенное доказательство сохранит свою силу, если вместо кругов K_n взять их пересечения с областью Ω . \square

Замечание 5.7. Если в определении n -кратного несобственного интеграла при $n \geq 2$ области $\Omega \setminus \omega_{\delta_n}$ считать связными, то теорема 5.14 об эквивалентности сходимости и абсолютной сходимости кратного несобственного интеграла сохранит свою силу. Действительно, область H_n в доказательстве теоремы 5.14 можно сделать связной, сохранив неравенство (5.33); для этого достаточно соединить связные куски, составляющие H_n , квадратируемыми полосками с достаточно малой суммарной площадью.

Напротив, если в случае однократного несобственного интеграла $\int_a^b f(x) dx$ вместо последовательности интервалов $[a, b - \lambda]$, входящих в определение этого интеграла, брать исчерпывающие последовательности произвольных “разрывных” областей, то класс функций, интегрируемых в несобственном смысле, сузится; интегрируемыми в несобственном смысле функциями окажутся лишь абсолютно интегрируемые в несобственном смысле функции. Абсолютно интегрируемые в несобственном смысле функции в обоих определениях, очевидно, одинаковы.

5.6.6 Несобственные интегралы с неограниченной областью определения

Интегралы, подынтегральные функции которых ограничены в любой ограниченной подобласти, исследуются совершенно аналогично. Сформулируем для примера определение несобственного интеграла и достаточный признак сходимости.

Определение 5.9. Пусть дана неограниченная область $\Omega \subset \mathbb{E}^2$. Расширяющаяся последовательность ее ограниченных подобластей

$$\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n, \dots \subset \Omega \quad (5.34)$$

называется исчерпывающей, если, каково бы ни было $R > 0$, все точки области Ω , принадлежащие кругу радиуса R с центром в начале координат, будут принадлежать всем Ω_n , начиная с достаточно большого n .

Определение 5.10. Пусть в неограниченной области Ω задана функция $f(M)$, интегрируемая в обычном смысле по любой ограниченной

подобласти. Если при любом выборе исчерпывающей последовательности (5.34) соответствующая последовательность чисел

$$\iint_{\Omega_1} f(M) d\sigma, \iint_{\Omega_2} f(M) d\sigma, \dots, \iint_{\Omega_n} f(M) d\sigma, \dots$$

сходится к одному и тому же конечному пределу J , то интеграл $\iint_{\Omega} f(M) d\sigma$ называется сходящимся; в противном случае он называется расходящимся.

Теорема 5.15 (достаточный признак сходимости). Если функция $f(M) = f(x, y)$ удовлетворяет требованиям, сформулированным в предыдущем определении, и неравенству

$$|f(M)| = |f(x, y)| \leq \frac{C}{r^\alpha}, \text{ где } C = \text{const} > 0, \\ \alpha = \text{const} > 2, r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

причем $M_0(x_0, y_0)$ — какая-нибудь фиксированная точка области Ω , то интеграл $\iint_{\Omega} f(M) d\sigma$ сходится.

Заметим, что аналоги всех теорем, доказанных для несобственных интегралов по ограниченным областям, справедливы и для несобственных интегралов по неограниченным областям.

5.6.7 Методы вычисления несобственных кратных интегралов

Сведение сходящегося несобственного двойного интеграла к повторному осуществляется так же, как и в случае собственного двойного интеграла:

1. для неотрицательной (неположительной) подынтегральной функции — при условии сходимости повторного интеграла от этой функции;
2. для знакопеременной подынтегральной функции — при условии сходимости повторного интеграла от ее модуля.

Замена переменных в сходящемся несобственном n -кратном интеграле осуществляется по тем же правилам, что и в случае собственного n -кратного интеграла.

Мы не будем доказывать эти общие утверждения. Рассмотрим лишь один из способов вычисления важного интеграла Пуассона $J := \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ при помощи двойного несобственного интеграла.

Пусть

$$I := \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

— сходящийся ввиду экспоненциального убывания подынтегральной функции двойной несобственный интеграл. Рассмотрим исчерпание плоскости \mathbb{R}^2 областями $[-R, R] \times [-R, R]$. Тогда

$$\begin{aligned} (2J)^2 &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2 = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \int_{-R}^R e^{-y^2} dy \right)^2 = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{\substack{-R \leq x \leq R \\ -R \leq y \leq R}} e^{-x^2-y^2} dx dy = I. \end{aligned}$$

С другой стороны, плоскость \mathbb{R}^2 можно исчерпывать кругами радиуса $R \rightarrow +\infty$. Поэтому, переходя к полярным координатам и повторному интегралу, получаем

$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R e^{-r^2} r dr = \pi \int_0^{+\infty} e^{-\xi} d\xi = \pi.$$

Следовательно, $J = \sqrt{\pi}/2$.

Глава 6

Интегралы, зависящие от параметров

Если подынтегральная функция в собственном или несобственном интеграле зависит от одного или нескольких параметров, то такой интеграл называется *интегралом, зависящим от параметров*.

6.1 Собственные интегралы, зависящие от параметра

Пусть функция $f(x, y)$ определена в прямоугольнике

$$\Pi := \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

и интегрируема по x на $[a, b]$ при каждом $y \in [c, d]$. Тогда интеграл

$$\mathcal{F}(y) := \int_a^b f(x, y) dx$$

зависит от параметра y , пробегающего отрезок $[c, d]$. Займемся исследованием его свойств.

Теорема 6.1 (о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра). *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике Π , то функция $\mathcal{F}(y)$ непрерывна на отрезке $[c, d]$.*

Доказательство. По теореме Кантора функция $f(x, y)$ равномерно непрерывна в прямоугольнике Π . Докажем, что функция $\mathcal{F}(y)$ равномерно непрерывна на $[c, d]$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in [a, b]$ и $\forall y', y'' \in [c, d]$, удовлетворяющих условию $|y' - y''| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x, y') - f(x, y'')| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(y') - \mathcal{F}(y'')| &= \left| \int_a^b f(x, y') dx - \int_a^b f(x, y'') dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f(x, y') - f(x, y'')| dx < \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b dx = \varepsilon. \end{aligned}$$

Это означает, что функция $\mathcal{F}(y)$ равномерно непрерывна на отрезке $[c, d]$, что эквивалентно ее непрерывности на $[c, d]$. \square

Следствие 6.1. Пусть выполнены условия теоремы 6.1 и пусть $\forall y \in [c, d]: a \leq x_1(y) \leq x_2(y) \leq b$, где $x_1(y), x_2(y)$ — непрерывные функции. Тогда $g(y) := \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$ — непрерывная функция на $[c, d]$.

Доказательство. Докажем непрерывность функции $g(y)$ в произвольной точке $y_0 \in [c, d]$. Представим $g(y)$ в виде:

$$\begin{aligned} g(y) &= \int_{x_1(y)}^{x_1(y_0)} f(x, y) dx + \int_{x_1(y_0)}^{x_2(y_0)} f(x, y) dx + \int_{x_2(y_0)}^{x_2(y)} f(x, y) dx =: \\ &=: g_1(y) + g_2(y) + g_3(y). \end{aligned}$$

Функция $g_2(y)$ непрерывна по теореме 6.1 как интеграл с постоянными пределами интегрирования, а для функции $g_1(y)$ справедлива оценка

$$|g_1(y)| \leq \left| \int_{x_1(y)}^{x_1(y_0)} |f(x, y)| dx \right| \leq M |x_1(y_0) - x_1(y)| \rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow y_0,$$

где $|f(x, y)| \leq M$, $(x, y) \in \Pi$. Аналогично, $g_3(y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow y_0$. Таким образом, $g(y) \rightarrow g(y_0)$ при $y \rightarrow y_0$. \square

Теорема 6.2 (об интегрировании по параметру собственного интеграла). Если функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике Π , то

$$\int_c^d \mathcal{F}(y) dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx. \quad (6.1)$$

Доказательство. Интегрируемость функции $\mathcal{F}(y)$ следует из ее непрерывности, которая имеет место по теореме 6.1. Поскольку функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике Π , то существуют двойной интеграл и внутренние интегралы в повторных в (6.1). Тогда по теореме, доказанной во втором семестре, повторные интегралы равны двойному, а значит, и между собой. \square

Теорема 6.3 (о дифференцировании по параметру собственного интеграла). Пусть функции $f(x, y)$ и $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ непрерывны в прямоугольнике Π . Тогда функция $\mathcal{F}(y)$ имеет на $[c, d]$ непрерывную производную $\mathcal{F}'(y)$, причем¹

$$\mathcal{F}'(y) = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx.$$

Доказательство. Введем обозначения: $G(y) := \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx$. Нужно доказать, что $\exists \mathcal{F}'(y) = G(y)$. В силу теоремы 6.1 $G(y)$ — непрерывная и, следовательно, интегрируемая функция на $[c, d]$. В силу теоремы 6.2 и формулы Ньютона–Лейбница имеем:

$$\begin{aligned} \int_c^y G(t) dt &= \int_c^y \left[\int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx \right] dt = \int_a^b \left[\int_c^y \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dt \right] dx = \\ &= \int_a^b [f(x, y) - f(x, c)] dx = \mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(c). \end{aligned}$$

Следовательно: $\mathcal{F}(y) = \int_c^y G(t) dt + \mathcal{F}(c)$. Поскольку $G(t)$ — непрерывная функция, то

$$\exists \mathcal{F}'(y) = \frac{d}{dy} \left[\int_c^y G(t) dt \right] = G(y).$$

\square

Следствие 6.2. Пусть выполнены условия теоремы 6.3 и пусть $a \leq x_1(y) \leq x_2(y) \leq b$, где $x_1(y)$, $x_2(y)$ — дифференцируемые функции. Тогда

¹В таком случае говорят, что интеграл, зависящий от параметра, можно дифференцировать по параметру под знаком интеграла.

$g(y) := \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$ — дифференцируемая функция на $[c, d]$, причем

$$g'(y) := \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx + f(x_2(y), y)x_2'(y) - f(x_1(y), y)x_1'(y).$$

Доказательство. Введем обозначение $\Phi(u, v, y) := \int_u^v f(x, y) dx$. Найдем частные производные функции $\Phi(u, v, y)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = f(v, y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u} = -f(u, y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int_u^v \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx.$$

Заметим, что эти частные производные — непрерывные функции от u, v, y , поэтому $\Phi(u, v, y)$ — дифференцируемая функция своих аргументов. Если положить $u = x_1(y), v = x_2(y)$, то мы получим сложную функцию аргумента y : $\Phi(x_1(y), x_2(y), y) = g(y)$, которая дифференцируема по теореме о дифференцируемости сложной функции, причем

$$\begin{aligned} g'(y) &= \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u} x_1'(y) + \frac{\partial \Phi}{\partial v} x_2'(y) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]_{\substack{u=x_1(y) \\ v=x_2(y)}} = \\ &= -f(x_1(y), y)x_1'(y) + f(x_2(y), y)x_2'(y) + \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx. \end{aligned}$$

□

6.2 Несобственные интегралы 1 рода, зависящие от параметра. Признаки равномерной сходимости

Пусть функция $f(x, y)$ определена в полуполосе²

$$\Pi := \{(x, y) \mid x \geq a, c \leq y \leq d\}$$

и пусть несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x, y) dx$ сходится $\forall y \in [c, d]$. Тогда

при $y \in [c, d]$ определена функция $\mathcal{F}(y) := \int_a^\infty f(x, y) dx$, которая называется *несобственным интегралом 1 рода*, зависящим от параметра y .

²Ниже в этой главе, если явно не сказано противное, мы допускаем, что c и d могут независимо принимать значения $-\infty$ и $+\infty$.

Можно рассматривать случаи, когда параметр y изменяется не на сегменте, а на полупрямой или на всей прямой или на каком-то другом множестве. Несобственные интегралы, зависящие от параметра, аналогичны функциональным рядам.

Пример 6.1.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(y) &:= \int_0^{+\infty} ye^{-xy} dx = \begin{cases} 0, & y = 0, \\ \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A ye^{-xy} dx, & y > 0 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 0, & y = 0, \\ \lim_{A \rightarrow +\infty} (-e^{-xy})|_0^A, & y > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y = 0, \\ 1, & y > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, предельная функция разрывна в точке $y = 0$, несмотря на то, что подынтегральная функция непрерывна в квадранте $\{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$.

На этом примере мы видим, что в отличие от собственных интегралов, непрерывность подынтегральной функции для несобственных интегралов не гарантирует непрерывность самого интеграла. С аналогичной ситуацией мы сталкивались в теории функциональных последовательностей и рядов: сумма ряда непрерывных функций может быть разрывной функцией. Ключевым понятием для перенесения “хороших” свойств подынтегральных функций на сами несобственные интегралы, зависящие от параметра, является, как и для функциональных последовательностей и рядов, понятие равномерной сходимости.

Определение 6.1. Несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x, y) dx$ называется сходящимся равномерно по параметру y на $[c, d]$, если он сходится $\forall y \in [c, d]$ и если $\forall \varepsilon > 0 \exists A \geq a$ такое, что $\forall A' \geq A$ и $\forall y \in [c, d]$ выполняется неравенство

$$\left| \int_{A'}^{\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

Это означает, что остаток интеграла может быть сделан равномерно малым при достаточно большом нижнем пределе интегрирования.

Более удобным для практической проверки может оказаться другое эквивалентное определение:

Определение 6.2. Несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x, y) dx$ называется сходящимся равномерно по параметру y на $[c, d]$, если он сходится $\forall y \in [c, d]$, и если

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \sup_{y \in [c, d]} \left| \int_A^{\infty} f(x, y) dx \right| = 0.$$

Вернемся к примеру 6.1. В данном случае

$$\forall A > 0 : \sup_{y \geq 0} \left| \int_A^{\infty} ye^{-xy} dx \right| = \sup_{y \geq 0} \left(-e^{-xy} \Big|_A^{+\infty} \right) = \sup_{y \geq 0} e^{-Ay} = 1,$$

следовательно на множестве $y \geq 0$ равномерная сходимость не имеет места. В то же время $\forall \delta > 0, \forall A > 0$

$$\sup_{y \geq \delta} \left| \int_A^{\infty} ye^{-xy} dx \right| = \sup_{y \geq \delta} \left(-e^{-xy} \Big|_A^{+\infty} \right) = \sup_{y \geq \delta} e^{-Ay} = e^{-A\delta} \rightarrow 0, \quad A \rightarrow +\infty.$$

Значит, на множестве $y \geq \delta > 0$ интеграл из примера 6.1 сходится равномерно.

Теорема 6.4 (критерий Коши равномерной сходимости н.и. 1 рода, зависящего от параметра). Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно по $y \in [c, d]$ тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \exists A \geq a$ (не зависящее от y) такое, что $\forall A', A'' > A$ и $\forall y \in [c, d]$ выполнено неравенство

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. 1. Необходимость. Если $\forall A' \geq A$ и $\forall y \in [c, d]$ выполнено

$$\left| \int_{A'}^{\infty} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

то $\forall A', A'' \geq A$ и $\forall y \in [c, d]$ выполнено неравенство:

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x, y) dx \right| = \left| \int_{A'}^{\infty} f(x, y) dx - \int_{A''}^{\infty} f(x, y) dx \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{A'}^{\infty} f(x, y) dx \right| + \left| \int_{A''}^{\infty} f(x, y) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. Достаточность. Пусть $\forall \varepsilon > 0 \exists A$ такое, что $\forall A', A'' > A$ и $\forall y \in [c, d]$:

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $A'' \rightarrow \infty$, получаем

$$\left| \int_{A'}^{\infty} f(x, y) dx \right| \leq \varepsilon,$$

а это и означает, что н.и. сходится равномерно. □

Теорема 6.5 (мажорантный признак Вейерштрасса). Пусть

1. $|f(x, y)| \leq g(x)$, $(x, y) \in \Pi$ и пусть функция $f(x, y)$ интегрируема по x на любом сегменте $[a, A]$, $A > a$ при $y \in [c, d]$;

2. несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходится.

Тогда несобственные интегралы $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ и $\int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx$ сходятся равномерно по $y \in [c, d]$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. По критерию Коши для несобственного интеграла первого рода $\exists A \geq a$ такое, что $\forall A', A'' > A$ выполнено неравенство

$$\left| \int_{A'}^{A''} g(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Используя условие 1, получаем, что $\forall y \in [c, d]$:

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x, y) dx \right| \leq \left| \int_{A'}^{A''} |f(x, y)| dx \right| \leq \left| \int_{A'}^{A''} g(x) dx \right| < \varepsilon,$$

а это и означает, в силу теоремы 6.4, справедливость утверждения теоремы. □

Пример 6.2. Рассмотрим еще раз интеграл $\int_0^{+\infty} ye^{-xy} dx$ из примера 6.1. Мы уже доказали его равномерную сходимость при $y \geq \delta > 0$ по определению.

При помощи мажорантного признака Вейерштрасса мы можем доказать его равномерную сходимость при $\delta \leq y \leq M$, поскольку $0 < ye^{-xy} \leq Me^{-\delta x} =: g(x)$ при $\delta \leq y \leq M$, $0 \leq x < \infty$ и интеграл $\int_0^{\infty} Me^{-\delta x} dx = \frac{M}{\delta}$ сходится.

При $y \geq \delta > 0$ у подынтегральной функции нет интегрируемой мажоранты, поскольку

$$\sup_{y \geq \delta} ye^{-xy} = \begin{cases} \frac{1}{ex}, & x \leq 1/\delta \\ \delta e^{-x\delta}, & x \geq 1/\delta \end{cases}$$

и $\int_0^{1/\delta} \frac{dx}{x}$ расходится.

Таким образом, этот пример показывает, что мажорантный признак Вейерштрасса достаточен, но не необходим для равномерной сходимости несобственного интеграла, даже для знакопостоянной подынтегральной функции.

Мажорантный признак Вейерштрасса позволяет доказать равномерную и абсолютную сходимость несобственного интеграла 1 рода. В случае отсутствия абсолютной сходимости он не применим. В этой ситуации, как и для функциональных рядов, используется признак Дирихле.

Теорема 6.6 (признак Дирихле). Пусть

1. функция $f(x, y)$ непрерывна в полуполосе Π и $\left| \int_a^x f(t, y) dt \right| \leq M = \text{const}$, $\forall x \geq a$, $\forall y \in [c, d]$.
2. функция $g(x, y)$ определена в полуполосе Π , имеет в ней непрерывную производную по x и монотонно по x и равномерно по $y \in [c, d]$ стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$ (последний факт обозначается так: $g(x, y) \Downarrow 0$, $x \rightarrow \infty$, $y \in [c, d]$).

Тогда несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y)g(x, y) dx$ сходится равномерно по $y \in [c, d]$.

Доказательство. Доказательство на основе критерия Коши повторяет доказательство признака Дирихле для н.и. первого рода. \square

Пример 6.3.

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin xy}{x} dx, \quad 0 < \delta \leq y \leq \infty.$$

Функция $f(x, y) = \sin xy$ непрерывна при $x \geq 1, y \geq \delta$ и имеет по переменной x ограниченную первообразную $\left| -\frac{\cos xy}{y} \right| \leq \frac{1}{\delta}$. Функция

$g(x, y) = \frac{1}{x}$ монотонно по $x \geq 1$ и равномерно по $y \geq \delta$ стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$, причем имеет непрерывную производную по x .

Поэтому по признаку Дирихле данный интеграл равномерно сходится при $y \geq \delta$.

Покажем, что $\forall \varepsilon > 0$ при $0 < y < \varepsilon$ данный интеграл не сходится равномерно. Воспользуемся для этого критерием Коши. Пусть $y_n := 1/n, n \geq [1/\varepsilon] + 1, A' := 2\pi/y_n, A'' := 3\pi/y_n$. Тогда

$$\int_{A'}^{A''} \frac{\sin xy_n}{x} dx = \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin z}{z} dz > \frac{1}{3\pi} \int_{2\pi}^{3\pi} \sin z dz = \frac{2}{3\pi}.$$

Поскольку при $n \rightarrow \infty$ также $A', A'' \rightarrow \infty$, по критерию Коши получаем отсутствие равномерной сходимости.

Тем более, равномерная сходимость отсутствует при $y \geq 0$ и $y \in \mathbb{R}$.

6.3 О непрерывности, интегрировании и дифференцировании по параметру несобственных интегралов, зависящих от параметра

Теорема 6.7 (о непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра). Пусть

1. функция $f(x, y)$ непрерывна в полуполосе Π ;

2. несобственный интеграл $\mathcal{F}(y) = \int_a^{\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно по $y \in [c, d]$.

Тогда функция $\mathcal{F}(y)$ непрерывна на $[c, d]$.

Доказательство. Рассмотрим функциональную последовательность $\mathcal{F}_n(y) = \int_a^{a+n} f(x, y) dx, n \in \mathbb{N}$. По теореме о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра, каждая функция $\mathcal{F}_n(y)$ непрерывна на $[c, d]$, а в силу условия 2 $\mathcal{F}_n(y) \xrightarrow{y \in [c, d]} \mathcal{F}(y)$. Поэтому по теореме о непрерывности равномерного предела последовательности непрерывных функций, функция $\mathcal{F}(y)$ непрерывна на $[c, d]$. \square

Теорема 6.8 (об интегрировании несобственного интеграла по параметру). *Если выполнены условия предыдущей теоремы, причем c и d являются конечными величинами, то*

$$\int_c^d \mathcal{F}(y) dy = \int_c^d \left[\int_a^\infty f(x, y) dx \right] dy = \int_a^\infty \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx. \quad (6.2)$$

Доказательство. По предыдущей теореме функция $\mathcal{F}(y)$ интегрируема на $[c, d]$, поэтому нам нужно только доказать равенство (6.2), т.е. то, что

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^\infty f(x, y) dx \right] dy.$$

Поскольку функция $f(x, y)$ непрерывна, то собственные интегралы под знаком предела можно переставить и равенство (6.2) эквивалентно равенству

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_c^d \underbrace{\left[\int_a^\infty f(x, y) dx - \int_a^A f(x, y) dx \right]}_{= \int_a^A f(x, y) dx} dy = 0. \quad (6.3)$$

Так как интеграл $\int_a^\infty f(x, y) dx$ сходится равномерно по y на $[c, d]$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists A$ такое, что $\forall A' > A$ и $\forall y \in [c, d]$ выполнено неравенство $\left| \int_{A'}^\infty f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{d-c}$. Следовательно, $\forall A' > A$ выполнено неравенство $\left| \int_c^d \left[\int_{A'}^\infty f(x, y) dx \right] dy \right| < \frac{\varepsilon}{d-c}(d-c) = \varepsilon$, что и означает справедливость равенства (6.3). \square

Теорема 6.9 (о дифференцировании несобственного интеграла по параметру). Пусть:

1. функции $f(x, y)$ и $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ непрерывны в полуполосе Π ;
2. несобственный интеграл $\mathcal{F}(y) := \int_a^\infty f(x, y) dx$ сходится $\forall y \in [c, d]$;
3. несобственный интеграл $\int_a^\infty \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx$ сходится равномерно по $y \in [c, d]$.

Тогда функция $\mathcal{F}(y)$ дифференцируема на $[c, d]$ и справедливо равенство

$$\mathcal{F}'(y) = \frac{d}{dy} \int_a^\infty f(x, y) dx = \int_a^\infty \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx.$$

В таком случае говорят, что несобственный интеграл можно дифференцировать по параметру под знаком интеграла.

Доказательство. Рассмотрим

функциональную последовательность $\{\mathcal{F}_n(y)\} := \int_a^{a+n} f(x, y) dx$. В силу второго условия доказываемой теоремы $\{\mathcal{F}_n(y)\} \rightarrow \mathcal{F}(y)$, $y \in [c, d]$. По теореме 6.3 при $y \in [c, d] \exists \mathcal{F}'_n(y) = \int_a^{a+n} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx$, а в силу третьего условия доказываемой теоремы, $\mathcal{F}'_n(y) \xrightarrow{[c, d]} \int_a^\infty \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx$. Отсюда по теореме 4.9 о дифференцируемости предела функциональной последовательности следует, что функция $\mathcal{F}(y)$ дифференцируема на $[c, d]$ и имеет место равенство $\mathcal{F}'(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}'_n(y)$, т.е.

$$\frac{d}{dy} \int_a^\infty f(x, y) dx = \int_a^\infty \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx.$$

□

О несобственных интегралах второго рода, зависящих от параметра

Пусть функция $f(x, y)$ определена на множестве $\Pi_1 := \{(x, y) \mid a < x \leq b, c \leq y \leq d\}$. При этом $\forall y \in [c, d]$ она, как

функция аргумента x , неограничена в окрестности точки a и интегрируема на любом отрезке $[a + \delta, b]$, $\forall \delta, 0 < \delta < b - a$. Таким образом, интеграл $\int_a^b f(x, y) dx, \forall y \in [c, d]$ является *несобственным интегралом второго рода, зависящим от параметра y* .

Определение 6.3. *Несобственный интеграл второго рода $\int_a^b f(x, y) dx$, зависящий от параметра y , называется сходящимся равномерно по параметру $y \in [c, d]$, если он сходится $\forall y \in [c, d]$ и если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что $\forall \delta' \in (0, \delta)$ и $\forall y \in [c, d]$ выполняется неравенство*

$$\left| \int_a^{a+\delta'} f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

Все доказанные факты о несобственных интегралах первого рода, зависящих от параметра, имеют аналоги и для несобственных интегралов второго рода, зависящих от параметра.

6.4 Вычисление несобственных интегралов с помощью дифференцирования по параметру

Рассмотрим следующую задачу: вычислить несобственный интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ (при $x = 0$ считаем подынтегральную функцию тождественно равной 1). Мы знаем, что этот интеграл сходится условно, но чему он равен?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим несобственный интеграл

$$\mathcal{F}(y) := \int_0^\infty e^{-yx} \frac{\sin x}{x} dx, y \geq 0, \quad (6.4)$$

который при одном из значений параметра y ($y = 0$) переходит в искомый интеграл³, докажем, что функция $\mathcal{F}(y)$ непрерывна при $y \geq 0$ и при $y > 0 \exists \mathcal{F}'(y) = -\frac{1}{1+y^2}$. Отсюда уже легко найти $\mathcal{F}(y)$ и, в частности, $\mathcal{F}(0)$.

³Прием введения параметра часто используется для вычисления значений несобственных интегралов и числовых рядов.

Представим функцию $\mathcal{F}(y)$ в виде:

$$\mathcal{F}(y) := \int_0^1 e^{-yx} \frac{\sin x}{x} dx + \int_1^{\infty} e^{-yx} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Первое слагаемое является собственным интегралом, непрерывно зависящим от параметра y . Ко второму слагаемому применим признак Дирихле равномерной сходимости при $y \geq 0$. Действительно,

1. $f(x, y) = \sin x$ — непрерывная функция, которая имеет ограниченную первообразную по x ;
2. $g(x, y) = \frac{e^{-xy}}{x} \downarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, причем ввиду оценки $\frac{e^{-xy}}{x} \leq \frac{1}{x}$, $y \geq 0$ это стремление равномерно при $y \geq 0$;
3. при $x \geq 1, y \geq 0 \exists$ непрерывная производная $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$.

Значит, несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} e^{-yx} \frac{\sin x}{x} dx$$

сходится равномерно при $y \geq 0$, и по теореме 6.7 функция $\mathcal{F}(y)$ непрерывна при $y \geq 0$.

Рассмотрим произвольный сегмент $[y_0, y_1]$, $0 < y_0 < y_1$ вещественной оси и проверим, что на нем выполняются условия теоремы 6.9 для интеграла (6.4). Действительно, если $f(x, y) = e^{-yx} \frac{\sin x}{x}$, то

1. $\frac{\partial f}{\partial y} = -e^{-xy} \sin x$ — непрерывная функция при $x \geq 0, y_0 \leq y \leq y_1$;
2. интеграл (6.4) сходится при $y_0 \leq y \leq y_1$;
3. интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial y} dx$ сходится равномерно при $y_0 \leq y \leq y_1$ по признаку Вейерштрасса: $|e^{-xy} \sin x| \leq e^{-xy_0}$, а интеграл $\int_0^{\infty} e^{-xy_0} dx = \frac{1}{y_0}$ сходится.

Тем самым, по теореме 6.9 интеграл (6.4) — дифференцируемая функция от y на $[y_0, y_1]$, а ввиду произвольности y_0, y_1 — и на $(0, +\infty)$, причем $\mathcal{F}'(y) = -\int_0^{\infty} e^{-xy} \sin x \, dx$.

Вычислим последний интеграл:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'(y) &= -\int_0^{\infty} e^{-xy} \sin x \, dx = -\operatorname{Im} \int_0^{\infty} e^{-xy+ix} \, dx = \operatorname{Im} \frac{1}{y-i} e^{(-y+i)x} \Big|_{x=0}^{x=\infty} = \\ &= -\operatorname{Im} \frac{y+i}{y^2+1} = -\frac{1}{y^2+1}, \quad y > 0. \end{aligned}$$

Отсюда $\mathcal{F}(y) = -\operatorname{arctg} y + c$, $y \geq 0$, ввиду непрерывности функции $\mathcal{F}(y)$ при $y \geq 0$.

Для нахождения c устремим $y \rightarrow +\infty$. Тогда

$$|\mathcal{F}(y)| \leq \int_0^{\infty} e^{-xy} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \leq \int_0^{\infty} e^{-xy} dx = \frac{1}{y},$$

откуда $\mathcal{F}(+\infty) = 0$. Значит, $c = \frac{\pi}{2}$ и

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \mathcal{F}(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Рассмотрим теперь интеграл⁴ $I(\alpha) := \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$. Очевидно, что $I(0) = 0$, а при $\alpha > 0$ имеем: $I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} d(\alpha x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$. В то же время, ввиду нечетности функции $I(\alpha)$, мы получаем, что $I(\alpha) = -\frac{\pi}{2}$ при $\alpha < 0$. Итак,

$$I(\alpha) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \alpha > 0, \\ 0, & \alpha = 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \alpha < 0 \end{cases} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(\alpha).$$

Функция $I(\alpha)$ называется *разрывным множителем Дирихле*.

⁴Его не следует путать с *интегральными синусами* $\operatorname{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ и $\operatorname{si}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\sin t}{t} dt = \operatorname{Si}(x) - \frac{\pi}{2}$.

Пример 6.4. Интеграл $I(\alpha, \beta) := \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x} dx$ равномерно сходится на бесконечности при $\alpha \in \mathbb{R}$ и при $\beta \in \mathbb{R}$ по признаку Вейерштрасса, следовательно $I(\alpha, \beta)$ — непрерывная функция при $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Далее, интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x} dx &= \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x \sin \beta x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha + \beta)x}{x} dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\beta - \alpha)x}{x} dx \end{aligned}$$

сходится равномерно по признаку Дирихле при $|\alpha + \beta| \geq \delta > 0$, $|\alpha - \beta| \geq \delta > 0 \Rightarrow I_\alpha(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{4} (\text{sign}(\alpha + \beta) + \text{sign}(\beta - \alpha))$, $\alpha + \beta \neq 0$, $\alpha - \beta \neq 0 \Rightarrow$ (ввиду $I(\alpha, \beta) = I(\beta, \alpha)$) $I(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{4} (|\alpha + \beta| - |\alpha - \beta|)$, в частности, $I(1, 1) = \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$.

Пусть $G(\alpha) := \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^3 dx$, тогда

$$\begin{aligned} G'(\alpha) &= 3 \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^2 \cos \alpha x dx = \frac{3}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\alpha x) \sin \alpha x}{x^2} dx = \\ &= \frac{3}{2} I(2\alpha, \alpha) = \frac{3\pi}{2 \cdot 4} (|3\alpha| - |\alpha|) = \frac{3}{4} \pi |\alpha| \Rightarrow G(\alpha) = \frac{3\pi}{8} \alpha^2 \text{sign}(\alpha). \end{aligned}$$

В частности, $G(1) = \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 dx = \frac{3\pi}{8}$.

6.5 Эйлеровы интегралы

Важные в математике или ее приложениях неэлементарные функции называются *специальными*.⁵ Наряду с уже рассмотренной нами ранее ζ -функцией, примерами таких функций являются Γ -функция

$$\Gamma(p) := \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \tag{6.5}$$

⁵Им посвящены различные руководства и справочники, например «Справочник по специальным функциям», под ред. М. Абрамовица, И. Стиган, М.: Наука, 1979.

и B -функция

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx. \quad (6.6)$$

6.5.1 Свойства Γ -функции

1. **Область определения.** Представим интеграл (6.5) в виде

$$\Gamma(p) = \int_0^1 x^{p-1}e^{-x} dx + \int_1^{\infty} x^{p-1}e^{-x} dx =: \Gamma_2(p) + \Gamma_1(p),$$

где $\Gamma_i(p)$, $i = 1, 2$ — несобственные интегралы первого и второго рода, соответственно. Из признака сравнения для несобственных интегралов сразу следует, что интеграл, определяющий функцию $\Gamma_1(p)$, сходится $\forall p$, а интеграл, определяющий функцию $\Gamma_2(p)$, сходится при $p > 0$.⁶

Таким образом, формула (6.5) определяет Γ -функцию при $p > 0$. При этом подынтегральное выражение положительно $\forall p > 0$, $\forall x > 0$, поэтому при $p > 0$ у Γ -функции нет нулей.

2. **Непрерывность.** Рассмотрим сегмент $p \in [p_1, p_2]$ при произвольных $p_2 > p_1 > 0$. Поскольку $x^{p-1}e^{-x} \leq x^{p_2-1}e^{-x}$ и интеграл $\int_1^{\infty} x^{p_2-1}e^{-x} dx$ сходится, то по признаку Вейерштрасса интеграл $\int_1^{\infty} x^{p-1}e^{-x} dx$ сходится равномерно по параметру $p \in [p_1, p_2]$, и следовательно, функция $\Gamma_1(p)$ непрерывна на $[p_1, p_2]$, а ввиду произвольности $p_2 > p_1 > 0$ — и на $(0, +\infty)$. Аналогично доказывается непрерывность функции $\Gamma_2(p)$.

Таким образом, Γ -функция непрерывна при $p > 0$.

3. **Дифференцируемость.** Аналогично, интегралы $\int_0^1 \frac{\partial}{\partial p} x^{p-1}e^{-x} dx = \int_0^1 x^{p-1}e^{-x} \ln x dx$ и $\int_1^{\infty} \frac{\partial}{\partial p} x^{p-1}e^{-x} dx = \int_1^{\infty} x^{p-1}e^{-x} \ln x dx$ сходятся равномерно по параметру $p \in [p_1, p_2]$ при произвольных $p_2 > p_1 > 0$, а

⁶Если рассматривать эти интегралы при комплексных $p = p' + ip''$, то из того же признака сравнения и того, что $|x^{p-1}| = |x^{p'-1}e^{ip'' \ln x}| = x^{p'-1}$ следует, что они сходятся при $\operatorname{Re} p > 0$.

значит,

$$\exists \Gamma'(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} \ln x \, dx, \quad 0 < p < \infty.$$

По индукции легко доказать, что

$$\exists \Gamma^{(n)}(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} \ln^n x \, dx, \quad 0 < p < \infty, n \in \mathbb{N}.$$

4. **Рекуррентная формула.** При $\operatorname{Re} p > 0$ при помощи интегрирования по частям получаем рекуррентное соотношение:

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} x^p e^{-x} \, dx = -x^p e^{-x} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} + \int_0^{\infty} p x^{p-1} e^{-x} \, dx = p\Gamma(p).$$

Пользуясь этой формулой рекуррентно при $p > n - 1$, получаем

$$\begin{aligned} \Gamma(p+1) &= p\Gamma(p) = p(p-1)\Gamma(p-1) = \dots \\ \dots &= p(p-1)\dots(p-n+1)\Gamma(p-n+1), \end{aligned} \quad (6.7)$$

что дает возможность свести вычисление функции $\Gamma(p)$ к ее вычислению в полуполосе $0 < \operatorname{Re} p \leq 1$. Учитывая, что $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} \, dx = 1$, получаем из (6.7) при $p = n$ формулу $\Gamma(n+1) = n!$. Таким образом, Γ -функция обобщает функцию факториал на нецелые положительные значения.

5. **Продолжение Γ -функции во всю комплексную плоскость.** С другой стороны, рекуррентная формула в виде $\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}$ может быть использована для аналитического продолжения Γ -функции в область $\operatorname{Re} p \leq 0$. Действительно, если $\operatorname{Re} p > -1$, то $\operatorname{Re}(p+1) > 0$ и по формуле $\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}$ мы аналитически продолжаем Γ -функцию в полосу $-1 < \operatorname{Re} p \leq 0$. При этом точка $p = 0$ для продолженной функции будет полюсом первого порядка с вычетом, равным $\Gamma(1) = 1$. Вторично применяя эту формулу, мы получаем аналитическое продолжение Γ -функции в полосу $-2 < \operatorname{Re} p \leq -1$. Действуя так и далее, мы получаем аналитическое продолжение Γ -функции во всю комплексную область.

При этом полюс Γ -функции в точке $p = 0$ порождает полюса первого порядка Γ -функции во всех целых отрицательных точках

$p = -n$, $n \in \mathbb{N}$ с вычетами, равными $(-1)^n/n!$. Действительно, если $\Gamma(p-n) \sim \frac{c_n}{p}$, $p \rightarrow 0$, то $\Gamma(p-(n+1)) = \frac{\Gamma(p-n)}{p-n-1} \sim \frac{c_n}{p(p-n-1)} \sim -\frac{c_n}{(n+1)p}$, $p \rightarrow 0$. Очевидно, что других полюсов у Γ -функции нет.

6. **Значение $\Gamma(\frac{1}{2})$.** Пользуясь значением интеграла Пуассона, полученным в конце предыдущей главы, получаем:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx = 2 \int_0^\infty e^{-x} d\sqrt{x} = \sqrt{\pi}.$$

С помощью полученной формулы и формулы приведения нетрудно получить значения Γ -функции во всех полуцелых точках.

7. **Бесконечные произведения Эйлера и Вейерштрасса для Γ -функции.**

Рассмотрим последовательность интегралов

$$I(p, n) := \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{p-1} dt, \quad n \in \mathbb{N}, \operatorname{Re} p > 0. \quad (6.8)$$

Покажем, что $I(p, n) \rightarrow \Gamma(p)$ при $n \rightarrow \infty$. Имеем

$$\Gamma(p) - I(p, n) = \int_0^n \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) t^{p-1} dt + \int_n^\infty e^{-t} t^{p-1} dt.$$

Поскольку

$$\int_n^\infty e^{-t} t^{p-1} dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

нам достаточно доказать, что

$$\int_0^n \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) t^{p-1} dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Это легко следует из неравенства

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq t^2 e^{-t}/n, \quad 0 \leq t \leq n. \quad (6.9)$$

Докажем это неравенство. Из разложений функций e^y и $(1-y)^{-1}$ в ряды имеем

$$1 + y \leq e^y \leq (1-y)^{-1}, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Подставляя сюда $y = t/n$, получим

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t} \leq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-n}, \quad 0 \leq t \leq n,$$

откуда

$$\begin{aligned} 0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n &= e^{-t} \left(1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) \leq \\ &\leq e^{-t} \left(1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right). \end{aligned}$$

Далее, если $0 \leq \alpha \leq 1$, то $(1 - \alpha)^n \geq 1 - n\alpha$. При $n\alpha \geq 1$ это очевидно, а при $n\alpha < 1$ легко доказывается индукцией. Положив $\alpha = t^2/n^2$, получаем

$$\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{t^2}{n^2}, \quad \text{откуда} \quad 1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n \leq \frac{t^2}{n^2},$$

что приводит к (6.9).

Подстановка $t = n\tau$ в (6.8) дает

$$I(p, n) := n^p \int_0^1 (1 - \tau)^n \tau^{p-1} d\tau.$$

С помощью n -кратного интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1 - \tau)^n \tau^{p-1} d\tau &= \frac{1}{p} \tau^p (1 - \tau)^n \Big|_0^1 + \frac{n}{p} \int_0^1 (1 - \tau)^{n-1} \tau^p d\tau = \dots \\ \dots &= \frac{n(n-1)\dots 1}{p(p+1)\dots(p+n-1)} \int_0^1 \tau^{p+n-1} d\tau = \frac{n!}{p(p+1)\dots(p+n)}, \end{aligned}$$

откуда

$$I(p, n) = \frac{n^p}{p} \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{p}{k}} = \frac{1}{p} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p \prod_{k=1}^n \frac{(1 + \frac{1}{k})^p}{1 + \frac{p}{k}}.$$

Это означает, что Γ -функцию при $\operatorname{Re} p > 0$ можно представить в виде следующего бесконечного произведения Эйлера

$$\frac{1}{p} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 + \frac{1}{k})^p}{1 + \frac{p}{k}}, \quad (6.10)$$

которое ввиду

$$\ln \frac{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^p}{1 + \frac{p}{k}} = p \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \ln\left(1 + \frac{p}{k}\right) = \frac{p(p-1)}{2k^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right)$$

сходится при всех $p \in \mathbb{C}$, $p \neq 0, -1, -2, \dots$ в силу сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{p(p-1)}{2k^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right) \right).$$

Убедимся, что бесконечное произведение (6.10) совпадает с $\Gamma(p)$ при всех $p \in \mathbb{C}$, $p \neq 0, -1, -2, \dots$

Во-первых, можно проверить, что (6.10) задает аналитическую при $p \in \mathbb{C}$, $p \neq 0, -1, -2, \dots$ функцию и сослаться на единственность аналитического продолжения. Для этого можно взять логарифм от (6.10) и убедиться, что получившийся ряд сходится равномерно по p в любой ограниченной области комплексной плоскости, равно как и ряд его почленных производных по p .

Поступим проще. Проверим, что функция (6.10) удовлетворяет при всех $p \in \mathbb{C}$, $p \neq 0, -1, -2, \dots$ уже полученному рекуррентному соотношению $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{I(p+1, n)}{I(p, n)} &= n \frac{p}{p+1} \prod_{k=1}^n \frac{1 + \frac{p}{k}}{1 + \frac{p+1}{k}} = n \frac{p}{p+1} \prod_{k=1}^n \frac{k+p}{k+p+1} = \\ &= n \frac{p}{p+1} \frac{1+p}{n+p+1} \rightarrow p, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

откуда $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.

Итак, функция (6.10) удовлетворяет соотношению $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ в $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ и при $\operatorname{Re} p > 0$ совпадает с аналитической функцией $\Gamma(p)$. Значит аналитическое продолжение этой функции с области $\operatorname{Re} p > 0$ на область $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ тем же способом, что и выше, с одной стороны совпадает с функцией $\Gamma(p)$, а с другой, совпадает с (6.10). Значит (6.10) – аналитическая функция и

$$\Gamma(p) = \frac{1}{p} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^p}{1 + \frac{p}{k}}, \quad p \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}. \quad (6.11)$$

В отличие от интегрального представления, формула (6.11) дает значение Γ -функции во всей комплексной плоскости, из нее непосредственно видны полюса Γ -функции и то, что $\Gamma(p) \neq 0$, $\forall p \in \mathbb{C}$.

Получим бесконечное произведение Вейерштрасса для Γ -функции. В силу (3.9) имеем:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{p}{k}}}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^p} = \exp \left(p \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right) \right) = e^{pC}, \quad (6.12)$$

где C – постоянная Эйлера. Перемножая бесконечные произведения (6.11) и (6.12), получаем

$$e^{pC} \Gamma(p+1) = e^{pC} p \Gamma(p) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{p}{k}}}{\left(1 + \frac{p}{k}\right)},$$

что можно записать в виде

$$\frac{1}{\Gamma(p+1)} = e^{pC} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{p}{k} \right) e^{-\frac{p}{k}}. \quad (6.13)$$

8. **Формула дополнения.** По формуле (6.11) получаем

$$\Gamma(1-p) = -p \Gamma(-p) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-p}}{1 - \frac{p}{k}}.$$

Перемножая это произведение с (6.11) получаем

$$\Gamma(p) \Gamma(1-p) = \frac{1}{p} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{p^2}{k^2} \right)^{-1},$$

что в силу разложения синуса в бесконечное произведение (3.45) дает

$$\Gamma(p) \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad p \notin \mathbb{Z}. \quad (6.14)$$

6.5.2 Свойства B -функции

1. **Область определения.** Представим интеграл (6.6) в виде

$$B(p, q) = \int_0^{1/2} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx + \int_{1/2}^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx =: B_1(p, q) + B_2(p, q).$$

Интеграл $B_1(p, q)$ является несобственным второго рода при $p < 1$ и он сходится при $p > 0$. Аналогично, интеграл $B_2(p, q)$ является несобственным второго рода при $q < 1$ и он сходится при $q > 0$. Таким образом, формула (6.6) определяет B -функцию при $p > 0$, $q > 0$.

2. **Симметрия.** Докажем, что $B(p, q) = B(q, p)$. Для этого сделаем замену переменных: $x = 1 - t$, $dx = -dt$. Тогда

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx = - \int_1^0 (1-t)^{p-1}t^{q-1} dt = \\ &= \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1} dt = B(q, p). \end{aligned}$$

3. **Связь с Γ -функцией.** Можно доказать,⁷ что

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (6.15)$$

Из этой формулы следует возможность аналитического продолжения функции $B(p, q)$ в область комплексных значений переменных p, q и, в частности, то, что при $p, q \neq 0, -1, -2, -3, \dots$ функция $B(p, q)$ имеет производные всех порядков.

4. **Альтернативное интегральное представление B -функции.**

Делая в (6.6) замену переменных $x = \frac{1}{1+t}$, $dx = -\frac{dt}{(1+t)^2}$, $1-x = \frac{t}{1+t}$, получаем $B(p, q) = \int_0^\infty t^{q-1}(1+t)^{-p-q} dt$, а в силу симметрии B -функции, эту формулу можно переписать в виде

$$B(p, q) = \int_0^\infty x^{p-1}(1+x)^{-p-q} dx. \quad (6.16)$$

5. **Примеры вычисления определенных и несобственных интегралов с помощью эйлеровых интегралов.**

Пример 6.5.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \sqrt[4]{x}(1+x)^{-2} dx &= \int_0^{+\infty} x^{5/4-1}(1+x)^{-5/4-3/4} dx \stackrel{(6.16)}{=} \\ &\stackrel{(6.16)}{=} B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) \stackrel{(6.15)}{=} \frac{\Gamma(\frac{5}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(2)} = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \stackrel{(6.14)}{=} \frac{1}{4} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

⁷см., Будаков Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. Изд. 3-е, М. Физматлит, 2002, с. 392–393.

Пример 6.6.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x \cos^{q-1} x dx$$

Очевидно, что этот несобственный интеграл второго рода сходится при $p > 0$, $q > 0$. Сделаем замену переменных: $\sin x = \sqrt{t}$, $0 \leq t \leq 1$. Тогда $\cos x = \sqrt{1-t}$, $\cos x dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ и

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{p}{2}-1} (1-t)^{\frac{q}{2}-1} dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right) \stackrel{(6.15)}{=} \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}.$$

Пусть $p = 3$, $q = 3$. Тогда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{2} = \frac{\frac{1}{4}\pi}{4} = \frac{\pi}{16}.$$

6.6 Кратные интегралы, зависящие от параметров

Мы ограничимся рассмотрением тройных интегралов вида

$$u(M) = \iiint_G f(M, P)g(P) dV_P, \quad (6.17)$$

где $G \subset \mathbb{E}^3$ — ограниченная кубируемая область, $M \in \mathbb{E}^3$, dV_P — элемент объема в точке $P \in G$, $g(P) = g(x, y, z)$ — ограниченная, интегрируемая в области G функция, а функция $f(M, P)$ непрерывна при $M \neq P$ и неограничена как функция от P в произвольной окрестности точки M . Здесь роль параметров играют координаты x_0, y_0, z_0 точки M .

Важным примером таких интегралов является потенциал гравитационного поля, создаваемого в точке M телом G с плотностью массы $g(P) = \rho(P)$. Этот потенциал (он называется также *объемным* или *ньютоновским потенциалом*) имеет вид:

$$u(M) = \iiint_G \frac{\rho(P)}{r_{MP}} dV_P, \quad (6.18)$$

где r_{MP} — расстояние между точками M и P .

При $M \notin G$ интеграл (6.18) является собственным, зависящим от параметров, дифференцируемым под знаком интеграла по координатам

точки M любое число раз. При этом, поскольку $\Delta \frac{1}{r_{MP}} = 0$, $M \neq P$, где оператор Δ действует на координаты точки $M(x_0, y_0, z_0)$, то $\Delta u(M) = 0$, $M \notin G$.

Если же $M \in G$, то интеграл (6.18) является несобственным, зависящим от параметров, и вопрос о его непрерывности и дифференцируемости является более сложным. Для его решения введем новые понятия и докажем некоторые утверждения.

Определение 6.4. *Несобственный интеграл (6.17) называется сходящимся равномерно относительно M в точке $M_0 \in G$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что $B_{M_0}^\delta \subset G$, где $B_{M_0}^\delta$ — шар радиуса δ с центром в точке M_0 , и \forall кубируемой области $\omega \subset B_{M_0}^\delta$ и $\forall M \in B_{M_0}^\delta$ выполняется неравенство*

$$\left| \iiint_{\omega} f(M, P)g(P) dV_P \right| < \varepsilon.$$

Теорема 6.10. *Если несобственный интеграл (6.17) сходится равномерно относительно M в точке M_0 , то функция $u(M)$ непрерывна в точке M_0 .*

Доказательство. По определению непрерывности нужно доказать, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что $|u(M) - u(M_0)| < \varepsilon$ при $r_{MM_0} < \delta$. Представим функцию u в следующем виде:

$$u(M) = \iiint_{B_{M_0}^{\delta_1}} f(M, P)g(P) dV_P + \iiint_{G \setminus B_{M_0}^{\delta_1}} f(M, P)g(P) dV_P =: u_1(M) + u_2(M).$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как функция $u(M)$ сходится равномерно относительно M в точке M_0 , то $\exists \delta_1$ такое, что $\forall M \in B_{M_0}^{\delta_1}$ выполняется неравенство

$$|u_1(M)| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ в частности } |u_1(M_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (6.19)$$

Интеграл $u_2(M)$ является собственным для M , близких к M_0 , поэтому $\exists \delta > 0$ такое, что

$$|u_2(M) - u_2(M_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ при } r_{MM_0} < \delta. \quad (6.20)$$

Уменьшим, если нужно, δ до значения, меньшего δ_1 . Неравенство (6.20) тем более будет выполнено. Тогда, если $r_{MM_0} < \delta$, то $M \in B_{M_0}^{\delta_1}$, и, следовательно, выполняются неравенства (6.19).

Итак, если $r_{MM_0} < \delta$, то из (6.19) и (6.20) получим:

$$\begin{aligned} |u(M) - u(M_0)| &= |u_1(M) + u_2(M) - u_1(M_0) - u_2(M_0)| \leq \\ &\leq |u_1(M)| + |u_1(M_0)| + |u_2(M) - u_2(M_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Теорема 6.11 (достаточное условие равномерной сходимости в точке).
Если $|f(M, P)| \leq \frac{c}{r_{MP}^\alpha}$, где $0 < \alpha < 3$, $c = \text{const} > 0$, то несобственный интеграл (6.17) сходится равномерно относительно M в любой внутренней точке $M_0 \in G$.

Доказательство. Пусть $M_0 \in G$ и $|g(P)| \leq A = \text{const}$. Требуется доказать, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что \forall области $\omega \subset B_{M_0}^\delta$ и $\forall M \in B_{M_0}^\delta$ выполняется неравенство

$$\left| \iiint_{\omega} f(M, P)g(P) dV_P \right| < \varepsilon. \quad (6.21)$$

Поскольку $|f(M, P)| \leq \frac{c}{r_{MP}^\alpha}$, то

$$\begin{aligned} \left| \iiint_{\omega} f(M, P)g(P) dV_P \right| &\leq cA \iiint_{\omega} \frac{dV_P}{r_{MP}^\alpha} \leq cA \iiint_{B_{M_0}^\delta} \frac{dV_P}{r_{MP}^\alpha} \leq \\ &\leq cA \iiint_{B_M^{2\delta}} \frac{dV_P}{r_{MP}^\alpha} =: cAI, \end{aligned}$$

поскольку $B_{M_0}^\delta \subset B_M^{2\delta}$.

В интеграле I перейдем к сферическим координатам с центром в точке M :

$$I = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\delta} \frac{r^2}{r^\alpha} dr = 4\pi \int_0^{2\delta} r^{2-\alpha} dr = \frac{4\pi}{3-\alpha} (2\delta)^{3-\alpha}.$$

Поскольку $(2\delta)^{3-\alpha} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, то $cAI < \varepsilon$ при достаточно малом δ . Это означает выполнение неравенства (6.21) при том же $\delta \forall$ области $\omega \subset B_{M_0}^\delta$ и $\forall M \in B_{M_0}^\delta$. □

Следствие 6.3. Для m -кратных несобственных интегралов того же вида (6.17) достаточным условием равномерной сходимости в точке $M_0 \in G$ является неравенство

$$|f(M, P)| \leq \frac{c}{r_{MP}^\alpha}, \quad \text{где } 0 < \alpha < m, c = \text{const} > 0.$$

Первые производные ньютоновского потенциала

Применим полученные теоремы к ньютонову потенциалу (6.18) с ограниченной плотностью $\rho(M)$ такой, что $|\rho(M)| \leq C = \text{const}$. Докажем, что первые производные этого потенциала $u(M)$ можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла и при $M \in G$.

В соответствии с определением производной нужно доказать, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - u(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} = X(M) := \iiint_G \frac{\rho(P)(x - x_0)}{r_{MP}^3} dV_P,$$

т.е. что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что если $0 < |\Delta x| < \delta$, то

$$\left| \frac{u(M_1) - u(M)}{\Delta x} - X(M) \right| < \varepsilon, \quad (6.22)$$

где $M_1 = M_1(x_0 + \Delta x, y_0, z_0)$.

Разобьем область G в формулах для функций u и X на шар $B_M^{\delta_1}$ и его дополнение $G \setminus B_M^{\delta_1}$ для некоторого $\delta_1 > 0$, которое выберем ниже. Пусть $u = u_1 + u_2$ и $X = X_1 + X_2$ — соответствующие разбиения функций u и X на сумму двух слагаемых. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \frac{u(M_1) - u(M)}{\Delta x} - X(M) \right| &\leq \left| \frac{u_1(M_1) - u_1(M)}{\Delta x} \right| + |X_1(M)| + \\ &+ \left| \frac{u_2(M_1) - u_2(M)}{\Delta x} - X_2(M) \right|. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Подынтегральная функция в выражении для $X(M)$ имеет оценку: $\left| \frac{\rho(P)(x - x_0)}{r_{MP}^3} \right| \leq \frac{C}{r_{MP}^2}$, поэтому по теореме 6.11 несобственный интеграл в определении функции $X(M)$ сходится равномерно в любой точке $M \in G$. Следовательно, $\exists \delta_1 > 0$ такое, что $|X_1(M)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Получим аналогичную оценку и для $\left| \frac{u_1(M_1) - u_1(M)}{\Delta x} \right|$. Действительно, но,

$$\begin{aligned} \frac{u_1(M_1) - u_1(M)}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x} \iiint_{B_M^{\delta_1}} \left(\frac{\rho(P)}{r_{M_1P}} - \frac{\rho(P)}{r_{MP}} \right) dV_P = \\ &= \iiint_{B_M^{\delta_1}} \frac{r_{MP} - r_{M_1P}}{\Delta x} \frac{\rho(P)}{r_{M_1P}r_{MP}} dV_P. \end{aligned}$$

По неравенству треугольника $\left| \frac{r_{MP} - r_{M_1P}}{\Delta x} \right| \leq 1$. Кроме того: $\frac{1}{r_{M_1P}r_{MP}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_{M_1P}^2} + \frac{1}{r_{MP}^2} \right)$, $|\rho(P)| \leq C$. По теореме 6.11 несобственный интеграл $\iiint_G \frac{1}{r_{MP}^2} dV_P$ сходится равномерно в любой точке $M \in G$. Следовательно, при достаточно малом $\delta_1 > 0$ выполняется неравенство

$$\iiint_{B_M^{\delta_1}} \frac{C}{2r_{M'P}^2} dV_P < \frac{\varepsilon}{6}, \quad \forall M' \in B_M^{\delta_1}.$$

Поэтому при $|\Delta x| < \delta_1$ справедлива оценка

$$\left| \frac{u_1(M_1) - u_1(M)}{\Delta x} \right| \leq \frac{C}{2} \iiint_{B_M^{\delta_1}} \left(\frac{1}{r_{M_1P}^2} + \frac{1}{r_{MP}^2} \right) dV_P < \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Наконец, $u_2(M') = \iiint_{G \setminus B_M^{\delta_1}} \frac{\rho(P)}{r_{M'P}} dV_P$ — собственный интеграл $\forall M' \in B_M^{\delta_1}$, поэтому его можно дифференцировать под знаком интеграла и

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{u_2(M_1) - u_2(M)}{\Delta x} - X_2(M) \right] = 0$, и, следовательно, $\exists \delta_2 > 0$ такое, что при $|\Delta x| < \delta_2$ выполняется неравенство: $\left| \frac{u_2(M_1) - u_2(M)}{\Delta x} - X_2(M) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.⁸ Тогда, если $|\Delta x| < \delta$, то каждое слагаемое в правой части (6.23) по модулю меньше, чем $\frac{\varepsilon}{3}$, и поэтому справедливо (6.22), что и доказывает возможность вычисления первых производных ньютоновского потенциала под знаком интеграла.

⁸При этом мы не меняем δ_1 в интегралах выше.

Вторые производные ньютоновского потенциала

Вторые производные ньютоновского потенциала уже нельзя вычислять дифференцированием под знаком интеграла, однако имеет место следующая теорема.

Теорема 6.12. Пусть функция плотности $\rho(M)$ имеет в области G непрерывные частные производные первого порядка. Тогда ньютоновский потенциал (6.18) имеет во внутренних точках области G непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяет в G уравнению Пуассона

$$\Delta u(M) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z_0^2} \right) \Big|_M = -4\pi\rho(M).$$

Доказательство. Как и ранее, разобьем область G на две части: B_M^δ и $G \setminus B_M^\delta$ и будем считать, что $P = P(x, y, z)$. Зафиксируем точку $M(x_0, y_0, z_0) \in G$, а в качестве переменной точки будем рассматривать точку $M' = M'(x_1, y_1, z_1) \in B_M^\delta$. Тогда

$$u(M') = \iiint_{B_M^\delta} \frac{\rho(P)}{r_{M'P}} dV_P + \iiint_{G \setminus B_M^\delta} \frac{\rho(P)}{r_{M'P}} dV_P =: u_1(M') + u_2(M').$$

Выше было доказано, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1}(M') &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(M') + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(M') = \iiint_{B_M^\delta} \rho(P) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{r_{M'P}} \right) dV_P + \\ &+ \iiint_{G \setminus B_M^\delta} \rho(P) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{r_{M'P}} \right) dV_P. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Ввиду $M' \in B_M^\delta$, второе слагаемое в правой части (6.24) является собственным интегралом и его частные производные любого порядка можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла, и, в частности,

$$\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z_1^2} \right) \Big|_{M'} = 0.$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части (6.24). Так как

$$r_{M'P} = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2},$$

$$\text{то } \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{r_{M'P}} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r_{M'P}} \right).$$

Отсюда,

$$\rho(P) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{r_{M'P}} \right) = -\rho(P) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r_{M'P}} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial x}(P) \frac{1}{r_{M'P}} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho(P)}{r_{M'P}} \right).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(M') &= \iiint_{B_M^\delta} \rho(P) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{r_{M'P}} \right) dV_P = \iiint_{B_M^\delta} \frac{\partial \rho}{\partial x}(P) \frac{1}{r_{M'P}} dV_P - \\ &\quad - \iiint_{B_M^\delta} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho(P)}{r_{M'P}} \right) dV_P =: I_1(M') - I_2(M'). \end{aligned}$$

Несобственный интеграл $I_1(M')$ такого же типа, как функция $u(M')$, только вместо $\rho(P)$ стоит $\frac{\partial \rho}{\partial x}(P)$. Следовательно, $I_1(M')$ имеет непрерывные частные производные первого порядка, которые можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла и, ввиду сходимости несобственного интеграла, модули этих производных сколь угодно малы при достаточно малом $\delta > 0$.

Для несобственного интеграла $I_2(M')$ справедливы следующие равенства, второе из которых следует из формулы Остроградского–Гаусса,

$$\begin{aligned} I_2(M') &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint_{B_M^\delta \setminus B_{M'}^\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho(P)}{r_{M'P}} \right) dV_P = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\iint_{S_M^\delta} \frac{\rho(P)}{r_{M'P}} \cos(\widehat{\mathbf{n}(P), \mathbf{i}}) d\sigma_P + \right. \\ &\quad \left. + \iint_{S_{M'}^\varepsilon} \frac{\rho(P)}{r_{M'P}} \cos(\widehat{\mathbf{n}(P), \mathbf{i}}) d\sigma_P \right] = \iint_{S_M^\delta} \frac{\rho(P)}{r_{M'P}} \cos(\widehat{\mathbf{n}(P), \mathbf{i}}) d\sigma_P, \end{aligned}$$

т.к.

$$\left| \iint_{S_{M'}^\varepsilon} \frac{\rho(P)}{r_{M'P}} \cos(\widehat{\mathbf{n}(P), \mathbf{i}}) d\sigma_P \right| \leq \frac{C}{\varepsilon} \iint_{S_{M'}^\varepsilon} d\sigma_P = 4\pi C \varepsilon \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

где $\mathbf{n}(P)$ — поле нормалей на поверхности $S_M^\delta \cup S_{M'}^\varepsilon$, внешних по отношению к области $B_M^\delta \setminus B_{M'}^\varepsilon$. Таким образом, интеграл $I_2(M')$ выражается через поверхностный собственный интеграл, если точка M' лежит строго

внутри сферы S_M^δ , поэтому частные производные функции $I_2(M')$ можно вычислять под знаком интеграла.

Тем самым, мы доказали существование непрерывных частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(M'), \frac{\partial^2 u}{\partial y_1 x_1}(M'), \frac{\partial^2 u}{\partial z_1 x_1}(M')$$

ньютоновского потенциала $u(M') = u_1(M') + u_2(M')$. Совершенно аналогично доказывается существование и непрерывность и остальных частных производных второго порядка у ньютоновского потенциала.

Остается доказать, что ньютоновский потенциал $u(M') = u_1(M') + u_2(M')$ удовлетворяет уравнению Пуассона. Поскольку уже доказано, что функция $u_2(M')$ – гармоническая, достаточно доказать, что ему удовлетворяет функция $u_1(M')$. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_2}{\partial x_1}(M') &= \iint_{S_M^\delta} \rho(P) \cos(\widehat{\mathbf{n}(P), \mathbf{i}}) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{r_{M'P}} \right) d\sigma_P = \\ &= \iint_{S_M^\delta} \rho(P) \cos(\widehat{\mathbf{n}(P), \mathbf{i}}) \frac{x - x_1}{r_{M'P}^3} d\sigma_P \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial I_2}{\partial x_1}(M') \right|_{M'=M} &= \iint_{S_M^\delta} \rho(P) \cos(\widehat{\mathbf{n}(P), \mathbf{i}}) \frac{x - x_0}{r_{MP}^3} d\sigma_P = \\ &= \iint_{S_M^\delta} \frac{\rho(P)}{r_{MP}^2} \cos^2(\widehat{\mathbf{n}(P), \mathbf{i}}) d\sigma_P = \frac{1}{\delta^2} \iint_{S_M^\delta} \rho(P) \cos^2(\widehat{\mathbf{n}(P), \mathbf{i}}) d\sigma_P. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta u_1(M) &= -\frac{1}{\delta^2} \iint_{S_M^\delta} \rho(P) \left(\cos^2(\widehat{\mathbf{n}(P), \mathbf{i}}) + \cos^2(\widehat{\mathbf{n}(P), \mathbf{j}}) + \right. \\ &\quad \left. + \cos^2(\widehat{\mathbf{n}(P), \mathbf{k}}) \right) d\sigma_P + J(\delta) = -\frac{1}{\delta^2} \iint_{S_M^\delta} \rho(P) d\sigma_P + J(\delta), \end{aligned} \tag{6.25}$$

где функция $J(\delta)$ содержит члены, аналогичные частным производным первого порядка от $I_1(M')$, и $J(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Переходя теперь в (6.25) к пределу при $\delta \rightarrow 0$, окончательно получаем по формуле среднего значения:

$$\Delta u(M) = \Delta u_1(M) = -4\pi\rho(M).$$



Глава 7

Ряды и интегралы Фурье

Периодические процессы играют огромную роль в нашей жизни. Достаточно упомянуть три самых важных периодических процесса космического происхождения: вращение Земли по своей орбите (период год), вращение Земли вокруг своей оси (период сутки), вращение Луны и Земли вокруг общего центра масс (период месяц). Конечно, эти процессы периодичны лишь приближенно, но многие периоды жизнедеятельности живых существ на Земле происходят из этих трех периодических процессов.

Математическая идея рядов Фурье¹ состоит в том, чтобы разложить периодическую функцию на такие периодические слагаемые, например тригонометрические функции, с которыми оперировать проще, чем с исходной функцией.

7.1 Тригонометрические ряды Фурье

Определение 7.1. Функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ называется периодической, если существует число $T > 0$ такое, что $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Наименьшее число T , для которого верно это тождество, называется периодом функции f .

Простейшие непостоянные периодические функции — это $\sin x$ и $\cos x$. Их период равен 2π . Из них можно составить последовательность периодических функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

¹Фурье Жан Батист Жозеф (1768–1830) — французский математик. Его не следует путать с Франсуа Мари Шарлем Фурье (1772–1837) — французским социалистом-утопистом.

Эта последовательность называется *тригонометрической системой*, а функции $\cos nx$, $\sin nx$ — *n -ыми гармониками*. В данной главе мы изучим вопрос представимости данной периодической функции в виде (бесконечной) линейной комбинации функций тригонометрической системы с постоянными коэффициентами.

Будут установлены достаточные условия, при выполнении которых функцию $f(x)$ можно представить в виде ряда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad a_n, b_n \in \mathbb{R}. \quad (7.1)$$

Равенство (7.1) называется разложением функции $f(x)$ в *тригонометрический ряд Фурье*, а коэффициенты a_n , b_n — коэффициентами Фурье функции $f(x)$. Выведем формулы, по которым вычисляются коэффициенты Фурье данной функции. С этой целью предварительно отметим важное свойство тригонометрической системы — ее ортогональность в евклидовом пространстве $Q[-\pi, \pi]$ (вместо сегмента $[-\pi, \pi]$ можно взять любой другой сегмент длины 2π). Действительно:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx) dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)) dx = 0,$$

$$n \neq m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)) dx = 0,$$

$$n \neq m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin((n+m)x) + \sin((m-n)x)) dx = 0,$$

$$\forall n, m.$$

Предположим, что ряд Фурье в правой части (7.1) можно интегрировать почленно. Интегрируя от $-\pi$ до π , получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right) = a_0 \pi.$$

Отсюда,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Умножим теперь равенство (7.1) на $\cos kx$ и снова проинтегрируем от $-\pi$ до π . Учитывая ортогональность тригонометрической системы, получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \frac{a_k}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2kx) dx = a_k \pi,$$

откуда

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx. \quad (7.2)$$

Аналогично, умножая равенство (7.1) на $\sin kx$ и интегрируя от $-\pi$ до π , находим

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx. \quad (7.3)$$

Теперь, после того как мы нашли формулы для коэффициентов Фурье, мы можем для данной функции $f(x)$ вычислить эти коэффициенты, составить ряд Фурье и исследовать вопрос о сходимости этого ряда Фурье к функции $f(x)$. Заметим, что если ряд Фурье сходится к функции $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$, то поскольку коэффициенты Фурье учитывают значения функции только на сегменте $[-\pi, \pi]$, вне этого сегмента ряд Фурье будет сходиться к периодическому продолжению функции $f(x)$ с сегмента $[-\pi, \pi]$.

Пример 7.1. $f(x) = x$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx = 0; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} x d(\cos nx) = -\frac{2}{n\pi} \left(x \cos nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos nx dx \right) = \\
&= -\frac{2}{n\pi} \pi \cos \pi n = -\frac{2}{n} (-1)^n = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n}.
\end{aligned}$$

Таким образом, ряд Фурье для функции x есть

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx. \quad (7.4)$$

В следующем параграфе будет доказано, что этот ряд сходится к функции x при $x \in (-\pi, \pi)$.

Пример 7.2. $f(x) = |x|$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \pi; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx dx = \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} x d \sin nx = \\
&= \frac{2}{\pi n} \left(x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin nx dx \right) = \frac{2}{n^2 \pi} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^n - 1] = \\
&= \begin{cases} -\frac{4}{n^2 \pi}, & n = 2k - 1, k = 1, 2, \dots \\ 0, & n = 2k, \end{cases} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin nx dx = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, ряд Фурье для функции $|x|$ есть

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \quad (7.5)$$

В следующем параграфе будет доказано, что этот ряд сходится к функции $|x|$ при $x \in [-\pi, \pi]$.

При $x = 0$ получим сумму обратных квадратов нечетных чисел

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

При $0 \leq x < \pi$ функция $f(x) = x$ представима как рядом (7.4), так и рядом (7.5).

7.2 Поточечная сходимостъ тригонометрического ряда Фурье

Нам потребуется одно простое свойство периодических функций.

Лемма 7.1. *Если интегрируемая на любом конечном сегменте вещественной оси функция $f(x)$ периодична с периодом T , то $\forall a \in \mathbb{R}$ справедливо равенство*

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

Доказательство.

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx.$$

Но

$$\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(T+t)dt = - \int_a^0 f(t)dt.$$

Поэтому $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$, что и нужно. \square

Определение 7.2. *Кусочно-непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ называется кусочно-гладкой на этом сегменте, если ее производная $f'(x)$ существует и непрерывна всюду на $[a, b]$, за исключением, может быть, конечного числа точек, в которых существуют конечные правый и левый пределы функции $f'(x)$.*

Правый и левый пределы функции $f'(x)$ в точке x_0 будем обозначать $f'(x_0 + 0)$ и $f'(x_0 - 0)$. Следует отличать эти пределы от левой и правой производной в точке x_0 :

$$f'_r(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f'_l(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Пример 7.3. *Рассмотрим функцию*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Для нее $f'(0) = 0$, и поэтому $f'_r(x_0) = f'_l(x_0) = 0$. Но ее производная $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ не имеет предела ни справа, ни слева в точке 0.

Пример 7.4. Функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ является кусочно-непрерывной, $f'(0)$ не существует, но $f'(0+0) = f'(0-0) = 0$, поэтому $f(x)$ — кусочно-гладкая функция.

Пример 7.5. Функция

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

является непрерывной, $g'(0-0) = 0$, $g'(0+0) = +\infty$, поэтому функция $g(x)$ не является кусочно-гладкой.

Лемма 7.2. Если $f'(x)$ существует в правой полукрестности точки x_0 и существует конечная величина $f'(x_0+0) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x)$, то существует

$$\lim_{\xi \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \xi) - f(x_0 + 0)}{\xi} = f'(x_0 + 0).$$

Доказательство. Доказательство сразу следует из формулы конечных приращений Лагранжа. \square

Лемма 7.3 (об аппроксимации непрерывной на сегменте функции непрерывной кусочно-гладкой функцией). Если $f \in C[a, b]$, то $\forall \varepsilon > 0$ существует такая кусочно-гладкая функция $\ell \in C[a, b]$, что $\|f - \ell\|_{C[a, b]} < \varepsilon$.

Доказательство. По теореме Кантора функция f равномерно непрерывна на $[a, b]$, поэтому $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon/2, \quad \forall x', x'' \in [a, b], |x' - x''| < \delta.$$

Разобьем сегмент $[a, b]$ на частичные сегменты $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$ такие, что $|x_i - x_{i-1}| < \delta$, и построим ломаную $\ell(x)$, проходящую через все точки $(x_i, f(x_i))$. Тогда функция $\ell(x)$ — непрерывная, кусочно-гладкая, $\ell(x_i) = f(x_i)$ и $\forall x \in [x_{i-1}, x_i] \subset [a, b]$ выполнено:

$$|f(x) - \ell(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |\ell(x) - \ell(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.к. $|\ell(x) - \ell(x_i)| \leq |\ell(x_{i-1}) - \ell(x_i)| = |f(x_{i-1}) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $x_{i-1} \leq x \leq x_i$. Это и означает, что $\|f - \ell\|_{C[a, b]} < \varepsilon$. \square

Лемма 7.4. Если $f(x)$ кусочно-непрерывна² на $[a, b]$, то

$$J_1(\lambda) = \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx \rightarrow 0, \quad J_2(\lambda) = \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx \rightarrow 0 \text{ при } \lambda \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Докажем утверждение леммы для $J_1(\lambda)$; для $J_2(\lambda)$ доказательство совершенно аналогично.

1. Пусть сначала $f(x)$ — непрерывная, кусочно-гладкая функция. Разобьем сегмент $[a, b]$ на сегменты $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, $a = x_0$, $b = x_n$ непрерывности функции $f'(x)$. Рассмотрим один из таких сегментов $[x_{i-1}, x_i]$ и будем считать при этом $f'(x_{i-1}) = f'(x_{i-1} + 0)$, $f'(x_i) = f'(x_i - 0)$. Применяя формулу интегрирования по частям, получаем при $\lambda > 0$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \cos \lambda x dx = \frac{1}{\lambda} f(x) \sin \lambda x \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \frac{1}{\lambda} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x) \sin \lambda x dx.$$

Отсюда

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \cos \lambda x dx \right| \leq \frac{1}{\lambda} \left[|f(x_{i-1})| + |f(x_i)| + \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f'(x)| dx \right] := \frac{M_i}{\lambda}$$

и, суммируя по всем сегментам $[x_{i-1}, x_i]$, получаем

$$\begin{aligned} |J_1(\lambda)| &= \left| \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \cos \lambda x dx \right| \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n M_i \rightarrow \\ &\rightarrow 0 \text{ при } \lambda \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

2. Пусть теперь $f(x)$ — кусочно-непрерывная функция на сегменте $[a, b]$. Разобьем сегмент $[a, b]$ на сегменты $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, $a = x_0$, $b = x_n$ непрерывности функции $f(x)$. Рассмотрим один из таких сегментов $[x_{i-1}, x_i]$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. По лемме 7.3 существует непрерывная кусочно-гладкая функция $\ell(x)$ такая,

²В книге А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, М.: Наука, 1989, лемма 1, с. 469 требуется всего лишь суммируемость функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, поскольку непрерывно-дифференцируемые функции плотны в пространстве $\mathcal{L}^1[a, b]$.

что $|f(x) - \ell(x)| < \frac{\varepsilon}{2(x_i - x_{i-1})}$, $\forall x \in [x_{i-1}, x_i]$. Положим

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \cos \lambda x \, dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - \ell(x)) \cos \lambda x \, dx + \\ &+ \int_{x_{i-1}}^{x_i} \ell(x) \cos \lambda x \, dx =: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Тогда

$$|I_1| = \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - \ell(x)) \cos \lambda x \, dx \right| \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - \ell(x)| \, dx < \frac{\varepsilon}{2},$$

а по доказанному в п. 1

$$I_2 = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \ell(x) \cos \lambda x \, dx \rightarrow 0 \text{ при } \lambda \rightarrow \infty,$$

т.е. для заданного $\varepsilon > 0 \exists \lambda_0$ такое, что $|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $\lambda > \lambda_0$. Таким образом, при $\lambda > \lambda_0$:

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \cos \lambda x \, dx \right| \leq |I_1| + |I_2| < \varepsilon,$$

что и означает, что

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \cos \lambda x \, dx \rightarrow 0 \text{ при } \lambda \rightarrow \infty.$$

Следовательно, и

$$J_1 = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \cos \lambda x \, dx \rightarrow 0 \text{ при } \lambda \rightarrow \infty.$$

□

Теорема 7.1 (о поточечной сходимости тригонометрического ряда Фурье). Пусть $f(x)$ — кусочно-гладкая функция на сегменте $[-\pi, \pi]$.³ Тогда ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

сходится в каждой точке $x \in [-\pi, \pi]$ и для его суммы $S(x)$ справедливы равенства

1. $S(x) = \frac{1}{2} (f(x-0) + f(x+0)), \forall x \in (-\pi, \pi)$, в частности, $S(x) = f(x)$ в точках непрерывности $f(x)$;
2. $S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2} (f(-\pi+0) + f(\pi-0))$.

Доказательство. Продолжим периодически функцию $f(x)$ на всю числовую прямую с периодом 2π . Рассмотрим частичную сумму $S_n(x)$ ряда Фурье в произвольной точке $x \in [-\pi, \pi]$. С учетом формул (7.2), (7.3) для коэффициентов ряда Фурье имеем:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \\ &+ \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) [\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx] dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right] f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{D}_n(t-x) f(t) dt = \\ &= \int_{-\pi-x}^{\pi-x} \mathcal{D}_n(\xi) f(x+\xi) d\xi \stackrel{\text{лемма 7.1}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{D}_n(\xi) f(x+\xi) d\xi = \\ &= \int_{-\pi}^0 \mathcal{D}_n(\xi) f(x+\xi) d\xi + \int_0^{\pi} \mathcal{D}_n(\xi) f(x+\xi) d\xi =: S_n^-(x) + S_n^+(x), \end{aligned}$$

³В книге А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, М.: Наука, 1989, Теорема 1, с. 469–470 требуется всего лишь суммируемость функции $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ и существование при фиксированном x и некотором $\delta > 0$ интеграла

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt$$

(условие Дини). Тогда ряд Фурье при данном x сходится к $f(x)$.

где

$$\mathcal{D}_n(\xi) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k\xi \right) \quad \text{— ядро Дирихле порядка } n.$$

Для доказательства первого утверждения теоремы нам достаточно доказать, что $S_n^+(x) \rightarrow \frac{1}{2}f(x+0)$, $S_n^-(x) \rightarrow \frac{1}{2}f(x-0)$ при $n \rightarrow \infty$.

Поскольку

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{D}_n(\xi) d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k\xi \right) d\xi = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = 1,$$

и т.к. $\mathcal{D}_n(\xi)$ — четная функция, то

$$\int_{-\pi}^0 \mathcal{D}_n(\xi) d\xi = \int_0^{\pi} \mathcal{D}_n(\xi) d\xi = \frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$S_n^+(x) - \frac{1}{2}f(x+0) = \int_0^{\pi} [f(x+\xi) - f(x+0)] \mathcal{D}_n(\xi) d\xi,$$

$$S_n^-(x) - \frac{1}{2}f(x-0) = \int_{-\pi}^0 [f(x+\xi) - f(x-0)] \mathcal{D}_n(\xi) d\xi.$$

Преобразуем выражение для $\mathcal{D}_n(\xi)$. Для этого умножим его на $\sin \frac{\xi}{2}$ и воспользуемся формулой:

$$\sin \frac{\xi}{2} \cos k\xi = \frac{1}{2} \left[\sin\left(\frac{\xi}{2} + k\xi\right) - \sin\left(k\xi - \frac{\xi}{2}\right) \right].$$

Получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_n(\xi) \sin \frac{\xi}{2} &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} \sin \frac{\xi}{2} + \frac{1}{2} \left(\sin \frac{3\xi}{2} - \sin \frac{\xi}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\sin \frac{5\xi}{2} - \sin \frac{3\xi}{2} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{1}{2} \left(\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\xi - \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\xi \right) \right] = \frac{1}{2\pi} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\xi. \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\mathcal{D}_n(\xi) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\xi}{\sin \frac{\xi}{2}}.$$

При $\xi \rightarrow 0$ это выражение имеет предел $\mathcal{D}_n(0) := \frac{1}{\pi}(n + \frac{1}{2})$.

Отсюда

$$\begin{aligned} S_n^+(x) - \frac{1}{2}f(x+0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+\xi) - f(x+0)] \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\xi}{2 \sin \frac{\xi}{2}} d\xi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left\{ \frac{f(x+\xi) - f(x+0)}{\xi} \cdot \frac{\xi/2}{\sin \xi/2} \right\} \sin(n + \frac{1}{2})\xi d\xi =: J(x, n). \end{aligned}$$

Функция, стоящая в фигурных скобках, является кусочно-гладкой при $0 < \xi \leq \pi$ и имеет предел, равный $f'(x+0)$ при $\xi \rightarrow +0$. Следовательно, эта функция кусочно-непрерывна на сегменте $[0, \pi]$. Отсюда по лемме 7.4 следует, что $J(x, n) \rightarrow 0, \forall x \in [-\pi, \pi]$ при $n \rightarrow \infty$.

В точности так же доказывается, что $S_n^-(x) \rightarrow \frac{1}{2}f(x-0)$ при $n \rightarrow \infty$.

Тем самым, первое утверждение теоремы доказано. В частности, если x — точка непрерывности функции $f(x)$, то $f(x+0) = f(x-0) = f(x)$ и $S(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$.

С учетом периодичности функции $f(x)$ из первого утверждения теоремы мы получаем:

$$\begin{aligned} S(\pi) &= \frac{1}{2}(f(\pi+0) + f(\pi-0)) = \frac{1}{2}(f(-\pi+0) + f(\pi-0)), \\ S(-\pi) &= \frac{1}{2}(f(-\pi+0) + f(-\pi-0)) = \frac{1}{2}(f(-\pi+0) + f(\pi-0)), \end{aligned}$$

что доказывает утверждение 2 и всю теорему. \square

Мы доказали, что для сходимости ряда Фурье функции $f(x)$ в каждой точке сегмента $[-\pi, \pi]$ достаточно кусочной гладкости данной функции. Это условие не является необходимым и может быть ослаблено, что требует (в который уже раз) знания интеграла Лебега. Однако одной лишь непрерывности функции $f(x)$ не достаточно для сходимости ряда Фурье в каждой точке сегмента $[-\pi, \pi]$ и существуют непрерывные на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции, ряд Фурье которых расходится на всюду плотном подмножестве сегмента $[-\pi, \pi]$. Однако, как следует из следующей теоремы Фейера, непрерывная периодическая функция однозначно восстанавливается по своему ряду Фурье с помощью некоторой регуляризации.

Теорема 7.2 (Фейер⁴). Пусть $f(x)$ — непрерывная периодическая функция с периодом 2π и $\{S_n(x)\}_{n=0}^\infty$ — последовательность частичных

⁴Фейер Липот (1880–1959) — венгерский математик

сумм ее ряда Фурье ($S_0 = \frac{a_0}{2}$). Тогда последовательность частичных сумм Фейера

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(x) \tag{7.6}$$

сходится к функции $f(x)$ равномерно на \mathbb{R} .⁵

Доказательство. Из доказательства теоремы 7.1 следует следующее представление для частичных сумм ряда Фурье:

$$S_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) \frac{\sin \frac{2k+1}{2}z}{2 \sin \frac{z}{2}} dz. \tag{7.7}$$

Подставив (7.7) в формулу (7.6), получим следующее выражение:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin \frac{2k+1}{2}z}{\sin \frac{z}{2}} \right\} f(x+z) dz, \tag{7.8}$$

которое с помощью формулы⁶

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1)z = \frac{\sin^2 nz}{\sin z}$$

может быть представлено в виде так называемого *интеграла Фейера*:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin n \frac{z}{2}}{\sin \frac{z}{2}} \right)^2 f(x+z) dz = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(z) f(x+z) dz, \tag{7.9}$$

⁵Условие и утверждения теоремы Фейера симметричны, поскольку относятся к пространству $C[-\pi, \pi]$. Аналог теоремы Фейера для пространства $\mathcal{L}^1[-\pi, \pi]$ утверждает, что если $f \in \mathcal{L}^1[-\pi, \pi]$, то суммы Фейера функции f сходятся к ней по норме пространства $\mathcal{L}^1[-\pi, \pi]$.

⁶Эту формулу легко получить, суммируя по k равенства

$$2 \sin(2k+1)z \sin z = \cos(2k+1-z)z - \cos(2k+1+z)z = \cos 2kz - \cos 2(k+1)z :$$

$$2 \sin z \sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1)z = \sum_{k=0}^{n-1} (\cos(2k+1-z)z - \cos(2k+1+z)z) = 1 - \cos 2nz = 2 \sin^2 nz$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1)z = \frac{\sin^2 nz}{\sin z}.$$

где

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi n} \left(\frac{\sin n \frac{z}{2}}{\sin \frac{z}{2}} \right)^2$$

— *ядро Фейера*. Нам нужно доказать, что при $n \rightarrow \infty$ интеграл (7.9) равномерно стремится к $f(x)$. Отметим следующие свойства ядра Фейера:

1.

$$\Phi_n(z) \geq 0,$$

2.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(z) dz = 1,$$

3. при любом фиксированном $\delta \in (0, \pi)$ и $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(z) dz = \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(z) dz =: \eta_n(\delta) \rightarrow 0.$$

Первое из этих свойств очевидно, второе получается из равенства (7.9), если положить $f(x) \equiv 1$ и учесть, что тогда $\sigma_n(x) \equiv 1$ при всех n ; наконец, третье свойство сразу вытекает из того, что если $\delta < z \leq \pi$, то $\sin \frac{z}{2} \geq \frac{\delta}{\pi}$ (поскольку $\sin \xi \geq \frac{2}{\pi} \xi$, $0 \leq \xi \leq \pi/2$ ввиду выпуклости функции $\sin \xi$, $0 \leq \xi \leq \pi/2$) и, следовательно,

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi n} \left(\frac{\sin n \frac{z}{2}}{\sin \frac{z}{2}} \right)^2 \leq \frac{1}{2\pi n} \left(\frac{\pi}{\delta} \right)^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

С помощью этих свойств ядра Фейера нетрудно доказать теорему. Так как функция f — непрерывная и периодическая, то она ограничена и равномерно непрерывна на всей прямой. Иначе говоря, существует такая постоянная M , что для всех x

$$|f(x)| \leq M \tag{7.10}$$

и для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon/2, \tag{7.11}$$

как только $|x'' - x'| < \delta$. Для доказательства теоремы нам нужно оценить разность (получаемую в силу свойства 2 ядра Фейера)

$$f(x) - \sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x+z))\Phi_n(z)dz,$$

которую можно представить в виде суммы следующих трех интегралов:

$$J_- = \int_{-\pi}^{-\delta} (f(x) - f(x+z))\Phi_n(z)dz,$$

$$J_0 = \int_{-\delta}^{\delta} (f(x) - f(x+z))\Phi_n(z)dz,$$

$$J_+ = \int_{\delta}^{\pi} (f(x) - f(x+z))\Phi_n(z)dz.$$

Из (7.10) и (7.11) непосредственно вытекают следующие оценки:

$$|J_-| \leq 2M\eta_n(\delta),$$

$$|J_+| \leq 2M\eta_n(\delta),$$

$$|J_0| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(z)dz < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем теперь n_0 настолько большим, чтобы при $n \geq n_0$ и данном δ выполнялось неравенство

$$2M\eta_n(\delta) < \varepsilon/4.$$

Тогда

$$|f(x) - \sigma_n(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon,$$

откуда в силу произвольности ε и следует утверждение теоремы. \square

Вернемся к обсуждению рядов Фурье. Для них имеет место *принцип локализации*, который утверждает, что сходимость ряда Фурье кусочно-непрерывной функции $f(x)$ в произвольной точке x_0 зависит исключительно от поведения функции $f(x)$ в сколь угодно малой окрестности точки x_0 , несмотря на то что коэффициенты ряда Фурье выражаются

через интеграл по всему сегменту $[-\pi, \pi]$. Действительно, из доказательства теоремы 7.1 следует, что $\forall \delta: 0 < \delta < \pi$ имеем:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\xi}{\sin \frac{\xi}{2}} f(x + \xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x + \xi) + f(x - \xi)}{\sin \frac{\xi}{2}} \sin \left[(n + \frac{1}{2})\xi \right] d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} \frac{f(x + \xi) + f(x - \xi)}{\sin \frac{\xi}{2}} \sin \left[(n + \frac{1}{2})\xi \right] d\xi + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} \frac{f(x + \xi) + f(x - \xi)}{\sin \frac{\xi}{2}} \sin \left[(n + \frac{1}{2})\xi \right] d\xi. \end{aligned}$$

Теперь достаточно заметить, что в силу леммы 7.4 последнее слагаемое при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю.

В условиях теоремы 7.1 тригонометрический ряд Фурье сходится к периодическому продолжению на \mathbb{R} функции $f(x)$, определенной первоначально на $[-\pi, \pi]$.

Если функция $f(x)$ имеет точки разрыва на сегменте $[-\pi, \pi]$, а также, если $f(x)$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$, но $f(-\pi) \neq f(\pi)$, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится на $[-\pi, \pi]$ неравномерно (в силу непрерывности равномерного предела последовательности непрерывных функций).

Если $f(x)$ — нечетная функция на $[-\pi, \pi]$, то ее разложение в ряд Фурье содержит только синусы, а если четная, то только косинусы. В частности, если $f(x)$ задана на $[0, \pi]$, то ее можно продолжить на $[-\pi, 0]$ как четным, так и нечетным образом, и представить на сегменте $[0, \pi]$ как в виде ряда по косинусам, так и в виде ряда по синусам. Вспомним примеры из предыдущего параграфа:

$$\begin{aligned} x &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx, \quad 0 \leq x < \pi, \\ x &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}, \quad 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

Поскольку функция x после периодического продолжения с сегмента $[-\pi, \pi]$ на \mathbb{R} имеет разрывы в точках πk , $k \in \mathbb{Z}$, то первый из этих ря-

дов сходится неравномерно. В то же время, по признаку Вейерштрасса, второй ряд сходится равномерно на \mathbb{R} .

Вся изложенная теория переносится на случай равенства периода функции $f(x)$ величине 2ℓ заменой $x \rightarrow \frac{\pi}{\ell}x$. Ортогональную тригонометрическую систему на сегменте $[-\ell, \ell]$ образуют функции:

$$1, \cos \frac{\pi nx}{\ell}, \sin \frac{\pi nx}{\ell}, n \in \mathbb{N}.$$

Ряд Фурье функции $f(x)$ по этой системе функций имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi nx}{\ell} + b_n \sin \frac{\pi nx}{\ell} \right),$$

где

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{\pi nx}{\ell} dx, n \in \{0\} \cup \mathbb{N}, b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi nx}{\ell} dx, n \in \mathbb{N}.$$

7.3 Комплексная форма ряда Фурье

Вместо системы периодических функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

можно рассмотреть систему комплексных экспонент $\exp inx$, $n \in \mathbb{Z}$, удобную тем, что в этой системе нет разделения функций на два типа и все формулы единообразны. Поскольку связь между этими системами

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx, \cos nx = \frac{1}{2} (e^{inx} + e^{-inx}), \sin nx = \frac{1}{2i} (e^{inx} - e^{-inx})$$

затрагивает только n -ые гармоники, то все утверждения, касающиеся сходимости рядов Фурье по косинусам и синусам, справедливы и для рядов по экспонентам.

Для нахождения коэффициентов Фурье по системе экспонент умножим ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

на e^{-imx} и проинтегрируем от $-\pi$ до π . Ввиду очевидной формулы

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 2\pi, & n = m \end{cases}$$

получим

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \quad (7.12)$$

Этот способ нахождения формул для коэффициентов Фурье предполагает возможность переставить суммирование и интегрирование. Однако к тем же формулам (7.12) можно прийти несколько более долгим путем, используя формулы (7.2), (7.3) и связь между экспонентами e^{inx} и функциями $\cos nx$, $\sin nx$.

7.4 Интеграл Фурье

Рассмотрим ряд Фурье функции $f(x)$ на $[-l, l]$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m \left(a_k \cos \frac{\pi}{l} kx + b_k \sin \frac{\pi}{l} kx \right). \quad (7.13)$$

Частоты $\lambda_k = \frac{\pi}{l} k$ гармоник этого ряда образуют бесконечно большую последовательность, причем разность $\frac{\pi}{l}$ двух соседних частот тем меньше, чем больше l , т.е. с увеличением l соседние частоты становятся все ближе друг к другу. В пределе $l \rightarrow \infty$ получается разложение функции $f(x)$ по гармоникам с непрерывно изменяющейся частотой λ от 0 до ∞ , а ряд Фурье переходит в так называемый *интеграл Фурье*.

Получим сначала с помощью нестрогих рассуждений выражение для интеграла Фурье. Подставляя выражение для коэффициентов Фурье в ряд (7.13), преобразуем его к виду

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\pi}{l}}_{\Delta\lambda_n} \int_{-l}^l f(t) \cos \underbrace{\frac{\pi n}{l}}_{\lambda_n} (t-x) dt = \\ & = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-l}^l f(t) \cos \lambda_n (t-x) dt \right] \Delta\lambda_n. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Будем считать, что функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой прямой, т.е. несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ сходится. Перейдем к пределу при $l \rightarrow +\infty$. Тогда первое слагаемое в (7.14) стремится к нулю, а второе переходит в следующее выражение для интеграла

Фурье

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(t-x) dt.$$

Получим теперь условия представимости функции $f(x)$ интегралом Фурье.

Теорема 7.3. Пусть функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ является кусочно-гладкой на любом сегменте числовой прямой и абсолютно интегрируема на \mathbb{R} . Тогда справедливо равенство

$$\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(t-x) dt. \quad (7.15)$$

Доказательство. Согласно определению несобственного интеграла, нам нужно доказать равенство

$$\begin{aligned} \lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} S_\Lambda &:= \lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\Lambda \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t) \cos \lambda(t-x) dt] d\lambda = \\ &= \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]. \end{aligned} \quad (7.16)$$

По признаку Вейерштрасса в силу абсолютной интегрируемости функции $f(x)$ на \mathbb{R} внутренний интеграл в левой части равенства (7.16) сходится равномерно по $\lambda \geq 0$. Поэтому в силу результата главы 6 можно поменять порядок интегрирования в (7.16) и получить

$$\begin{aligned} S_\Lambda(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[\int_0^\Lambda \cos \lambda(t-x) d\lambda \right] dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[\frac{\sin \Lambda(t-x)}{t-x} \right] dt \stackrel{t-x=\xi}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+\xi) \frac{\sin \Lambda \xi}{\xi} d\xi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 f(x+\xi) \frac{\sin \Lambda \xi}{\xi} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x+\xi) \frac{\sin \Lambda \xi}{\xi} d\xi := S_\Lambda^-(x) + S_\Lambda^+(x). \end{aligned}$$

В силу равенства

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \Lambda \xi}{\xi} d\xi := \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \Lambda > 0, \\ 0, & \Lambda = 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \Lambda < 0 \end{cases}$$

получаем

$$S_{\Lambda}^{+}(x) - \frac{1}{2}f(x+0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(x+\xi) - f(x+0)}{\xi} \sin \Lambda \xi d\xi =: \mathcal{J}^{+}(x, \Lambda),$$

$$S_{\Lambda}^{-}(x) - \frac{1}{2}f(x-0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{f(x+\xi) - f(x-0)}{\xi} \sin \Lambda \xi d\xi =: \mathcal{J}^{-}(x, \Lambda).$$

Для доказательства теоремы нам достаточно доказать, что $\mathcal{J}^{+}(x, \Lambda), \mathcal{J}^{-}(x, \Lambda) \rightarrow 0, \Lambda \rightarrow \infty$.

Хотя функция $\frac{f(x+\xi) - f(x+0)}{\xi}$ является кусочно-непрерывной при $\xi \geq 0$, мы не можем просто применить лемму 7.4, поскольку $\mathcal{J}^{+}(x, \Lambda)$ и $\mathcal{J}^{-}(x, \Lambda)$ являются несобственными интегралами первого рода.

Чтобы обойти эту трудность, представим $\mathcal{J}^{+}(x, \Lambda)$ в виде

$$\mathcal{J}^{+}(x, \Lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^A \frac{f(x+\xi) - f(x+0)}{\xi} \sin \Lambda \xi d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_A^{+\infty} f(x+\xi) \frac{\sin \Lambda \xi}{\xi} d\xi - \frac{f(x+0)}{\pi} \int_A^{+\infty} \frac{\sin \Lambda \xi}{\xi} d\xi =: \mathcal{J}_1^{+} + \mathcal{J}_2^{+} + \mathcal{J}_3^{+},$$

где $A > 0$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и возьмем $A \geq 1$ столь большое, чтобы выполнялось неравенство

$$|\mathcal{J}_2^{+}| \leq \frac{1}{\pi} \int_A^{+\infty} |f(x+\xi)| \cdot \left| \frac{\sin \Lambda \xi}{\xi} \right| d\xi \leq \frac{1}{\pi} \int_A^{+\infty} |f(x+\xi)| d\xi < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Это возможно, поскольку интеграл $\int_0^{+\infty} |f(x+\xi)| d\xi$ сходится и $\left| \frac{\sin \Lambda \xi}{\xi} \right| \leq 1$ при $\xi \geq A \geq 1$. Зафиксируем это значение A .

В силу леммы 7.4, $\mathcal{J}_1^+ \rightarrow 0$ при $\Lambda \rightarrow +\infty$, и поэтому $\exists \Lambda_1$ такое, что $|\mathcal{J}_1^+| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $\Lambda > \Lambda_1$.

Наконец,

$$\int_A^{+\infty} \frac{\sin \Lambda \xi}{\xi} d\xi \stackrel{\Lambda \xi = t}{=} \int_{\Lambda A}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

и т.к. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ сходится, то $\exists \Lambda_2$ такое, что $|\mathcal{J}_3^+| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $\Lambda > \Lambda_2$.

Следовательно, при $\Lambda > \max(\Lambda_1, \Lambda_2)$ справедливо:

$$|\mathcal{J}^+(x, \Lambda)| \leq |\mathcal{J}_1^+| + |\mathcal{J}_2^+| + |\mathcal{J}_3^+| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

а это и означает, что $\mathcal{J}^+(x, \Lambda) \rightarrow 0$ при $\Lambda \rightarrow +\infty$.

Аналогично доказывается, что $\mathcal{J}^-(x, \Lambda) \rightarrow 0$ при $\Lambda \rightarrow +\infty$. □

Замечание 7.1. Условия, вывод и доказательство этой теоремы похожи на условия, вывод и доказательство теоремы о поточечной сходимости ряда Фурье.

7.5 Преобразование Фурье

Пусть выполнены условия теоремы 7.3. Поскольку функция

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(x - t) dt$$

относительно λ является четной, а функция

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \lambda(x - t) dt$$

— нечетной, то по формуле Эйлера получаем

$$\begin{aligned} \text{в. п. } & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(i\lambda(x - t)) dt = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\lambda(x - t)) dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \text{v. p.} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\lambda(x-t)) dt = \\
& = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\lambda(x-t)) dt + 0 = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)].
\end{aligned}$$

Для непрерывной функции $f(x)$ эту формулу можно записать в виде двух очень похожих формул:

$$\mathcal{F} : f(x) \rightarrow \mathcal{F}[f](\lambda) \equiv \hat{f}(\lambda) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt$$

— прямое преобразование Фурье и

$$\mathcal{F}^{-1} : \hat{f}(\lambda) \rightarrow \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) \equiv f(x) := \text{v. p.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$$

— обратное преобразование Фурье.

Функция $\hat{f}(\lambda)$ называется *Фурье-образом функции $f(x)$* , а функция $f(x)$ — *оригиналом* функции $\hat{f}(\lambda)$.

Если непрерывная функция $f(x)$ задана лишь при $x \geq 0$, то продолжая ее четным или нечетным образом на всю числовую ось, получаем *косинус-преобразование Фурье*:

$$f(x) \rightarrow \hat{f}_c(\lambda) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \lambda t dt,$$

$$\hat{f}_c(\lambda) \rightarrow f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \hat{f}_c(\lambda) \cos \lambda x d\lambda, \quad x \geq 0$$

и *синус-преобразование Фурье*:

$$f(x) \rightarrow \hat{f}_s(\lambda) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \lambda t dt,$$

$$\hat{f}_s(\lambda) \rightarrow f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \hat{f}_s(\lambda) \sin \lambda x d\lambda, \quad x > 0.$$

Заметим, что при $x = 0$ последний интеграл равен нулю, независимо от справедливости равенства $f(0) = 0$.

7.6 Понятие общего ряда Фурье

Тригонометрический ряд Фурье является частным случаем разложения элемента бесконечномерного евклидова пространства по счетной системе элементов этого пространства.

Определение 7.3. Последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов евклидова пространства \mathcal{E} называется ортогональной системой, если ее элементы попарно ортогональны. Ортогональная система называется ортонормированной, если нормы всех ее элементов равны 1.

Пример 7.6. В пространстве $Q[-\pi, \pi]$ нормированная тригонометрическая система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \dots$$

является ортонормированной.

Пример 7.7. Еще один пример ортогональной системы в пространстве $Q[-1, 1]$ дают полиномы Лежандра⁷

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Система $\psi_n(x) := \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x)$ является ортонормированной системой в пространстве $Q[-1, 1]$.

Ортогональность этой системы устанавливается просто: если $n > m$, то, интегрируя по частям, получаем

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{1}{2^m m!} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} [(x^2 - 1)^m] dx = 0,$$

поскольку $\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} [(x^2 - 1)^m] = 0$.

Нормировочный множитель можно вычислить, пользуясь уже имеющимися у нас знаниями о В и Г функциях. Действительно,

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \right) \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n dx = (-1)^n \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (x^2 - 1)^n dx =$$

⁷Лежандр Андриен Мари (1752–1833) — французский математик.

$$\begin{aligned}
&= (-1)^n \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n (2n)! dx \stackrel{x=t-1}{=} (-1)^n (2n)! \int_0^2 t^n (t-2)^n dt \stackrel{t=2v}{=} \\
&\stackrel{t=2v}{=} (2n)! 2^{2n+1} \int_0^1 v^n (1-v)^n dv = (2n)! 2^{2n+1} B(n+1, n+1) = \\
&= (2n)! 2^{2n+1} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} = 2 \frac{(2^n n!)^2}{2n+1}.
\end{aligned}$$

Определение 7.4. *Рядом Фурье элемента f по ортогональной системе $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ называется ряд $\sum_{n=1}^\infty f_n \psi_n$, где $f_n := \frac{(f, \psi_n)}{\|\psi_n\|^2}$ — коэффициенты Фурье элемента f . Если система $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ — ортонормированная, то $f_n = (f, \psi_n)$.*

Такое выражение для коэффициентов Фурье элемента f получается умножением равенства $f = \sum_{n=1}^\infty f_n \psi_n$ скалярно на ψ_k . Ряд Фурье является обобщением разложения по ортогональному базису элементов конечномерного евклидова пространства.

Определение 7.5. *Ряд Фурье элемента f сходится к этому элементу по норме пространства \mathcal{E} , если $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\sum_{k=1}^n f_k \psi_k - f\| = 0$.*

Теорема 7.4. *Пусть $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ — ортонормированная система элементов евклидова пространства \mathcal{E} . При фиксированном n из всех сумм вида $\sum_{k=1}^n c_k \psi_k$, $c_k \in \mathbb{R}$ наименьшее отклонение от элемента f по норме пространства \mathcal{E} имеет n -я частичная сумма $\sum_{k=1}^n f_k \psi_k$ ряда Фурье элемента f .*

Доказательство. Используя ортонормированность системы $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$, получаем:

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^n c_k \psi_k - f \right\|^2 &= \left(\sum_{k=1}^n c_k \psi_k - f, \sum_{k=1}^n c_k \psi_k - f \right) = \sum_{k=1}^n c_k^2 \underbrace{(\psi_k, \psi_k)}_{=1} - \\
- 2 \sum_{k=1}^n c_k \underbrace{(f, \psi_k)}_{=f_k} + (f, f) &= \sum_{k=1}^n (c_k^2 - 2c_k f_k) + \|f\|^2 = \sum_{k=1}^n (c_k - f_k)^2 - \\
&\quad - \sum_{k=1}^n f_k^2 + \|f\|^2.
\end{aligned}$$

Это означает, что величина $\|\sum_{k=1}^n c_k \psi_k - f\|^2$ принимает минимальное значение при $c_k = f_k$, что и требуется. \square

Геометрический смысл теоремы 7.4. Множество всевозможных линейных комбинаций $\sum_{k=1}^n c_k \psi_k$ образуют подпространство евклидова пространства \mathcal{E} . Мы ищем наименьшее отклонение элемента f от данного подпространства, т.е. расстояние между f и данным подпространством. Из всевозможных отрезков $f - \sum_{k=1}^n c_k \psi_k$, соединяющих f с этим подпространством, наименьшую “длину” (норму) имеет тот, который перпендикулярен к подпространству, а для этого он должен быть перпендикулярен к каждому базисному элементу ψ_i , $i = 1, \dots, n$, этого подпространства, откуда $(f - \sum_{k=1}^n c_k \psi_k, \psi_i) = 0$, т.е. $c_i = (f, \psi_i) = f_i$, $i = 1, \dots, n$. Таким образом, наименьшим по норме перпендикуляром является $f - \sum_{k=1}^n f_k \psi_k$.

Следствие 7.1. Из доказательства теоремы 7.4 получаем тождество Бесселя⁸

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \psi_k - f \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2, \quad (7.17)$$

а ввиду неотрицательности левой части тождества Бесселя, и неравенство

$$\sum_{k=1}^n f_k^2 \leq \|f\|^2.$$

Отсюда следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^n f_k^2$ и неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \leq \|f\|^2. \quad (7.18)$$

Пример 7.8. Рассмотрим в пространстве $Q[-\pi, \pi]$ ряд Фурье

$$\frac{\bar{a}_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\bar{a}_n}{\sqrt{\pi}} \cos nx + \frac{\bar{b}_n}{\sqrt{\pi}} \sin nx \right) \quad (7.19)$$

функции $f \in Q[-\pi, \pi]$ по ортонормированной системе функций

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, n = 1, 2, \dots \right\}.$$

Если ввести обозначения $\frac{\bar{a}_0}{\sqrt{2\pi}} = \frac{a_0}{2}$, $\frac{\bar{a}_n}{\sqrt{\pi}} = a_n$, $\frac{\bar{b}_n}{\sqrt{\pi}} = b_n$, то этот ряд примет вид тригонометрического ряда Фурье.

⁸Бессель Фридрих Вильгельм (1784–1846) — немецкий астроном и математик.

Ряд (7.19) поточечно может и не сходиться (если функция f не является кусочно-гладкой), однако для его коэффициентов выполнено неравенство Бесселя

$$\bar{a}_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{a}_n^2 + \bar{b}_n^2) \leq \|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx,$$

откуда, разделив на π , получим неравенство

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

Из этого неравенства следует, что коэффициенты a_n, b_n кусочно-непрерывной функции f стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Это же можно получить и из леммы 7.4.

7.7 Замкнутые и полные ортогональные системы

Необходимо выяснить условия, при которых ряд Фурье элемента $f \in \mathcal{E}$ сходится к f по норме пространства \mathcal{E} .

Определение 7.6. Ортогональная (в частности, ортонормированная) система элементов $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в бесконечномерном евклидовом пространстве \mathcal{E} называется замкнутой, если любой элемент $f \in \mathcal{E}$ можно сколь угодно точно приблизить по норме этого пространства конечной линейной комбинацией элементов системы $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \sum_{k=1}^n c_k \psi_k$ такая, что $\|f - \sum_{k=1}^n c_k \psi_k\| < \varepsilon$.

Отметим, что в этом случае тем более выполнено неравенство $\|f - \sum_{k=1}^n f_k \psi_k\| < \varepsilon$, где f_k — коэффициенты Фурье элемента f по системе $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Теорема 7.5 (необходимое и достаточное условие замкнутости ортонормированной системы). Для того чтобы ортонормированная система $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ была замкнутой, необходимо и достаточно, чтобы $\forall f \in \mathcal{E}$ выполнялось равенство Парсеваля⁹

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2, \quad (7.20)$$

⁹Парсеваль Марк Антуан (1755–1836) — французский математик. Ясно, что равенство Парсеваля есть не что иное, как теорема Пифагора в бесконечномерном пространстве.

где $f_k := (f_k, \psi)$ — коэффициенты Фурье элемента f по системе $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Доказательство. Воспользуемся тождеством Бесселя (7.17):

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \psi_k - f \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2. \quad (7.21)$$

Если система $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — замкнутая, то $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ такое, что левая часть тождества $< \varepsilon$ при $n = N$. Следовательно, правая часть тождества Бесселя $< \varepsilon$ при $n \geq N$, а это значит, что

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = 0,$$

т.е. справедливо равенство Парсеваля. Обратно, если справедливо равенство Парсеваля, то $\forall \varepsilon > 0 \exists n$ такое, что правая часть тождества Бесселя $< \varepsilon$. Следовательно и левая часть $< \varepsilon$, а это означает, что $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — замкнутая система. \square

Следствие 7.2. Если ортонормированная система $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — замкнутая, то ряд Фурье любого элемента $f \in \mathcal{E}$ по этой системе сходится к f по норме данного пространства, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^n f_k \psi_k - f \right\| = 0.$$

Доказательство. В самом деле, если $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — замкнутая система, то по теореме 7.5 в силу тождества Парсеваля выполнено

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2 \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

а тогда из тождества Бесселя следует, что

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \psi_k - f \right\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

что и требуется доказать. \square

Замечание 7.2. Замкнутую систему в бесконечномерном евклидовом пространстве можно назвать базисом этого пространства, поскольку ряд Фурье любого элемента $f \in \mathcal{E}$ сходится к f по норме \mathcal{E} .

Докажем единственность такого разложения. Не ограничивая общности, можно считать систему $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормированной. Предположим, что ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} f'_k \psi_k$$

сходятся к элементу $f \in \mathcal{E}$ по норме пространства \mathcal{E} . Тогда

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \psi_k - \sum_{k=1}^n f'_k \psi_k \right\| \leq \left\| \sum_{k=1}^n f_k \psi_k - f \right\| + \left\| f - \sum_{k=1}^n f'_k \psi_k \right\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

откуда

$$\left\| \sum_{k=1}^n (f_k - f'_k) \psi_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n (f_k - f'_k)^2 \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

следовательно $f_k = f'_k$, что и означает единственность разложения элемента f .

Замечание 7.3. Ниже мы докажем замкнутость тригонометрической системы в пространстве $Q[-\pi, \pi]$, откуда в силу следствия 7.2 следует, что для любой функции $f \in Q[-\pi, \pi]$ ее ряд Фурье сходится к f по норме пространства $Q[-\pi, \pi]$, т.е. в среднеквадратичном, что, конечно, не означает поточечной сходимости.

Остается открытым вопрос о существовании замкнутых систем в бесконечномерных евклидовых пространствах. Ниже мы определим гильбертовы пространства, для которых всегда существуют замкнутые системы.

Определение 7.7. Ортогональная (в частности, ортонормированная) система элементов $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в бесконечномерном евклидовом пространстве \mathcal{E} называется *полной*, если единственным элементом f , ортогональным ко всем элементам ψ_n данной системы, является нулевой элемент.¹⁰

Теорема 7.6. Любая замкнутая система элементов в пространстве \mathcal{E} является *полной*.

¹⁰В книге Будака, Фомина термины замкнутости и полноты системы элементов переставлены, а в книге Ильина, Позняка имеют тот же смысл, что и у нас.

Доказательство. Пусть $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — замкнутая система и пусть $f \in \mathcal{E}$ — элемент, ортогональный всем элементам данной системы. Поскольку $f_n = (f, \psi_n) = 0$, то в силу равенства Парсеваля, справедливого для замкнутых систем, имеем $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = 0$, откуда по определению нормы $f = 0$. \square

Замечание 7.4. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно; в книге Ильина, Позняка (ч. II, гл. 11, §3, п. 2) с помощью интеграла Лебега построен пример полной системы в бесконечномерном не полном евклидовом пространстве, которая не является замкнутой.

Определение 7.8. Нормированное пространство L называется сепарабельным, если в нем существует счетное всюду плотное подмножество L_1 , т.е. $\forall f \in L$ существует последовательность $f_i \in L_1$ такая, что $\|f_i - f\| \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$.

Среди бесконечномерных евклидовых пространств особое место занимают гильбертовы пространства.

Определение 7.9. Бесконечномерное полное сепарабельное евклидово пространство называется гильбертовым пространством.

Пример 7.9. Определим гильбертово пространство ℓ_2 :

$$\ell_2 := \left\{ \mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \mid x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \right\}.$$

Очевидно, что ℓ_2 — линейное пространство относительно поэлементной суммы последовательностей и умножения последовательностей на вещественные числа. Определим в ℓ_2 скалярное произведение

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} (x_i^2 + y_i^2) < \infty.$$

Нам остается проверить полноту и сепарабельность пространства ℓ_2 .

Пусть последовательность $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \ell_2$ фундаментальна. Это означает, что $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ такое, что

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n+p}\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_{n,i} - x_{n+p,i})^2 < \varepsilon \text{ при } \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}. \quad (7.22)$$

Но тогда при любом фиксированном i фундаментальна и последовательность $\{x_{n,i}\}_{n=1}^{\infty}$, откуда $x_{n,i} \rightarrow y_i \in \mathbb{R}, n \rightarrow \infty$. Покажем, теперь,

что $\mathbf{y} := \{y_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell_2$ и $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{y} := \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, $n \rightarrow \infty$. Из неравенства (7.22) следует, что для любого фиксированного m

$$\sum_{i=1}^m (x_{n,i} - x_{n+p,i})^2 < \varepsilon, \forall n \geq N(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $p \rightarrow \infty$, получим

$$\sum_{i=1}^m (x_{n,i} - y_i)^2 \leq \varepsilon, \forall n \geq N(\varepsilon).$$

Переходя теперь к пределу при $m \rightarrow \infty$, получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x_{n,i} - y_i)^2 \leq \varepsilon, \forall n \geq N(\varepsilon). \quad (7.23)$$

Теперь

$$\sum_{i=1}^m y_i^2 = \sum_{i=1}^m (y_i - x_{n,i} + x_{n,i})^2 \leq 2 \sum_{i=1}^m ((y_i - x_{n,i})^2 + x_{n,i}^2) \leq 2(\varepsilon + \|\mathbf{x}_n\|^2),$$

следовательно, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2$ сходится, и поэтому $\mathbf{y} \in \ell_2$. С другой стороны, в силу произвольности ε из неравенства (7.23) следует $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{y}$. Таким образом, пространство ℓ_2 полно.

В качестве счетного всюду плотного подмножества пространства ℓ_2 можно взять множество

$$\ell_{2,f,\mathbb{Q}} := \{\{x_1, x_2, \dots, x_s, 0, 0, 0, \dots\} \mid x_i \in \mathbb{Q}, i = 1, \dots, s, s \in \mathbb{N}\}$$

финитных последовательностей рациональных чисел. Действительно, если \mathbf{x} — произвольный элемент из ℓ_2 , а $\varepsilon > 0$, то $\exists n \in \mathbb{N}$ такое, что $\sum_{i=n+1}^{\infty} x_i^2 < \varepsilon/2$. Выберем теперь рациональные числа y_i так, что $|x_i - y_i|^2 < \varepsilon/(2n)$. Тогда $\mathbf{y} := \{y_1, y_2, \dots, y_n, 0, 0, 0, \dots\} \in \ell_{2,f,\mathbb{Q}}$ и $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 < \varepsilon$. Таким образом, $\ell_{2,f,\mathbb{Q}}$ всюду плотно в ℓ_2 .

Покажем, что $\ell_{2,f,\mathbb{Q}}$ счетно. Пусть $\ell_{2,f,\mathbb{Q},s} := \{\mathbf{x} \mid x_i = 0, i > s\} = \mathbb{Q}^s \subset \ell_{2,f,\mathbb{Q}}$. Тогда

$$\ell_{2,f,\mathbb{Q}} := \bigcup_{s=1}^{\infty} \ell_{2,f,\mathbb{Q},s}$$

и поскольку объединение счетного числа счетных множеств счетно, то достаточно доказать счетность множества \mathbb{Q}^s . Занумеруем элементы счетного множества \mathbb{Q} и пусть \mathbb{Q}_k^s — множество s -элементных последовательностей, члены которых находятся среди

первых k элементов перенумерованного множества \mathbb{Q} . Поскольку число элементов множества \mathbb{Q}_k^s конечно ($\#(\mathbb{Q}_k^s) = ks$) и $\mathbb{Q}^s = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{Q}_k^s$, то \mathbb{Q}^s счетно.

Таким образом, пространство ℓ_2 сепарабельно. Для доказательства того, что ℓ_2 – гильбертово, остается показать, что оно бесконечномерно. Это следует из того, что любая конечная подсистема системы

$$e_i := \underbrace{\{0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots\}}_{i \text{ чисел}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

состоит из линейно независимых элементов.

Итак, пространство ℓ_2 – гильбертово. В качестве замкнутой системы в нем можно взять систему $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Произвольное гильбертово пространство принято обозначать первой буквой \mathcal{H} фамилии Hilbert в рукописном начертании.

Теорема 7.7. Любая полная ортогональная система $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов полного евклидова пространства \mathcal{E} является замкнутой.

Доказательство. При нормировке элементов системы ее полнота (неполнота) и замкнутость (незамкнутость) сохраняются, поэтому, без ограничения общности, можно считать систему $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормированной.

Пусть φ – произвольный элемент пространства \mathcal{E} . Достаточно доказать, что ряд Фурье элемента φ сходится к этому элементу. Пусть $\Phi_n := \sum_{k=1}^n c_k \psi_k$, $c_k = (\varphi, \psi_k)$ – частичная сумма ряда Фурье элемента φ . Так как в силу неравенства Бесселя ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ сходится, то при $\forall m > n$ имеем

$$\begin{aligned} \|\Phi_m - \Phi_n\|^2 &= \left\| \sum_{k=n+1}^m c_k \psi_k \right\|^2 = \left(\sum_{k=n+1}^m c_k \psi_k, \sum_{k=n+1}^m c_k \psi_k \right) = \\ &= \sum_{k=n+1}^m c_k^2 \rightarrow 0, \quad \text{при } n, m \rightarrow \infty, m > n. \end{aligned}$$

Поэтому Φ_n – фундаментальная последовательность и, в силу полноты пространства \mathcal{E} , существует элемент $\varphi_0 \in \mathcal{E}$ такой, что $\|\Phi_n - \varphi_0\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Остается доказать, что $\varphi_0 = \varphi$, а для этого достаточно доказать, что коэффициенты Фурье элементов φ_0 и φ совпадают, т.к. тогда элемент

$\varphi_0 - \varphi$ будет ортогонален всем элементам ψ_n и, в силу полноты системы $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$, является нулевым. При любом $n \geq k$

$$(\Phi_n, \psi_k) = \left(\sum_{l=1}^n c_l \psi_l, \psi_k \right) = \sum_{l=1}^n c_l (\psi_l, \psi_k) = c_k.$$

С другой стороны, в силу неравенства Коши–Буняковского имеем

$$|(\Phi_n, \psi_k) - (\varphi_0, \psi_k)| = |(\Phi_n - \varphi_0, \psi_k)| \leq \sqrt{\|\Phi_n - \varphi_0\|} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

откуда вытекает $c_k = (\Phi_n, \psi_k) \rightarrow (\varphi_0, \psi_k)$, $n \rightarrow \infty$, т.е. $(\varphi, \psi_k) = c_k = (\varphi_0, \psi_k)$. \square

Теорема 7.8. *В полном бесконечномерном евклидовом пространстве \mathcal{E} существует замкнутая система элементов тогда и только тогда, когда оно гильбертово.*

Доказательство. Если в полном евклидовом пространстве \mathcal{E} есть замкнутая система элементов $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$, то любой элемент пространства \mathcal{E} можно приблизить с точностью $\varepsilon/2$ конечной линейной комбинацией элементов $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ с вещественными коэффициентами, а ее, в свою очередь, приблизить с точностью $\varepsilon/2$ конечной линейной комбинацией элементов $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ с рациональными коэффициентами. Тем самым, конечные линейные комбинации элементов $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ с рациональными коэффициентами образуют счетное всюду плотное множество (его счетность доказана в примере 7.9) в пространстве \mathcal{E} , которое поэтому является гильбертовым.

Пусть теперь \mathcal{E} — гильбертово пространство. Возьмем в нем счетное всюду плотное подмножество $\{\chi_k\}_{k=1}^{\infty}$ и применим к нему процедуру ортогонализации Грама–Шмидта, удаляя по ходу дела из элементов, еще не затронутых ортогонализацией, те, которые являются линейными комбинациями уже построенных конечных ортонормированных семейств. В результате мы получим замкнутую систему элементов в пространстве \mathcal{E} . \square

Теорема 7.9. *Если $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — полная система элементов в евклидовом пространстве \mathcal{E} , то два различных элемента f и g этого пространства не могут иметь одинаковые ряды Фурье по этой системе.*

Доказательство. Если элементы f и g пространства \mathcal{E} имеют одинаковые ряды Фурье по системе $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$, то их разность $f - g$ имеет нулевые коэффициенты Фурье, а значит ортогональна всем элементам ψ_k . Отсюда, в силу полноты системы $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$, следует, что $f = g$. \square

Теорема 7.10. *Все гильбертовы пространства изоморфны пространству ℓ_2 .*

Доказательство. Пусть \mathcal{H} — произвольное гильбертово пространство, а $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная замкнутая система в \mathcal{H} . Из следствия 7.2, замечания 7.2 и теоремы 7.9 следует, что между элементами пространства \mathcal{H} и сходящимися рядами $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k$ по системе $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ существует взаимно-однозначное соответствие. Но сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k$ эквивалентна по критерию Коши сходимость числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$. Таким образом, имеется взаимно-однозначное соответствие \mathcal{F} между элементами пространства \mathcal{H} и последовательностями $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ из пространства ℓ_2 , сохраняющее в силу тождества Парсеваля нормы, а в силу тождества $(x, y) = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$ — и скалярные произведения. \square

Пусть теперь $\mathcal{F}: Q[-\pi, \pi] \mapsto \ell_2$ — отображение, переводящее функцию из пространства $Q[-\pi, \pi]$ в последовательность ее коэффициентов Фурье по нормированной тригонометрической системе $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$, которая, как будет показано ниже, является замкнутой. В силу тождества Парсеваля отображение \mathcal{F} сохраняет нормы элементов, а значит, в силу тождества $(x, y) = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$, справедливого в произвольном евклидовом пространстве, и скалярные произведения. При этом разным функциям f и g из пространства $Q[-\pi, \pi]$ сопоставляются разные последовательности коэффициентов Фурье, поскольку эти ряды Фурье сходятся в среднеквадратичном к функциям f и g , норма разности которых $\|f - g\|_{Q[-\pi, \pi]}$ нулю не равна. Но отображение \mathcal{F} изоморфизмом не является, поскольку $Q[-\pi, \pi]$ — не полное пространство. Его можно превратить в полное пространство, если рассмотреть ряды Фурье $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k$, фундаментальные по норме пространства $Q[-\pi, \pi]$ (т.е. те, для которых сходятся ряды $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$), но не имеющие пределов в пространстве $Q[-\pi, \pi]$, как новые функции.¹¹ Полученное пополненное пространство $\mathcal{L}^2[-\pi, \pi]$ изоморфно пространству ℓ_2 , а потому полно.

7.8 Равномерная сходимость и почленное дифференцирование тригонометрического ряда Фурье

В данном параграфе мы установим, какие условия на функцию $f(x)$ обеспечивают равномерную сходимость ее ряда Фурье на $[-\pi, \pi]$ и какие условия позволяют дифференцировать ряд Фурье почленно.

¹¹Более явное описание этих функций дается в теории интеграла Лебега.

Теорема 7.11. Пусть

1. функция $f(x)$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$, и $f(\pi) = f(-\pi)$;
2. функция $f(x)$ имеет на $[-\pi, \pi]$ кусочно-непрерывную производную.

Тогда тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к ней равномерно и абсолютно на $[-\pi, \pi]$.

Доказательство. В силу непрерывности 2π -периодического продолжения функции $f(x)$ на вещественную прямую и ее кусочной гладкости из теоремы 7.1 следует поточечная сходимость ряда Фурье функции $f(x)$ к ней. Поэтому для частичной суммы $S_n(x)$, $n \geq 1$ ряда Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

функции $f(x)$ справедливо следующее соотношение

$$f(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

откуда для доказательства теоремы достаточно установить сходимость числового ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|).$$

Обозначим через α_k и β_k коэффициенты Фурье кусочно-непрерывной функции $f'(x)$:

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx \, dx, \quad \beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin kx \, dx.$$

Из неравенства Бесселя для коэффициентов Фурье кусочно-непрерывной функции (см. пример 7.8) получаем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)$ сходится. Интегрируя по частям, получаем в силу $f(\pi) = f(-\pi)$:

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \cos kx f(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} + k \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = kb_k,$$

откуда $|b_k| = \frac{|\alpha_k|}{k}$. Аналогично, $|a_k| = \frac{|\beta_k|}{k}$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (|\alpha_k| + |\beta_k|) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{2} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \right), \quad (7.24)$$

где мы воспользовались очевидными неравенствами

$$\frac{1}{k}|\alpha_k| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} + \alpha_k^2 \right), \quad \frac{1}{k}|\beta_k| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} + \beta_k^2 \right).$$

Поскольку ряд в правой части (7.24) сходится, то сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|)$, что достаточно для доказательства теоремы. \square

Теорема 7.12. Пусть

1. функция $f(x)$ и ее производные до m -ого порядка непрерывны на $[-\pi, \pi]$ и $f^{(k)}(\pi) = f^{(k)}(-\pi)$, $k = 0, 1, \dots, m$;
2. функция $f^{(m+1)}(x)$ кусочно-непрерывна на $[-\pi, \pi]$.

Тогда тригонометрический ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (7.25)$$

функции $f(x)$ можно m раз дифференцировать почленно на $[-\pi, \pi]$, т.е.

$$f^{(l)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k k^l \cos \left(kx + l \frac{\pi}{2} \right) + b_k k^l \sin \left(kx + l \frac{\pi}{2} \right) \right), \quad l = 1, 2, \dots, m. \quad (7.26)$$

Доказательство. Обозначим через α_k и β_k коэффициенты Фурье кусочно-непрерывной функции $f^{(m+1)}(x)$:

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(m+1)}(x) \cos kx \, dx, \quad \beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(m+1)}(x) \sin kx \, dx.$$

Интегрируя $m + 1$ раз по частям, получаем в силу первого условия теоремы:

$$|\alpha_k| + |\beta_k| = k^{m+1} (|a_k| + |b_k|), \quad (7.27)$$

где a_k и b_k — коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Отсюда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m (|a_k| + |b_k|) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (|\alpha_k| + |\beta_k|). \quad (7.28)$$

Сходимость ряда в правой части равенства (7.28) доказывается как в предыдущей теореме. Числовой ряд в левой части (7.28) мажорирует

функциональный ряд (7.26) при $l = 1, 2, \dots, m$, поэтому по признаку Вейерштрасса ряд (7.26) сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$ для $l = 1, 2, \dots, m$. Отсюда по теореме о почленном дифференцировании функционального ряда следует, что ряд (7.25) можно m раз дифференцировать почленно на $[-\pi, \pi]$. \square

Следствие 7.3. В условиях теоремы 7.12 для коэффициентов ряда Фурье функции $f(x)$ справедлива оценка

$$a_k = o\left(\frac{1}{k^{m+1}}\right), \quad b_k = o\left(\frac{1}{k^{m+1}}\right), \quad k \rightarrow \infty,$$

которая следует из равенства (7.27) и того, что $|\alpha_k|, |\beta_k| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Пример 7.10. 1. Пусть $f(x) = (x^2 - \pi^2)^2$, $-\pi \leq x \leq \pi$. Тогда

$$\begin{aligned} f(-\pi) &= f(\pi) = 0, \\ f'(x) &= 4x(x^2 - \pi^2), \quad f'(-\pi) = f'(\pi) = 0, \\ f''(x) &= 4(x^2 - \pi^2) + 8x^2, \quad f''(-\pi) = f''(\pi) = 8\pi^2, \\ f'''(x) &= 24x, \quad f'''(-\pi) = -24\pi, \quad f'''(\pi) = 24\pi, \end{aligned}$$

и поэтому для третьей производной функции $f(x)$ первое условие теоремы нарушено. Поэтому к данной функции теорема 7.12 применима при $m = 2$ и ряд Фурье функции $f(x)$ можно два раза дифференцировать почленно на $[-\pi, \pi]$.

Если вычислить ряд Фурье данной функции, то можно убедиться, что в точках интервала $(-\pi, \pi)$ его можно дифференцировать почленно трижды.

2. $f(x) = \sin(\cos x)$.

Для данной функции условия теоремы 7.12 выполнены $\forall m \in \mathbb{N}$, поэтому соответствующий ряд Фурье можно дифференцировать почленно любое число раз, а для его коэффициентов Фурье справедливой асимптотики

$$a_k, b_k = o\left(\frac{1}{k^l}\right), \quad k \rightarrow \infty, \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

7.9 Равномерная аппроксимация непрерывной функции тригонометрическими и алгебраическими многочленами

Определение 7.10. Тригонометрическими многочленами будем называть $2l$ -периодические функции вида

$$T_l(x) = A_0 + \sum_{k=1}^n \left(A_k \cos \frac{\pi}{l} kx + B_k \sin \frac{\pi}{l} kx \right).$$

Теорема 7.13 (Вейерштрасс). Если $f \in C[-l, l]$, $l > 0$ и $f(l) = f(-l)$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists$ тригонометрический многочлен $T_l(x)$ такой, что

$$\|T_l - f\|_{C[-l, l]} < \varepsilon.$$

Доказательство. Предположим, что $l = \pi$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно лемме 7.3 существует непрерывная кусочно-гладкая функция $\ell(x)$ такая, что

$$\|f - \ell\|_{C[-\pi, \pi]} < \frac{\varepsilon}{2}$$

и, кроме того, $\ell(-\pi) = \ell(\pi)$. По теореме 7.11 ряд Фурье функции $\ell(x)$ равномерно сходится к ней на $[-\pi, \pi]$, поэтому для заданного $\varepsilon \exists$ номер n такой, что для частичной суммы ряда Фурье $S_n(x)$ (являющейся тригонометрическим многочленом) функции $\ell(x)$ имеет место

$$\|\ell - S_n\|_{C[-\pi, \pi]} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из двух полученных неравенств в силу неравенства треугольника следует

$$\|f - S_n\|_{C[-\pi, \pi]} \leq \|f - \ell\|_{C[-\pi, \pi]} + \|\ell - S_n\|_{C[-\pi, \pi]} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и требуется.

Если теперь $l \neq \pi$, то функция $\varphi(x) = f\left(\frac{l}{\pi}x\right)$ является непрерывной и $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$. По уже доказанному получаем, что существует такой тригонометрический многочлен $T_\pi(x)$, что

$$\|\varphi - T_\pi\|_{C[-\pi, \pi]} < \varepsilon.$$

Тогда $f(x) = \varphi\left(\frac{\pi}{l}x\right)$ и для $T_l(x) := T_\pi\left(\frac{\pi}{l}x\right)$ получаем

$$\|f(x) - T_l(x)\|_{C[-l, l]} = \|\varphi - T_\pi\|_{C[-\pi, \pi]} < \varepsilon.$$

□

Замечание 7.5. На первый взгляд может показаться, что мы доказали равномерную сходимость последовательности $S_n(x)$ к непрерывной периодической функции $f(x)$, не являющейся кусочно-гладкой. Однако это не так, поскольку для разных ε функции $\ell(x)$ разные, а значит, разные и их ряды Фурье.

Теорема 7.14 (Вейерштрасс). Если $f \in C[a, b]$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists$ алгебраический многочлен $P_n(x)$ степени n такой, что

$$\|P_n - f\|_{C[a,b]} < \varepsilon.$$

Доказательство. 1. Пусть сначала $f(x) \in C[-l, l]$, причем $f(-l) = f(l)$. По теореме 7.13 $\forall \varepsilon > 0 \exists$ тригонометрический многочлен

$$T_l(x) = A_0 + \sum_{k=1}^m \left(A_k \cos \frac{\pi}{l} kx + B_k \sin \frac{\pi}{l} kx \right)$$

такой, что

$$\|T_l - f\|_{C[-l,l]} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Разложим каждую функцию $A_k \cos \frac{\pi}{l} kx$, $B_k \sin \frac{\pi}{l} kx$ по формуле Маклорена и возьмем в разложении каждой функции многочлены Тейлора такой степени, чтобы остаточный член на всем сегменте $[-l, l]$ был по модулю меньше $\frac{\varepsilon}{4m}$. Объединяя полученные многочлены Тейлора, получим многочлен $P_n(x)$ такой, что

$$\|T_l - P_n\|_{C[-l,l]} < 2m \frac{\varepsilon}{4m} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из двух полученных неравенств в силу неравенства треугольника следует

$$\|f - P_n\|_{C[-l,l]} \leq \|f - T_l\|_{C[-l,l]} + \|T_l - P_n\|_{C[-l,l]} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. Пусть теперь $f \in C[a, b]$. Возьмем l таким, чтобы имело место строгое вложение $[a, b] \subset [-l, l]$, $[-l, l] \neq [a, b]$, и продолжим функцию $f(x)$ непрерывным образом на $[-l, l]$ до функции $F(x)$ так, чтобы выполнялось условие $F(-l) = F(l)$. По уже доказанному существует алгебраический многочлен $P_n(x)$ такой, что $\|P_n - F\|_{C[-l,l]} < \varepsilon$. Тогда, тем более, $\|P_n - f\|_{C[a,b]} < \varepsilon$.

□

7.10 Замкнутость тригонометрической системы

Теорема 7.15. *Тригонометрическая система $\{1, \cos nx, \sin nx, n = 1, 2, \dots\}$ является замкнутой в пространстве $Q[-\pi, \pi]$, т.е. для любой кусочно-непрерывной функции $f(x)$ и $\forall \varepsilon > 0 \exists$ тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что*

$$\|f - T\|_2 < \varepsilon.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную кусочно-непрерывную на $[-\pi, \pi]$ функцию $f(x)$. Ясно, что существует непрерывная функция $g(x)$, совпадающая с $f(x)$ всюду, за исключением малых окрестностей точек разрыва функции $f(x)$ и, возможно, точки π , линейная в этих окрестностях и такая, что $g(-\pi) = g(\pi)$. Поскольку функция $f(x)$ ограничена, а количество точек ее разрыва конечно, то эти окрестности можно выбрать столь малыми, что

$$\|f - g\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее, по теореме 7.13, примененной к непрерывной функции g , найдется тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что $\|g - T\|_C < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}}$, и поэтому

$$\|g - T\|_2 = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (g(x) - T(x))^2 dx} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому

$$\|f - T\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - T\|_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Следствие 7.4. *Для любой кусочно-непрерывной на $[-\pi, \pi]$ функции:*

1. *ее тригонометрический ряд Фурье сходится к ней по норме пространства $Q[-\pi, \pi]$, т.е. в среднеквадратичном;*
2. *справедливо равенство Парсеваля*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx,$$

где a_n, b_n — коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по тригонометрической системе;

3. ее тригонометрический ряд Фурье можно интегрировать почленно на этом сегменте. Действительно, из сходимости ряда Фурье функции $f(x)$ в среднеквадратичном к функции $f(x)$ и следствия 4.1 следует равномерная по $x, x_0 \in [-\pi, \pi]$ сходимость

$$\int_{x_0}^x \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right) dt \Rightarrow \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Глава 8

Обобщенные функции

Понятия обобщенной функции (по английски “distribution”) позволяет единообразно рассматривать дискретные и непрерывные распределения физических величин (масс, зарядов и т.п.). Теория обобщенных функций в ее различных вариантах позволила сильно продвинуть теорию дифференциальных уравнений.

8.1 Понятие обобщенной функции. Пространство обобщенных функций

Назовем функцию $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$ *финитной*, если она равна нулю вне некоторого конечного интервала. Обозначим через $\text{supp } \varphi(x)$ замыкание множества точек, в которых $\varphi(x) \neq 0$. Множество всех бесконечное число раз дифференцируемых финитных функций назовем *пространством основных функций* и обозначим символом \mathcal{D} . Ясно, что это линейное пространство относительно обычных операций сложения функций и умножения их на вещественные числа.

Как показывает следующий пример, ненулевые основные функции существуют.

Пример 8.1 («шапочка» Соболева¹).

$$\omega_a(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{a^2}{a^2-x^2}\right), & |x| < a, \\ 0, & |x| \geq a. \end{cases} \quad \text{supp } \omega_a(x) = [-a, a].$$

Финитность и бесконечная дифференцируемость при $x \neq \pm a$ «шапочки Соболева» очевидны. Пользуясь тем, что $\exp\left(-\frac{a^2}{a^2-x^2}\right)$ стремится к

¹Соболев Сергей Львович (1908–1989) — советский математик. Автор теории обобщенных функций на основе пространства \mathcal{D} .

нулю при $x \rightarrow a - 0$ или $x \rightarrow -a + 0$ быстрее любой степени $x \pm a$, нетрудно проверить, что «шапочка Соболева» бесконечно дифференцируема и в точках $x = \pm a$.

Ясно, что $\omega_{\frac{1}{3}}(x-n)$, $n \in \mathbb{Z}$ — последовательность «шапочек» Соболева с непересекающимися носителями, поэтому любая конечная подсистема такой системы линейно независима. Значит, \mathcal{D} — линейное бесконечномерное пространство.

Определение 8.1. Последовательность $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ основных функций сходится к основной функции $\varphi(x)$ (обозначим этот факт: $\varphi_n(x) \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi(x)$, $n \rightarrow \infty$), если

1. \exists интервал $(-a, a)$ такой, что $\forall n: \text{supp } \varphi_n(x) \subset (-a, a)$;

2. $\varphi_n^{(k)}(x) \xrightarrow{[-a, a]} \varphi^{(k)}(x)$, $n \rightarrow \infty$, $\forall k = 0, 1, 2, \dots$

Данная сходимость не является метрической.

Определение 8.2. Правило \hat{u} , ставящее в соответствие каждой функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ некоторое вещественное число $\hat{u}[\varphi]$ и удовлетворяющее условию линейности

$$\hat{u}[\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2] = \alpha\hat{u}[\varphi_1] + \beta\hat{u}[\varphi_2], \quad \varphi_i \in \mathcal{D}, \quad i = 1, 2; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

называется линейным функционалом на пространстве \mathcal{D} .

Альтернативное обозначение для линейного функционала $\hat{u}[\varphi]$, подчеркивающее его линейность, есть (\hat{u}, φ) .

Определение 8.3. Линейный функционал $\hat{u}[\varphi]$, $\varphi \in \mathcal{D}$ на пространстве \mathcal{D} называется непрерывным, если $\forall \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$, $n \rightarrow \infty$ имеет место сходимость числовой последовательности $\hat{u}[\varphi_n] \rightarrow \hat{u}[\varphi]$, $n \rightarrow \infty$.

Определение 8.4. Линейный непрерывный функционал на пространстве \mathcal{D} называется обобщенной функцией.

Пример 8.2. Пусть функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ интегрируема на любом отрезке числовой прямой (в таком случае она называется локально интегрируемой). Положим

$$(\hat{f}, \varphi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Ввиду финитности основных функций интеграл, очевидно, сходится. Очевидно, что (\hat{f}, φ) — линейный непрерывный функционал. Данная обобщенная функция называется *регулярной*.

В частности, локально интегрируемая функция Хевисайда

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

порождает регулярную обобщенную функцию

$$(\hat{\Theta}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(x)\varphi(x) dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx.$$

Обобщенные функции, не являющиеся регулярными, называются *сингулярными*. Их мы тоже будем условно записывать в виде: $\hat{u}[\varphi] \equiv (\hat{u}, \varphi) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\varphi(x) dx$, имея в виду под $u(x)$ некоторую неклассическую (обобщенную) функцию.

Определение 8.5. Обобщенные функции образуют линейное пространство \mathcal{D}' (= пространство, сопряженное к пространству \mathcal{D}) относительно операции

$$(\alpha\hat{u}_1 + \beta\hat{u}_2)[\varphi] = \alpha\hat{u}_1[\varphi] + \beta\hat{u}_2[\varphi], \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Определим в этом пространстве *сходимость*:

$$\hat{u}_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \hat{u}, \quad n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \hat{u}_n[\varphi] \rightarrow \hat{u}[\varphi], \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Эта сходимость называется *слабой*. Она аналогична поточечной сходимости последовательности функций.

Пример 8.3. Наиболее известной сингулярной обобщенной функцией является $\hat{\delta}$ -функция, определяемая равенством

$$(\hat{\delta}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x) dx := \varphi(0).$$

Очевидно, что $\hat{\delta}$ -функция — линейный непрерывный функционал.

Докажем, что $\hat{\delta}$ -функция действительно сингулярна. Предположим, что это не так, т.е. существует такая локально интегрируемая (а значит, ограниченная на любом отрезке) функция $f(x)$, что

$$\varphi(0) = (\hat{\delta}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Положим $\varphi(x) = \omega_\varepsilon(x)$ (см. пример 8.1). Тогда $0 \leq \omega_\varepsilon(x) \leq \omega_\varepsilon(0) = 1/e$ и

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} = \omega_\varepsilon(0) &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\omega_\varepsilon(x) dx \right| = \left| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\omega_\varepsilon(x) dx \right| \leq \\ &\leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |f(x)\omega_\varepsilon(x)| dx \leq \frac{1}{e} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |f(x)| dx \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Полученное противоречие доказывает сингулярность δ -функции.

Сингулярную обобщенную δ -функцию можно представить различными способами в виде предела в \mathcal{D}' регулярных обобщенных функций.

Положим,

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{c}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}\right), & |x| < \varepsilon, \\ 0, & |x| \geq \varepsilon, \end{cases}$$

где $c := \left[2 \int_0^1 \exp\left(-\frac{1}{1-t^2}\right) dt\right]^{-1}$. Ясно, что $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(x) dx = 1$, поэтому $\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}$ имеем по формуле среднего значения

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x)\varphi(x) dx - \varphi(0) \right| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x)(\varphi(x) - \varphi(0)) dx \right| \leq \\ &\leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(x) |\varphi(x) - \varphi(0)| dx = |\varphi(x_\varepsilon) - \varphi(0)| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(x) dx = \\ &= |\varphi(x_\varepsilon) - \varphi(0)| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad \text{где } -\varepsilon \leq x_\varepsilon \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Это означает, что

$$\hat{\delta}_\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'} \hat{\delta}, \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

Заметим, что поточечный предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

классической функцией не является.

Задача 8.1. Доказать, что следующие регулярные обобщенные функции, соответствующие локально интегрируемым функциям

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\varepsilon}\right), \frac{1}{\pi x} \sin \frac{x}{\varepsilon}, \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2},$$

сходятся в \mathcal{D}' к $\hat{\delta}$ -функции при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Доказательство. Докажем, что если $f(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$, то $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ справедливо соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x) dx - \varphi(0) \right] = 0, \quad (8.1)$$

т.е. $\frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}'} \hat{\delta}$, $\varepsilon \rightarrow +0$. Тогда требуемое утверждение для функций

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\varepsilon}\right), \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$$

из условия задачи получится как частный случай.

Действительно, пусть $\varphi \in \mathcal{D}$. Тогда $\forall R > 0$ имеем

$$\varphi(\varepsilon t) \xrightarrow{t \in [-R, R]} \varphi(0), \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

Зафиксируем произвольное $\delta > 0$ и выберем $R > 0$ так, что

$$2 \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)| \int_{\mathbb{R} \setminus (-R, R)} f(t) dt < \frac{\delta}{2}.$$

Тогда для всех достаточно малых ε имеем:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x) dx - \varphi(0) \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (\varphi(\varepsilon t) - \varphi(0)) dt \right| \leq$$

$$\begin{aligned} & \leq \left| \int_{-R}^R f(t) (\varphi(\varepsilon t) - \varphi(0)) dt \right| + \left| \int_{\mathbb{R} \setminus (-R, R)} f(t) (\varphi(\varepsilon t) - \varphi(0)) dt \right| \leq \\ & \leq \int_{-R}^R f(t) |\varphi(\varepsilon t) - \varphi(0)| dt + 2 \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)| \int_{\mathbb{R} \setminus (-R, R)} f(t) dt \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta, \end{aligned}$$

что и влечет (8.1).

Для функции

$$\frac{1}{\pi x} \sin \frac{x}{\varepsilon}$$

нужно другое доказательство. Аналогично (8.1) нам нужно показать, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi x} \sin \frac{x}{\varepsilon} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx = 0. \quad (8.2)$$

Но это непосредственно следует из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 7.3 о представимости функции интегралом Фурье, поскольку интеграл в (8.2) лишь обозначениями отличается от суммы $\mathcal{J}^+(x, \Lambda) + \mathcal{J}^-(x, \Lambda) \rightarrow 0$, $\Lambda \rightarrow \infty$ в том доказательстве. \square

Обобщенная функция не имеет значения в отдельных точках. Тем не менее можно говорить об обращении в нуль обобщенной функции на каком-то интервале и о носителе обобщенной функции.

Определение 8.6. Говорят, что обобщенная функция \hat{f} обращается в нуль на интервале $I \subset \mathbb{R}$, если $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ такой, что $\text{supp } \varphi \subset I$, выполняется неравенство $(\hat{f}, \varphi) = 0$. Будем записывать этот факт следующим образом: $\hat{f}|_I = 0$.

Определение 8.7. Обобщенные функции \hat{f} и \hat{g} называются равными на интервале I , если $(\hat{f} - \hat{g})|_I = 0$.

Определение 8.8. Объединение всех интервалов I , на которых $\hat{f}|_I = 0$ называется нулевым множеством обобщенной функции \hat{f} и обозначается $\mathcal{O}_{\hat{f}}$. Замкнутое множество $\text{supp } \hat{f} := \mathcal{R} \setminus \mathcal{O}_{\hat{f}}$ называется носителем обобщенной функции \hat{f} . Если $\text{supp } \hat{f}$ — ограниченное множество, то функция \hat{f} называется финитной.

Пример 8.4. 1. $\text{supp } \hat{\delta} = \{0\}$.

2. Если $f(x) = \text{const} \neq 0$, то $\text{supp } \hat{f} = \mathbb{R}$.

8.2 Действия над обобщенными функциями

8.2.1 Произведение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию

Определение 8.9. Произведение обобщенной функции \hat{f} на бесконечное число раз дифференцируемую функцию $a(x)$ — это функционал \widehat{af} , действующий по правилу $(\widehat{af}, \varphi) = (\hat{f}, a\varphi)$.

В случае регулярных обобщенных функций это определение переходит в обычное умножение функций. Для δ -функции мы получим $a(x)\hat{\delta} = a(0)\hat{\delta}$.

Произведение двух обобщенных функций, вообще говоря, не определено. Например, обобщенная функция $\delta^2(x)$ не имеет смысла.

8.2.2 Замена переменной в обобщенной функции

Пусть $\psi(x)$, $x \in \mathbb{R}$ — монотонная дифференцируемая функция, производная которой имеет постоянный знак, и $\psi(x) \rightarrow \pm\infty$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Ясно, что в этом случае аналогичными свойствами обладает и обратная функция $\psi^{-1}(y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Пусть также $f(x)$ — локально интегрируемая функция. Рассмотрим локально интегрируемую функцию $f(\psi(x))$ и порожденную ею обобщенную функцию $\widehat{f(\psi(x))}$. Тогда

$$\begin{aligned} \left(\widehat{f(\psi(x))}, \varphi(x) \right) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\psi(x))\varphi(x) dx \underset{\psi(x)=:y}{=} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\varphi(\psi^{-1}(y)) \left| \frac{\psi^{-1}(y)}{dy} \right| dy = \left(\hat{f}(x), \left| \frac{\psi^{-1}(x)}{dx} \right| \varphi(\psi^{-1}(x)) \right), \\ &\quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Это равенство мотивирует следующее определение:

Определение 8.10. Для любой обобщенной функции $\hat{f}(x)$ обобщенная функция $\hat{f}(\psi(x))$ действует по правилу:

$$\left(\hat{f}(\psi(x)), \varphi(x) \right) = \left(\hat{f}(x), \left| \frac{\psi^{-1}(x)}{dx} \right| \varphi(\psi^{-1}(x)) \right), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

В частности, для линейной замены независимой переменной x получаем:

$$\left(\hat{f}(ax+b), \varphi(x)\right) = \frac{1}{|a|} \left(\hat{f}(x), \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D};$$

при $a = 1$, $b = -c$ получаем формулу сдвига аргумента обобщенной функции:

$$\left(\hat{f}(x-c), \varphi(x)\right) = \left(\hat{f}(x), \varphi(x+c)\right), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D};$$

а при $b = 0$, $a \neq 0$ — формулу растяжения аргумента обобщенной функции:

$$\left(\hat{f}(ax), \varphi(x)\right) = \frac{1}{|a|} \left(\hat{f}(x), \varphi\left(\frac{x}{a}\right)\right), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Первая из этих формул определяет обобщенную функцию $\delta(x-x_0)$: $\left(\hat{\delta}(x-x_0), \varphi(x)\right) = \varphi(x_0)$, а из второй при $a = -1$ получаем четность δ -функции:

$$\left(\hat{\delta}(-x), \varphi(x)\right) = \left(\hat{\delta}(x), \varphi(-x)\right) = \varphi(0) = \left(\hat{\delta}(x), \varphi(x)\right),$$

т.е. $\hat{\delta}(-x) = \hat{\delta}(x)$.

8.2.3 Дифференцирование обобщенных функций

Пусть $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ — бесконечно дифференцируемая (и потому локально интегрируемая) функция. Ее производная $f'(x)$ порождает обобщенную функцию, которую мы обозначим $D\hat{f}$. С помощью интегрирования по частям и с учетом финитности функции $\varphi \in \mathcal{D}$ мы получаем равенство

$$(D\hat{f}, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x) dx = -(\hat{f}, \varphi').$$

Итерируя это равенство, получаем

$$\left(D^{(k)}\hat{f}, \varphi\right) = (-1)^k \left(\hat{f}, \varphi^{(k)}\right), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Это равенство мотивирует следующее определение.

Определение 8.11. Для любой обобщенной функции \hat{f} обобщенная функция $D^{(k)}\hat{f}$ действует по правилу:

$$\left(D^{(k)}\hat{f}, \varphi\right) = (-1)^k \left(\hat{f}, \varphi^{(k)}\right), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Таким образом, любая обобщенная функция бесконечно дифференцируема.

Пример 8.5. Для обобщенной функции Хевисайда из примера 8.2 получаем

$$(D\hat{\Theta}, \varphi) = -(\hat{\Theta}, \varphi') = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = -\varphi(x)|_0^{+\infty} = \varphi(0) = (\hat{\delta}, \varphi),$$

откуда $D\hat{\Theta} = \hat{\delta}$. Заметим, что $\Theta'(x) = 0$, $x \neq 0$, а $\Theta'(0)$ не существует.

Для δ -функции получаем:

$$(D\delta(x), \varphi(x)) = -(\delta(x), \varphi'(x)) = -\varphi'(0)$$

и, более общо,

$$\forall k \in \mathbb{N} : (D^{(k)}\delta(x), \varphi(x)) = (-1)^k (\delta(x), \varphi^{(k)}(x)) = (-1)^k \varphi^{(k)}(0).$$

Оказывается, что если носитель обобщенной функции состоит из одной точки $x = 0$, то такая обобщенная функция представима единственным способом в виде линейной комбинации δ -функции и ее производных.²

Пусть $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ — кусочно-гладкая функция, имеющая единственную точку разрыва 1 рода x_0 , а в остальных точках у функции $f(x)$ имеется непрерывная производная. Тогда в пространстве \mathcal{D}' справедлива следующая формула:

$$D\hat{f} = \hat{f}' + [f]_{x_0}\delta(x - x_0), \tag{8.3}$$

где \hat{f}' — регулярная обобщенная функция, порожденная кусочно-непрерывной функцией $f'(x)$, а $[f]_{x_0} := f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ — скачок функции $f(x)$ в точке x_0 .

Действительно, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ интегрированием по частям получаем:

$$(D\hat{f}, \varphi) = -(\hat{f}, \varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x) dx = -\int_{-\infty}^{x_0} f(x)\varphi'(x) dx -$$

²см. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981, с. 153–155. В гл. II этой книги можно найти и многие другие сведения о обобщенных функциях.

$$\begin{aligned}
& - \int_{x_0}^{-\infty} f(x)\varphi'(x) dx = - f(x)\varphi(x)|_{-\infty}^{x_0-0} + \int_{-\infty}^{x_0} f'(x)\varphi(x) dx - \\
& - f(x)\varphi(x)|_{x_0+0}^{+\infty} + \int_{x_0}^{-\infty} f'(x)\varphi(x) dx = -f(x_0-0)\varphi(x_0) + \\
& + f(x_0+0)\varphi(x_0) + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x) dx = [f]_{x_0}(\delta(x-x_0), \varphi(x)) + (\hat{f}', \varphi),
\end{aligned}$$

что и требуется.

Частным случаем формулы (8.3) является формула для производной функции Хевисайда из примера 8.5.

8.3 Разложение δ -функции в ряд Фурье

Пусть

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2l}}, \left\{ \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{\pi k}{l} x, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{\pi k}{l} x \right\}_{k=1}^{\infty} \right\}$$

— ортонормированная замкнутая система функций в пространстве $Q[-l, l]$ и пусть $\mathcal{D}[-l, l] := \{\varphi \in \mathcal{D} \mid \text{supp } \varphi \subset [-l, l]\}$.

Тогда $\forall x_0 \in [-l, l]$ в пространстве \mathcal{D}' справедлива следующая формула:

$$\begin{aligned}
\delta(x-x_0) &= \frac{\hat{1}}{2l} + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\cos \frac{\pi k x_0}{l} \cdot \widehat{\cos \frac{\pi k x}{l}} + \sin \frac{\pi k x_0}{l} \cdot \widehat{\sin \frac{\pi k x}{l}} \right) = \\
&= \frac{\hat{1}}{2l} + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\cos \left(\frac{\pi k (x-x_0)}{l} \right)},
\end{aligned} \tag{8.4}$$

где сходимость ряда понимается в смысле слабой сходимости обобщенных функций. Действительно, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ справедливо равенство

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\hat{1}}{2l} + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^n \left(\cos \frac{\pi k x_0}{l} \cdot \widehat{\cos \frac{\pi k x}{l}} + \sin \frac{\pi k x_0}{l} \cdot \widehat{\sin \frac{\pi k x}{l}} \right), \varphi(x) \right) = \\
&= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \varphi(x) dx +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^n \left(\cos \frac{\pi k x_0}{l} \int_{-l}^l \cos \frac{\pi k x}{l} \varphi(x) dx + \sin \frac{\pi k x_0}{l} \int_{-l}^l \sin \frac{\pi k x}{l} \varphi(x) dx \right) = \\
 & = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{\pi k x_0}{l} + b_k \sin \frac{\pi k x_0}{l} \right),
 \end{aligned}$$

где a_k и b_k — коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$, $x \in [-l, l]$. В силу $\text{supp } \varphi \subset [-l, l]$ имеем $\varphi(l) = 0 = \varphi(-l)$, и потому $\forall x_0 \in [-l, l]$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{\pi k x_0}{l} + b_k \sin \frac{\pi k x_0}{l} \right) \rightarrow \varphi(x_0) = (\delta(x - x_0), \varphi(x)), \quad n \rightarrow \infty.$$

По теореме 7.11 эта сходимость даже равномерна при $x_0 \in [-l, l]$, но нам это здесь не нужно. Таким образом, формула (8.4) доказана.

8.4 Преобразование Фурье обобщенных функций

Пространство \mathcal{D} основных функций является лишь одним возможным базисом для построения теории обобщенных функций. Оно не удобно для определения преобразования Фурье, поскольку Фурье-образ ненулевой функции из этого пространства не является функцией из \mathcal{D} . Поэтому для определения преобразования Фурье основных и обобщенных функций нам нужно изменить пространство основных функций. При этом автоматически изменится и сопряженное к нему пространство обобщенных функций.

Пусть \mathcal{S} — линейное пространство бесконечно дифференцируемых функций, убывающих вместе со всеми своими производными при $|x| \rightarrow \infty$ быстрее любой отрицательной степени $|x|$, т.е. $\forall f \in \mathcal{S}$ и $\forall l \in \mathbb{N}$ имеем $\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^l f(x) = 0$. Пространство \mathcal{S} называется *пространством быстро убывающих функций*. Очевидно, что $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$, но пространство \mathcal{S} шире пространства \mathcal{D} . Например, оно содержит функцию e^{-x^2} , не являющуюся финитной.³

В пространстве \mathcal{S} вводится сходимость, аналогичная сходимости в пространстве \mathcal{D} . Последовательность $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$ сходится к функ-

³Автором теории обобщенных функций на основе пространства \mathcal{S} является французский математик Лоран Шварц (1915–2002). Его не следует путать с немецким математиком Карлом Германом Амантусом Шварцем (1843–1921) — автором конструкции, известной как «сапог» Шварца.

ции $\varphi(x) \in \mathcal{S}$, если $\forall m, l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ имеет место

$$x^m \varphi_k^{(l)}(x) \xrightarrow{x \in \mathbb{R}} x^m \varphi^{(l)}(x), k \rightarrow \infty.$$

Ясно, что из сходимости последовательности в пространстве \mathcal{D} следует ее сходимость в пространстве \mathcal{S} .

В теории обобщенных функций мы будем использовать следующее обозначение для преобразования Фурье

$$F_f(\lambda) := \mathcal{F}[f](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt, f \in \mathcal{S},$$

т.к. символ « $\hat{}$ » используется для обозначения обобщенных функций. Поскольку

$$\forall k \in \mathbb{N}, |f(t)t^k| \leq \frac{C_1(k)}{1+t^2}, C_1(k) > 0,$$

то интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(-it)^k e^{-i\lambda t} dt$$

абсолютно и равномерно по $\lambda \in \mathbb{R}$ сходится. Значит, функция $F_f(\lambda)$ бесконечно дифференцируема и

$$\frac{d^k}{d\lambda^k} F_f(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(-it)^k e^{-i\lambda t} dt.$$

С другой стороны, $\forall m \in \mathbb{N}$ с помощью интегрирования по частям имеем:

$$\begin{aligned} |\lambda^m F_f(\lambda)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-i\lambda)^m f(t) e^{-i\lambda t} dt \right| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{d^m}{dt^m} (e^{-i\lambda t}) dt \right| = \left| \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(m)}(t) e^{-i\lambda t} dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(m)}(t)| dt =: C_2(m), C_2(m) > 0. \end{aligned}$$

Тем самым, $F_f(\lambda)$ — быстро убывающая функция, и поэтому $F_f(\lambda) \in \mathcal{S}$. Ввиду того что формула обратного преобразования Фурье очень похожа на формулу прямого преобразования Фурье, то и из $f \in \mathcal{S}$ следует $\mathcal{F}^{-1}[f] \in \mathcal{S}$. Тем самым, $\mathcal{F}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ — взаимно-однозначное преобразование. В этом и состоит смысл расширения пространства основных функций \mathcal{D} до пространства \mathcal{S} , поскольку преобразование Фурье ненулевой функции из пространства \mathcal{D} финитной функцией не является.

Линейное пространство линейных непрерывных функционалов на пространстве \mathcal{S} обозначается \mathcal{S}' и называется *пространством обобщенных функций медленного роста*. Для функций из $\hat{f} \in \mathcal{S}'$ можно определить производные всех порядков так, как это было сделано для пространства \mathcal{D}' формулой

$$\left(D^{(k)} \hat{f}, \varphi \right) = (-1)^k \left(\hat{f}, \varphi^{(k)} \right), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Пространство \mathcal{S}' содержит и $\hat{\delta}$ -функцию, определяемую равенством

$$(\hat{\delta}, \varphi) := \varphi(0).$$

Для обобщенных функций из пространства \mathcal{S}' определяется и замена переменных так, как это было сделано выше для функций из пространства \mathcal{D}' .

Ясно, что раз $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$, то для сопряженных пространств справедливо обратное включение $\mathcal{D}' \supset \mathcal{S}'$. Действительно, если $\hat{f} \in \mathcal{S}'$, то ограничение функционала \hat{f} на пространство \mathcal{D} дает элемент из \mathcal{D}' . Не всякая локально интегрируемая функция f порождает функционал $\hat{f} \in \mathcal{S}'$, например, локально интегрируемая функция e^{x^2} не порождает элемент \mathcal{S}' , поскольку $e^{-x^2} \in \mathcal{S}$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2} e^{-x^2} dx = +\infty.$$

Происхождение термина «функция медленного роста» таково. Локально интегрируемая функция $f(x)$ называется функцией медленного роста, если $\exists C \in \mathbb{R}$ и $N \in \mathbb{N}$ такие, что

$$|f(x)| \leq C(1 + |x|)^N, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Можно доказать,⁴ что пространство \mathcal{S}' состоит из производных произвольных порядков от локально интегрируемых функций медленного роста.

⁴см. М.С. Агранович, Обобщенные функции, М.: МЦНМО, 2008, с. 47–49.

Пусть теперь $f \in \mathcal{D}$. Тогда

$$|F_f(\lambda)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt,$$

поэтому $\widehat{F}_f \in \mathcal{S}'$, и $\forall \varphi \in \mathcal{S}$ имеем

$$\begin{aligned} (\widehat{F}_f, \varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_f(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \right) \varphi(\lambda) d\lambda = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) e^{-i\lambda t} d\lambda \right) dt = (\hat{f}, F_\varphi). \end{aligned}$$

В этой выкладке мы изменили порядок интегрирования, поскольку интеграл по t фактически берется по конечному сегменту, а интеграл по λ сходится равномерно по t .

Полученное равенство мотивирует следующее определение преобразования Фурье функции $\hat{f} \in \mathcal{S}'$:

$$(F_{\hat{f}}, \varphi) := (\hat{f}, F_\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}. \quad (8.5)$$

Пример 8.6. Вычислим преобразование Фурье для $\hat{\delta}$ -функции.

$$\begin{aligned} (F_{\hat{\delta}(x-x_0)}, \varphi) &= (\hat{\delta}(x-x_0), F_\varphi(x)) = F_\varphi(x_0) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) e^{-ix_0\lambda} d\lambda = \left(\widehat{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix_0\lambda}}, \varphi(\lambda) \right). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем равенство в пространстве \mathcal{S}' :

$$F_{\hat{\delta}(x-x_0)}(\lambda) = \widehat{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix_0\lambda}}.$$

Формально эту формулу можно получить так, как это делают физики:

$$F_{\hat{\delta}(x-x_0)}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0) e^{-ix\lambda} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix_0\lambda}.$$

Литература

- [1] Агранович М.С. Обобщенные функции. М.: МЦНМО, 2008, 128 с.
- [2] Будаков Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. Изд. 3-е, М. Физматлит, 2002. 512 с.
- [3] Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах. 4-е изд., 2001.
- [4] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. Гл. II: обобщенные функции, с. 82–189.
- [5] Гальперин И. Введение в теорию обобщенных функций, М.: Изд-во иностранной литературы, 1954, 63 с.
- [6] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Астрель, 2002.
- [7] Зорич В.А., Математический анализ, часть II, М.: Наука, 1984.
- [8] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть II. 5-е изд. М. Физматлит, 2004. 464 с.
- [9] Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ, часть II, М.: ТК Велби, изд-во Проспект, 2004, 368 с.
- [10] Постников М.М. Гладкие многообразия, М.: Наука, 1987, лекции 3–5.
- [11] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х томах. 8-е изд. М.: Физматлит, 2003. 864 с.
- [12] Щербаков Р.Н., Пичурин Л.Ф. Дифференциалы помогают геометрии. М. Просвещение, 1982; УРСС, 2010.