

## Глава IV. Методы исследования математических моделей.

### 1. Вариационные методы решения краевых задач и определения собственных значений

#### 1) Принцип Дирихле

$$D(u) = \int_D (u_x^2 + u_y^2) dx dy$$

$$F(u_x, u_y) = u_x^2 + u_y^2$$

$$F_u = 0 ; F_p = 2u_x, F_q = 2u_y, p = u_x, q = u_y$$

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} = -2u_{xx} - 2u_{yy} = 0 \Rightarrow$$

$$u_{xx} + 2u_{yy} = 0$$

$$D(u + \varepsilon h) = \int_D \left( (u_x + \varepsilon h_x)^2 + (u_y + \varepsilon h_y)^2 \right) dx dy =$$

$$\int_D (u_x^2 + u_y^2) dx dy + 2\varepsilon \int_D (u_x h_x + u_y h_y) dx dy + \varepsilon^2 \int_D (h_x^2 + h_y^2) dx dy =$$

$$= D(u) + 2\varepsilon D(u, h) + \varepsilon^2 D(h) \geq 0$$

$$D(u, h) = \int_D (u_x h_x + u_y h_y) dx dy$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} D(u + \varepsilon h) \Big|_{\varepsilon=0} = 2D(u, h) = 0 \Rightarrow D(u, h) = 0$$

$$D(u, h) = \int_D (u_x h_x + u_y h_y) dx dy = \int_D \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} h dx dy$$

## 2) Задача на собственные значения

$$\underline{\Gamma 1} \quad F'(\varepsilon) = \frac{1}{(H(u) + 2\varepsilon H(u, h) + \varepsilon^2 H(h))^2} \cdot ((2D(u, h) + 2\varepsilon D(h)) \cdot$$

$$\cdot (H(u) + 2\varepsilon H(u, h) + \varepsilon^2 H(h)) - 2(D(u) + 2\varepsilon D(u, h) + \varepsilon^2 D(h)) \cdot$$

$$\cdot (2H(u, h) + 2\varepsilon H(h)))$$

$$F'(0) = 2 \frac{D(u, h)H(u) - D(u)H(u, h)}{H^2(u)} = 0 \quad (22)$$

$$J(u) = \frac{D(u)}{H(u)} = \lambda > 0 \quad (19) \Rightarrow D(u) = \lambda H(u) \quad (23)$$

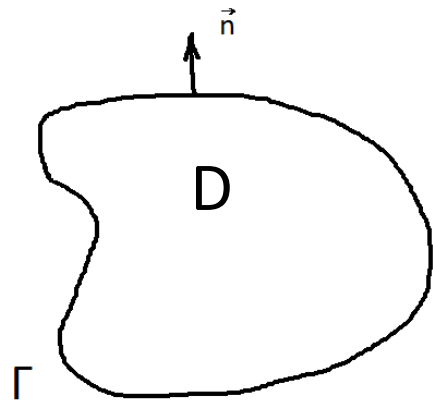
$$(23) \rightarrow (22) \Rightarrow H(u)D(u, h) - D(u)H(u, h) =$$

$$= H(u)(D(u, h) - \lambda H(u, h)) = 0 \quad (24)$$

$$H(u) \neq 0 \Rightarrow D(u, h) - \lambda H(u, h) = 0 \quad (25)$$

$$\int_D u \frac{\partial v}{\partial x} dx dy = \oint_{\Gamma} uv \cos(x, \hat{n}) d\sigma - \int_D v \frac{\partial u}{\partial x} dx dy$$

$$\int_D u \frac{\partial v}{\partial y} dx dy = \oint_{\Gamma} uv \cos(y, \hat{n}) d\sigma - \int_D v \frac{\partial u}{\partial y} dx dy$$



$h|_{\Gamma} = 0$  как допустимая функция

$$D(u, h) = \int_D (u_x h_x + u_y h_y) dx dy =$$

$$= \oint_{\Gamma=0} h(u_x \cos(x, \hat{n}) + u_y \cos(y, \hat{n})) ds$$

$$-\int_D h(u_{xx} + u_{yy}) dx dy = -\int_D h \Delta u dx dy \quad (26)$$

$$(26) \Rightarrow D(u, h) - \lambda H(u, h) = - \int_D h(\Delta u + \lambda u) dx dy =$$

$$= -H(h, \Delta u + \lambda u) = 0 \quad (27)$$

$$u \in C^{(2)}(D) \Rightarrow \Delta u \in C(D), \forall h(x, y), (27) \Rightarrow \Delta u + \lambda u = 0$$

T2

$$0 = H(\underline{\Delta \tilde{u}} + \tilde{\lambda} \tilde{u}, \tilde{u}) = \int_D \Delta \tilde{u} \cdot \tilde{u} dx dy + \int_D \tilde{u}^2 dx dy =$$

$$= \oint_{\Gamma} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \cdot \tilde{u} d\sigma - \int_D (\tilde{u}_x^2 + \tilde{u}_y^2) dx dy + \tilde{\lambda} \int_D \tilde{u}^2 dx dy =$$

$$= -D(\tilde{u}) + \tilde{\lambda} H(\tilde{u}) = 0 \quad (29) \Rightarrow \tilde{\lambda} = \frac{D(\tilde{u})}{H(\tilde{u})} \quad (30)$$

$$\lambda = \min_{u \in P} J(u) = \min_{u \in P} \frac{D(u)}{H(u)} < \tilde{\lambda}$$

## 2. Некоторые алгоритмы проекционного метода

### 2) Метод Рунца

$$u_N = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i ; (Au_N, \varphi_i) = (f, \varphi_i) \Rightarrow (A \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i, \varphi_i) = \\ = \sum_{i=1}^N (A\varphi_i, \varphi_i) a_i = (f, \varphi_i) \quad ; \quad \hat{A} = \{A_{ij}\}, A_{ij} = (A\varphi_i, \varphi_j),$$

$$a = (a_1, \dots, a_N)^T, \quad b = (f_1, \dots, f_N)^T, \quad f_j = (f, \varphi_j), \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Так как  $A$  – положительно определенный оператор и  $\{\varphi_i\}$  – линейно независимая система, то при  $v_N = \sum_{i=1}^N b_i \varphi_i$ ,  $b = (f_1, \dots, f_N)^T \neq 0 = (0, \dots, 0)^T$  имеем:

$$(\hat{A}b, b) = \sum_{i=1}^N A_{ij} b_i b_j = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (A\varphi_i, \varphi_j) b_i b_j = \left( A \sum_{i=1}^N b_i \varphi_i, \sum_{j=1}^N b_j \varphi_j \right) = (Av_N, v_N) \geq \gamma^2 \|v_N\|^2 > 0$$

то есть  $\hat{A}$  – положительно определенная матрица, а значит, невырожденная.

Следовательно, система  $\hat{A}a = b$  имеет единственное решение, определяя единственную

функцию  $u_N = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i$ . Для  $u_N$  можно получить априорную оценку:

$$(Au_N, \varphi_i) = (f, \varphi_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^N a_i (Au_N, \varphi_i) = \sum_{i=1}^N a_i (f, \varphi_i) \Rightarrow \left( Au_N, \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i \right) = \left( f, \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i \right) \Rightarrow \\ (Au_N, u_N) = (f, u_N), \quad (Au_N, u_N) \geq \gamma^2 \|u_N\|^2 \Rightarrow |(f, u_N)| \geq \gamma^2 \|u_N\|^2.$$

Неравенство Коши-Буняковского:

$$|(f, u_N)| \leq \|f\| \|u_N\| \Rightarrow \gamma^2 \|u_N\|^2 \leq \|f\| \|u_N\| \Rightarrow \|u_N\| \leq \frac{\|f\|}{\gamma^2}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\Gamma}. \quad & (A(u_0 - v), u_0 - v) = (Au_0, u_0) - (Au_0, v) - (v, Au_0) + (Av, v) = \\
& (Au_0, u_0) + (Av, v) - 2(Au_0, v) = (Au_0, u_0) + (Av, v) - 2(f, v) = \\
& = (Av, v) - 2(v, f) - (Au_0, u_0) + 2(u_0, f) - 2(Au_0, v) + 2(f, v) = \\
& = F(v) - F(u_0) - 2(f, v) + 2(f, v) = F(v) - F(u_0) \quad \Rightarrow \\
& (A(u_0 - v), u_0 - v) = F(v) - F(u_0)
\end{aligned}$$

$u_0$  минимизирует  $F(v)$  на  $D(A)$ ,  $u_N$  минимизирует  $F(v)$  на  $H_N \Rightarrow$

$$(A(u_0 - u_N), u_0 - u_N) = F(v) - F(u_0) \leq F(v_N) - F(u_0) =$$

$$= (A(u_0 - v_N), u_0 - v_N) \text{ для } \forall v_N = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i \in H_N \Rightarrow$$

$$\gamma^2 \|u_0 - u_N\|^2 \leq (A(u_0 - u_N), u_0 - u_N) \leq (A(u_0 - v_N), u_0 - v_N) =$$

$$\begin{aligned}
& (u_0 - v_N, A(u_0 - v_N)) = (A^{-1}A(u_0 - v_N), (u_0 - v_N)) = \|A^{-1}\| \cdot (A(u_0 - v_N), A(u_0 - v_N)) \\
& = \|A^{-1}\| \|A(u_0 - v_N)\|^2 \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\|u_0 - u_N\|^2 \leq \frac{\|A^{-1}\|}{\gamma^2} \|A(u_0 - v_N)\|^2$$

$$\|A\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|}$$