Вопросы и задачи к первой части экзамена по ТФКП
(3-й поток, лектор А.В. Кравцов)

Запишите неравенства треугольника для комплексных чисел.

Дайте определение функции, однолистной на некотором множестве.

Дайте определение показательной функции e^z.

Дайте определения тригонометрических функций $\sin z$, $\cos z$, $\mathrm{tg} z$, $\mathrm{ctg} z$.

Дайте определения гиперболических функций $\mathrm{sh} z$, $\mathrm{ch} z$, $\mathrm{th} z$, $\mathrm{cth} z$.

Дайте определение логарифмической функции $\mathrm{Ln} z$.

Дайте определение общей степенной функции z^a $(a \neq 0)$.

Запишите формулу вычисления интеграла от непрерывной функции комплексной переменной вдоль кусочно гладкой кривой через определённый интеграл.

Запишите неравенство для модуля интеграла.

Дайте определение функции комплексной переменной, дифференцируемой в точке. Приведите пример.

Сформулируйте необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке.

Дайте определение функции, аналитической в области, не содержащей точку $z = \infty$. Приведите пример.

Дайте определение функции, аналитической в точке $z_0 \neq \infty$. Приведите пример.

Дайте определение функции, аналитической в точке $z = \infty$. Приведите пример.

Запишите условия Коши–Римана в случае, когда $z = x + iy$, $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Запишите условия Коши–Римана в случае, когда $z = r\mathrm{e}^{i\varphi}$, $w = f(z) = U(r, \varphi) + iV(r, \varphi)$.

Запишите условия Коши–Римана в случае, когда $z = x + iy$, $w = f(z) = \rho(x, y)\mathrm{e}^{i\psi(x,y)}$.

Запишите условия Коши–Римана в случае, когда $z = r\mathrm{e}^{i\varphi}$, $w = f(z) = R(r, \varphi)\mathrm{e}^{i\Phi(r,\varphi)}$.

Дайте определение отображения $w = f(z)$, конформного в точке $z_0 \neq \infty$.

Дайте определение функции, гармонической в некоторой области.

Дайте определение сопряжённых гармонических в некоторой области функций.

Сформулируйте теорему Коши для односвязной области.

Сформулируйте теорему Коши для ограниченной области.

Сформулируйте теорему Коши для многосвязной области.

Сформулируйте теорему об аналитичности интеграла с переменным верхним пределом.

Запишите интегральную формулу Коши для односвязной области.

Дайте определение интеграла типа Коши.

Сформулируйте теорему о среднем.

Сформулируйте теорему Лиувилля.

Сформулируйте принцип максимума модуля аналитической функции.

Сформулируйте принцип минимума модуля аналитической функции.

Сформулируйте теорему о почленном интегрировании функционального ряда.

Сформулируйте вторую теорему Вейерштрасса о функциональных рядах.

Сформулируйте теорему Абеля о степенных рядах.

Сформулируйте теорему Коши–Адамара о степенных рядах.

Запишите формулу Коши–Адамара для радиуса круга сходимости степенного ряда.

Сформулируйте теорему об аналитичности суммы степенного ряда.

Сформулируйте теорему Тейлора.

Запишите дифференциальную и интегральную формулы для коэффициентов разложения аналитической функции в степенной ряд.

Запишите формулу для производной порядка n аналитической функции.

Сформулируйте теорему Морера.

Сформулируйте первую теорему Вейрштрасса о функциональных рядах.

Дайте определение нуля $z_0 \neq \infty$ порядка m аналитической функции.

Сформулируйте теорему о нулях аналитической функции.

Сформулируйте теорему единственности аналитической функции.

Дайте определение аналитического продолжения функции $f(z)$, заданной первоначально на некотором множестве E.

Сформулируйте принцип аналитического продолжения.

Запишите формулу аналитического продолжения через границу области.

Сформулируйте теорему Лорана.

Запишите формулу для коэффициентов разложения аналитической функции в ряд Лорана.

Дайте определение изолированной особой точки аналитической функции.

Дайте определение устранимой особой точки аналитической функции. Приведите пример.

Дайте определение полюса аналитической функции. Приведите пример.

Дайте определение существенно особой точки аналитической функции. Приведите пример.

Сформулируйте теорему об устранимой особой точке $z_0 \neq \infty$ аналитической функции (необходимое и достаточное условие).

Сформулируйте теорему о полюсе $z_0 \neq \infty$ аналитической функции (необходимое и достаточное условие).

Сформулируйте теорему Сохоцкого о существенно особой точке.

Дайте определение вычета в конечной изолированной особой точке аналитической функции.

Дайте определение вычета в бесконечной изолированной особой точке аналитической функции.

Запишите формулу для вычисления вычета в полюсе $z_0 \neq \infty$ порядка $m \geq 1$ аналитической функции.

Сформулируйте основную теорему теории вычетов.

Сформулируйте теорему о вычетах функции, аналитичной на всей комплексной плоскости, за исключением конечного числа особых точек.

Сформулируйте лемму Жордана для верхней полуплоскости.

Сформулируйте лемму Жордана для нижней полуплоскости.

Сформулируйте лемму Жордана для правой полуплоскости.

Сформулируйте лемму Жордана для левой полуплоскости.

Сформулируйте теорему о разности числа нулей и полюсов аналитической функции.

Сформулируйте принцип аргумента.

Сформулируйте теорему Руше.

Сформулируйте принцип сохранения области.

Сформулируйте теорему о существовании и аналитичности обратной функции.

Дайте определение функции, однолистной в точке. Приведите пример.

Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии однолистности в точке $z_0 \neq \infty$ аналитической функции.

Дайте определение конформного отображения области полной комплексной плоскости на область полной комплексной плоскости.

Сформулируйте теорему Римана о существовании конформного отображения.

Сформулируйте теорему единственности конформного отображения.

Сформулируйте принцип соответствия границ при конформном отображении.

Дайте определение дробно–линейной функции.

Сформулируйте групповое свойство дробно–линейной функции.

Сформулируйте круговое свойство дробно–линейной функции.

Сформулируйте свойство сохранения симметрии дробно–линейной функции.

Запишите общий вид дробно–линейной функции, переводящей конечные точки z_1, z_2 соответственно в точки $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$.

Запишите общий вид дробно–линейной функции, переводящей точки $z_1 = 0$, $z_2 = \infty$ соответственно в точки $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$.

Запишите формулу конформного отображения верхней полуплоскости на единичный круг.

Запишите формулу конформного отображения единичного круга на единичный круг.

Дайте определение функции Жуковского.

Сформулируйте принцип максимума и минимума гармонической функции.

Сформулируйте постановку задачи Дирихле для уравнения Лапласа в случае ограниченной области.

Запишите формулу Пуассона решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге $|z| < R$.

Дайте определение изображения по Лапласу функции $f(t)$ действительной переменной t.

Сформулируйте теорему об аналитичности изображения по Лапласу функции $f(t)$ действительной переменной t.

Запишите формулу Меллина.

Сформулируйте теорему о достаточных условиях существования оригинала функции $F(p)$ комплексной переменной p.

Запишите в алгебраической форме число:
$\sin(3 + 2i)$, $\sin(-2 + 4i)$, $\cos(5 + 3i)$, $\cos(2 - 3i)$, $\mathrm{sh}(2 + 3i)$, $\mathrm{ch}(3 - 4i)$.

Найдите все значения:
$\mathrm{Ln}(-2 - i)$, $\mathrm{Ln}(-2 - 3i)$, $\mathrm{Ln}(3 - 4i)$, $\mathrm{Ln}(-1 + 3i)$,
$(1 + 3i)^{-1-i}$, $(-3 + i)^{1-i}$, $(-1 + 2i)^{2+i}$, $(2 - 3i)^{-1+i}$.
Ответ запишите в алгебраической форме.

Найдите все решения уравнения:
$\mathrm{e}^{-iz} = -2 + i$, $\mathrm{e}^{iz} = 1 - 2i$, $\mathrm{e}^{2iz} = -1 - i$, $i \sin z + \cos z = i$, $\mathrm{sh}z + \mathrm{ch}z = 1 + i$.
Ответ запишите в алгебраической форме.

Исследуйте на дифференцируемость функцию:
$f(z) = \mathrm{Re}z + \mathrm{Im}z$, $f(z) = z + \overline{z}$, $f(z) = \mathrm{Re}z + \mathrm{Im}\overline{z}$, $f(z) = z^2 + (\overline{z})^2$,
$f(z) = \mathrm{Im}\overline{z}$, $f(z) = \overline{z}\mathrm{Im}z$, $f(z) = \mathrm{Re}z \cdot \mathrm{Im}z$, $f(z) = z^2 + \overline{z}$.

Исследуйте на аналитичность функцию:
$f(z) = \mathrm{Re}(z^2)$, $f(z) = \mathrm{Im}(z^2)$, $f(z) = |z|^2\mathrm{Re}z$, $f(z) = z\mathrm{Im}\overline{z}$, $f(z) = \overline{z}\mathrm{Re}z$,
$f(z) = |z|^2\mathrm{Im}z$, $f(z) = (\overline{z})^2$, $f(z) = z + |z|^2$, $f(z) = z + (\overline{z})^2$.

Найдите радиус круга сходимости степенного ряда:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + 3i\right)^n z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(in)}{n}(z - i)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2i)^n}{n} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{ch}(2n)}{n + i} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{tg}(3in)}{n + 1}(z + i)^n.$$

Найдите все особые точки (в т.ч. неизолированные, если они есть) функции $f(z)$:
$$f(z) = \frac{z}{\sin z}, \quad f(z) = \frac{1}{\mathrm{e}^z - i}, \quad f(z) = \mathrm{tg}^2 z, \quad f(z) = \frac{\mathrm{th}z}{z}, \quad f(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}.$$
Укажите тип изолированных особых точек.

Найдите вычет функции $f(z)$ в точке z_0:

$f(z)=z\mathrm{e}^{1/z}$, $z_0=0$, $\quad f(z)=z\mathrm{e}^{1/z^2}$, $z_0=0$, $\quad f(z)=z\mathrm{e}^{1/(z-1)}$, $z_0=1$,
$f(z)=z^2\sin(1/z)$, $z_0=0$, $\quad f(z)=z^3\cos(1/z)$, $z_0=0$, $\quad f(z)=\dfrac{z+1}{z^2+1}$, $z_0=\infty$,
$f(z)=\dfrac{z^2}{z^3+1}$, $z_0=\infty$.

Вычислите (кривые пробегаются против часовой стрелки):
$\int\limits_L z^3\mathrm{e}^{1/z}dz$, L: $|z|=1$, $\quad \int\limits_L z\cos(1/z)dz$, L: $|z|=1$, $\quad \int\limits_L \mathrm{ctg}z dz$, L: $|z|=1$,
$\int\limits_L z\mathrm{e}^{1/z^2}dz$, L: $|z|=1$, $\quad \int\limits_L z\mathrm{e}^{1/(z+1)}dz$, L: $|z+1|=1$, $\quad \int\limits_L z\sin\{1/(z-2)\}dz$, L: $|z-2|=1$.

Является ли функция $f(z)$ однолистной точке z_0? Ответ обоснуйте.
$f(z)=z+\dfrac{4}{z}$, $z_0=2$, $\quad f(z)=z^2+\dfrac{2}{z}$, $z_0=1$, $\quad f(z)=z\sin z$, $z_0=0$.

Является ли функция $f(z)=z^3$ а) однолистной в каждой точке области $\mathrm{Re}z<0$; б) однолистной во всей области $\mathrm{Re}z<0$? Ответ обоснуйте.

Является ли отображение $w=f(z)$ конформным в области D? Ответ обоснуйте.
$w=z^4$, $D:\mathrm{Im}z>0$, $\quad w=\mathrm{e}^z$, $D:\mathrm{Re}z>0$, $\quad w=\sin z$, $D:\mathrm{Im}z<0$.

Является ли функция Жуковского однолистной в области $\mathrm{Re}z>0$? Ответ обоснуйте.

Пусть $F(p)$ изображение по Лапласу функции $f(t)$. Какая функция переменной t имеет своим изображением n–ю производную $F^{(n)}(p)$?

Пусть $F(p)$ изображение по Лапласу функции $f(t)$. Считая, что изображение n–й производной $f^{(n)}(t)$ существует, выразите его через $F(p)$.

Найдите изображение по Лапласу функции $f(t)$ действительной переменной t ($f(t)\equiv 0$ при $t<0$), если при $t\geq 0$:
$f(t)=\sin t$, $\quad f(t)=\cos 3t$, $\quad f(t)=t^n$ $(n=1,2,...)$, $\quad f(t)=t\mathrm{e}^{2t}$.

Найдите оригинал $f(t)$ функции комплексной переменной $F(p)$:
$F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2}$, $\mathrm{Re}p>1$, $\quad F(p)=\dfrac{1}{p(p+2)}$, $\mathrm{Re}p>0$, $\quad F(p)=\dfrac{p-1}{(p-2)^2+1}$, $\mathrm{Re}p>2$.

Вопросы ко второй части экзамена по ТФКП (3-й поток, лектор А.В. Кравцов)

Докажите теорему о связи существования предела последовательности комплексных чисел $z_n=x_n+iy_n$ с существованием пределов последовательностей действительных чисел x_n и y_n.
Докажите необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке.
Докажите теорему Коши для односвязной области без требования непрерывности производной.
Докажите теорему Коши для односвязной области в случае непрерывности производной.
Докажите теорему Коши для многосвязной области.
Докажите теорему об аналитичности интеграла с переменным верхним пределом.
Докажите интегральную формулу Коши для односвязной области.
Докажите аналитичность интеграла типа Коши.

Докажите теорему Лиувилля.

Докажите теорему о среднем и теорему Морера.

Докажите принцип максимума модуля аналитической функции.

Докажите теорему о почленном интегрировании функционального ряда.

Докажите вторую теорему Вейерштрасса о функциональных рядах.

Докажите теорему Абеля о степенных рядах.

Докажите теорему Коши–Адамара о степенных рядах.

Докажите теорему об аналитичности суммы степенного ряда, не используя первую теорему Вейерштрасса.

Докажите теорему Тейлора.

Докажите первую теорему Вейерштрасса о функциональных рядах.

Докажите теорему о нулях аналитической функции.

Докажите теорему единственности аналитической функции.

Докажите формулу аналитического продолжения через границу области.

Докажите теорему о существовании особой точки суммы степенного ряда на границе круга сходимости.

Докажите теорему Лорана.

Докажите теорему об устранимой особой точке $z_0 \neq \infty$ аналитической функции (необходимое и достаточное условие).

Докажите теорему о полюсе $z_0 \neq \infty$ аналитической функции (необходимое и достаточное условие).

Докажите теорему Сохоцкого для случая, когда существенно особая точка конечна.

Докажите основную теорему теории вычетов и теорему о вычетах функции, аналитичной на всей комплексной плоскости, за исключением конечного числа особых точек.

Пусть функция $f(x)$ действительной переменной x непрерывна на всей числовой прямой, а интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Докажите формулу для вычисления этого интеграла при помощи вычетов.

Докажите лемму Жордана для верхней полуплоскости.

Докажите лемму Жордана для нижней полуплоскости.

Докажите лемму Жордана для правой полуплоскости.

Докажите лемму Жордана для левой полуплоскости.

Пусть функция $F(x)$ действительной переменной x непрерывна на всей числовой прямой, а интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{iax}F(x)dx$ сходится ($a > 0$). Докажите формулу для вычисления этого интеграла при помощи вычетов.

Докажите теорему о разности числа нулей и полюсов аналитической функции.

Докажите теорему Руше.

Докажите (методами ТФКП) основную теорему алгебры.

Докажите принцип сохранения области.

Докажите теорему о существовании и аналитичности обратной функции.

Докажите теорему о необходимом условии однолистности в точке $z_0 \neq \infty$ аналитической функции.

Докажите принцип соответствия границ при конформном отображении.

Пусть D и G–односвязные области на полной комплексной плоскости с границами, состоящими более, чем из одной точки. Докажите, что существует единственная функция $w = f(z)$, конформно отображающая D на G, и удовлетворяющая условиям $f(z_0) = w_0$, $\arg f'(z_0) = \alpha$ ($z_0 \in D$, $w_0 \in G$, $z_0 \neq \infty$, $w_0 \neq \infty$).

Докажите круговое свойство дробно–линейной функции.

Докажите свойство сохранения симметрии дробно–линейной функции.

Докажите теорему о существовании и единственности дробно–линейной функции, переводящей три различные конечные точки z_1, z_2, z_3 в три различные конечные точки w_1, w_2, w_3.

Пусть односвязные области D и G состоят из конечных точек, функция $f(z) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$ осуществляет конформное отображение D на G, а функция $u(x, y)$ гармонична в D. Докажите, что сложная функция $u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ гармонична в G.

Докажите (методами ТФКП) принцип максимума и минимума гармонической функции двух переменных.

Докажите теорему об аналитичности изображения по Лапласу функции $f(t)$ действительной переменной t.

Докажите теорему о достаточных условиях существования оригинала функции $F(p)$ комплексной переменной p.