МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

М. О. Корпусов, А. А. Панин

Лекции по линейному и нелинейному функциональному анализу

Том III. Нелинейный анализ

Москва
Физический факультет МГУ
2015

К о р п у с о в М. О., П а н и н А. А.
Лекции по линейному и нелинейному функциональному анализу. Том III. Нелинейный анализ. — М.: Физический факультет МГУ, 2016. 260 с.
ISBN

В курсе лекций изложены методы исследования нелинейных операторов, действующих в линейных пространствах.

Материал книги используется в курсах «Линейный и нелинейный функциональный анализ» и «Абстрактные дифференциальные уравнения с приложениями в математической физики», которые авторы читают на кафедре математики физического факультета МГУ.

Данный курс входит в учебный план кафедры математики физического факультета МГУ и представляет интерес для широкого круга студентов и аспирантов, специализирующихся в области функционального анализа.

Библиогр. 62 назв., рис. 4.

Р е ц е н з е н т ы:
проф. *В. Ю. Попов,*
проф. *Г. А. Свиридюк,*
проф. *М. В. Фалалеев*

Печатается по решению Учёного совета
физического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова

ISBN

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Настоящее учебное пособие посвящено изложению основ функционального анализа для студентов–математиков кафедры математики физического факультета МГУ. В третьем томе «Нелинейный анализ» рассматриваются некоторые понятия и результаты нелинейного функционального анализа и их приложения к нелинейным задачам математической физики. Вводятся и поясняются на примерах понятия производных нелинейного оператора по Гато и по Фреше, дается понятие и свойства компактных операторв. Отдельно рассматривается оператор Немыцкого. Затем рассматриваются различные вариационные методы, в т. ч. теорема о горном перевале, теория Люстерника—Шнирельмана. Рассматриваются также следующие методы исследования разрешимости задач для нелинейных уравнений: метод Галеркина (в сочетании с методами монотонности и компактности), метод нижних и верхних решений, топологический принципе Шаудера. Завершает книгу цикл лекций, посвященный абстрактной теореме Пикара (обобщающей классическую теорему о существовании и единственности решения ОДУ) и ее приложениям к уравнениям соболевского типа.

Мы глубоко признательны А. Г. Свешникову, А. Н. Боголюбову и Н. Н. Нефедову за полезное обсуждение книги, а также рецензентам: В. Ю. Попову, Г. А. Свиридюку и М. В. Фалалееву за ценные замечания, существенно улучшившие книгу.

Авторы

Тематическая лекция I

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ: НЕПРЕРЫВНОСТЬ, ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ, КОМПАКТНОСТЬ

Лекция 1

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 1. Введение

В этой лекции мы введем важные понятия дифференцируемости по Гато и по Фреше. Эти два понятия носят фундаментальный характер при исследовании вариационных задач, а также при рассмотрении различных нелинейных краевых задач. Будут доказаны важная теорема о связи этих двух понятий друг с другом. Рассмотрение данных понятий будет снабжено некоторыми примерами. Наконец, последняя часть этой лекции будет посвящена важному в приложениях оператору Немыцкого. Будет приведен без доказательства фундаментальный результат о сильной непрерывности оператора Немыцкого, который будет неоднократно использоваться в дальнейшем.

§ 2. Производные Гато и Фреше нелинейных операторов

Пусть $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$ — это два банаховых пространства относительно норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ соответственно. Пусть, кроме того, $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ — это соответствующие скобки двойственности.

Рассмотрим некоторый, вообще говоря, нелинейный оператор

$$F : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2.$$

Введем понятие дифференцируемости по Гато оператора F. Дадим соответствующее определение.

Определение 1. *Оператор F называется дифференцируемым по Гато в точке $u \in \mathbb{B}_1$, если для любого $h \in \mathbb{B}_1$ имеет место предельное равенство*

$$\lim_{\lambda\to 0}\left\|\frac{F(u+\lambda h)-F(u)}{\lambda} - F_g'(u)h\right\|_2 = 0, \tag{2.1}$$

где $F_g'(u)$ при каждом фиксированном $u \in \mathbb{B}_1$ есть линейный оператор из $\mathbb{B}_1$ в $\mathbb{B}_2$. При этом, вообще говоря, нелинейный по $u \in \mathbb{B}_1$ оператор $F_g'(u)$ называется производной Гато оператора F.

Замечание 1. Введем $\mathbb{B}_2$−значную функцию

$$\varphi(\lambda) := F(u+\lambda h),$$

для всех $u, h \in \mathbb{B}_1$ и $\lambda \in \mathbb{R}^1$. Тогда, как нетрудно видеть, согласно определению 1 имеет место равенство

$$F_g^{'}(u)h = \frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}.$$

□ Действительно, справедливо равенство

$$\frac{\varphi(\lambda)-\varphi(0)}{\lambda} = \frac{F(u+\lambda h)-F(u)}{\lambda}. \tag{2.2}$$

С одной стороны, при условии существования предела справедливо предельное равенство

$$\lim_{\lambda\to 0}\left\|\frac{\varphi(\lambda)-\varphi(0)}{\lambda} - \frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}\right\|_2 = 0. \tag{2.3}$$

С другой стороны, при условии существования предела имеем

$$\lim_{\lambda\to 0}\left\|\frac{F(u+\lambda h)-F(u)}{\lambda} - F_g^{'}(u)h\right\|_2 = 0. \tag{2.4}$$

Поэтому в силу (2.2) мы из (2.3) и (2.4) получим, что при условии существования производной Фреше $F_g^{'}(u)$ в точке $u \in \mathbb{B}_1$ вытекает справедливость равенства

$$\frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} = F_g^{'}(u)h. \quad \boxtimes$$

Рассмотрим теперь ряд примеров производных Гато отображений.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим теперь случай линейного оператора

$$F : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2.$$

Тогда, очевидно, в силу линейности этого отображения имеет место следующее равенство:

$$\frac{F(u+\lambda h)-F(u)}{\lambda} = Fh,$$

т. е.

$$F_g^{'}(u) = F.$$

Тем самым, приходим к выводу о том, что линейный оператор из $\mathbb{B}_1$ в $\mathbb{B}_2$ является бесконечное число раз дифференцируемым по Гато, причем всякий раз соответствующая производная Гато совпадает с самим оператором.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим теперь следующее отображение:

$$F = (F_1, ..., F_n) : \mathbb{R}_m \to \mathbb{R}_n,$$

где $\mathbb{R}_m$ и $\mathbb{R}_n$ — это евклидовы пространства строк. Конечно, они являются банаховыми относительно, например, таких норм:

$$\|u\|_1 := \Big(|u_1|^2 + \cdots + |u_m|^2\Big)^{1/2} \quad \text{и} \quad \|v\|_2 := \Big(|v_1|^2 + \cdots + |v_n|^2\Big)^{1/2},$$

где $u = (u_1, ..., u_m) \in \mathbb{R}_m$ и $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}_n$. Вычислим производную Гато отображения F.

□ Действительно,

$$\left\| \frac{F(u+\lambda h) - F(u)}{\lambda} - F_g^{'}(u)h \right\|_2 =$$

$$= \left| \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{F_j(u+\lambda h) - F_j(u)}{\lambda} - \Big(F_g^{'}(u)h\Big)_j \right)^2 \right|^{1/2}.$$

Заметим, что имеет место следующее равенство:

$$\lim_{\lambda\to+0} \left| \frac{F_j(u+\lambda h) - F_j(u)}{\lambda} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_j(u)}{\partial u_k} h_k \right| = 0.$$

Из сравнения этой формулы и предыдущей мы приходим к выводу о том, что

$$F_g^{'}(u) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1(u)}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_n(u)}{\partial u_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_1(u)}{\partial u_m} & \cdots & \dfrac{\partial F_n(u)}{\partial u_m} \end{pmatrix}.$$

Замечание 1. В связи с рассмотренным примером 2 мы можем считать производную Гато обобщением частной производной функции нескольких переменных на бесконечномерный случай.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим оператор Гаммерштейна

$$G(u) := \int_0^1 k(x,y) g(u(y),y)\, dy \quad \text{для всех} \quad y \in [0,1].$$

В качестве банаховых пространств $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$ возьмем $\mathbb{C}[0,1]$ со стандартной нормой и потребуем, чтобы

$$k(x,y) \in \mathbb{C}([0,1]\times[0,1]), \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u,x) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^1 \times [0,1]).$$

С одной стороны, в силу этих предположений имеет место предельное равенство

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{g(u+\lambda h, x) - g(u,x)}{\lambda} = \frac{\partial g}{\partial u}(u,x)h(x).$$

С другой стороны, имеем

$$\frac{G(u+\lambda h) - G(u)}{\lambda} = \int\limits_0^1 k(x,y) \frac{g(u(y)+\lambda h(y), y) - g(u(y),y)}{\lambda}\, dy.$$

Поэтому производная Гато оператора Гаммерштейна имеет вид

$$G_g^{'}(u)h = \int\limits_0^1 k(x,y)\frac{\partial g}{\partial u}(u(y),y)h(y)\, dy \quad \text{для всех} \quad h(x) \in \mathbb{C}[0,1].$$

Теперь приступим к рассмотрению еще одного вида производной от оператора — *производной Фреше*. Дадим определение.

Определение 2. *Оператор F называется дифференцируемым по Фреше в точке $u \in \mathbb{B}_1$, если в окрестности этой точки для любого $h \in \mathbb{B}_1$ имеет место следующее равенство*:

$$F(u+h) = F(u) + F_f^{'}(u)h + \omega(u,h), \tag{2.5}$$

причем

$$\lim_{\|h\|_1 \to 0} \frac{\|\omega(u,h)\|_2}{\|h\|_1} = 0. \tag{2.6}$$

Линейный при фиксированном $u \in \mathbb{B}_1$ оператор

$$F_f^{'}(u) : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$$

называется производной Фреше оператора F.

Замечание 3. Отметим, что из существования производной Фреше оператора $F : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ вытекает существование производной Гато и справедливо равенство

$$F_g^{'}(u) = F_f^{'}(u) \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{B}_1,$$

в которых существует производная Фреше.

□ Действительно, в силу (2.5) справедливо равенство

$$F(u+\lambda h) = F(u) + F_f^{'}(u)\lambda h + \omega(u, \lambda h).$$

В силу линейности оператора $F_f^{'}(u)$ при фиксированном $u \in \mathbb{B}_1$ отсюда вытекает равенство

$$\frac{F(u+\lambda h) - F(u)}{\lambda} - F_f^{'}(u)h = \frac{\omega(u,\lambda h)}{\lambda}. \tag{2.7}$$

Нужно рассмотреть только случай $\|h\|_1 \neq 0$. В этом случае из равенства (2.7) мы получим следующее выражение:

$$\left\| \frac{F(u+\lambda h) - F(u)}{\lambda} - F_f^{'}(u)h \right\|_2 = \|h\|_1 \frac{\|\omega(u,\lambda h)\|_2}{|\lambda|\|h\|_1}. \tag{2.8}$$

Осталось воспользоваться свойством (2.6). $\boxtimes$

Замечание 4. Пусть банахово пространство $\mathbb{B}_3$ *непрерывно* вложено в банахово пространство $\mathbb{B}_1$, т. е.

$$\exists\, J \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_3; \mathbb{B}_1)$$

и J — инъективный оператор. Тогда производная Фреше оператора

$$F(J\cdot) : \mathbb{B}_3 \to \mathbb{B}_2$$

есть оператор

$$F_f^{'}(J\cdot)J : \mathbb{B}_3 \to \mathcal{L}(\mathbb{B}_3; \mathbb{B}_2),$$

где

$$F_f^{'}(\cdot) : \mathbb{B}_1 \to \mathcal{L}(\mathbb{B}_1; \mathbb{B}_2)$$

— это производная Фреше оператора

$$F(\cdot) : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2.$$

Докажите сами!

Рассмотрим теперь очень важный частный случай. Пусть $\psi(u)$ — это функционал

$$\psi(u) : \mathbb{H} \to \mathbb{C}^1,$$

где $\mathbb{H}$ — это гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$. В этом случае $\mathbb{B}_1 = \mathbb{H}$ и $\mathbb{B}_2 = \mathbb{C}^1$, причем $\mathbb{C}^1$ — это банахово пространство относительно модуля $|\cdot|$.

Дадим определение градиента функционала $\psi(u)$ [1]).

Определение 3. *Градиентом функционала $\psi(u)$ называется величина*

$$\mathbf{grad}\,\psi(u) \stackrel{\text{def}}{=} J\psi_f^{'}(u) : \mathbb{H} \to \mathbb{H},$$

где $J : \mathbb{H}^* \to \mathbb{H}$ — оператор Рисса.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим отображение, определённое формулой

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1,$$

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1^3 x_2}{x_1^4 + x_2^2}, & \text{при} \quad x = (x_1, x_2) \neq \vartheta = (0,0); \\ 0, & \text{при} \quad x = (x_1, x_2) = \vartheta = (0,0). \end{cases}$$

1) Иногда градиент функционала на гильбертовом пространстве путают с производной Фреше этого функционала.

Докажем, что это отображение дифференцируемо по Гато в точке $(0,0)$.

$\square$ Действительно, имеет место следующая цепочка выражений:

$$\frac{F(\vartheta+\lambda h)-F(\vartheta)}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}\frac{\lambda^4 h_1^3 h_2}{\lambda^4 h_1^4+\lambda^2 h_2^2}=\lambda\frac{h_1^3 h_2}{\lambda^2 h_1^4+h_2^2}\to 0 \quad \text{при} \quad \lambda\to 0.$$

Тем самым, производная Гато этого отображения в точке $(0,0)$ равна нулевому отображению: $F_g'(0)=\Theta$.

Предположим, что производная Фреше этого отображения существует в точке $(0,0)$. Поскольку производная Фреше при условии существовании является производной Гато, то производная Фреше с необходимостью равна нулевому отображению Θ. Заметим, что согласно определению 2 производной Фреше и явному виду отображения F имеет место следующее равенство:

$$F(\vartheta+h)-F(\vartheta)=F_f'(\vartheta)h+\omega(\vartheta,h),$$

из которого приходим к следующему равенству:

$$F(h)=\omega(\vartheta,h),\qquad \lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|\omega(\vartheta,h)\|}{\|h\|}=0 \quad \text{при} \quad \|h\|\to+0.$$

Значит, с необходимостью получаем, что

$$\frac{\|F(h)\|}{\|h\|}\to 0.$$

Рассмотрим стремление к точке $(0,0)$ вектора $h\in\mathbb{R}^2$ по кривой (параболе) $h_2=h_1^2$. Действительно, имеет место равенство

$$\frac{\|F(h)\|}{\|h\|}=\frac{|h_1|^3|h_2|}{h_1^4+h_2^2}\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=$$
$$=\frac{|h_1|h_1^4}{h_1^4+h_1^4}\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_1^4}}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+h_1^2}}\to\frac{1}{2}\neq 0 \quad \text{при} \quad \|h\|\to 0.$$

Полученное предельное равенство означает, что производной Фреше в точке $(0,0)$ не существует. $\boxtimes$

Тем самым, *из существования производной Гато в какой-то точке не следует существование производной Фреше в этой же точке.*

Возникает естественный вопрос: при каких дополнительных условиях вытекает существование производной Фреше в некоторой точке при условии существования производной Гато в той же точке.

Теорема 1. *Пусть оператор* $F : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ *является дифференцируемым по Гато в некоторой окрестности точки* $u \in \mathbb{B}_1$ *и производная Гато* $F_g^{'}(\cdot)$ *непрерывна в точке* $u \in \mathbb{B}_1$. *Тогда оператор* F *дифференцируем по Фреше в этой же точке* $u \in \mathbb{B}_1$ *и имеет место равенство*

$$F_g^{'}(u) = F_f^{'}(u).$$

Доказательство.

Введем обозначение.

$$\omega(u,h) := F(u+h) - F(u) - F_g^{'}(u)h.$$

Пусть $f^* \in \mathbb{B}_2^*$, тогда имеем

$$\langle f^*, \omega(u,h)\rangle_2 = \langle f^*, F(u+h) - F(u)\rangle_2 - \left\langle f^*, F_g^{'}(u)h\right\rangle_2.$$

Введём функционал

$$\psi(u) := \langle f^*, F(u)\rangle, \quad \psi(u) : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{R}^1.$$

Из разностного выражения

$$\frac{\psi(v+\lambda h) - \psi(v)}{\lambda} = \left\langle f^*, \frac{F(v+\lambda h) - F(v)}{h}\right\rangle$$

вытекает, что

$$\left\langle \psi_g^{'}(v), h\right\rangle_1 = \left\langle f^*, F_g^{'}(v)h\right\rangle_2.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию вещественную функцию

$$\varphi(\lambda) := \psi(u+\lambda h), \quad \lambda \in \mathbb{R}^1.$$

Согласно формуле Лагранжа для всяких фиксированных $u, h \in \mathbb{B}_1$ и $f^* \in \mathbb{B}_2^*$ найдется такое число $\lambda = \lambda(u,h,f^*) \in (0,1)$, что

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi^{'}(\lambda) \Rightarrow \psi(u+h) - \psi(u) = \left\langle \psi_g^{'}(u+\lambda h), h\right\rangle.$$

Иначе,

$$\langle f^*, F(u+h) - F(u)\rangle = \left\langle f^*, F_g^{'}(u+\lambda h)h\right\rangle.$$

Следовательно,

$$\langle f^*, \omega(u,h)\rangle_2 = \left\langle f^*, F_g^{'}(u+\lambda h)h - F_g^{'}(u)h\right\rangle_2.$$

По следствию из теоремы Хана–Банаха при фиксированных $u, h \in \mathbb{B}_1$ найдется такое $f^* \in \mathbb{B}_2^*$ с $\|f^*\|_{*2} = 1$, что [1)]

$$\|\omega(u,h)\|_2 = \langle f^*, \omega(u,h)\rangle_2.$$

[1)] Заметим, что пока $f^* \in \mathbb{B}_2^*$ является произвольным.

Значит, имеет место неравенство

$$\|\omega(u,h)\|_2 \leqslant \left\|F_g^{'}(u+\lambda h) - F_g^{'}(u)\right\|_{1\to 2} \|h\|_1.$$

Здесь мы воспользовались неравенством

$$|\langle f^*, u\rangle| \leqslant \|f^*\|_*\|u\| \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{B}, \quad f^* \in \mathbb{B}^*.$$

Следовательно, в силу непрерывности $F_g^{'}(\cdot)$ в точке $u \in \mathbb{B}_1$ имеет место неравенство

$$\lim_{\|h\|_1\to 0} \frac{\|\omega(u,h)\|_2}{\|h\|_1} \leqslant \lim_{\|h\|_1\to 0} \left\|F_g^{'}(u+\lambda h) - F_g^{'}(u)\right\|_{1\to 2} = 0.$$

Теорема доказана.

Теперь мы можем установить связь между понятиями дифференцируемости по Фреше и непрерывности отображения. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $F : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ — это отображение, дифференцируемое по Фреше в некоторой точке $u \in \mathbb{B}_1$, тогда отображение F непрерывно в этой точке.*

Доказательство.

Действительно, в силу дифференцируемости по Фреше в точке $u \in \mathbb{B}_1$ имеет место следующее неравенство:

$$\left\|F(u+h) - F(u) - F_f^{'}(u)h\right\|_2 \leqslant \|h\|_1$$

при достаточно малом $h \in \mathbb{B}_1$. Но тогда имеет место следующее неравенство:

$$\|F(u+h) - F(u)\|_2 \leqslant \left\|F(u+h) - F(u) - F_f^{'}(u)h\right\|_2 + \\ + \left\|F_f^{'}(u)h\right\|_2 \leqslant \left(1 + \left\|F_f^{'}(u)\right\|_{1\to 2}\right)\|h\|_1.$$

Теорема доказана.

ПРИМЕР 5. Приведем пример отображения, дифференцируемого по Гато в некоторой точке, но не непрерывного в этой точке. Пусть

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1,$$

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1^4 x_2}{x_1^6 + x_2^3}, & \text{при} \quad (x_1, x_2) \neq (0,0); \\ 0, & \text{при} \quad (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$$

Выражение

$$\frac{F(x+\lambda h) - F(x)}{\lambda}$$

в точке $x = (0, 0)$ имеет вид

$$\frac{\lambda^5 h_1^4 h_2}{\lambda\left(\lambda^6 h_1^6 + \lambda^3 h_2^3\right)} = \lambda \frac{h_1^4 h_2}{\lambda^3 h_1^6 + h_2^3} \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to 0.$$

Значит, производная Гато указанного отображения существует в точке $x = (0, 0)$ и равна нулевому отображению

$$F_g'(\vartheta) = \Theta.$$

Докажем, что тем не менее отображение F не непрерывно в нуле.

□ Действительно, рассмотрим кривую (параболу) в $\mathbb{R}^2$ $x_2 = \lambda x_1^2$ при $\lambda > 0$. И устремим точку (x_1, x_2) к $(0, 0)$ вдоль этой кривой. Тогда получим

$$F(x)\Big|_{x_2 = \lambda x_1^2} = \frac{\lambda}{1 + \lambda^3} > 0.$$

Таким образом, предел при $x \to (0, 0)$ вдоль кривой $x_2 = \lambda x_1^2$ зависит от параметра $\lambda > 0$. Следовательно, указанное отображение F не является непрерывным в точке $(0, 0)$. ⊠

Справедлива основная теорема о дифференцируемости по Фреше композиции отображений.

Теорема 3. *Пусть $F : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ и $G : \mathbb{B}_2 \to \mathbb{B}_3$, причем оператор F дифференцируем по Фреше в некоторой точке $u \in \mathbb{B}_1$, а оператор G дифференцируем по Фреше в точке $F(u)$. Тогда их композиция*

$$K \stackrel{\text{def}}{=} G \circ F$$

дифференцируема по Фреше в точке $u \in \mathbb{B}_1$, причём имеет место следующее равенство:

$$K_f'(u) = G_f'(F(u))F_f'(u). \tag{2.9}$$

Доказательство.

$$\begin{gathered}\left\|K(u+h) - K(u) - G_f'(F(u))F_f'(u)\right\|_3 \leqslant \\ \leqslant \left\|G(F(u+h)) - G(F(u)) - G_f'(F(u))\left[F(u+h) - F(u)\right]\right\|_3 + \\ + \left\|G_f'(F(u))\left[F(u+h) - F(u) - F_f'(u)h\right]\right\|_3 \leqslant \\ \leqslant \|\omega_1(F(u), F(u+h) - F(u))\|_3 + \left\|G_f'(F(u))\right\|_{2\to 3} \|\omega_2(u, h)\|_3.\end{gathered}$$

Теперь заметим, что в силу дифференцируемости по Фреше оператора F имеет место оценка

$$\|F(u+h) - F(u)\|_2 \leqslant c\|h\|_1.$$

Поэтому имеет место следующее предельное равенство:

$$\lim_{\|h\|_1\to 0}\frac{\|\omega_1(F(u),F(u+h)-F(u))\|_3}{\|h\|_1}=$$
$$=\lim_{\|h\|_1\to 0}\frac{\|\omega_1(F(u),F(u+h)-F(u))\|_3}{\|F(u+h)-F(u)\|_2}\frac{\|F(u+h)-F(u)\|_2}{\|h\|_1}=0.$$

Кроме этого, имеет место предельное равенство

$$\lim_{\|h\|_1\to 0}\frac{\|\omega_2(u,h)\|_3}{\|h\|_1}=0.$$

Тем самым, приходим к утверждению теоремы.

Теорема доказана.

§ 3. Производные Фреше некоторых функционалов

Прежде всего нас интересуют производные Фреше следующих функционалов: [1])

$$\psi_1(u)=\frac{1}{p}\int\limits_{\Omega}|u|^p\,dx \quad \text{и} \quad \psi_2(u)=\frac{1}{p}\int\limits_{\Omega}|D_x u|^p\,dx. \tag{3.1}$$

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 1. *Пусть* $p\in(1,+\infty)$. *Тогда производные Фреше функционалов* $\psi_1(u)$ *и* $\psi_2(u)$, *действующих следующим образом*:

$$\psi_1(u): L^p(\Omega)\to\mathbb{R}^1,\quad \psi_2(u): W_0^{1,p}(\Omega)\to\mathbb{R}^1,$$

равны

$$\psi'_{1f}(u)=|u|^{p-2}u\in L^{p'}(\Omega), \tag{3.2}$$

$$\psi'_{2f}(u)=-\Delta_p u\overset{def:}{=}-\operatorname{div}(|D_x u|^{p-2}D_x u)\in W^{-1,p'}(\Omega). \tag{3.3}$$

Доказательство.

Шаг 1. Сначала вычислим производную Фреше функционала $\psi_1(u)$. При этом нужно раздельно рассмотреть два случая $p\geqslant 2$ и $p\in(1,2)$.

В случае $p\geqslant 2$ воспользуемся формулой Тейлора с остаточным слагаемым в форме Лагранжа и получим следующее равенство:

$$|u+h|^p=|u|^p+p|u|^{p-2}uh+\frac{p(p-1)}{2}|\xi|^{p-2}h^2, \tag{3.4}$$
$$u(x)<\xi(x)<u(x)+h(x),$$

[1]) Напоминаем, что $D_x=(\partial_{x_1},\dots,\partial_{x_N})$.

причем в этой формуле имеем

$$u = u(x) \in L^p(\Omega), \quad h = h(x) \in L^p(\Omega) \Rightarrow \xi = \xi(x) \in L^p(\Omega).$$

Теперь разделим обе части равенства (3.4) на p и проинтегрируем по $x \in \Omega$. В результате получим равенство

$$\psi_1(u+h) = \psi_1(u) + \int\limits_\Omega |u(x)|^{p-2}u(x)h(x)\,dx + \omega_1(u,h), \tag{3.5}$$

где

$$\omega_1(u,h) = \frac{p-1}{2}\int\limits_\Omega |\xi(x)|^{p-2}h^2(x)\,dx. \tag{3.6}$$

Заметим, что в силу неравенства Гельдера с показателями

$$q_1 = \frac{p}{p-2}, \quad q_2 = \frac{p}{2}, \quad \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = 1,$$

примененного к выражению $\omega_1(u,h)$, мы получим цепочку выражений:

$$|\omega_1(u,h)| \leqslant \frac{p-1}{2}\left(\int\limits_\Omega |\xi(x)|^p\,dx\right)^{(p-2)/p}\left(\int\limits_\Omega |h(x)|^p\,dx\right)^{2/p} =$$
$$= c_1\|h\|_p^2 \Rightarrow \lim_{\|h\|_p \to +0} \frac{|\omega_1(u,h)|}{\|h\|_p} = 0.$$

Поэтому

$$\int\limits_\Omega |u(x)|^{p-2}u(x)h(x)\,dx = \left\langle \psi'_{1f}(u), h\right\rangle \Rightarrow \psi'_{1f}(u) = |u|^{p-2}u.$$

Теперь мы рассмотрим случай $p \in (1,2)$. В этом случае мы рассмотрим формулу Лагранжа

$$|u+h|^p = |u|^p + p|u+\vartheta h|^{p-2}(u+\vartheta h)h =$$
$$= |u|^p + p|u|^{p-2}uh + \omega(u,h), \quad \vartheta \in (0,1), \tag{3.7}$$

$$\omega(u,h) = \frac{p}{\vartheta}\left(|u+\vartheta h|^{p-2}(u+\vartheta h) - |u|^{p-2}u\right)\vartheta h.$$

Воспользуемся известным неравенством

$$\left(|b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a, b-a\right) \leqslant \gamma(p)|b-a|^p \quad \text{при} \quad 1 < p \leqslant 2 \tag{3.8}$$

и получим следующую оценку:

$$0 \leqslant \left(|u+\vartheta h|^{p-2}(u+\vartheta h) - |u|^{p-2}u\right)\vartheta h \leqslant \gamma(p)|\vartheta h|^p.$$

Используя эту оценку, получим

$$|\omega(u,h)| \leqslant p\gamma(p)|h|^p|\vartheta|^{p-1} \leqslant p\gamma(p)|h|^p. \tag{3.9}$$

Теперь разделим обе части равенства (3.7) на p и проинтегрируем получившееся равенство по $x \in \Omega$. В результате приходим к равенству

$$\psi_1(u+h) = \psi_1(u) + \int\limits_\Omega |u(x)|^{p-2}u(x)h(x)\,dx + \omega_1(u,h), \tag{3.10}$$

где

$$\omega_1(u,h) = \int\limits_\Omega \omega(u(x),h(x))\,dx.$$

В силу (3.9) справедливо неравенство ($p>1$)

$$|\omega_1(u,h)| \leqslant \gamma(p)\int\limits_\Omega |h(x)|^p\,dx = \gamma(p)\|h\|_p^p \Rightarrow \lim_{\|h\|_p\to+0} \frac{|\omega_1(u,h)|}{\|h\|_p} = 0.$$

Шаг 2. Вычислим теперь производную Фреше функционала $\psi_2(u)$. При этом нужно воспользоваться соответствующими формулами Тейлора для вещественных функций многих переменных с остаточными слагаемыми в форме Лагранжа. Рассуждения проведенные на шаге 1 проходят почти в точностью и здесь. Нужно лишь воспользоваться при $p\in(1,2)$ формулой (3.8). Далее нужно воспользоваться следующим равенством для обобщенного оператора $p-$Лапласиана

$$\int\limits_\Omega \left(|D_x u|^{p-2}D_x u, D_x h(x)\right)\,dx = \langle -\Delta_p u, h\rangle \quad \text{для всех} \quad h(x)\in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Лемма доказана.

§ 4. Оператор Немыцкого

Теперь приступим к рассмотрению одного частного, но важного класса операторов, называемых *операторами Немыцкого*. Для того чтобы ввести оператор Немыцкого нам сначала необходимо рассмотреть так называемые *каратеодориевы функции*. Пусть $(\Omega,\mathcal{M},\mu)$ — это есть полное измеримое $\sigma-$конечное пространство. Дадим определения.

Определение 4. *Функция*

$$f(x,u):\Omega\times\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$$

называется Каратеодориевой, если она для всех $u \in \mathbb{R}^1$ *является* μ*−измеримой на* Ω *и для* μ*−почти всех* $x \in \Omega$ *непрерывна по* $u \in \mathbb{R}^1$.

Определение 5. *Оператор* $N_f(u) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, u(x))$ *называется оператором Немыцкого.*

Его важность при исследовании нелинейных краевых задач обусловлена тем, что для него справедлива следующая важная теорема М. А. Красносельского.

Теорема 4. *Оператор Немыцкого* $N_f(u)$ *является ограниченным и непрерывным, действующим из*

$$L^p(\Omega, \mu) \quad \textit{в} \quad L^q(\Omega, \mu) \quad \textit{при} \quad p,\, q \in [1, +\infty),$$

тогда и только тогда, когда для соответствующей каратеодориевой функции $f(x, u)$ *справедлива оценка*

$$|f(x, u)| \leqslant a(x) + c|u|^{p/q}$$

для всех $u \in \mathbb{R}^1$ *и* μ*−почти всех* $x \in \Omega$*, где* $a(x) \in L^q(\Omega, \mu)$.

Доказательство этой теоремы достаточно сложное и кропотливое имеется в работе [15].

Рассмотрим теперь следующий важный результат, который будет нами неоднократно использоваться в вариационных задачах.

Пусть

$$f(x, u) : \Omega \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$$

является каратеодориевой функцией. Введем так называемую потенциальную функцию

$$F(x, z) := \int\limits_0^z f(x, \xi)\, d\xi, \tag{4.1}$$

а также функционал

$$\psi(u) := \int\limits_\Omega F(x, u(x))\, dx. \tag{4.2}$$

Предположим также, что

$$|f(x, u)| \leqslant a(x) + c|u|^{p/p'} \quad \text{при} \quad p' = \frac{p}{p-1} \quad \text{и} \quad p \in (1, +\infty),$$

где $a(x) \in L^{p'}(\Omega)$ и $a(x) \geqslant 0$ почти всюду, $c > 0$. Тогда для потенциальной функции $F(x, u)$, определенной формулой (4.1), в силу арифметического неравенства Гельдера

$$a \cdot b \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad a, b \geqslant 0$$

имеет место следующее неравенство:

$$|F(x,u)| \leqslant \left| \int\limits_0^{u(x)} f(x,\xi)\,d\xi \right| \leqslant a(x)|u| + \frac{c}{p}|u|^p \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|a(x)|^{p'}}{p'} + \frac{|u|^p}{p} + \frac{c}{p}|u|^p = a_1(x) + c_1|u|^p, \quad (4.3)$$

где $a_1(x) \in L^1(\Omega)$ и $c_1 > 0$.

Докажем дифференцируемость по Фреше функционала

$$\psi(u) : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}^1.$$

Рассмотрим следующее выражение:

$$\omega(u,v) := \psi(u+v) - \psi(u) - \langle N_f(u), v\rangle \quad \text{для} \quad u, v \in L^p(\Omega).$$

$$|\omega(u,v)| \leqslant \left| \int\limits_\Omega [F(x,u(x)+v(x)) - F(x,u(x))]\,dx - \int\limits_\Omega N_f(u)(x)v(x)\,dx \right|.$$

Заметим, что имеет место цепочка равенств

$$F(x,u(x)+v(x)) - F(x,u(x)) =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{d}{dt}F(x,u(x)+tv(x))\,dt = \int\limits_0^1 f(x,u(x)+tv(x))v(x)\,dt.$$

Поэтому справедлива оценка

$$|\omega(u,v)| \leqslant \int\limits_0^1 dt \int\limits_\Omega dx\, |N_f(u+tv)(x) - N_f(u)(x)|\,|v(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^1 dt\, \|N_f(u+tv) - N_f(u)\|_{p'}\, \|v\|_p.$$

Следовательно, в силу непрерывности оператора Немыцкого $N_f(\cdot)$ имеет место предельное неравенство

$$\lim_{\|v\|_p \to 0} \frac{|\omega(u,v)|}{\|v\|_p} \leqslant \lim_{\|v\|_p \to 0} \int\limits_0^1 dt\, \|N_f(u+tv) - N_f(u)\|_{p'} = 0.$$

Тем самым, справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *При сформулированных условиях функционал* $\psi(u)$, *определенный формулой* (4.2), *является дифференцируемым по Фреше, причем имеет место следующее равенство*:

$$\psi_f'(u) = N_f(u) \quad \textit{для всех} \quad u \in L^p(\Omega) \quad \textit{при} \quad p \in (1, +\infty). \tag{4.4}$$

Лекция 2

КОМПАКТНЫЕ, ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ И ПОЛНОСТЬЮ НЕПРЕРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 1. Компактные операторы

Важность рассмотрения так называемых компактных операторов обусловлена тем, что это понятие широко используется в топологических методах при обобщении понятия степени конечномерного отображения. Дадим определение. Пусть

$$F : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2,$$

где $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$ — это два банаховых пространства относительно норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ и с соответствующими скобками двойственности

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_1 \quad \text{и} \quad \langle\cdot,\cdot\rangle_2.$$

Определение 1. *Оператор F называется компактным, если для каждого ограниченного множества $B \subset \mathbb{B}_1$ замыкание множества $F(B) \subset \mathbb{B}_2$ компактно в $\mathbb{B}_2$.*

Замечание 1. Напомним, что, с одной стороны, *множество $B \subset \mathbb{B}$ банахова пространства $\mathbb{B}$ называется компактным, если из любого покрытия его открытыми множествами*

$$B \subset \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha, \quad U_\alpha \in \mathbb{B}$$

можно выделить конечное подпокрытие

$$B \subset \bigcup_{k=1}^{M} U_{\alpha_k}, \quad \alpha_k \in A \quad \text{для всех} \quad k = \overline{1, M}, \quad M \in \mathbb{N}.$$

С другой стороны, более «естественным» с точки зрения банаховых пространств (на самом деле метрических) является такое определение компактного множества: *множество $B \subset \mathbb{B}$ банахова пространства $\mathbb{B}$ называется компактным, если из всякой последовательности $\{u_n\} \subset B$ можно извлечь сильно сходящуюся в $\mathbb{B}$ подпоследовательность $\{u_{n_m}\} \subset \{u_n\}$.*

Определение 1 эквивалентно (в случае банаховых пространств) следующему определению:

Определение 2. *Оператор F называется компактным, если для любой ограниченной последовательности $\{u_n\} \subset \mathbb{B}_1$ из соответствующей последовательности $\{F(u_n)\} \subset \mathbb{B}_2$ можно извлечь сильно сходящуюся подпоследовательность $\{F(u_{n_m})\} \subset \mathbb{B}_2$:*

$$F(u_{n_m}) \to v \quad \textit{сильно в} \quad \mathbb{B}_2 \quad \textit{при} \quad n_m \to +\infty.$$

Но как правило в приложениях мы сталкиваемся с более узким понятием.

Определение 3. *Оператор F называется вполне непрерывным, если он непрерывен и компактен.*

Очень важным в приложениях к исследованию нелинейных краевых задач является понятие полностью непрерывного оператора. Дадим определение.

Определение 4. *Оператор F называется полностью непрерывным, если из условия*

$$u_n \rightharpoonup u \quad \textit{слабо в} \quad \mathbb{B}_1$$

вытекает, что

$$F(u_n) \to F(u) \quad \textit{сильно в} \quad \mathbb{B}_2.$$

Естественно, возникает вопрос о связи понятий вполне непрерывности и полной непрерывности операторов. Частично на этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ — это вполне непрерывный оператор, тогда он является полностью непрерывным.*

Доказательство.

Шаг 1. Итак, пусть

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_1,$$

тогда эта последовательность ограничена в $\mathbb{B}_1$. В силу компактности L из последовательности $\{u_n\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$ такую, что

$$Lu_{n_k} \to v \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_2 \quad \text{при} \quad n_k \to +\infty.$$

Рассмотрим транспонированный к L оператор

$$L^t : \mathbb{B}_2^* \to \mathbb{B}_1^*.$$

Поскольку $L \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$, т. е. является линейным и непрерывным, то и $L^t \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_2^*, \mathbb{B}_1^*)$, причем по определению транспонированного оператора [1] справедливо следующее равенство:

$$\left\langle L^t f^*, u\right\rangle_1 \stackrel{\text{def}}{=} \langle f^*, Lu\rangle_2 \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathbb{B}_2^*, \quad u \in \mathbb{B}_1.$$

Докажем, что

$$Lu_n \rightharpoonup Lu \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_2.$$

Действительно, имеет место следующее выражение:

$$\langle f^*, Lu_n - Lu\rangle_2 = \left\langle L^t f^*, u_n - u\right\rangle_1 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

поскольку

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_1.$$

Таким образом, приходим к выводу, что

$$Lu_n \rightharpoonup Lu \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_2. \tag{1.1}$$

Докажем теперь, что на самом деле

$$Lu_n \to Lu \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_2.$$

По доказанному,

$$Lu_{n_k} \to v \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_2,$$

значит,

$$Lu_{n_k} \rightharpoonup v \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_2.$$

Следовательно, в силу (1.1) приходим к равенству

$$v = Lu.$$

Шаг 2. Теперь предположим, что найдется такая подпоследовательность $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$, что имеет место неравенство

$$\|Lu_{n_k} - Lu\|_2 \geqslant c > 0 \quad \text{для всех} \quad n_k \in \mathbb{N}.$$

С другой стороны, по доказанному, у этой подпоследовательности найдется такая подпоследовательность

$$\left\{u_{n_{k_l}}\right\} \subset \{u_{n_k}\}$$

такая, что

$$\left\|Lu_{n_{k_l}} - Lu\right\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad l \to +\infty.$$

[1] Смотри лекцию 9 первого тома.

Справедлива цепочка неравенств

$$0 < c \leqslant \|Lu_{n_k} - Lu\|_2 \leqslant \left\|Lu_{n_k} - Lu_{n_{k_l}}\right\|_2 + \left\|Lu_{n_{k_l}} - Lu\right\|_2.$$

Выберем теперь $l \in \mathbb{N}$ настолько большим, чтобы имело место неравенство

$$\left\|Lu_{n_{k_l}} - Lu\right\|_2 \leqslant \frac{c}{2}.$$

С другой стороны, для каждого $l \in \mathbb{N}$ найдется такое $n_k \in \mathbb{N}$, что

$$n_k = n_{k_l} \Rightarrow u_{n_k} = u_{n_{k_l}} \Rightarrow Lu_{n_{k_l}} = Lu_{n_k}$$

и тогда

$$\left\|Lu_{n_k} - Lu_{n_{k_l}}\right\|_2 = 0$$

и мы приходим к противоречивому неравенству

$$0 < c \leqslant \frac{c}{2}.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема доказана.

Заметим, что обратное утверждение, вообще говоря, не справедливо.

ПРИМЕР 1. Как известно, пространство

$$l_1 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \{x_k\}_{k=1}^{+\infty} : \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k| < +\infty, \quad x_k \in \mathbb{C}^1 \right\}$$

обладает свойством Шура, т. е. из условия

$$u_n = \{x_{nk}\}_{k=1}^{+\infty} \rightharpoonup u = \{x_k\}_{k=1}^{+\infty} \quad \text{слабо в} \quad l_1 \quad \text{при} \quad n \to +\infty \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \langle f, u_n \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k x_{nk} \to \langle f, u \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k x_k \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

для каждого фиксированного

$$f \in l_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \{f_k\}_{k=1}^{+\infty} : \sup_{k=\overline{1,+\infty}} |f_k| < +\infty \right\}$$

вытекает, что

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad l_1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |u_n - u|_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} |x_{nk} - x_k| \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Поэтому единичный оператор

$$\mathrm{I} : l_1 \to l_1$$

является полностью непрерывным, но, очевидно, не является компактным.

Однако, при дополнительном условии рефлексивности банахова пространства $\mathbb{B}_1$ [1]) из полной непрерывности даже *нелинейного оператора*

$$L : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$$

вытекает компактность. Действительно, справедлив следующий результат.

Теорема 2. *Пусть*

$$K : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$$

— это полностью непрерывный оператор. Тогда при условии рефлексивности банахова пространства $\mathbb{B}_1$ *оператор* K *является вполне непрерывным.*

Доказательство.

Шаг 1. Докажем сначала непрерывность оператора K.

□ Действительно, пусть

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_1 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

но тогда, очевидно,

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_1 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Отсюда в силу полной непрерывности оператора K приходим к выводу, что

$$K(u_n) \to K(u) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_2 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Тем самым, непрерывность оператора K доказана. ⊠

Шаг 2. Докажем теперь компактность оператора K.

□ Действительно, пусть $D \subset \mathbb{B}_1$ — это некоторое ограниченное множество. Пусть $\{u_n\} \subset D$. Тогда в силу рефлексивности $\mathbb{B}_1$ из этой последовательности можно выбрать некоторую подпоследовательность $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$ такую, что

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_1 \quad \text{при} \quad n_k \to +\infty.$$

Поэтому в силу полной непрерывности оператора K приходим к выводу, что

$$K(u_{n_k}) \to K(u) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_2 \quad \text{при} \quad n_k \to +\infty.$$

[1]) Заметим, что банахово пространство l_1 не является рефлексивным.

Тем самым, компактность оператора K доказана.

Теорема доказана.

Заметим, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

ПРИМЕР 2. Пусть $\mathbb{B}_1 = L^2(0,1)$ и $\mathbb{B}_2 = \mathbb{R}_1$. Рассмотрим следующий нелинейный оператор

$$K(u) := \int_0^1 u^2(s)\,ds = \|u\|_2^2.$$

Докажем, что он является вполне непрерывным. Сначала докажем непрерывность. Пусть

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad L^2(0,1),$$

но тогда в силу очевидного неравенства

$$|\|u_n\|_2 - \|u\|_2| \leqslant \|u_n - u\|_2$$

приходим к выводу о том, что

$$\|u_n\|_2 \to \|u\|_2 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

поэтому

$$K(u_n) \to K(u) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Докажем теперь компактность оператора K. Пусть $D \subset L^2(0,1)$ — это произвольное ограниченное множество. Докажем, что

$$\overline{K(D)} \quad \text{компактно в} \quad \mathbb{R}^1.$$

Но для этого достаточно доказать, что $K(D)$ — это ограниченное множество. В силу ограниченности D в $L^2(0,1)$ имеем следующее неравенство:

$$\|u\|_2 \leqslant c \quad \text{для всех} \quad u \in D$$

при некотором $c > 0$, не зависящем от u. Тогда

$$0 < K(u) \leqslant c^2 < +\infty.$$

Тем самым, компактность оператора K доказана.

Теперь докажем, что, тем не менее, оператор K не является полностью непрерывным. Действительно, рассмотрим последовательность $\{u_n\} \subset L^2(0,1)$, где

$$u_n(s) := \sin(\pi n s), \quad s \in (0,1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда для любой фиксированной функции

$$v(s) \in L^2(0,1)$$

в силу теоремы Римана–Лебега имеет место выражение

$$\int\limits_0^1 v(s)\sin(\pi n s)\,ds \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

т. е.

$$u_n \rightharpoonup 0 \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,1) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Однако,

$$K(u_n) = \int\limits_0^1 u_n^2(s)\,ds = \frac{1}{2} \not\to 0 = K(0) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

§ 2. Компактные множества. Напоминание

Приведем теперь без доказательства *критерий предкомпактности Хаусдорфа*. Он основывается на понятии ε–сети.

Пусть $\mathbb{B}$ — это банахово пространство и $M \subset \mathbb{B}$. Возьмем $\varepsilon > 0$.

Определение 5. *Множество $M_\varepsilon \subset \mathbb{B}$ называется ε–сетью множества M, если для любой точки $x \in M$ найдется точка $x_\varepsilon \in \in M_\varepsilon$ такая, что $\|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon$.*

Понятие ε–сети множества M допускает следующую геометрическую интерпретацию. Пусть M_ε — это ε–сеть M, а $x_\varepsilon \in M_\varepsilon$. Возьмем шар

$$O(x_\varepsilon, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{B} : \ \|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon\}.$$

Тогда

$$M \subset \bigcup_{x_\varepsilon \in M_\varepsilon} O(x_\varepsilon, \varepsilon),$$

т. е. M содержится в объединении шаров радиуса $\varepsilon > 0$ с центрами $x_\varepsilon \in M_\varepsilon$. Иначе говоря, совокупность этих шаров покрывает M.

Будем говорить, что ε–сеть конечна, если M_ε — это конечное множество, т. е. состоит из конечного числа элементов.

Дадим определение.

Определение 6. *Множество $B \subset \mathbb{B}$ банахова пространства $\mathbb{B}$ называется предкомпактным* [1]*, если его замыкание компактно.*

Сформулируем *критерий предкомпактности Хаусдорфа*:

Теорема 3. *Множество M в банаховом пространстве $\mathbb{B}$ предкомпактно тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ в $\mathbb{B}$ существует конечная ε–сеть M_ε.*

Справедлива следующая лемма.

[1] Иногда используется термин относительно компактное множество.

Лемма 1. *Подмножество $K \subset \mathbb{B}$ является предкомпактным, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое предкомпактное множество $K_\varepsilon \subset \subset \mathbb{B}$, что для каждого $u \in K$ найдется такое $u_\varepsilon \in K_\varepsilon$, что*

$$\|u - u_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

Доказательство.

Пусть $\varepsilon > 0$ выбрано и фиксировано. По условию леммы найдется предкомпактное множество

$$K_{\varepsilon/2} \subset \mathbb{B},$$

что выполнено условие леммы для величины $\varepsilon/2$. В свою очередь это в силу критерия предкомпактности Хаусдорфа означает, что найдутся такие точки

$$u_\varepsilon^k \in \mathbb{B} \quad \text{при} \quad k = \overline{1, n}, \quad n = n(\varepsilon) \in \mathbb{N},$$

что

$$K_{\varepsilon/2} \subset \bigcup_{k=1}^{n} O(u_\varepsilon^k, \varepsilon/2), \tag{2.1}$$

где

$$O(u_\varepsilon^k, \varepsilon/2) := \left\{ u \in \mathbb{B} : \ \|u - u_\varepsilon^k\| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

С одной стороны, по условию леммы для каждого $u \in K$ найдется такое $u_{\varepsilon/2} \in K_{\varepsilon/2}$, что

$$\|u - u_{\varepsilon/2}\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.2}$$

С другой стороны, в силу (2.1) для $u_{\varepsilon/2}$ найдется такое $k_0 \in \overline{1, n}$, что

$$\left\|u_{\varepsilon/2} - u_\varepsilon^{k_0}\right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда и из (2.2) приходим к выводу, что

$$\|u - u_\varepsilon^{k_0}\| \leqslant \left\|u_{\varepsilon/2} - u_\varepsilon^{k_0}\right\| + \|u - u_{\varepsilon/2}\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это означает, что

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{n} O(u_\varepsilon^k, \varepsilon),$$

т. е. множество K предкомпактно в силу критерия Хаусдорфа.

Лемма доказана.

§ 3. Вполне непрерывные операторы

Теперь мы можем доказать основную теорему этой лекции.

Теорема 4. *Пусть* $\mathbb{B}_1$ *и* $\mathbb{B}_2$ *— это банаховы пространства и* $D \subset \mathbb{B}_1$ *— это ограниченное множество. Пусть, кроме того,*

$$F : D \to \mathbb{B}_2$$

это некоторое отображение. Тогда следующие два условия эквивалентны:

(I) F *— это вполне непрерывное отображение;*

(II) *для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое ограниченное и непрерывное отображение*

$$F_\varepsilon : D \to \mathbb{B}_2,$$

что $\dim(\operatorname{span} F_\varepsilon(D)) < +\infty$ *и*

$$\|F(u) - F_\varepsilon(u)\|_2 < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad u \in D. \tag{3.1}$$

Доказательство.

Шаг 1. Докажем сначала, что из (I) вытекает (II).

□ Действительно, пусть отображение F является вполне непрерывным отображением. Тогда в силу ограниченности $D \subset \mathbb{B}_1$ множество $F(D)$ предкомпактно в $\mathbb{B}_2$. Следовательно, для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся такие точки $v_\varepsilon^k \in \mathbb{B}_2$ при $k = \overline{1,n}$, что

$$\overline{F(D)} \subset \bigcup_{k=1}^{n} O(v_\varepsilon^k, \varepsilon), \tag{3.2}$$

где

$$O(v_\varepsilon^k, \varepsilon) := \left\{ v \in \mathbb{B}_2 : \ \|v - v_\varepsilon^k\|_2 < \varepsilon \right\}.$$

Введем следующие функции:

$$f_k(v) := \max\{\varepsilon - \|v - v_\varepsilon^k\|_2, 0\}.$$

И рассмотрим следующую функцию

$$\overline{f}_m(v) := \begin{cases} f_m(v) \Big/ \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(v), & \text{при} \quad f_m(v) \neq 0; \\ 0, & \text{при} \quad f_m(v) = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

при $m \in \overline{1,n}$ и для всех $v \in \overline{F(D)}$. Теперь мы можем ввести отображение $F_\varepsilon(u)$ следующим образом:

$$F_\varepsilon(u) := \sum_{m=1}^{n} \overline{f}_m(F(u)) v_\varepsilon^m \quad \text{для всех} \quad u \in D.$$

Ограниченность этого отображения для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ очевидна. Докажем непрерывность. По своему построению (3.3) функция

$$\overline{f}_m = \overline{f}_m(f_1, ..., f_n) \quad \text{при} \quad m = \overline{1, n}$$

непрерывна по совокупности вещественных переменных $f_k \in \mathbb{R}^1$, а функция $f_k = f_k(v)$ непрерывна для всех $v \in \overline{F(D)}$.

□□ Действительно, с одной стороны, функция вещественного переменного

$$x^+ := \max\{x, 0\}$$

является непрерывной для всех $x \in \mathbb{R}^1$. С другой стороны, функция

$$g_k(v) := \varepsilon - \|v - v_k^\varepsilon\|_2$$

является непрерывной как функция из $\mathbb{B}_2 \to \mathbb{R}^1$, поскольку если последовательность $\{v_l\}_{l=1}^{+\infty} \subset \mathbb{B}_2$

$$v_l \to v \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_2 \quad \text{при} \quad l \to +\infty,$$

то имеет место предельное свойство

$$|g_k(v_l) - g_k(v)| = |\|v_l - v_k^\varepsilon\|_2 - \|v - v_k^\varepsilon\|_2| \leqslant \|v_l - v\| \to +0$$

при $l \to +\infty$. Как композиция непрерывных функций функция $f_k(v)$ непрерывна на $\overline{F(D)}$.

Заметим теперь, что для всякого $v \in \overline{F(D)}$ найдется такое $k_0 \in \overline{1, n}$, что $v \in O(v_\varepsilon^{k_0}, \varepsilon)$, т. е.

$$\|v - v_\varepsilon^{k_0}\| < \varepsilon,$$

то $f_{k_0}(v) > 0$. Поэтому сумма

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(v) > 0 \quad \text{для всех} \quad v \in \overline{F(D)}.$$

А функция $\overline{f}_m = \overline{f}_m(f_1, ..., f_n)$ непрерывна в каждой точке, где

$$\sum_{k=1}^{n} f_k > 0. \quad \boxtimes\boxtimes$$

Наконец, по условию леммы оператор F непрерывен на $D \subset \mathbb{B}_1$. Следовательно, по теореме о композиции непрерывных отображений оператор $F_\varepsilon(u)$ непрерывен. Наконец,

$$\operatorname{span} F_\varepsilon(D) \subset \operatorname{span}\{v_\varepsilon^1, ..., v_\varepsilon^n\},$$

т. е. $F_\varepsilon(u)$ — это конечномерный оператор. В силу (3.2) имеют место неравенства

$$\|F(u) - F_\varepsilon(u)\|_2 = \left\| \sum_{m=1}^{n} \overline{f}_m(F(u))F(u) - \sum_{m=1}^{n} \overline{f}_m(F(u))v_\varepsilon^m \right\|_2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{m=1}^{n} \overline{f}_m(F(u))\|F(u) - v_\varepsilon^m\|_2.$$

Заметим, что если

$$\|F(u) - v_\varepsilon^m\|_2 \geqslant \varepsilon,$$

то

$$f_m(F(u)) = \max\{\varepsilon - \|F(u) - v_\varepsilon^m\|_2, 0\} = 0.$$

Поэтому имеет место следующее неравенство:

$$\sum_{m=1}^{n} \overline{f}_m(F(u))\|F(u) - v_\varepsilon^m\|_2 < \frac{1}{\sum\limits_{m=1}^{n} f_m(F(u))} \sum_{m=1}^{n} \varepsilon f_m(F(u)) = \varepsilon.$$

Итак, справедливо неравенство

$$\|F(u) - F_\varepsilon(u)\|_2 < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in D.$$

Шаг 2. Докажем теперь, что из (II) вытекает (I).

С одной стороны, F_ε имеет своим равномерным пределом при $\varepsilon \to +$ $+0$ отображение F, которое является непрерывным и ограниченным.

□ Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ в силу непрерывности отображения $F_{\varepsilon/3}$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех

$$\|u_1 - u_2\|_1 < \delta, \quad u_1, u_2 \in D$$

имеет место неравенство

$$\|F_{\varepsilon/3}(u_1) - F_{\varepsilon/3}(u_2)\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом, отсюда в силу (3.1) приходим к неравенству

$$\|F(u_1) - F(u_2)\|_2 =$$
$$= \|F(u_1) - F_{\varepsilon/3}(u_1) + F_{\varepsilon/3}(u_1) - F_{\varepsilon/3}(u_2) + F_{\varepsilon/3}(u_2) - F(u_2)\|_2 \leqslant$$
$$\leqslant \|F(u_1) - F_{\varepsilon/3}(u_1)\|_2 + \|F_{\varepsilon/3}(u_1) - F_{\varepsilon/3}(u_2)\|_2 +$$
$$+ \|F(u_2) - F_{\varepsilon/3}(u_2)\|_2 < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \quad \boxtimes$$

С другой стороны, в силу (II) имеет место следующее неравенство:

$$\|F(u) - F_\varepsilon(u)\|_2 < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad u \in D,$$

но множество $F_\varepsilon(D)$ предкомпактно как множество конечной размерности, поэтому в силу леммы 1 приходим к выводу, что $F(D)$ предкомпактно в $\mathbb{B}_2$. Значит, F — компактное отображение.

Следовательно, отображение F вполне непрерывно.

Теорема доказана.

§ 4. Литературные указания

В данной лекции мы использовали материал, изложенный в работах [2], [15], [47], [49] и [50].

Тематическая лекция II

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Лекция 3

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 1. Введение

С этой лекции мы начинаем рассмотрение различных вариационных методов исследования нелинейных операторных уравнений. В основном эти методы применяются при исследовании краевых задач для нелинейных уравнений эллиптического типа, хотя они применимы и при исследовании устойчивости стационарных решений различных эволюционных нелинейных уравнений, например, уравнения Кортевега-де-Фриза, Шредингера, а также нелинейного волнового уравнения.

§ 2. Потенциальные операторы

Прежде чем переходить к исследованию каких-то вариационных задач мы должны установить имеет ли исходная нелинейная операторная задача вариационную постановку, т. е. задачу отыскания минимума или максимума некоторого функционала на некотором подмножестве банахова пространства.

Итак, пусть $\mathbb{B}$ — это некоторое банахово пространство относительно нормы $\|\cdot\|$ и скобками двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$ между $\mathbb{B}$ и его сопряженным $\mathbb{B}^*$. Пусть на этом банаховом пространстве $\mathbb{B}$ задан некоторый (нелинейный) функционал

$$\psi : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1.$$

Будем как и в предыдущей лекции обозначать символами $\psi'_g(u)$ и $\psi'_f(u)$ производные Гато и Фреше функционала ψ, соответственно.

Дадим определение *потенциального оператора.*

Определение 1. *Оператор*

$$F : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$$

называется сильно потенциальным или потенциальным, если найдется такой дифференцируемый по Фреше функционал

$$\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1,$$

что

$$F(u) = \psi'_f(u). \tag{2.1}$$

Определение 2. *Оператор*

$$F : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$$

называется слабо потенциальным, если найдется такой дифференцируемый по Гато функционал

$$\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1,$$

что

$$F(u) = \psi'_g(u). \tag{2.2}$$

Естественно, возникает вопрос о достаточных условиях потенциальности заданного оператора F :

$$F : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*.$$

Для ответа на этот вопрос нам необходимо ввести понятие *ограниченной непрерывности* по Липшицу. Дадим определение.

Определение 3. *Оператор F, действующий из одного банахова пространства $\mathbb{B}_1$ в другое банахово пространство $\mathbb{B}_2$, называется ограниченно липшиц–непрерывным* [1]*, если для каждого $R > 0$ имеет место следующее неравенство*:

$$\|F(u_1) - F(u_2)\|_2 \leqslant c(R)\|u_1 - u_2\|_1 \quad \text{для всех} \quad u_1, u_2 \in \mathbb{B}_1 \tag{2.3}$$

таких, что

$$\|u_k\|_1 \leqslant R \quad \text{при} \quad k = 1, 2.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Оператор $F : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$, удовлетворяющий условию ограниченной непрерывности по Липшицу, потенциален тогда и только тогда, когда для всех $u, v \in \mathbb{B}$ имеет место равенство*

$$\int_0^1 \langle F(tu), u\rangle\, dt - \int_0^1 \langle F(tv), v\rangle\, dt = \int_0^1 \langle F(tu + (1-t)v), u - v\rangle\, dt \quad \text{при} \quad u, v \in \mathbb{B}. \tag{2.4}$$

[1] Также в литературе используется термин локально липшиц–непрерывный оператор, который отличается от приведённого определения.

При условии (2.4) *сильный потенциал* [1] $\psi(u)$ *оператора* F *имеет вид*:

$$\psi(u) = \psi(\vartheta) + \int\limits_0^1 \langle F(tu), u\rangle \, dt \quad \textit{для всех} \quad u \in \mathbb{B}, \tag{2.5}$$

где $\vartheta \in \mathbb{B}$ — *нулевой элемент*.

Доказательство.

Шаг 1. Итак, пусть оператор F сильно потенциален, тогда найдется дифференцируемый по Фреше функционал

$$\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$$

такой, что

$$F(u) = \psi'_f(u).$$

В этом случае справедлива следующая формула [2]:

$$\psi(u) - \psi(v) = \int\limits_0^1 \frac{d}{dt}\psi(tu + (1-t)v)\, dt = \int\limits_0^1 \left\langle \psi'_f(tu + (1-t)v), u - v \right\rangle dt = \\ = \int\limits_0^1 \langle F(tu + (1-t)v), u - v\rangle \, dt \tag{2.6}$$

Положим в равенстве (2.6) сначала $v = \vartheta \in \mathbb{B}$, тогда получим следующее равенство:

$$\psi(u) = \psi(\vartheta) + \int\limits_0^1 \langle F(tu), u\rangle \, dt. \tag{2.7}$$

Теперь положим в равенстве (2.6) $u = \vartheta$ и получим тогда следующее равенство:

$$\psi(v) = \psi(\vartheta) + \int\limits_0^1 \langle F(tv), v\rangle \, dt. \tag{2.8}$$

С учетом равенств (2.7) и (2.8) получим следующее выражение:

$$\psi(u) - \psi(v) = \int\limits_0^1 \langle F(tu), u\rangle \, dt - \int\limits_0^1 \langle F(tv), v\rangle \, dt.$$

[1] В дальнейшем будем называть просто потенциал.

[2] Здесь мы воспользовались формулой для производной Фреше композиции отображений.

Отсюда и из (2.6) приходим к (2.4).

Шаг 2. Пусть теперь для оператора F выполнено равенство (2.4). Определим функционал $\psi(u)$ равенством

$$\psi(u) := \psi(\vartheta) + \int_0^1 \langle F(tu), u\rangle \, dt. \tag{2.9}$$

Докажем, что функционал $\psi(u)$ дифференцируем по Фреше и его производная Фреше равна $F(u)$. Действительно, в силу (2.4) имеет место цепочка следующих равенств:

$$\psi(u+h) - \psi(u) = \int_0^1 \langle F(t(u+h)), u+h\rangle \, dt - \int_0^1 \langle F(tu), u\rangle \, dt = \\ = \int_0^1 \langle F(t(u+h)+(1-t)u), h\rangle \, dt. \tag{2.10}$$

Введем следующее обозначение:

$$\omega(u,h) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \psi(u+h) - \psi(u) - \langle F(u), h\rangle .$$

Но тогда для $\omega(u,h)$ справедливо неравенство:

$$|\omega(u,h)| \leqslant \int_0^1 |\langle F(t(u+h)+(1-t)u) - F(u), h\rangle| \, dt \leqslant \\ \leqslant \int_0^1 \|F(t(u+h)+(1-t)u) - F(u)\|_* \, \|h\| \, dt \leqslant \\ \leqslant c(R)\int_0^1 \|t(u+h)+(1-t)u-u\|\|h\| \, dt = c(R)\|h\|^2\frac{1}{2}$$

для всех $u, h \in \mathbb{B}$, для которых

$$\|u\| \leqslant R \quad \text{и} \quad \|h\| \leqslant R.$$

Следовательно, приходим к выводу, что

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{|\omega(u,h)|}{\|h\|} = 0.$$

Тем самым, функционал $\psi(u)$ дифференцируем по Фреше на $\mathbb{B}$ и его производная Фреше равна

$$\psi_f^{'}(u) = F(u).$$

Теорема доказана.

Примеры потенциального и не потенциального операторов.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим следующий функционал:

$$\psi(u) = \frac{1}{p}\int\limits_{\Omega} |u|^p \, dx : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}^1, \quad p > 1.$$

Как мы выяснили в первой лекции этот функционал дифференцируем по Фреше и его производная Фреше равна

$$F(u) := \psi_f^{'}(u) = |u|^{p-2}u : L^p(\Omega) \to L^{p^{'}}(\Omega), \quad p^{'} = \frac{p}{p-1}.$$

Поэтому оператор $F(u)$ является потенциальным (сильно потенциальным).

ПРИМЕР 2. Рассмотрим следующий нелинейный оператор:

$$F(u) := \frac{du^2(x)}{dx}.$$

Докажем сначала, что он является ограниченным оператором, действующим следующим образом:

$$F(u) : \mathbb{B} = W_0^{1,4}(0,1) \to W^{-1,4/3}(0,1) = \mathbb{B}^*.$$

□ Действительно,

$$F(u) = 2uu^{'}, \quad u(x) \in W_0^{1,4}(0,1) \subset L^4(0,1), \quad u^{'} \in L^4(0,1),$$

поэтому

$$u(x)u^{'}(x) \in L^2(0,1).$$

Заметим, что имеет место следующая цепочка непрерывных и плотных вложений:

$$W_0^{1,4}(0,1) \overset{ds}{\subset} W_0^{1,2}(0,1) \overset{ds}{\subset} L^2(0,1) \overset{ds}{\subset} W^{-1,2}(0,1) \overset{ds}{\subset} W^{-1,4/3}(0,1).$$

Таким образом,

$$u(x)u^{'}(x) \in L^2(0,1) \overset{ds}{\subset} W^{-1,4/3}(0,1). \quad \boxtimes$$

Предположим, что оператор $F(u)$ потенциален. Тогда его потенциал определяется формулой

$$\psi(u) = \psi(\vartheta) + \int\limits_0^1 \langle F(tu), u\rangle \, dt.$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\langle F(tu), u\rangle = \int\limits_0^1 \frac{d}{dx} \left(tu(x)\right)^2 u(x)\, dx = t^2 \frac{2}{3} \int\limits_0^1 \frac{d}{dx} u^3(x)\, dx = 0,$$

но тогда $\psi(u) = const$ и его производная Фреше равна нулю. Следовательно, оператор $F(u)$ не является потенциальным.

§ 3. Формула Тейлора

Давайте зададимся вопросом о нахождении решений следующего операторного уравнения:

$$F(u) = \vartheta \in \mathbb{B}^*, \quad u \in \mathbb{B}. \tag{3.1}$$

Предположим, что оператор F потенциален и его потенциал — это функционал $\psi(u)$. Дадим определение.

Определение 3. *Пусть $M \subset \mathbb{B}$ — некоторое непустое и замкнутое подмножество. Точка $\widehat{u} \in M$ называется точкой экстремума функционала $\psi(u)$ на M, если*

$$\inf_{u\in M} \psi(u) = \psi(\widehat{u}) \quad \textit{либо} \quad \sup_{u\in M} \psi(u) = \psi(\widehat{u}).$$

Рассмотрим следующую функцию

$$\varphi(t) = \psi(\widehat{u} + th) \quad \text{при} \quad t \in (-1, 1),$$

где $\widehat{u}$ — это точка экстремума функционала $\psi(\cdot)$ на множестве $M = \mathbb{B}$. Тогда функция $\varphi(t)$ достигает экстремума в точке $t = 0$. В силу дифференцируемости функционала $\psi(u)$ по Фреше в точке $\widehat{u} \in \mathbb{B}$ приходим к выводу, что $\varphi(t)$ дифференцируема в точке $t = 0$. Но тогда необходимым условием экстремума является следующее

$$\varphi'(t) = \left\langle \psi'_f(\widehat{u} + th), h \right\rangle, \ \varphi'(0) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left\langle \psi'_f(\widehat{u}), h \right\rangle = 0 \ \forall\, h \in \mathbb{B} \Rightarrow \psi'_f(\widehat{u}) = \vartheta \in \mathbb{B}^* \Rightarrow F(\widehat{u}) = \vartheta.$$

Следовательно, с одной стороны, с необходимостью множество всех точек экстремума дифференцируемого по Фреше функционала $\psi(u)$ — есть решения операторного уравнения (3.1). С другой стороны, понятно, что не всякое решение операторного уравнения (3.1) является экстремалью функционала $\psi(u)$, поскольку равенство (3.1) лишь необходимое условие.

Попробуем найти достаточные условия существования экстремали у функционала $\psi(u)$. С этой целью нам необходимо получить формулу, аналогичную формуле Тейлора, для функционалов, дважды дифференцируемых по Фреше.

Будем рассматривать функционал $\psi(v) \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{O(u,\varepsilon)};\mathbb{R}^1)$,

$$O(u,\varepsilon) = \{v \in \mathbb{B} : \ \|v-u\| < \varepsilon\}.$$

Справедлива следующая лемма:

Л е м м а 1. *Справедливо следующее равенство*:

$$\psi(u+h) = \psi(u) + \left\langle \psi'_f(u), h \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \psi''_{ff}(u)h, h \right\rangle + \omega_2(u,h), \tag{3.2}$$

для всех $h \in \mathbb{B}$ таких, что $\|h\| < \varepsilon$, где для $\omega_2(u,h)$ выполнено следующее предельное равенство:

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{|\omega_2(u,h)|}{\|h\|^2} = 0. \tag{3.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Итак, пусть

$$\psi(v) \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{O(u,\varepsilon)};\mathbb{R}^1).$$

Заметим, что для производной Фреше $\psi'_f(v)$ в силу её дифференцируемости по Фреше в $\overline{O(u,\varepsilon)}$ справедливо следующее равенство:

$$\psi'_f(u+h) = \psi'_f(u) + \psi''_{ff}(u)h + \omega_1(u,h) \quad \text{при} \quad \|h\| < \varepsilon,$$

где

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|\omega_1(u,h)\|_*}{\|h\|} = 0.$$

Поэтому справедлива следующая цепочка равенств:

$$\psi(u+h) - \psi(u) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\psi(u+th) = \int_0^1 \left\langle \psi'_f(u+th), h \right\rangle dt =$$

$$= \int_0^1 \left\langle \psi'_f(u) + t\psi''_{ff}(u)h, h \right\rangle dt + \omega_2(u,h),$$

где

$$\omega_2(u,h) = \int\limits_0^1 \langle \omega_1(u,th), h\rangle \, dt.$$

Значит, отсюда приходим к следующему равенству:

$$\psi(u+h) - \psi(u) = \left\langle \psi'_f(u), h \right\rangle + \left\langle \psi''_{ff}(u)h, h \right\rangle \int\limits_0^1 t\,dt + \omega_2(u,h) =$$
$$= \left\langle \psi'_f(u), h \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \psi''_{ff}(u)h, h \right\rangle + \omega_2(u,h),$$

где для $\omega_2(u,h)$ справедливо следующее представление:

$$\omega_2(u,h) = \int\limits_0^1 \langle \omega_1(u,th), h\rangle \, dt.$$

Стало быть, приходим к неравенству

$$|\omega_2(u,h)| \leqslant \int\limits_0^1 \|\omega_1(u,th)\|_* \, \|h\| \, dt.$$

Поэтому справедливо следующее предельное неравенство:

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{|\omega_2(u,h)|}{\|h\|^2} \leqslant \lim_{\|h\|\to 0} \int\limits_0^1 \frac{\|\omega_1(u,th)\|_*}{\|h\|} \, dt = 0.$$

Тем самым, формулы (3.2) и (3.3) доказаны.
Лемма доказана.

§ 4. Условия экстремума функционала

Теперь мы в состоянии доказать один результат о необходимом условии экстремума функционала. Пусть $\psi(u) \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{O(\widehat{u},\varepsilon)};\mathbb{R}^1)$ при $\varepsilon > 0$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Необходимыми условиями минимума в точке $\widehat{u}$ являются следующие*

$$\psi'_f(\widehat{u}) = 0 \quad \text{и} \quad \left\langle \psi''_f(\widehat{u})h, h \right\rangle \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad \|h\| < \varepsilon. \tag{4.1}$$

Доказательство.

Рассмотрим разложение функционала $\psi(u)$ в окрестности $O(\widehat{u}, \varepsilon)$ точки экстремума $\widehat{u} \in \mathbb{B}$:

$$\psi(\widehat{u} + h) = \psi(\widehat{u}) + \left\langle \psi'_f(\widehat{u}), h \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u}) h, h \right\rangle + \omega_2(\widehat{u}, h)$$

при $\|h\| < \varepsilon$. Но как мы доказали ранее в точке $\widehat{u}$ экстремума имеет место равенство

$$\psi'_f(\widehat{u}) = 0,$$

поэтому приходим к следующему равенству:

$$\psi(\widehat{u} + h) - \psi(\widehat{u}) = \frac{1}{2} \left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u}) h, h \right\rangle + \omega_2(\widehat{u}, h). \tag{4.2}$$

Предположим, что $\widehat{u}$ — это точка локального минимума, но для некоторого $\vartheta \neq h_1 \in O(\vartheta, \varepsilon) \subset \mathbb{B}$ имеет место следующее неравенство:

$$\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u}) h_1, h_1 \right\rangle < 0.$$

Тогда для $h = \varepsilon_1 h_1$ при $\varepsilon_1 \in (0, 1)$ имеет место следующее выражение:

$$\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u}) h, h \right\rangle = \varepsilon_1^2 \left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u}) h_1, h_1 \right\rangle < 0. \tag{4.3}$$

Теперь, выбирая $\varepsilon_1 > 0$ достаточно малым, получим неравенство

$$|\omega_2(\widehat{u}, h)| = |\omega_2(\widehat{u}, \varepsilon_1 h_1)| \leqslant \\ \leqslant \varepsilon_1^2 \|h_1\|^2 \frac{|c_1|}{4\|h_1\|^2} = \varepsilon_1^2 \frac{|c_1|}{4}, \quad c_1 = \left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u}) h_1, h_1 \right\rangle < 0. \tag{4.4}$$

Из выражений (4.3) и (4.4) получим следующее неравенство:

$$\frac{1}{2} \left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u}) h, h \right\rangle + \omega_2(\widehat{u}, h) \leqslant \frac{\varepsilon_1^2}{2} \left(c_1 + \frac{1}{2}|c_1| \right) = -\frac{\varepsilon_1^2}{4}|c_1| < 0. \tag{4.5}$$

В силу равенства (4.2) из неравенства (4.5) получим неравенство

$$\psi(\widehat{u} + \varepsilon h) - \psi(\widehat{u}) < 0,$$

т. е. в точке $\widehat{u} \in \mathbb{B}$ нет минимума. Следовательно, необходимым условием минимума в точке $\widehat{u} \in \mathbb{B}$ есть условие

$$\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u}) h, h \right\rangle \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad \|h\| < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Следствие. *Необходимыми условиями максимума в точке $\widehat{u} \in \in \mathbb{B}$ являются следующие*

$$\psi'_f(\widehat{u}) = 0 \quad \textit{и} \quad \left\langle \psi''_f(\widehat{u}) h, h \right\rangle \leqslant 0 \quad \textit{для всех} \quad \|h\| < \varepsilon. \tag{4.6}$$

Замечание 1. Заметим, что в отличие от конечномерного банахова пространства $\mathbb{B}$ условие

$$\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h, h \right\rangle \geqslant 0 \ (\leqslant 0) \quad \text{для всех} \quad h \in \mathbb{B}.$$

не является достаточным условием минимума (максимума).

Действительно, имеет место следующий пример:

ПРИМЕР 3. Рассмотрим следующий функционал на банаховом пространстве $\mathbb{C}[0,1]$ относительно стандартной supremum–нормы:

$$\psi(u) = \int\limits_0^1 u^2(x)(x - u(x))\,dx.$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\psi(u+h) = \int\limits_0^1 (u+h)^2(x-u-h)\,dx = \int\limits_0^1 u^2(x-u)\,dx + \\ + \int\limits_0^1 \left(2ux - 3u^2\right) h\,dx + \int\limits_0^1 (x-3u)h^2\,dx - \int\limits_0^1 h^3\,dx.$$

Из этого равенства приходим к выводу, что

$$\psi'_f(u) = 0$$

на следующих двух функциях из $\mathbb{C}[0,1]$:

$$u(x) = 0 \quad \text{и} \quad u(x) = \frac{2}{3}x.$$

Заметим теперь, что

$$\left\langle \psi''_{ff}(0)h, h \right\rangle = 2\int\limits_0^1 h^2(x)x\,dx \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad h(x) \in \mathbb{C}[0,1],$$

причем,

$$\psi(0) = 0,$$

т. е. для функции $u(x) = 0$ выполнены все необходимые условия локального минимума, но, тем не менее, на функции $u(x) = 0$ функционал не достигает локального минимума.

□ Действительно, рассмотрим следующее однопараметрическое семейство функций:

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon - x, & \text{при} \quad x \in [0,\varepsilon]; \\ 0, & \text{при} \quad x \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Очевидно, что функция $u_\varepsilon(x) \in \mathbb{C}[0,1]$ для всех $\varepsilon \in (0,1)$. Теперь вычислим норму этой функции

$$\sup_{x\in[0,1]} |u_\varepsilon(x)| = \varepsilon \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

т. е. в любой окрестности функции $u(x) = 0 \in \mathbb{C}[0,1]$ содержится функция $u_\varepsilon(x) \in \mathbb{C}[0,1]$ при некотором $\varepsilon > 0$. Теперь вычислим значение функционала $\psi(\cdot)$ на функции $u_\varepsilon(x)$

$$\psi(u_\varepsilon(x)) = \int\limits_0^1 u_\varepsilon^2(x)\,(x - u_\varepsilon(x)) = -\frac{\varepsilon^4}{6} < 0 = \psi(0).$$

Тем самым, минимум у функционала $\psi(u)$ на функции $u(x) = 0$ не достигается. ☒

Однако, справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть* $\psi(u) \in \mathbb{C}^{(2)}\left(\overline{O(\widehat{u},\varepsilon)};\mathbb{R}^1\right)$ *при* $\varepsilon > 0$. *Тогда при условиях*

(I) $\psi'_f(\widehat{u}) = 0$;

(II) $\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h, h\right\rangle \geqslant c\|h\|^2$ *(*$\leqslant -c\|h\|^2$*) для всех* $h \in \mathbb{B}$ *и* $c = c(\widehat{u}) > 0$

в точке $\widehat{u} \in \mathbb{B}$ *у функционала* $\psi(\widehat{u})$ *достигается минимум (максимум).*

Доказательство.

Докажем достаточность условий для минимума функционала $\psi(u)$ в точке $\widehat{u}$, поскольку достаточность условий для максимума проверяется аналогичным образом.

□ Действительно, в силу условий теоремы имеет место представление в окрестности $O(\widehat{u},\varepsilon)$ точки $\widehat{u} \in \mathbb{B}$:

$$\psi(\widehat{u}+h) - \psi(\widehat{u}) = \left\langle \psi'_f(\widehat{u}), h\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h, h\right\rangle + \omega_2(u,h). \qquad (4.7)$$

Кроме того, поскольку имеет место предельное равенство

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{|\omega_2(u,h)|}{\|h\|^2} = 0,$$

то при достаточно малом $\|h\|$ для заданного в условиях теоремы $c = c(\widehat{u}) > 0$ будет иметь место неравенство

$$|\omega_2(u,h)| < \frac{c}{4}\|h\|^2.$$

Тогда из (4.7) получим неравенство для таких $h \in \mathbb{B}$:

$$\psi(\widehat{u}+h) - \psi(\widehat{u}) \geqslant \frac{1}{2}\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h, h\right\rangle - \frac{c}{4}\|h\|^2 \geqslant \frac{c}{2}\|h\|^2 - \frac{c}{4}\|h\|^2 = \frac{c}{4}\|h\|^2,$$

т. е. в точке $\widehat{u} \in \mathbb{B}$ достигается минимум у функционала ψ.

Теорема доказана.

Замечание 2. При условиях теоремы 2 каждая экстремаль функционала $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ является решением операторного уравнения $\psi'_f(u) = 0$.

Лекция 4

ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫЕ И КОЭРЦИТИВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

§ 1. Введение

Полученное в теореме достаточное условие (II) (естественно, в совокупности с условием (I)) является очень обременительным и на практике ожидать от функционала существования непрерывной второй производной Фреше не приходится, а если таковая имеется, то требование сильной положительности (отрицательности) $\psi''_{ff}(\widehat{u})$ тем более на практике не выполняется. В частности, если функционал $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ является потенциалом некоторого оператора $F(u) = \psi'_f(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$, то это требование означает существования непрерывной производной Фреше этого оператора такой, что

$$\left\langle F'_f(\widehat{u})h, h \right\rangle \geqslant c\|h\|^2 \ (\leqslant -c\|h\|^2) \quad \text{для всех} \quad h \in \mathbb{B}$$

при $c = c(\widehat{u}) > 0$. Поэтому в этом параграфе мы ослабим требование (II) теоремы 2.

§ 2. Полунепрерывные функционалы

Напомним определение *слабо замкнутого множества* M банахова пространства $\mathbb{B}$.

Определение 1. *Множество $M \subset \mathbb{B}$ называется слабо замкнутым, если для любой последовательности $\{u_n\} \subset M$ такой, что*

$$u_n \rightharpoonup u \quad \textit{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \textit{при} \quad n \to +\infty,$$

то $u \in \mathbb{B}$.

Дадим определение *слабо полунепрерывного снизу* функционала:

Определение 2. *Будем говорить, что функционал $\psi(u) : \mathbb{B} \to \to \mathbb{R}^1$ является слабо полунепрерывным снизу в точке $u_0 \in M \subset \mathbb{B}$ по отношению к слабо замкнутому множеству $M \subset \mathbb{B}$, если для любой последовательности $\{u_n\} \subset M$ такой, что*

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad \textit{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \textit{при} \quad n \to +\infty$$

вытекает, что

$$\psi(u_0) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \psi(u_n) \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

Определение 3. *Будем говорить, что функционал* $\psi(u) : \mathbb{B} \to \to \mathbb{R}^1$ *является слабо полунепрерывным снизу на слабо замкнутом множестве* $M \subset \mathbb{B}$, *если он является слабо полунепрерывным снизу в каждой точке* $u \in M$.

Для дальнейшего нам необходимо ввести также понятие *слабой коэрцитивности* функционала $\psi(u)$.

Определение 4. *Функционал* $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$, *удовлетворяющий условию*

$$\lim_{\|u\|\to+\infty} \psi(u) = +\infty,$$

называется слабо коэрцитивным.

Справедлива следующая важная теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbb{B}$ — *это рефлексивное банахово пространство. Тогда, если*

(i) $M \subset \mathbb{B}$ *слабо замкнуто в* $\mathbb{B}$;

(ii) *функционал* $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ *слабо коэрцитивен на* $\mathbb{B}$;

(iii) *функционал* $\psi(u)$ *является слабо полунепрерывным снизу на множестве* M,

то он ограничен снизу на M *и достигает своего минимума на* M :

$$\psi(u_0) = \inf_{u\in M} \psi(u) > -\infty.$$

Доказательство.

Шаг 1. Пусть

$$d > \inf_{u\in M} \psi(u).$$

Поскольку функционал $\psi(u)$ является слабо коэрцитивным на $\mathbb{B}$ найдется такое $R > 0$, что

$$\psi(u) \geqslant d \quad \text{для всех} \quad u \in B_R = \{u \in \mathbb{B} : \ \|u\| \geqslant R\}.$$

Следовательно,

$$\inf_{u\in M} \psi(u) = \inf_{u\in M\cap B_R} \psi(u).$$

Шаг 2. Пусть

$$\alpha_0 = \inf_{u\in M} \psi(u)$$

и $\{u_n\} \subset M$ — это минимизирующая последовательность, которая, очевидно, начиная с некоторого номера $n_0 \in \mathbb{N}$ принадлежит множеству $B_R \cap M$. Это значит, что

$$\|u_n\| \leqslant R \quad \text{для всех} \quad n \geqslant n_0.$$

Но тогда в силу рефлексивности $\mathbb{B}$ найдется такая подпоследовательность $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$, что

$$u_{n_k} \rightharpoonup u_0 \in B_R \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n_k \to +\infty,$$

но при этом в силу слабой замкнутости M мы получим, что $u_0 \in M$. В силу слабой секвенциальной полунепрерывности снизу функционала ψ на M приходим к выводу, что

$$\psi(u_0) \leqslant \liminf_{n_k \to +\infty} \psi(u_{n_k}).$$

Шаг 3. Таким образом, приходим к выводу, что имеет место цепочка неравенств:

$$\inf_{u\in M} \psi(u) \leqslant \psi(u_0) \leqslant \liminf_{k\to+\infty} \psi(u_{n_k}) = \lim_{n\to+\infty} \psi(u_n) = \inf_{u\in M} \psi(u),$$

из которой следует, что

$$\inf_{u\in M} \psi(u) = \psi(u_0) > -\infty.$$

Теорема доказана.

§ 3. Пример

Рассмотрим нелинейную краевую задачу, в классическом смысле имеющей следующий вид:

$$\Delta_p u = f(x) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{3.1}$$

$$u(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{3.2}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0,1)$, а символом $\Delta_p u$ обозначен следующий нелинейный при $p > 1$ оператор:

$$\Delta_p u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{div}(|D_x u(x)|^{p-2} D_x u(x)).$$

Дадим определение слабого решения задачи (3.1):

Определение 5. *Слабым решением задачи* (3.1) *назовем решение класса* $u(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *удовлетворяющее равенству*

$$\langle -\Delta_p u(x) + f(x), \varphi(x)\rangle = 0 \quad \textit{для всех} \quad \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{3.3}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *— это скобки двойственности между банаховыми пространствами* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *и* $W^{-1,p'}(\Omega)$, *а функция* $f(x) \in W^{-1,p'}(\Omega)$.

Прежде чем переходить к исследованию соответствующей вариационной задачи рассмотрим оператор Δ_p. Докажем, что он удовлетворяет следующему свойству:

$$\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega) \quad \text{при} \quad p > 1. \tag{3.4}$$

□ Действительно, в качестве области определения возьмём

$$\operatorname{dom} \Delta_p = W_0^{1,p}(\Omega),$$

тогда слабый градиент

$$D_x : \ W_0^{1,p}(\Omega) \to \underbrace{L^p(\Omega) \otimes \cdots \otimes L^p(\Omega)}_{N}.$$

Рассмотрим векторную нелинейную функцию

$$\eta(x) = (\eta_1(x), ..., \eta_N(x)) =$$
$$= |\xi(x)|^{p-2}\xi(x) : \underbrace{L^p(\Omega) \otimes \cdots \otimes L^p(\Omega)}_{N} \to \underbrace{L^{p'}(\Omega) \otimes \cdots \otimes L^{p'}(\Omega)}_{N},$$

где $\xi(x) = (\xi_1(x), ..., \xi_N(x))$. Теперь определим функционал $\operatorname{div}(\eta(x)) \in \in W^{-1,p'}(\Omega)$ над пространством $W_0^{1,p}(\Omega)$ следующим образом:

$$\langle \operatorname{div}(\eta(x)), \varphi(x) \rangle_* \stackrel{def:}{=} -\sum_{j=1}^{N} \int\limits_{\Omega} \eta_j(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} \, dx$$

для всех $\varphi(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ и заданной функции

$$\eta(x) = (\eta_1(x), ..., \eta_N(x)) \in \underbrace{L^{p'}(\Omega) \otimes \cdots \otimes L^{p'}(\Omega)}_{N}.$$

Тогда, оператор Δ_p представим в следующем виде

$$\Delta_p u \stackrel{def:}{=} \operatorname{div}(\eta(x)), \quad \eta(x) = |\xi(x)|^{p-2}\xi(x), \quad \xi(x) = D_x u(x)$$

для функций $u(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ и получим, что этот оператор действует

$$\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega). \quad \boxtimes$$

Сопоставим задаче (3.1) следующий функционал:

$$\psi(u) = \psi_1(u) + \psi_2(u) = \frac{1}{p} \int\limits_{\Omega} |D_x u(x)|^p \, dx + \langle f, u \rangle \tag{3.5}$$

Найдем производную Фреше этого функционала. Производная Фреше второго слагаемого вычисляется элементарно:

$$\psi_2(u+h) - \psi_2(u) = \langle f, u+h\rangle - \langle f, u\rangle = \langle f, h\rangle$$

т. е.

$$\psi'_{2f}(u) = f(x) \in W^{-1,p'}(\Omega).$$

Производная Фреше функционала $\psi(u)$ равна

$$\psi'_f(u) = -\Delta_p u + f,$$

т. е. оператор

$$F(u) := -\Delta_p u + f : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$$

является потенциальным.

Докажем, что функционал $\psi(u)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1.

□ Действительно,

Шаг 1. Банахово пространство $\mathbb{B} = W_0^{1,p}(\Omega)$ при $p > 1$ является слабо замкнутым, поскольку оно рефлексивно.

Шаг 2. Теперь заметим, что по условию $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, поэтому имеет место неравенство

$$|\langle f, u\rangle| \leqslant \|f\|_{-1,p'} \|D_x u\|_p.$$

Следовательно, для функционала (3.5) справедлива следующая оценка снизу:

$$\psi(u) \geqslant \frac{1}{p}\|D_x u\|_p^p - \|f\|_{-1,p'}\|D_x u\|_p.$$

Введем обозначение

$$c := \|f\|_{-1,p'},$$

тогда имеем

$$\psi(u) \geqslant \frac{1}{p}\|D_x u\|_p^p - c\|D_x u\|_p. \tag{3.6}$$

Пусть $\varepsilon \in (0,1)$. Используя неравенство Юнга, получим следующую цепочку неравенств:

$$c\|D_x u\|_p = \frac{c}{\varepsilon^{1/p}}\varepsilon^{1/p}\|D_x u\|_p \leqslant \frac{1}{p'}\left(\frac{c}{\varepsilon^{1/p}}\right)^{p'} + \frac{\varepsilon}{p}\|D_x u\|_p^p.$$

Поэтому продолжим неравенство (3.6)

$$\psi(u) \geqslant \frac{1-\varepsilon}{p}\|D_x u\|_p^p - c_1, \quad c_1 = \frac{1}{p'}\left(\frac{c}{\varepsilon^{1/p}}\right)^{p'}.$$

Следовательно,

$$\psi(u) \to +\infty \quad \text{при} \quad \|D_x u\|_p \to +\infty$$

и поэтому функционал (3.5) является слабо коэрцитивным.

Шаг 3. Теперь докажем слабую полунепрерывность снизу функционала $\psi(u)$ на $W_0^{1,p}(\Omega)$. Действительно, пусть

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad \text{слабо в} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

тогда в силу слабой полунепрерывности снизу нормы банахова пространства $W_0^{1,p}(\Omega)$ приходим к выводу, что

$$\liminf_{n\to+\infty} \int\limits_{\Omega} |D_x u_n|^p \, dx \geqslant \int\limits_{\Omega} |D_x u_0|^p \, dx.$$

Кроме того, поскольку $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ имеет место предельное равенство

$$\langle f, u_n \rangle \to \langle f, u_0 \rangle \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Тем самым,

$$\psi(u_0) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \psi(u_n) \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \quad \boxtimes$$

Теперь можно воспользоваться теоремой 1, в которой следует взять $M = W_0^{1,p}(\Omega)$ при $p > 1$. Таким образом, существует точка минимума $\widehat{u}(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ функционала $\psi(u)$, а значит, слабое решение уравнения

$$\psi_f'(\widehat{u}(x)) = \vartheta, \quad -\Delta_p u(x) + f(x) = \vartheta.$$

Для полноты изложения докажем теперь единственность слабого решения рассматриваемой краевой задачи.

$\square$ Действительно, пусть $u_1(x), u_2(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ — это какие-то два решения задачи (3.1). Тогда согласно определению 5 слабого решения имеют место следующие два равенства:

$$\langle -\Delta_p u_k(x) + f(x), \varphi(x) \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad k = 1, 2.$$

Тогда, вычитая одно равенство из другого, получим следующее выражение

$$\langle -\Delta_p u_1 + \Delta_p u_2, \varphi \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Теперь возьмем в качестве функции $\varphi(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ следующее выражение

$$\varphi(x) = u_1(x) - u_2(x) \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

тогда сразу же получим равенство

$$\langle -\Delta_p u_1 + \Delta_p u_2, u_1 - u_2 \rangle = 0.$$

Откуда в силу слабого определения оператора $\operatorname{div}(\cdot)$ в операторе $\Delta_p(\cdot)$, получим следующее равенство

$$\int\limits_{\Omega} \Big(|D_x u_1(x)|^{p-2} D_x u_1(x) - \\ - |D_x u_2(x)|^{p-2} D_x u_2(x), D_x u_1(x) - D_x u_2(x) \Big) \, dx = 0.$$

Теперь заметим, что для произвольных векторов $a, b \in \mathbb{R}^N$ имеет место цепочка следующих неравенств:

$$(|b|^{p-2} b - |a|^{p-2} a, b - a) \geqslant c(p) \, (|b| + |a|)^{p-2} \, |b - a|^2 \quad \text{при} \quad p > 1.$$

Следовательно, приходим к неравенству

$$0 = \int\limits_{\Omega} \Big(|D_x u_1(x)|^{p-2} D_x u_1(x) - \\ - |D_x u_2(x)|^{p-2} D_x u_2(x), D_x u_1(x) - D_x u_2(x) \Big) \, dx \geqslant \\ \geqslant c(p) \int\limits_{\Omega} (|D_x u_1(x)| + |D_x u_2(x)|)^{p-2} \, |D_x u_1(x) - D_x u_2(x)|^2 \, dx.$$

Откуда легко следует, что $u_1(x) = u_2(x)$ почти всюду на Ω.

§ 4. Литературные указания

В данной лекции мы использовали материал, изложенный в работах [2], [30], [35], [46], [47], [49], [56] и [61].

Лекция 5

ТЕОРЕМА О ГОРНОМ ПЕРЕВАЛЕ

В этой лекции мы рассмотрим важный в приложениях вариационный метод Амбросетти–Рабиновича, основанный на так называемой теореме о горном перевале и имеющий важные приложения в теории неограниченных функционалов.

§ 1. Лемма о деформации

Итак, пусть у нас задан функционал $\psi(u) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{H};\mathbb{R}^1)$, удовлетворяющий, кроме того, условию, что его градиент [1])

$$F(u) = \mathbf{grad}\,\psi(u) : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$

является ограниченно липшиц–непрерывным и $\mathbb{H}$ вещественное гильбертово пространство.

Замечание 1. Дадим чёткую формулировку ограниченной липшиц–непрерывности. Пусть

$$F : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2,$$

где $\mathbb{B}_k$ при $k = 1, 2$ — это банаховы пространства. Тогда оператор F называется ограниченно липшиц–непрерывным, если

$$\|F(u_1) - F(u_2)\|_2 \leqslant K\|u_1 - u_2\|_1$$

для всех $u_1, u_2 \in \mathbb{B}_1$ таких, что

$$\|u_k\|_1 \leqslant R \quad \text{при} \quad k = 1, 2,$$

а постоянная $K = K(R) < +\infty$.

Теперь введём некоторые обозначения

$$A_c \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{u \in \mathbb{H} : \psi(u) \leqslant c\Big\},$$

$$K_c \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{u \in \mathbb{H} : \psi(u) = c,\ F(u) = \mathbf{grad}\,\psi(u) = 0\Big\}.$$

[1]) Напомним, что $\mathbf{grad}\,\psi(u) \stackrel{def:}{=} J\psi'_f(u)$, где $J : \mathbb{H}^* \to \mathbb{H}$ — это изометрия Рисса.

Определение 1. *Пусть* $\mathcal{F}$ — *это семейство функционалов* $\psi(u) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{H};\mathbb{R}^1)$, *градиент которых ограниченно липшиц-непрерывен.*

Определение 2.

(i) *Элемент* $u \in \mathbb{H}$ *называется критической точкой функционала* $\psi(u)$, *если* $\mathbf{grad}\,\psi(u) = 0$;

(ii) *Вещественное число* c *называется критическим значением функционала* $\psi(u)$, *если* $K_c \neq \varnothing$

Теперь докажем, что если число c не является критическим значением функционала $\psi(u)$, то множество $A_{c+\varepsilon}$ «деформируется» [1] в $A_{c-\varepsilon}$ при некотором $\varepsilon > 0$.

Поскольку пространство $\mathbb{H}$, вообще говоря, бесконечномерно, нам понадобится условие компактности.

Определение 3. *Функционал* $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{H};\mathbb{R}^1)$ *удовлетворяет условию компактности Palais–Smale* (PS), *если каждая последовательность* $\{u_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{H}$, *удовлетворяющая условиям*:

(i) $\{\psi(u_k)\}_{k=1}^{+\infty}$ *ограничена*;

(ii) $\mathbf{grad}\,\psi(u_k) \to \vartheta$ *сильно в* $\mathbb{H}$

содержит сильно сходящуюся в $\mathbb{H}$ *подпоследовательность.*

Справедлива следующая теорема о деформации:

Теорема 1. *Пусть* $\psi(u) \in \mathcal{F}$ *удовлетворяет условию Пале–Смейла* (Palais–Smale). *Предположим, что*

$$K_c = \varnothing. \tag{1.1}$$

Тогда для любого достаточного малого $\varepsilon > 0$ *существуют константа* $0 < \delta < \varepsilon$ *и функция* $\eta(t,u) \in \mathbb{C}([0,1] \times \mathbb{H};\mathbb{H})$ *такая, что отображение*

$$\eta_t(u) \stackrel{\text{def:}}{=} \eta(t,u) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1,\ u \in \mathbb{H})$$

удовлетворяет условиям:

(i) $\eta_0(u) = u$ $(u \in \mathbb{H})$;

(ii) $\eta_1(u) = u$ $(u \notin \psi^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]))$;

(iii) $\psi(\eta_t(u)) \leqslant \psi(u)$ $(u \in \mathbb{H},\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$;

(iv) $\eta_1(A_{c+\delta}) \subset A_{c-\delta}$.

Доказательство.

Доказательство проведём в несколько шагов.

Шаг 1. Сначала покажем, [2] что существуют константы $0 < \sigma, \delta_1 < 1$ такие, что

$$\|\mathbf{grad}\,\psi(u)\|_{\mathbb{H}} \geqslant \sigma \quad \text{для всех} \quad u \in A_{c+\delta_1} \backslash A_{c-\delta_1} \text{ }^{3)}. \tag{1.2}$$

[1] Смысл понятия «деформируется» будет понятен из следующей теоремы.

[2] Доказательство основано на том, что функционал ψ удовлетворяет условию PS и $K_c = \varnothing$.

[3] Иначе говоря, $c - \delta_1 < \psi(u) \leqslant c + \delta_1$.

□ Доказательство ведется от противного. Если (1.2) не выполняется для всех констант $\sigma, \delta_1 > 0$, то существуют последовательности $\sigma_k \to 0$, $\delta_k \to 0$ и элементы

$$u_k \in A_{c+\delta_k} \backslash A_{c-\delta_k} \tag{1.3}$$

такие, что

$$\|\mathbf{grad}\,\psi(u_k)\|_{\mathbb{H}} < \sigma_k \Rightarrow \mathbf{grad}\,\psi(u_k) \to \vartheta \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{H} \tag{1.4}$$

при $k \to +\infty$. В силу (1.3)

$$c - \delta_k < \psi(u_k) \leqslant c + \delta_k, \tag{1.5}$$

т. е. числовая последовательность $\{\psi(u_k)\}$ ограничена. Согласно условию Пале–Смейла (PS) существуют подпоследовательность

$$\{u_{k_j}\}_{j=1}^{+\infty} \subset \{u_k\}_{k=1}^{+\infty}$$

и элемент $u \in \mathbb{H}$ такие, что

$$u_{k_j} \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{H} \quad \text{при} \quad k_j \to +\infty.$$

В частности, найдется такая константа $M > 0$, что

$$\|u_{k_j}\| \leqslant M < +\infty, \tag{1.6}$$

где постоянная $M > 0$ не зависит от k_j. Так как $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{H}; \mathbb{R}^1)$, то из (1.3), (1.4) вытекает, что

$$\psi(u) = c, \quad \mathbf{grad}\,\psi(u) = \vartheta.$$

□□ Действительно, в силу ограниченной липшиц-непрерывности $\mathbf{grad}\,\psi(\cdot)$ и (1.6) справедливо предельное свойство

$$\mathbf{grad}\,\psi(u_{k_j}) \to \mathbf{grad}\,\psi(u) \quad \text{при} \quad k_j \to +\infty$$

и при этом как ранее было установлено

$$\mathbf{grad}\,\psi(u_{k_j}) \to \vartheta \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{H} \quad \text{при} \quad k_j \to +\infty.$$

Стало быть,

$$\mathbf{grad}\,\psi(u) = \vartheta. \tag{1.7}$$

С другой стороны, в силу неравенств (1.5) и непрерывности функционала $\psi(u) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{H}; \mathbb{R}^1)$ имеем

$$\psi(u_{k_j}) \to c \quad \text{и} \quad \psi(u_{k_j}) \to \psi(u) \quad \text{при} \quad k_j \to +\infty.$$

Итак,

$$\psi(u) = c. \quad \boxtimes\boxtimes \tag{1.8}$$

Следовательно, из формул (1.7) и (1.8) вытекает, что $K_c \neq \varnothing$. Что противоречит нашему предположению $K_c = \varnothing$. $\boxtimes$

Шаг 2. Фиксируем постоянные $\delta_1 \in (0,1)$ и $\sigma \in (0,1)$ такие, что в силу первого шага выполнено неравенство

$$\|\mathbf{grad}\,\psi(u)\|_{\mathbb{H}} \geqslant \sigma \quad \text{для всех} \quad u \in A_{c+\delta_1} \backslash A_{c-\delta_1}. \tag{1.9}$$

Ясно, что для произвольного $\delta \in (0,\delta_1)$ имеет место вложение

$$B \subset A_{c+\delta_1} \backslash A_{c-\delta_1}, \quad B \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{u \in \mathbb{H}\Big|\, c-\delta \leqslant \psi(u) \leqslant c+\delta\Big\}.$$

Поэтому неравенство (1.9) остается справедливым для всех

$$u \in B.$$

Теперь мы фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta > 0$ следующим образом:

$$0 < \delta < \varepsilon, \quad 0 < \delta < \sigma^2/2, \quad 0 < \delta < \delta_1. \tag{1.10}$$

Положим

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{u \in \mathbb{H}\Big|\, \psi(u) \leqslant c-\varepsilon \quad \text{или} \quad \psi(u) \geqslant c+\varepsilon\Big\},$$

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{u \in \mathbb{H}\Big|\, c-\delta \leqslant \psi(u) \leqslant c+\delta\Big\},$$

$$A \cap B = \varnothing, \quad C \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{H} \backslash (A \cup B) \neq \varnothing.$$

Отметим, что оператор $F(u) = \mathbf{grad}\,\psi(u)$ ограничен на ограниченных множествах, поскольку $\psi \in \mathcal{F}$ и, значит, $\mathbf{grad}\,\psi(u)$ является ограниченно липшиц–непрерывным. Поскольку $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{H};\mathbb{R}^1)$ справедливо равенство

$$\psi(u+h) = \psi(u) + (\mathbf{grad}\,\psi(u), h) + \omega(u,h), \qquad \lim_{\|h\|\to+0} \frac{|\omega(u,h)|}{\|h\|} = 0,$$

в которой положим

$$u_1 = u + h, \quad u_2 = u \Rightarrow h = u_1 - u_2.$$

В силу свойства $\omega(u,h)$ имеет место оценка

$$|\omega(u,h)| = |\omega(u_2, u_1 - u_2)| \leqslant c_1 \|u_1 - u_2\|.$$

Итак, справедливо следующее неравенство:

$$
\begin{aligned}
|\psi(u_1) - \psi(u_2)| &\leqslant \\
&\leqslant \|\mathbf{grad}\,\psi(u_2)\|\|u_1 - u_2\| + c_1\|u_1 - u_2\| \leqslant \\
&\leqslant c_2\|u_1 - u_2\| \quad \text{для всех} \quad \|u_k\| \leqslant R \qquad (1.11)
\end{aligned}
$$

при $k = 1, 2$. Из последнего неравенства вытекает ограниченная липшиц–непрерывность функционала $\psi(u)$. Отсюда, в частности, сразу же заключаем, что множества A и B является сильно замкнутыми.

Докажем, что отображение

$$u \mapsto \mathrm{distance}(u, A) + \mathrm{distance}(u, B)$$

ограничено снизу константой $\delta > 0$ для всех u из ограниченного подмножества в $\mathbb{H}$, где

$$\mathrm{distance}(u, K) \stackrel{def:}{=} \inf_{v \in K \subset \mathbb{H}} \|u - v\| \geqslant 0.$$

□ Действительно, прежде всего заметим, что

$$\mathrm{distance}(u, A) + \mathrm{distance}(u, B) \geqslant 0.$$

Предположим, что существует ограниченная последовательность $\{u_n\} \subset \mathbb{H}$ (т.е. $\|u_n\| \leqslant R$) такая, что

$$\mathrm{distance}(u_n, A) \to +0, \quad \mathrm{distance}(u_n, B) \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Тогда существуют такие последовательности $\{a_n\} \subset A$ и $\{b_n\} \subset B$, что

$$\|a_n - u_n\| \to +0, \quad \|b_n - u_n\| \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

В силу неравенства треугольника имеем

$$\|a_n - b_n\| \leqslant \|a_n - u_n\| + \|b_n - u_n\| \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Заметим, без ограничения общности можно считать, что

$$\|a_n - u_n\| \leqslant R, \quad \|b_n - u_n\| \leqslant R \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому

$$\|a_n\| \leqslant \|a_n - u_n\| + \|u_n\| \leqslant 2R,$$
$$\|b_n\| \leqslant \|b_n - u_n\| + \|b_n\| \leqslant 2R.$$

Тогда в силу (1.11) при условиях, что

$$\|a_n\| \leqslant 2R, \quad \|b_n\| \leqslant 2R,$$

получим неравенство

$$|\psi(a_n) - \psi(b_n)| \leqslant c_2(R)\|a_n - b_n\| \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty, \qquad (1.12)$$

где $c_2 > 0$ — это константа, не зависящая от $n \in \mathbb{N}$.

Теперь заметим, что выполнены следующие неравенства:

$$c - \delta \leqslant \psi(b_n) \leqslant c + \delta \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.13}$$

$$\psi(a_n) \geqslant c - \varepsilon \quad \text{либо} \quad \psi(a_n) \geqslant c + \varepsilon \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.14}$$

В силу (1.13) числовая последовательность $\{\psi(b_n)\}$ ограничена, поэтому существует такая подпоследовательность $\{b_{n_n}\} \subset \{b_n\}$, что

$$\psi(b_{n_n}) \to b \Rightarrow c - \delta \leqslant b \leqslant c + \delta. \tag{1.15}$$

Теперь для соответствующей подпоследовательности $\{a_{n_n}\} \subset \{a_n\}$ в силу (1.12) имеем

$$|\psi(a_{n_n}) - b| \leqslant |\psi(a_{n_n}) - \psi(b_{n_n})| + |\psi(b_{n_n}) - b| \to +0$$

при $n \to +\infty$. Откуда и из (1.14) вытекает, что

$$b \leqslant c - \varepsilon \quad \text{либо} \quad b \geqslant c + \varepsilon. \tag{1.16}$$

Получено противоречие между неравенствами (1.15) и (1.16), поскольку $0 < \delta < \varepsilon$. Следовательно,

$$\operatorname{distance}(u, A) + \operatorname{distance}(u, B) \geqslant \delta(R) > 0$$ [1]

для всех $u \in \{u \in \mathbb{H} : \|u\| \leqslant R\}$. ⊠

Следовательно, функция

$$g(u) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\operatorname{distance}(u, A)}{\operatorname{distance}(u, A) + \operatorname{distance}(u, B)} \quad (u \in \mathbb{H})$$

удовлетворяет условиям

$$0 \leqslant g \leqslant 1, \quad g = 0 \quad \text{на} \quad A, \quad g = 1 \quad \text{на} \quad B, \tag{1.17}$$

где g липшицева на ограниченных множествах, т.е. ограниченно липшиц–непрерывна.

□ Действительно, рассмотрим разность

$$g(u_1) - g(u_2) =$$
$$= \frac{\operatorname{distance}(u_1, A)}{\operatorname{distance}(u_1, A) + \operatorname{distance}(u_1, B)} - \frac{\operatorname{distance}(u_2, A)}{\operatorname{distance}(u_2, A) + \operatorname{distance}(u_2, B)} =$$
$$= \frac{\operatorname{distance}(u_1, A)\operatorname{distance}(u_2, B) - \operatorname{distance}(u_2, A)\operatorname{distance}(u_1, B)}{(\operatorname{distance}(u_1, A) + \operatorname{distance}(u_1, B))\,(\operatorname{distance}(u_2, A) + \operatorname{distance}(u_2, B))}.$$

---

[1] Заметим, что возможно $\delta(R) \to +0$ при $R \to +\infty$.

Отсюда сразу же получаем, что

$$|g(u_1) - g(u_2)| \leqslant \frac{1}{\delta}\,|\text{distance}(u_1, B) - \text{distance}(u_2, B)| + \\ + \frac{1}{\delta}\,|\text{distance}(u_1, A) - \text{distance}(u_2, A)|\,.$$

Заметим, что в силу неравенства треугольника имеем

$$\|u_1 - v\| \leqslant \|u_1 - u_2\| + \|u_2 - v\|,$$

$$\|u_2 - v\| \leqslant \|u_1 - u_2\| + \|u_1 - v\|.$$

Взяв infimum по $v \in A$ от обеих частей этих неравенств, получим

$$\text{distance}(u_1, A) \leqslant \text{distance}(u_2, A) + \|u_1 - u_2\|,$$

$$\text{distance}(u_2, A) \leqslant \text{distance}(u_1, A) + \|u_1 - u_2\|.$$

Откуда получим искомое неравенство

$$|\text{distance}(u_1, A) - \text{distance}(u_2, A)| \leqslant \|u_1 - u_2\|.$$

Аналогичным образом доказывается неравенство

$$|\text{distance}(u_1, B) - \text{distance}(u_2, B)| \leqslant \|u_1 - u_2\|.$$

Отсюда получим, что

$$|g(u_1) - g(u_2)| \leqslant \frac{2}{\delta(R)}\|u_1 - u_2\| \tag{1.18}$$

для всех $u_1, u_2 \in \mathbb{H}$ таких, что $\|u_k\| \leqslant R$ при $k = \overline{1,2}$ и $R > 0$. ⊠

Шаг 3. Положим

$$h(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant 1; \\ 1/t, & t \geqslant 1. \end{cases} \tag{1.19}$$

Наконец, определим отображение

$$V : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$

формулой

$$V(u) \stackrel{\text{def}}{=} -g(u)h\left(\|\mathbf{grad}\,\psi(u)\|_{\mathbb{H}}\right)\mathbf{grad}\,\psi(u) \quad (u \in \mathbb{H}). \tag{1.20}$$

Заметим, что V ограничено.

□ Действительно, $0 \leqslant g(u) \leqslant 1$. При

$$\|\mathbf{grad}\,\psi(u)\|_{\mathbb{H}} \leqslant 1 \Rightarrow \|V(u)\|_{\mathbb{H}} \leqslant 1,$$

а при
$$\|\mathbf{grad}\,\psi(u)\|_{\mathbb{H}} \geqslant 1 \Rightarrow \|V(u)\|_{\mathbb{H}} \leqslant 1. \quad \boxtimes$$

Для произвольного $u \in \mathbb{H}$ рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\eta}{dt}(t) = V(\eta(t)) \quad t > 0, \quad \eta(0) = u. \tag{1.21}$$

Отображение V ограничено и с учётом (1.18) ограничено липшиц–непрерывно [1)], поскольку является композицией ограниченно липшиц–непрерывных отображений. Поэтому существует единственное классическое решение для всех $t \in [0, +\infty)$. Пишем

$$\eta(t, u) = \eta_t(u), \quad u \in \mathbb{H},$$

чтобы подчеркнуть зависимость решения, как от времени t, так и от начального положения $u \in \mathbb{H}$.

Ограничившись случаем $0 \leqslant t \leqslant 1$, мы видим, что таким образом определенное отображение $\eta(t, u) \in \mathbb{C}([0, 1] \times \mathbb{H}; \mathbb{H})$ удовлетворяет утверждениям (i) и (ii).

□ Действительно, с одной стороны, имеем

$$\eta_0(u) = u \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{H}$$

— это следствие начального условия в задаче Коши (1.21). С другой стороны, пусть

$$\eta(0) = u \in D \stackrel{\text{def:}}{=} \{u \in \mathbb{H} : \quad \psi(u) < c - \varepsilon \quad \text{либо} \quad \psi(u) > c + \varepsilon\} \subset A.$$

Поскольку $g(u) = 0$ для всех $u \in A$ и решение $\eta(t, u)$ является непрерывным, то для достаточно малого момента времени $t_1 > 0$ получим, что

$$\begin{aligned} &\eta(t, u) \in D \subset A \quad \text{для всех} \quad t \in [0, t_1] \Rightarrow \\ &\qquad \Rightarrow g(\eta(t, u)) = 0 \Rightarrow V(\eta(t, u)) = 0 \Rightarrow \\ &\qquad\qquad \Rightarrow \frac{d\eta}{dt}(t) = 0 \Rightarrow \eta(t, u) = u \quad \text{для всех} \quad t \in [0, t_1]. \end{aligned}$$

Далее используя алгоритм продолжения решения во времени, получим, что $\eta(t, u) = u$ для всех $t \geqslant 0$. ⊠

Шаг 4. Теперь вычислим

[1)] На самом деле нам достаточно в этом месте локальной липшиц–непрерывности, которая вытекает из ограниченной липшиц–непрерывности.

$$\frac{d}{dt}\psi(\eta_t(u)) = \left(\mathbf{grad}\,\psi(\eta_t(u)), \frac{d}{dt}\eta_t(u)\right)_{\mathbb{H}} = (\mathbf{grad}\,\psi(\eta_t(u), V(\eta_t(u))))_{\mathbb{H}} =$$
$$= -g(\eta_t(u))h\left(\|\mathbf{grad}\,\psi(\eta_t(u))\|_{\mathbb{H}}\right)\|\mathbf{grad}\,\psi(\eta_t(u))\|^2_{\mathbb{H}}. \quad (1.22)$$

В частности,

$$\frac{d}{dt}\psi(\eta_t(u)) \leqslant 0 \quad (u \in \mathbb{H}, 0 \leqslant t \leqslant 1) \Rightarrow \psi(\eta_t(u)) \leqslant \psi(\eta_0(u)) = \psi(u).$$

Следовательно, утверждение (iii) доказано.

Шаг 5. Теперь фиксируем точку

$$u \in A_{c+\delta} \quad (1.23)$$

Наша цель — доказать соотношение

$$\eta_1(u) \in A_{c-\delta} \quad (1.24)$$

и тем самым проверить утверждение (iv). Если $\eta_t(u) \notin B$ для некоторого $t \in [0, 1]$, мы сразу же получаем требуемое утверждение.

□ Действительно, пусть найдется такое $t^* \in [0, 1]$, что

$$\eta_{t^*}(u) \notin B \Leftrightarrow \psi(\eta_{t^*}(u)) < c - \delta \quad \text{либо} \quad \psi(\eta_{t^*}(u)) > c + \delta.$$

В силу (iii) имеем

$$\psi(\eta_{t^*}(u)) \leqslant \psi(u) \leqslant c + \delta.$$

Значит,

$$\psi(\eta_{t^*}(u)) < c - \delta \quad \text{и} \quad \psi(\eta_t(u)) \leqslant \psi(\eta_{t^*}(u))$$

для всех $t \in [t^*, 1]$. Следовательно, в этом случае имеет место неравенство

$$\psi(\eta_1(u)) < c - \delta. \quad \boxtimes$$

Поэтому предположим, что $\eta_t(u) \in B$ для всех $0 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда $g(\eta_t(u)) = 1$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. Следовательно, из (1.22) вытекает

$$\frac{d}{dt}\psi(\eta_t(u)) = -h\left(\|\mathbf{grad}\,\psi(\eta_t(u))\|_{\mathbb{H}}\right)\|\mathbf{grad}\,\psi(\eta_t(u))\|^2_{\mathbb{H}}. \quad (1.25)$$

Если

$$\|\mathbf{grad}\,\psi(\eta_t(u))\|_{\mathbb{H}} \leqslant 1,$$

то из (1.19) и (1.2) вытекает

$$\frac{d}{dt}\psi(\eta_t(u)) = -\|\mathbf{grad}\,\psi(\eta_t(u))\|^2_{\mathbb{H}} \leqslant -\sigma^2.$$

□ Действительно, поскольку $\delta \in (0, \delta_1)$, то имеет место цепочка вложений

$$\eta_t(u) \in B = \overline{A_{c+\delta}\backslash A_{c-\delta}} \subset A_{c+\delta_1}\backslash A_{c-\delta_1}$$

в силу выбора $\delta \in (0, \delta_1)$ для всех $t \in [0, 1]$. $\boxtimes$

С другой стороны, если

$$\|\mathbf{grad}\,\psi(\eta_t(u))\|_{\mathbb{H}} \geqslant 1,$$

то из (1.19) и (1.2) получаем (напомним, что $\sigma \in (0, 1)$)

$$\frac{d}{dt}\psi(\eta_t(u)) \leqslant -1 \leqslant -\sigma^2.$$

В силу этих неравенств, из (1.25) и (1.10) выводим оценку

$$\psi(\eta_1(u)) \leqslant \psi(u) - \sigma^2 \leqslant c + \delta - \sigma^2 \leqslant c - \delta,$$

из которой следует (1.24), и утверждение (iv) доказано.

Теорема доказана.

§ 2. Теорема о горном перевале

Используя «минимаксную» технику и построенную деформацию η, докажем существование критической точки. С этой целью докажем утверждение, которое носит название «теорема о горном перевале».

Предварительно дадим определение *множества допустимых путей*

Определение 4. *Семейство*

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{ g \in \mathbb{C}([0, 1]; \mathbb{H}) \Big| \; g(0) = 0, \; g(1) = v \Big\}$$

при некотором $v \in \mathbb{H}$ называется множеством допустимых путей.

Теорема 2. *Пусть $\psi \in \mathcal{F}$ удовлетворяет условию Пале–Смейла* (PS). *Предположим также, что*

(i) $\psi(\vartheta) = 0$,

(ii) *существуют константы $r, a > 0$ такие, что $\psi(u) \geqslant a$, если $\|u\| = r$,*

(iii) *существует элемент $v \in \mathbb{H}$ такой, что $\|v\| > r$, $\psi(v) \leqslant 0$.*

Тогда

$$c \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{g \in \Gamma} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \psi(g(t))$$

является критическим значением функционала ψ.

Доказательство.

Прежде всего имеем $c \geqslant a$, поскольку

$$\max_{t \in [0,1]} \psi(g(t)) \geqslant a.$$

$\square$ Действительно, $g(0) = \vartheta$, а при $t = 1$ имеем $g(1) = v$ согласно определению 4. Поскольку $\|g(0)\| = \|\vartheta\| = 0$, $\|g(1)\| = \|v\| > r$ и $g(t) \in \mathbb{C}([0, 1]; \mathbb{H})$ то найдётся такое $t_0 \in (0, 1)$, что

$$\|g(t_0)\| = r \Rightarrow \psi(g(t_0)) \geqslant a. \quad \boxtimes$$

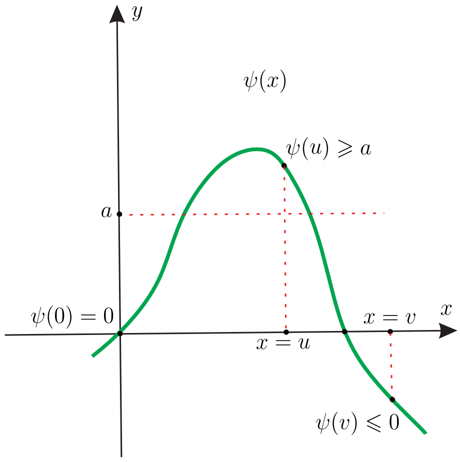

Рис. 1. Теорема о горном перевале.

Пусть c не является критическим значением функционала $\psi(u)$, так что

$$K_c = \varnothing.$$

Выберем достаточно малое число

$$0 < \varepsilon < a/2 \Rightarrow c - \varepsilon > 0.$$

Согласно теореме 1 о деформации существует константа $0 < \delta < \varepsilon$ и гомеоморфизм

$$\eta_t(u) : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$

такие, что

$$\eta_1(A_{c+\delta}) \subset A_{c-\delta}, \tag{2.1}$$

$$\eta_1(u) = u, \quad \text{если} \quad u \notin \psi^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]). \tag{2.2}$$

Выберем $g \in \Gamma$ так, что

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \psi(g(t)) \leqslant c + \delta. \tag{2.3}$$

Тогда

$$\widehat{g}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \eta_1(g(t)) \in \mathbb{C}([0,1];\mathbb{H})$$

также принадлежит Γ, так как

$$\eta_1(g(0)) = \eta_1(\vartheta) = \vartheta, \quad \psi(\vartheta) = 0 < c - \varepsilon,$$

и

$$\eta_1(g(1)) = \eta_1(v) = v, \quad \psi(v) \leqslant 0 < c - \varepsilon$$

в силу (2.2).

□ Действительно, заметим, что

$$\psi(\vartheta) = 0 < c - \varepsilon, \quad \psi(v) \leqslant 0 < c - \varepsilon \Rightarrow \vartheta, v \notin \psi^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]). \quad \boxtimes$$

Но тогда из (2.3) следует

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \psi(\widehat{g}(t)) \leqslant c - \delta,$$

откуда

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \psi(g(t)) \leqslant c - \delta,$$

что приводит к противоречию, поскольку $\delta > 0$.

Отметим, что, поскольку $c > 0$ минимаксная точка $u_0 \in \mathbb{H}$ функционала $\psi(u_0)$ не нулевой элемент. Действительно, это противоречит неравенству

$$0 < c = \psi(u_0), \quad \psi(\vartheta) = 0.$$

Т е о р е м а д о к а з а н а.

Лекция 6

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О ГОРНОМ ПЕРЕВАЛЕ

В этой лекции мы применим доказанную в предыдущей лекции теорему о горном перевале к доказательству существования решения одной краевой задачи при некоторых условиях. Кроме того, мы рассмотрим вопрос о не существовании нетривиальных решений той же задачи при выполнении других условий.

§ 1. Теорема о существовании решения

Для иллюстрации применения теоремы о горном перевале рассмотрим следующую нелинейную краевую задачу:

$$-\Delta u = |u|^{q-1}u \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{1.1}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область при $N \geqslant 3$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Предположим, что

$$1 < q < (N+2)/(N-2) \quad \text{при} \quad N \geqslant 3, \tag{1.2}$$

Очевидно, что $u \equiv 0$ является тривиальным решением (1.1). Но нас интересуют нетривиальные решения.

Дадим определение слабого решения задачи (1.1).

Определение 1. *Слабым решением задачи* (1.1) *называется функция* $u(x) \in H_0^1(\Omega)$, *удовлетворяющая равенству*

$$\left\langle \Delta u + |u|^{q-1}u, \varphi \right\rangle = 0 \tag{1.3}$$

для всех $\varphi(x) \in H_0^1(\Omega)$, *где символом* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *мы обозначили скобки двойственности между* $H_0^1(\Omega)$ *и* $H^{-1}(\Omega)$.

Теорема 1. *Краевая задача* (1.1) *имеет хотя бы одно нетривиальное слабое решение* $u(x) \in H_0^1(\Omega)$.

Доказательство.

Доказательство проведем в несколько шагов.

Шаг 1. Определим функционал Эйлера

$$\psi(u) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\Omega} \left[\frac{1}{2}|D_x u|^2 - \frac{1}{q+1}|u|^{q+1} \right] dx \quad \text{для} \quad u(x) \in H_0^1(\Omega). \tag{1.4}$$

Мы хотим применить теорему о горном перевале к функционалу $\psi(u)$. Будем рассматривать гильбертово пространство $\mathbb{H} := H_0^1(\Omega)$ относительно одной из эквивалентных норм

$$\|u\| \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int\limits_\Omega |D_x u|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Тогда

$$\psi(u) := \psi_1(u) - \psi_2(u) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{q+1} \int\limits_\Omega |u|^{q+1} \, dx. \tag{1.5}$$

Покажем, что ψ принадлежит классу $\mathcal{F}$.

Шаг 2. Сначала покажем, что ψ_1 принадлежит классу $\mathcal{F}$.

Для этого заметим, что при любых $u, h \in \mathbb{H}$,

$$\psi_1(u+h) = \frac{1}{2}\|u+h\|^2 = \frac{1}{2}\,(u+h, u+h) =$$
$$= \frac{1}{2}\|u\|^2 + (u,h) + \frac{1}{2}\|h\|^2 = \psi_1(u) + (u,h) + \omega_1(u,h), \quad \omega_1(u,h) = \frac{1}{2}\|h\|^2.$$

Поэтому ψ_1 дифференцируем по Фреше в точке u и $\mathbf{grad}\,\psi_1(u) = u$. В частности, $\mathbf{grad}\,\psi_1(u)$ является липшиц-непрерывным и тем более ограниченно липшиц-непрерывным. Следовательно, $\psi_1 \in \mathcal{F}$.

Шаг 3. Теперь рассмотрим ψ_2. Напомним, что по теореме Браудера–Минти, которую мы рассмотрим позже, в силу равномерной монотонности оператора Лапласа

$$-\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$$

для любого $v^* \in H^{-1}(\Omega)$ задача

$$\langle \Delta v(x) + v^*(x), \varphi(x) \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in H_0^1(\Omega)$$

имеет единственное слабое решение $v \in H_0^1(\Omega)$. Положим $v = Jv^*$, так что

$$J = (-\Delta)^{-1} : H^{-1}(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \ - \text{ это изометрия Рисса.} \tag{1.6}$$

Заметим, что

$$F(u) := |u|^{q-1}u : \ L^{q+1}(\Omega) \to L^{(q+1)/q}(\Omega),$$

причём в силу теоремы Красносельского этот оператор является ограниченным и сильно непрерывным как действующий из банахова пространства $\mathbb{B} = L^{q+1}(\Omega)$ в соответствующее сильно сопряжённое $\mathbb{B}^* = L^{(q+1)/q}(\Omega)$. Кроме того, если

$$2 < q+1 < 2^* = \frac{2N}{N-2} \Rightarrow 1 < q < \frac{N+2}{N-2} \quad \text{при} \quad N \geqslant 3.$$

имеет место следующая цепочка плотных и непрерывных вложений:

$$H_0^1(\Omega) \overset{ds}{\subset} L^{q+1}(\Omega) \overset{ds}{\subset} L^{(q+1)/q}(\Omega) \overset{ds}{\subset} H^{-1}(\Omega).$$

Теперь покажем, что для $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\mathbf{grad}\,\psi_2(u) = J|u|^{q-1}u. \tag{1.7}$$

С одной стороны, при $q > 1$ имеем

$$\psi_{2f}^{'}(u) = |u|^{q-1}u, \quad \psi_{2f}^{'}(\cdot) : \mathbb{B} = L^{q+1}(\Omega) \to \mathbb{B}^* = L^{(q+1)/q}(\Omega). \tag{1.8}$$

С другой стороны, по определению **grad** имеем

$$\mathbf{grad}\,\psi_2(u) \overset{\text{def}}{=} J\psi_{2f}^{'}(u).$$

Теперь докажем, что отображение

$$\mathbf{grad}\,\psi_2 : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$$

ограничено липшиц–непрерывно.

□ Действительно, поскольку $q > 1$ имеет место неравенство

$$\left||u_1|^{q-1}u_1 - |u_2|^{q-1}u_2\right| \leqslant q \max\left\{|u_1|^{q-1}, |u_2|^{q-1}\right\}|u_1 - u_2|$$

для всех $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^1$. Отсюда для функций $u_1(x), u_2(x) \in L^{q+1}(\Omega)$ вытекают неравенства

$$\int\limits_\Omega \left||u_1|^{q-1}u_1 - |u_2|^{q-1}u_2\right|^{(q+1)/q} dx \leqslant$$

$$\leqslant q^{(q+1)/q} \int\limits_\Omega \max\left\{|u_1|^{(q-1)(q+1)/q}, |u_2|^{(q-1)(q+1)/q}\right\}|u_1 - u_2|^{(q+1)/q}\,dx \leqslant$$

$$q^{(q+1)/q} \max\left\{\left(\int\limits_\Omega |u_1|^{q+1}\,dx\right)^{(q-1)/q}, \left(\int\limits_\Omega |u_2|^{q+1}\,dx\right)^{(q-1)/q}\right\} \times$$

$$\times \left(\int\limits_\Omega |u_1 - u_2|^{q+1}\,dx\right)^{1/q}.$$

Здесь мы воспользовались неравенством Гельдера с параметрами

$$q_1 = q, \quad q_2 = \frac{q}{q-1}, \quad q > 1.$$

Отсюда получим неравенство

$$\left\| |u_1|^{q-1}u_1 - |u_2|^{q-1}u_2 \right\|_{(q+1)/q} \leqslant$$
$$\leqslant q \max\left\{ \|u_1\|_{q+1}^{q-1}, \|u_2\|_{q+1}^{q-1} \right\} \|u_1 - u_2\|_{q+1}. \quad (1.9)$$

В силу (1.8) имеет место цепочка неравенств

$$\|\psi_{2f}'(u_1) - \psi_{2f}'(u_2)\|_* \leqslant k_1 \|\psi_{2f}'(u_1) - \psi_{2f}'(u_2)\|_{(q+1)/q} \leqslant$$
$$\leqslant qk_1 \max\left\{ \|u_1\|_{q+1}^{q-1}, \|u_2\|_{q+1}^{q-1} \right\} \|u_1 - u_2\|_{q+1} \leqslant$$
$$\leqslant qk_1 k_2^q \max\left\{ \|u_1\|^{q-1}, \|u_2\|^{q-1} \right\} \|u_1 - u_2\|.$$

Из этого неравенства получим нужную оценку

$$\|\mathbf{grad}\, \psi_2(u_1) - \mathbf{grad}\, \psi_2(u)\| = \|\psi_{2f}'(u_1) - \psi_{2f}'(u_2)\|_* \leqslant$$
$$\leqslant k_3 \max\left\{ \|u_1\|^{q-1}, \|u_2\|^{q-1} \right\} \|u_1 - u_2\|, \quad (1.10)$$

где $k_3 := qk_1 k_2^q$. Следовательно, $\psi_2 \in \mathcal{F}$. ⊠

Шаг 4. Проверим условие Пале–Смейла для функционала ψ. Для этого предположим, что последовательность

$$\{u_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset H_0^1(\Omega)$$

такова, что числовая последовательность

$$\{\psi(u_k)\}_{k=1}^{+\infty} \quad - \quad \text{ограничена}, \quad (1.11)$$

а последовательность $\{\mathbf{grad}\, \psi_2(u_k)\} \subset H_0^1(\Omega)$ удовлетворяет предельному свойству

$$\mathbf{grad}\, \psi(u_k) \to 0 \quad \text{сильно в} \quad H_0^1(\Omega) \quad \text{при} \quad k \to +\infty. \quad (1.12)$$

Из предельного свойства (1.12) получим сразу же, что

$$u_k - J|u_k|^{q-1}u_k \to 0 \quad \text{сильно в} \quad H_0^1(\Omega) \quad \text{при} \quad k \to +\infty. \quad (1.13)$$

Заметим, что имеет место равенство

$$\|\psi_{2f}'(u_k)\|_* \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|v\| \leqslant 1} \left| \left\langle \psi_{2f}'(u_k), v \right\rangle \right|.$$

Отсюда получим, что

$$\|\mathbf{grad}\, \psi_2(u_k)\| = \|\psi_{2f}'(u_k)\|_* =$$

$$
= \sup_{\|v\|\leqslant 1} \left|\left\langle \psi'_{2f}(u_k), v\right\rangle\right| = \sup_{\|v\|\leqslant 1} \left|(\mathbf{grad}\,\psi_2(u_k), v)_{H^1_0(\Omega)}\right|.
$$

В силу (1.12) мы получим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $n_0 \in \in \mathbb{N}$, что для всех $k \geqslant n_0$ и для всех $v(x) \in H^1_0(\Omega)$, $\|v\| \leqslant 1$ имеет место следующая цепочка неравенств:

$$
\varepsilon \geqslant \|\mathbf{grad}\,\psi_2(u_k)\| \geqslant \left|(\mathbf{grad}\,\psi_2(u_k), v)_{H^1_0(\Omega)}\right|.
$$

Без ограничения общности можно считать, что $\|u_k\| \neq 0$. Поэтому в последнем неравенстве можно положить

$$
v := \frac{u_k}{\|u_k\|}
$$

и получить неравенство [1])

$$
\left|(\mathbf{grad}\,\psi_2(u_k), u_k)_{H^1_0(\Omega)}\right| \leqslant \varepsilon\|u_k\|. \tag{1.14}
$$

Заметим, что $J := (-\Delta)^{-1}$ и поэтому интегрируя по частям, получим следующую цепочку равенств:

$$
\left|(\mathbf{grad}\,\psi(u_k), u_k)_{H^1_0(\Omega)}\right| =
$$
$$
= \left|\int\limits_\Omega \left[(D_x u_k, D_x u_k) - (D_x J|u_k|^{q-1}u_k, D_x u_k)\right]\, dx\right| =
$$
$$
= \left|\int\limits_\Omega \left(|D_x u_k|^2 - |u_k|^{q+1}\right)\, dx\right|.
$$

□ Действительно, имеет место следующая цепочка равенств:

$$
\int\limits_\Omega (D_x J|u_k|^{q-1}u_k, D_x u_k)\, dx = \langle(-\Delta)J|u_k|^{q-1}u_k, u_k\rangle =
$$
$$
= \langle(-\Delta)(-\Delta)^{-1}|u_k|^{q-1}u_k, u_k\rangle = \langle|u_k|^{q-1}u_k, u_k\rangle = \int\limits_\Omega |u_k|^{q+1}\, dx. \quad \boxtimes
$$

Имеем

$$
\left|\int\limits_\Omega \left[|D_x u_k|^2 - |u_k|^{q+1}\right]\, dx\right| \leqslant \varepsilon\|u_k\|
$$

---

[1]) В случае $\|u_k\| = 0$ это неравенство тоже выполнено.

для $\varepsilon > 0$ и $k \geqslant n_0$. При $\varepsilon = 1$, в частности, имеем

$$\int\limits_{\Omega} |u_k|^{q+1}\, dx \leqslant \|u_k\|^2 + \|u_k\| \tag{1.15}$$

для всех достаточно больших $k \in \mathbb{N}$. Из (1.11) следует

$$\left(\frac{1}{2}\|u_k\|^2 - \frac{1}{q+1}\int\limits_{\Omega} |u_k|^{q+1}\, dx\right) \leqslant c_1 < +\infty$$

для всех $k \in \mathbb{N}$ и некоторой константы c_1, заключаем, что

$$\frac{1}{2}\|u_k\|^2 \leqslant \frac{1}{q+1}\int\limits_{\Omega} |u_k|^{q+1}\, dx + c_1 \leqslant \frac{1}{q+1}\|u_k\|^2 + \frac{1}{q+1}\|u_k\| + c_1.$$

Воспользуемся арифметическое неравенством Гёльдера с параметром и получим неравенство

$$\frac{1}{q+1}\|u_k\| \leqslant \varepsilon\|u_k\|^2 + c_2(\varepsilon), \quad c_2(\varepsilon) := \frac{1}{4\varepsilon(q+1)^2}, \quad \varepsilon > 0,$$

из которого вытекает следующая оценка:

$$\|u_k\|^2 \leqslant c_3(\varepsilon) := (c_2(\varepsilon) + c_1)\left(\frac{1}{2}\frac{q-1}{q+1} - \varepsilon\right)^{-1},$$

где

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\frac{q-1}{q+1}.$$

Следовательно, последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно по $k \in \mathbb{N}$ ограничена в $H_0^1(\Omega)$. Поэтому, с одной стороны, существуют подпоследовательность $\{u_{k_j}\}_{j=1}^{+\infty}$ и функция $u \in H_0^1(\Omega)$ такие, что

$$u_{k_j} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad H_0^1(\Omega) \quad \text{при} \quad k_j \to +\infty.$$

С другой стороны, в силу вполне непрерывного вложения

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{q+1}(\Omega) \quad \text{при} \quad 1 < q < \frac{N+2}{N-2}, \quad N \geqslant 3,$$

которое на самом деле является полностью непрерывным [1]), имеет место предельное свойство

$$u_{k_j} \to u \quad \text{сильно в} \quad L^{q+1}(\Omega) \quad \text{при} \quad k_j \to +\infty.$$

[1]) Гильбертово пространство в силу теоремы Рисса–Фреше является рефлексивным.

Поэтому в силу (1.9) имеем

$$|u_{k_j}|^{q-1}u_{k_j} \to |u|^{q-1}u \quad \text{сильно в} \quad L^{(q+1)/q}(\Omega) \quad \text{при} \quad k_j \to +\infty.$$

Но тогда в силу непрерывного вложения $L^{(q+1)/q}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$

$$|u_{k_j}|^{q-1}u_{k_j} \to |u|^{q-1}u \quad \text{сильно в} \quad H^{-1}(\Omega) \quad \text{при} \quad k_j \to +\infty,$$

откуда

$$J|u_{k_j}|^{q-1}u_{k_j} \to J|u|^{q-1}u \quad \text{сильно в} \quad H^1_0(\Omega) \quad \text{при} \quad k_j \to +\infty.$$

Следовательно, из (1.13) получаем

$$u_{k_j} \to u \quad \text{сильно в} \quad H^1_0(\Omega) \quad \text{при} \quad k_j \to +\infty. \tag{1.16}$$

□ Действительно, прежде всего заметим, что предельная функция $u(x) \in H^1_0(\Omega)$ удовлетворяет равенству

$$\bigl(u - J|u|^{q-1}u, \varphi\bigr) = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi \in H^1_0(\Omega).$$

Это следствие следующих фактов:

$$\bigl(u_{k_j} - J|u_{n_k}|^{q-1}u_{k_j}, \varphi\bigr) \to +0 \quad \text{для всех} \quad \varphi \in H^1_0(\Omega);$$

$$\bigl(u_{k_j}, \varphi\bigr) \to (u, \varphi) \quad \text{для всех} \quad \varphi \in H^1_0(\Omega);$$

$$\bigl(J|u_{k_j}|^{q-1}u_{k_j}, \varphi\bigr) \to \bigl(J|u|^{q-1}u, \varphi\bigr) \quad \text{для всех} \quad \varphi \in H^1_0(\Omega).$$

Отсюда сразу же вытекает равенство

$$u - J|u|^{q-1}u = \vartheta \in H^1_0(\Omega).$$

Кроме того, справедлива цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}
&\bigl\|u_{k_j} - u\bigr\| = \\
&\quad = \bigl\|u_{k_j} - J|u_{k_j}|^{q-1}u_{k_j} + J|u_{k_j}|^{q-1}u_{k_j} - J|u|^{q-1}u + J|u|^{q-1}u - u\bigr\| = \\
&\qquad = \bigl\|u_{k_j} - J|u_{k_j}|^{q-1}u_{k_j} + J|u_{k_j}|^{q-1}u_{k_j} - J|u|^{q-1}u\bigr\| \leqslant \\
&\qquad\quad \leqslant \bigl\|u_{k_j} - J|u_{k_j}|^{q-1}u_{k_j}\bigr\| + \bigl\|J|u_{k_j}|^{q-1}u_{k_j} - J|u|^{q-1}u\bigr\| \to +0
\end{aligned}$$

при $k_j \to +\infty$. ⊠

Значит, функционал $\psi(u)$ удовлетворяет условию (PS).

Шаг 5. Проверим остальные условия теоремы о горном перевале.

1. Очевидно, что $\psi(\vartheta) = 0$.

2. Пусть $u \in H^1_0(\Omega)$, $\|u\| = r$, где $r > 0$ будет выбрано ниже. Тогда

$$\psi(u) = \psi_1(u) - \psi_2(u) = \frac{r^2}{2} - \psi_2(u). \tag{1.17}$$

В силу (1.2)

$$\psi_2(u) = \frac{1}{q+1}\int\limits_\Omega |u|^{q+1}\,dx \leqslant k_2^{q+1}\|u\|^{q+1} \leqslant c_4 r^{q+1}.$$

В силу (1.17)

$$\psi(u) \geqslant \frac{r^2}{2} - c_4 r^{q+1} \geqslant \frac{r^2}{4} = a > 0,$$

если $r > 0$ достаточно мало, так как $q+1 > 2$.

3. Выберем теперь $u \in H_0^1(\Omega)$, неравное тождественно нулю. Положим $v := tu$, где $t > 0$ надлежит выбрать соответствующим образом. Тогда

$$\psi(v) := \psi_1(tu) - \psi_2(tu) = t^2\psi_1(u) - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int\limits_\Omega |u|^{q+1}\,dx < 0$$

при достаточно больших $t > 0$, поскольку $q > 1$.

Шаг 6. Мы проверили справедливость всех условий теоремы о горном перевале. Поэтому существует функция $u \in H_0^1(\Omega)$, неравная тождественно нулю, такая, что

$$\mathbf{grad}\,\psi(u) = u - J|u|^{q-1}u = \vartheta \in H_0^1(\Omega).$$

В частности, для любой $\varphi(x) \in H_0^1(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega (D_x u, D_x\varphi)\,dx = \int\limits_\Omega |u|^{q-1}u\varphi\,dx,$$

откуда следует, что $u(x) \in H_0^1(\Omega)$ — слабое решение задачи (1.1).

Теорема доказана.

§ 2. Теорема о несуществовании решения. Результат С. И. Похожаева

Рассмотрим в этом параграфе следующую нелинейную краевую задачу:

$$-\Delta u = |u|^{q-1}u \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{2.1}$$

В первом параграфе мы доказали, что краевая задача (2.1), понимаемая в слабом смысле, в случае

$$1 < q < \frac{N+2}{N-2} \tag{2.2}$$

имеет нетривиальное решение.

Теперь мы рассмотрим условие

$$\frac{N+2}{N-2} < q, \quad N \geqslant 3. \tag{2.3}$$

Наша цель показать, что при некотором геометрическом условии на область $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ из (2.3) следует, что $u \equiv 0$ будет единственным гладким решением задачи (2.1). Тогда становится ясно, что ограничение в условии (2.2) из предыдущего пункта в определенном смысле естественно.

Определение 2. *Открытое множество Ω называется звездным относительно* 0, *если для любой точки $x \in \overline{\Omega}$ прямолинейный отрезок $\{\lambda x :\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$ лежит в $\overline{\Omega}$.*

Очевидно, что если Ω выпукло и $0 \in \Omega$, то Ω звездно относительно точки 0. Однако в общем случае звездная область не обязана быть выпуклой.

Лемма 1. *Пусть $\partial\Omega$ класса $\mathbb{C}^1$ и Ω — звездная область относительно* 0. *Тогда*

$$(x, n_x) \geqslant 0 \quad \textit{для всех} \quad x \in \partial\Omega,$$

где n_x — единичная внешняя нормаль.

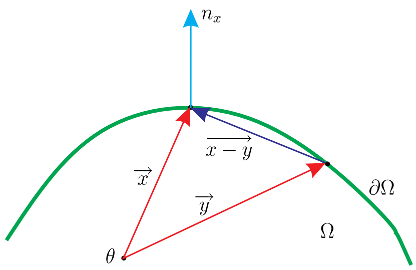

Рис. 2. Пояснения к лемме.

Доказательство.

Поскольку $\partial\Omega$ класса $\mathbb{C}^1$, для $x \in \partial\Omega$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $|x-y| < \delta$ и $y \in \overline{\Omega}$ имеем

$$\left(n_x, \frac{y-x}{|y-x|}\right) \leqslant \varepsilon.$$

В частности,

$$\limsup_{\overline{\Omega} \ni y \to x} \left(n_x, \frac{y-x}{|y-x|}\right) \leqslant 0.$$

Пусть $y = \lambda x$, где $0 < \lambda < 1$. Тогда $y \in \overline{\Omega}$ ввиду звездности Ω. Таким образом,

$$0 \geqslant \lim_{\lambda \to 1-0} \left(n_x, \frac{\lambda x - x}{|\lambda x - x|}\right) = -\left(n_x, \frac{x}{|x|}\right) \Rightarrow (x, n_x) \geqslant 0.$$

Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть* $u \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega})$ — *решение задачи* (2.1) *и показатель* q *удовлетворяет неравенству* (2.3). *Предположим, что множество* Ω *звездно относительно* 0 *и* $\partial\Omega$ *класса* $\mathbb{C}^1$. *Тогда*

$$u \equiv 0 \quad \textit{внутри} \quad \Omega.$$

Доказательство.

Шаг 1. Умножив уравнение на $(x, D_x u)$ и интегрируя по Ω, находим

$$A := \int\limits_{\Omega} (-\Delta u)(x, D_x u)\, dx = \int\limits_{\Omega} |u|^{q-1} u(x, D_x u)\, dx =: B. \tag{2.4}$$

Шаг 2. Левая часть имеет вид

$$A := -\sum_{i,j=1,1}^{N,N} \int\limits_{\Omega} u_{x_i x_i} x_j u_{x_j}\, dx =$$

$$= \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \int\limits_{\Omega} u_{x_i} (x_j u_{x_j})_{x_i}\, dx - \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \int\limits_{\partial\Omega} u_{x_i} n^i x_j u_{x_j}\, dS_x =: A_1 + A_2. \tag{2.5}$$

Шаг 3. Имеем

$$A_1 := \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \int\limits_{\Omega} \left(u_{x_i} \delta_{ij} u_{x_j} + u_{x_i} x_j u_{x_i x_j} \right) dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \left(|D_x u|^2 + \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{|D_x u|^2}{2} \right)_{x_j} x_j \right) dx =$$

$$= \left(1 - \frac{N}{2}\right) \int\limits_{\Omega} |D_x u|^2\, dx + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{|D_x u|^2}{2} (n_x, x)\, dS_x. \tag{2.6}$$

С другой стороны, поскольку $u = 0$ на $\partial\Omega$, градиент $D_x u$ параллелен нормали n_x в каждой точке $x \in \partial\Omega$. Таким образом,

$$D_x u \equiv \pm |D_x u| n_x.$$

С помощью этого неравенства вычисляем

$$\sum_{i=1}^{N} u_{x_i} n_x^i = \pm |D_x u| \sum_{i=1}^{N} n_x^i n_x^i = \pm |D_x u|,$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_j u_{x_j} = \pm \sum_{j=1}^{N} x_j n_x^j |D_x u| = \pm (x, n_x) |D_x u|.$$

Следовательно,

$$A_2 := -\int\limits_{\partial\Omega} |D_x u|^2 (n_x, x)\, dS_x. \tag{2.7}$$

Из (2.5)–(2.7) следует, что

$$A = \frac{2-N}{2}\int\limits_{\Omega} |D_x u|^2\, dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega} |D_x u|^2 (n_x, x)\, dS_x. \tag{2.8}$$

Шаг 4. Возвращаясь к (2.4) находим

$$B := \sum_{j=1}^{N}\int\limits_{\Omega} |u|^{q-1} u x_j u_{x_j}\, dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\int\limits_{\Omega} \left(\frac{|u|^{q+1}}{q+1}\right)_{x_j} x_j\, dx = -\frac{N}{q+1}\int\limits_{\Omega} |u|^{q+1}\, dx, \tag{2.9}$$

поскольку $u(x) = 0$ на $\partial\Omega$.

Шаг 5. Ввиду (2.8), (2.9) и (2.4) получаем

$$\frac{N-2}{2}\int\limits_{\Omega} |D_x u|^2\, dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega} |D_x u|^2 (n_x, x)\, dS_x = \frac{N}{q+1}\int\limits_{\Omega} |u|^{q+1}\, dx. \tag{2.10}$$

В силу леммы 1 приходим к неравенству

$$\frac{N-2}{2}\int\limits_{\Omega} |D_x u|^2\, dx \leqslant \frac{N}{q+1}\int\limits_{\Omega} |u|^{q+1}\, dx. \tag{2.11}$$

Умножая уравнение $-\Delta u = |u|^{q-1} u$ на u и интегрируя по частям, с учетом граничного условия получим

$$\int\limits_{\Omega} |D_x u|^2\, dx = \int\limits_{\Omega} |u|^{q+1}\, dx.$$

Подставив в (2.11), находим

$$\left(\frac{N-2}{2} - \frac{N}{q+1}\right)\int\limits_{\Omega} |u|^{q+1}\, dx \leqslant 0.$$

Поэтому, если $u(x)$ неравно тождественно нулю, то

$$\frac{N-2}{2} - \frac{N}{q+1} \leqslant 0,$$

т.е.

$$q \leqslant \frac{N+2}{N-2}.$$

Теорема доказана.

§ 3. Литературные указания

В данной лекции мы использовали материал, изложенный в работах [13], [20]–[22], [39], [41], [42]–[43], [44], [46], [53], [52], [55], [57], [59], [60].

Лекция 7

ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА ОБ УСЛОВНОМ ЭКСТРЕМУМЕ

§ 1. Введение

Довольно часто тот функционал, который непосредственно соответствует исходной нелинейной краевой задаче не является ограниченным, поэтому, естественно, у него нет экстремальных точек на заданном банаховом пространстве, но, с другой стороны, исходной краевой задаче можно сопоставить вариационную задачу на условный экстремум такую, что будут выполнены все условия теоремы 1 четвертой лекции и с необходимостью экстремаль этой вариационной задачи будет удовлетворять уравнению Лагранжа, которое мы получим в этой лекции.

§ 2. Уравнение Лагранжа

Пусть

$$\varphi : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1 \quad \text{и} \quad \psi : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$$

— это функционалы, определенные на банаховом пространстве $\mathbb{B}$. Рассмотрим многообразие в $\mathbb{B}$, задаваемое уравнением

$$V_c \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{u \in \mathbb{B} : \ \varphi(u) = c\} \quad \text{при} \quad c \in \mathbb{R}^1.$$

Теперь мы можем дать определение условного экстремума.

Определение 1. *Точка $u_0 \in V_c$ называется точкой минимума (максимума) функционала ψ относительно многообразия V_c, если найдется такая окрестность*

$$O(u_0, r) := \{u \in \mathbb{B} : \ \|u - u_0\| < r\}$$

при некотором $r > 0$, что

$$\psi(u) \geqslant \psi(u_0) \ (\leqslant \psi(u_0)) \quad \text{для всех} \quad u \in V_c \cap O(u_0, r).$$

Далее мы будем рассматривать тот важный случай, когда функционалы ψ и φ являются дифференцируемыми по Фреше в точке $u_0 \in V_c$. Дадим определения.

Определение 2. *Точка* $u_0 \in V_c$ *называется обыкновенной точкой многообразия* V_c, *если*

$$\left\|\varphi'_f(u_0)\right\|_* > 0.$$

Определение 3. *Точка* $u_0 \in V_c$ *называется условно критической точкой функционала* ψ *относительно многообразия* V_c, *если найдется такое число* $\mu \in \mathbb{R}^1$, *что*

$$\psi'_f(u_0) = \mu\varphi'_f(u_0).$$

Справедлива следующая важная теорема — основная для данной лекции:

Теорема 1. *Пусть функционалы* φ *и* ψ *являются дифференцируемыми по Фреше в точке* $u_0 \in \mathbb{B}$, *причем точка* $u_0 \in \mathbb{B}$ *является обыкновенной точкой многообразия* $\varphi(u) = \varphi(u_0)$:

$$\left\|\varphi'_f(u_0)\right\|_* > 0,$$

тогда, если точка $u_0 \in \mathbb{B}$ *является точкой условного экстремума функционала* ψ *относительно многообразия*

$$V_{c_0} \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in \mathbb{B} : \ \varphi(u) = \varphi(u_0) = c_0\},$$

то точка $u_0 \in V_{c_0}$ *является условно критической, т. е. найдется такое* $\mu \in \mathbb{R}^1$, *что*

$$\psi'_f(u_0) = \mu\varphi'_f(u_0).$$

Доказательство.

Доказательство в общем случае будет предложено в следующем параграфе в связи с рассмотрением теории категорий Люстерника–Шнирельмана, а сейчас мы докажем её для одного важного случая, когда $\mathbb{B} = H$ — это вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, функционал $\varphi(u) = (u,u)$, а точка $u_0 \in \mathbb{S}_a$:

$$\mathbb{S}_a \stackrel{\text{def}}{=} \left\{u \in H : \varphi(u) = (u,u) = a^2\right\} \quad \text{при} \quad a > 0.$$

Шаг 1. Прежде всего докажем, что каждая точка сферы $\mathbb{S}_a$ является обыкновенной точкой. Действительно, введем изометрический оператор Рисса–Фреше

$$J : H^* \to H,$$

который существует в силу известной теоремы Рисса–Фреше о представлении линейного непрерывного функционала над гильбертовым пространством. Справедливо равенство

$$\langle f, u\rangle = (Jf, u) \quad \text{для всех} \quad f \in H^*, \quad u \in H.$$

Имеет место следующая цепочка равенств:

$$\varphi(u+h)-\varphi(u)=(u+h,u+h)-(u,u)= \\ =2(u,h)+(h,h)=2\langle J^{-1}u,h\rangle+\|h\|^2,$$

т. е.

$$\varphi'_f(u)=2J^{-1}u \Rightarrow \left\|\varphi'_f(u)\right\|_*=2\|J^{-1}u\|_*=2\|u\|=2a>0.$$

Шаг 2. Предположим, что точка $u_0\in H$ является точкой условного экстремума функционала

$$\psi : H\to\mathbb{R}^1$$

относительно многообразия $\mathbb{S}_a$. Докажем, что в этом случае найдется такое число $\mu\in\mathbb{R}^1$, что

$$\psi'_f(u_0)=\frac{\mu}{2}\varphi'_f(u_0)=\mu J^{-1}u_0.$$

Введем оператор градиента

$$\mathbf{grad}\,\psi(u_0):=J\psi'_f(u_0).$$

Тогда нам нужно доказать следующее эквивалентное равенство:

$$\mathbf{grad}\,\psi(u_0)=\mu u_0. \tag{2.1}$$

С этой целью рассмотрим одномерное подпространство $H_1\subset H$, где

$$H_1\stackrel{\text{def}}{=}\left\{\lambda u_0 :\ \lambda\in\mathbb{R}^1\right\}.$$

Пусть H_2 — это ортогональное дополнение H_1 в H, т. е. для H имеет место ортогональное разложение:

$$H=H_1\oplus H_2.$$

Пусть, кроме того, $h\in H_2$ — это произвольный вектор, принадлежащий сфере $\mathbb{S}_a$, т. е. $\|h\|=a>0$. Рассмотрим теперь следующий вектор:

$$u=(1+\alpha\varepsilon)u_0+\varepsilon h. \tag{2.2}$$

Потребуем, чтобы этот вектор лежал на сфере $\mathbb{S}_a$:

$$\|u\|^2=a^2\Rightarrow(1+\varepsilon\alpha)^2a^2+\varepsilon^2a^2=a^2,$$

где мы воспользовались тем, что $u_0\perp h$. Таким образом, приходим к следующему уравнению:

$$(1+\varepsilon\alpha)^2+\varepsilon^2=1\Rightarrow\varepsilon\alpha^2+2\alpha+\varepsilon=0\Rightarrow\alpha_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}.$$

Из этих двух корней выбираем

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}.$$

Заметим, что

$$\alpha = -\frac{1}{2}\varepsilon + \overline{\overline{o}}(\varepsilon) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Шаг 3. Поскольку функционал

$$\psi(u) : H \to \mathbb{R}^1$$

является (по условию) дифференцируемым по Фреше в точке $u_0 \in \mathbb{S}_a$, то для всех $u \in \mathbb{S}_a$ вида (2.2) справедливо представление

$$\psi(u) - \psi(u_0) = \left\langle \psi'_f(u_0), u - u_0 \right\rangle + \\ + \omega(u_0, u - u_0) = (\mathbf{grad}\, \psi(u_0), u - u_0) + \omega(u_0, u - u_0), \quad (2.3)$$

из которого в силу (2.2) получим равенство

$$\psi(u) - \psi(u_0) = (\mathbf{grad}\, \psi(u_0), \alpha\varepsilon u_0 + \varepsilon h) + \omega(u_0, \alpha\varepsilon u_0 + \varepsilon h),$$

причем

$$\alpha\varepsilon = \overline{\overline{o}}(\varepsilon) \quad \text{и} \quad \omega(u_0, \alpha\varepsilon u_0 + \varepsilon h) = \overline{\overline{o}}(\varepsilon).$$

Поэтому приходим к равенству

$$\psi(u) - \psi(u_0) = \varepsilon\, (\mathbf{grad}\, \psi(u_0), h) + \overline{\overline{o}}(\varepsilon).$$

Но по условию теоремы в точке $u = u_0 \in \mathbb{S}_a$ у функционала ψ имеется условный экстремум относительно сферы $\mathbb{S}_a$, поэтому при достаточно малом $\varepsilon > 0$ знак левой части должен сохранятся для всех $u \in \mathbb{S}_a \cap$ $\cap\, O(u_0, r)$ при малом $r > 0$ с такими малыми $\varepsilon > 0$, но это с необходимостью возможно при условии, что

$$(\mathbf{grad}\, \psi(u_0), h) = 0 \quad \text{для всех} \quad h \in H_2,$$

т. е.

$$\mathbf{grad}\, \psi(u_0) \in H_1 \Rightarrow \mathbf{grad}\, \psi(u_0) = \mu u_0 \quad \text{при некотором} \quad \mu \in \mathbb{R}^1.$$

Теорема доказана.

§ 3. Пример

Рассмотрим следующую нелинейную краевую задачу:

$$-\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2}u \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{3.1}$$

$$u(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{3.2}$$

Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ при $N \geqslant 3$ — это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{(2,\delta)}$ при $\delta \in (0,1]$. Предположим также, что

$$2 < p < \frac{2N}{N-2}, \quad N \geqslant 3. \tag{3.3}$$

Тогда в силу теоремы вложения С. Л. Соболева имеет место вполне непрерывное вложение

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega) \quad \text{при} \quad N \geqslant 3.$$

Заметим, что функционал Эйлера этой задачи имеет вид

$$E(u) := \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |D_x u|^2\,dx + \frac{\lambda}{2}\int\limits_{\Omega} |u|^2\,dx - \frac{1}{p}\int\limits_{\Omega} |u|^p\,dx.$$

Производная Фреше $E_f^{'}(u)$ удовлетворяет уравнению

$$\left\langle E_f^{'}(u), v\right\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad v \in H_0^1(\Omega),$$

где

$$E_f^{'}(u) = -\Delta u + \lambda u - |u|^{p-2}u.$$

Это и есть слабая постановка задачи (3.1). Однако, этот функционал не является ограниченным не снизу не сверху. Поэтому он не достигает ни минимума ни максимума на $H_0^1(\Omega)$. Тем не менее, рассматриваемая нелинейная краевая задача допускает вариационную постановку на *условный экстремум*.

Дадим определение слабого решения краевой задачи (3.1).

О п р е д е л е н и е 4. *Слабым решением задачи* (3.1) *назовем функцию* $u \in H_0^1(\Omega)$, *удовлетворяющую следующему равенству*:

$$\left\langle -\Delta u + \lambda u - |u|^{p-2}u, v\right\rangle = 0 \quad \textit{для всех} \quad v \in H_0^1(\Omega), \tag{3.4}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *— это скобки двойственности между гильбертовыми пространствами* $H_0^1(\Omega)$ *и* $H^{-1}(\Omega)$.

Заметим, что в предыдущем семестре нами было доказано, что оператор

$$\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p^{'}}(\Omega) \quad \text{при} \quad p \geqslant 2.$$

Но при $p = 2$ оператор $\Delta_p = \Delta$, поэтому

$$\Delta : H_0^1(\Omega) \overset{\text{def}}{=} W_0^{1,2}(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) \overset{\text{def}}{=} W^{-1,2}(\Omega). \tag{3.5}$$

Имеет место следующая цепочка плотных и непрерывных вложений:

$$H_0^1(\Omega) \overset{ds}{\subset} L^p(\Omega), \quad L^{p'}(\Omega) \overset{ds}{\subset} H^{-1}(\Omega) \quad \text{при} \quad p \in [2, 2^*)\,. \tag{3.6}$$

$\square$ Действительно, $H_0^1(\Omega)$, $L^p(\Omega)$ при указанных условиях — это рефлексивные банаховы пространства и имеют место следующие плотные вложения:

$$H_0^1(\Omega) \overset{ds}{\subset} L^p(\Omega) \Rightarrow L^{p'}(\Omega) \overset{ds}{\subset} H^{-1}(\Omega). \quad \boxtimes$$

Кроме того, выполнены следующие равенства:

$$\langle f, u\rangle = \int\limits_{\Omega} f(x)u(x)\,dx \text{ для всех } u(x) \in H_0^1(\Omega),\ f(x) \in L^{p'}(\Omega) \overset{ds}{\subset} H^{-1}(\Omega),$$

$$\langle f, u\rangle = \int\limits_{\Omega} f(x)u(x)\,dx \text{ для всех } u(x) \in H_0^1(\Omega),\ f(x) \in L^2(\Omega) \overset{ds}{\subset} H^{-1}(\Omega).$$

Теперь заметим, что нелинейный оператор

$$|u|^{p-2}u : L^p(\Omega) \to L^{p'}(\Omega) \quad \text{при} \quad p > 2, \quad p' = \frac{p}{p-1}.$$

Действительно,

$$\int\limits_{\Omega} \Bigl||u(x)|^{p-2}u(x)\Bigr|^{p'}\,dx = \int\limits_{\Omega} |u(x)|^{(p-1)p'}\,dx = \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p\,dx.$$

Следовательно,

$$|u|^{p-2}u : H_0^1(\Omega) \overset{ds}{\subset} L^p(\Omega) \to L^{p'}(\Omega) \overset{ds}{\subset} H^{-1}(\Omega).$$

Наконец, единичный оператор

$$Iu : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega),$$

но опять в силу цепочки вложений (3.6) приходим к выводу, что

$$Iu : H_0^1(\Omega) \overset{ds}{\subset} L^2(\Omega) \to L^2(\Omega) \overset{ds}{\subset} H^{-1}(\Omega).$$

Таким образом, приходим к выводу, что при условии (3.3) нелинейный оператор

$$-\Delta u + \lambda u - |u|^{p-2}u : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega).$$

Поэтому определение 4 слабого решения корректно.

Теперь сопоставим краевой задаче (3.4), понимаемой в слабом смысле (3.4) следующую вариационную задачу на условный экстремум. Рассмотрим функционал

$$\psi(u) := \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \left(|D_x u(x)|^2 + \lambda |u(x)|^2\right)\, dx \tag{3.7}$$

на гильбертовом пространстве $H_0^1(\Omega)$ и многообразие

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \varphi(u) := \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p\, dx = 1 \right\}. \tag{3.8}$$

Этап I. Прежде всего проверим, что функционал $\psi(u)$ является слабо полунепрерывным снизу на V. Итак, пусть

$$\{u_n\} \subset V \subset H_0^1(\Omega),$$

причем

$$u_n \rightharpoonup u \in V \quad \text{слабо в} \quad H_0^1(\Omega) \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

но тогда

$$\liminf_{n \to +\infty} \psi(u_n) \geqslant \psi(u).$$

□ Действительно, это следствие того факта, что

$$\liminf_{n \to +\infty} \int\limits_{\Omega} |D_x u_n(x)|^2\, dx \geqslant \int\limits_{\Omega} |D_x u(x)|^2\, dx,$$

поскольку

$$\left(\int\limits_{\Omega} |D_x u(x)|^2\, dx \right)^{1/2}$$

— это норма на $H_0^1(\Omega)$. Кроме того, в силу теоремы вложения С. Л. Соболева имеет место полностью непрерывное вложение

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega).$$

Поэтому

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Значит,

$$\lambda \int\limits_{\Omega} |u_n(x)|^2\, dx \to \lambda \int\limits_{\Omega} |u(x)|^2\, dx \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Слабая полунепрерывность снизу функционала ψ доказана. $\boxtimes$

Этап II. Теперь докажем, что множество V слабо замкнуто.

$\square$ Действительно, пусть $\{u_n\} \subset V$ и

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad H_0^1(\Omega),$$

но по предположению (3.3) имеет место следующее полностью непрерывное вложение:

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega),$$

поэтому

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega) \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

но тогда

$$1 = \int\limits_\Omega |u_n(x)|^p\,dx \to \int\limits_\Omega |u(x)|^p\,dx.$$

Значит,

$$\int\limits_\Omega |u(x)|^p\,dx = 1,$$

т. е. $u \in V$. Тем самым, слабая замкнутость доказана. $\boxtimes$

Этап III. Теперь докажем слабую коэрцитивность функционала $\psi(u)$ на $H_0^1(\Omega)$.

$\square$ Действительно, в силу неравенства Фридрихса имеет место следующее неравенство:

$$\int\limits_\Omega |D_x u(x)|^2\,dx \geqslant \lambda_1 \int\limits_\Omega |u(x)|^2\,dx \quad \text{для всех} \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

где $0 < \lambda_1$ — это первое собственное значение оператора $-\Delta$ с однородным условием Дирихле. В силу неравенства Фридрихса при $\lambda < 0$ имеет место следующая оценка снизу:

$$\frac{\lambda}{2}\int\limits_\Omega |u(x)|^2\,dx = -\frac{|\lambda|}{2}\int\limits_\Omega |u(x)|^2\,dx \geqslant$$
$$\geqslant -\frac{|\lambda|}{2\lambda_1}\int\limits_\Omega |D_x u(x)|^2\,dx = \frac{\lambda}{2\lambda_1}\int\limits_\Omega |D_x u(x)|^2\,dx.$$

Поэтому для функционала $\psi(u)$ при $\lambda \in (-\lambda_1, 0)$ справедлива следующая оценка снизу:

$$\psi(u) \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |D_x u(x)|^2\,dx + \frac{\lambda}{2\lambda_1}\int\limits_\Omega |D_x u(x)|^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \int\limits_{\Omega} |D_x u(x)|^2 \, dx.$$

А в случае $\lambda \geqslant 0$ коэрцитивность этого функционала очевидна. Поэтому функционал $\psi(u)$ слабо коэрцитивен при условии, что

$$\lambda > -\lambda_1. \quad \boxtimes$$

Этап IV. Осталось проверить, что все точки многообразия V являются обыкновенными.

$\square$ Действительно, рассмотрим функционал

$$\varphi(u) := \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx : \quad H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega) \to \mathbb{R}^1$$

при

$$2 < p < \frac{2N}{N-2}, \quad N \geqslant 3.$$

Его производная Фреше имеет вид

$$\varphi'_f(u) = p|u|^{p-2}u \in L^{p'}(\Omega).$$

С одной стороны,

$$\left\|\varphi'_f(u)\right\|_* = \sup_{\|D_x v\|_2 \leqslant 1} \left|\left\langle \varphi'_f(u), v \right\rangle\right|.$$

С другой стороны, заметим, что

$$\left\langle \varphi'_f(u), u \right\rangle = p \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx = p > 0 \quad \text{на} \quad V.$$

Поэтому

$$\left\|\varphi'_f(u)\right\|_* = \sup_{\|D_x v\|_2 \leqslant 1} \left|\left\langle \varphi'_f(u), v \right\rangle\right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\left\langle \varphi'_f(u), u \right\rangle}{\|D_x u\|_2} = \frac{p}{\|D_x u\|_2} > 0 \quad \text{для всех} \quad u \in V. \quad \boxtimes$$

Тем самым, выполнены все условия теоремы 1 четвертой лекции. Значит, найдется такая точка $u_0 \in V$, в которой у функционала ψ достигается минимум. Кроме того, отсюда вытекает выполнимость всех условий теоремы 1 настоящей лекции. Следовательно, найдется такое число $\mu \in \mathbb{R}^1$, что будет выполнено следующее равенство:

$$\left\langle \psi'_f(u_0) - \mu\varphi'_f(u_0), v \right\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad v \in H_0^1(\Omega),$$

но это равенство есть не что иное, как следующее равенство:

$$\left\langle -\Delta u_0 + \lambda u_0 - \mu p|u_0|^{p-2}u_0, v \right\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.9}$$

Этап V. Теперь докажем, что $\mu > 0$.

□ Действительно, положим в равенстве (3.9) $v = u_0 \in H_0^1(\Omega)$, тогда после «интегрирования по частям» получим равенства

$$2\psi(u_0) = \int\limits_\Omega \left[|D_x u_0(x)|^2 + \lambda |u_0(x)|^2 \right] dx = \mu \int\limits_\Omega |u_0(x)|^p \, dx = \mu,$$

поскольку $u_0 \in V$. Но, как мы доказали, $\psi(u_0) > 0$, следовательно, и $\mu > 0$. Теперь осталось сделать замену

$$u_0 = c_1 u, \quad c_1 = \left(\frac{1}{\mu p} \right)^{1/(p-2)},$$

чтобы прийти к равенству (3.4).

Тем самым, нелинейная краевая задача (3.1) разрешима в слабом смысле при $\lambda > -\lambda_1$.

Лекция 8

ТЕОРИЯ ЛЮСТЕРНИКА–ШНИРЕЛЬМАНА И ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

§ 1. Теория категорий Люстерника–Шнирельмана

В данном параграфе мы рассмотрим важную в приложениях теорию категорий Люстерника–Шнирельмана и ее применение к дифференцируемым по Фреше на банаховых пространствах функционалам.

Сначала дадим определение *стягиваемого множества*. Пусть X — это отделимое топологическое пространство, т. е. *хаусдорфово* пространство.

Определение 1. *Подмножество $A \subset X$ называется стягиваемым на X множеством, если найдется такая функция, называемая деформацией*

$$h(t,u) : [0,1] \times A \to X$$

класса $\mathbb{C}([0,1] \times A; X)$ и такая точка $\widehat{u} \in X$, что

$$h(0,u) = u \quad \text{и} \quad h(1,u) = \widehat{u} \in X \quad \text{для всех} \quad u \in A.$$

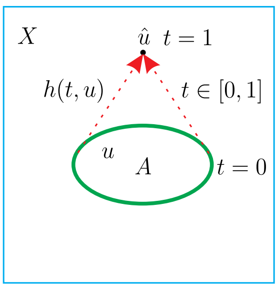

Рис. 3. Стягиваемое множество A.

Теперь мы можем дать определение категории множества $A \subset X$ относительно хаусдорфова пространства X.

Определение 2. *Категорией множества $A \subset X$ как подмножества хаусдорфова пространства X называется отображение*

$$\mathrm{cat}_X(A) : \ 2^X \to \mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\},$$

удовлетворяющее следующим свойствам:

(i) $\mathrm{cat}_X(\varnothing) := 0$;

(ii) $\mathrm{cat}_X(A) := \min\left\{k \in \mathbb{N}:\ A \subset \bigcup_{m=1}^{k} \mathrm{A}_m\right\}$, *где каждое множество* $A_m \subset X$ *является замкнутым и стягиваемым в* X;

(iii) $\mathrm{cat}_X(A) := +\infty$, *если нет конечного покрытия.*

Категория $\mathrm{cat}_X(A)$ множества $A \subset X$ по отношению к X обладает следующим набором свойств:

Теорема 1. *Пусть* X *и* Y *— это два хаусдорфовых пространства. Справедливы следующие свойства*:

(i) *если* $A \subset C$, *то* $\mathrm{cat}_X(A) \subset \mathrm{cat}_X(C)$;

(ii) $\mathrm{cat}_X(A \cup C) \leqslant \mathrm{cat}_X(A) + \mathrm{cat}_X(C)$;

(iii) $\mathrm{cat}_{X\times Y}(A \times \{z\}) = \mathrm{cat}_X(A)$ *для каждой точки* $z \in Y$;

(iv) $\mathrm{cat}_X(A) = \mathrm{cat}_X(\overline{A})$ [1];

(v) *если* $\eta : A \to X$ *является гомеоморфизмом, гомотопичным тождественному отображению* id_A *на* $A \subset X$, *тогда имеет место неравенство* $\mathrm{cat}_X(A) \leqslant \mathrm{cat}_X(\eta(A))$.

Доказательство.

Шаг 1. Первое свойство вытекает из тех соображений, что покрытие множества C является покрытием множества A.

Шаг 2. Второе свойство вытекает из того, что объединение покрытий A и C является покрытием и их объединения $A \cup C$.

Шаг 3. Третье свойство доказывается следующим образом. Пусть $\mathrm{cat}_X(A) = k < +\infty$, поскольку в противном случае и $\mathrm{cat}_{X\times Y}(A \times \{z\}) = +\infty$. Пусть

$$\bigcup_{m=1}^{k} A_m$$

— это покрытие множества A. Но тогда, поскольку $\{z\}$ — это замкнутое и стягиваемое множество в Y, имеем

$$\bigcup_{m=1}^{k} (A_m \times \{z\})$$

— это покрытие множества $A \times \{z\}$ и одновременно

$$\bigcup_{m=1}^{k} A_m$$

— это покрытие множества A. Кроме того, множества $A_m \times \{z\}$ являются стягиваемыми в хаусдорфовом пространстве $X \times Y$.

Шаг 4. Доказательство четвертого свойства основано на том, что, во–первых, $A \subset \overline{A}$, а во–вторых, любое покрытие замкнутыми множе-

[1] Символом $\overline{A}$ мы обозначили замыкание множества A.

ствами $\{A_m\}_{m=1}^n$ множества A являются согласно определению замыкания $\overline{A}$ и покрытиями множества $\overline{A}$.

Шаг 5. Приступим к доказательству пятого свойства. Прежде всего предположим, что множество A замкнуто, поскольку в силу четвертого свойства

$$\mathrm{cat}_X(A) = \mathrm{cat}_X(\overline{A}).$$

Итак, пусть

$$\mathrm{cat}_X(\eta(A)) =: k < +\infty,$$

поскольку в противном случае сразу же приходим к утверждению.

Пусть $\{C_m\}_{m=1}^k$ — это замкнутые и стягиваемые в X множества, покрывающие множество $\eta(A)$ и для которых в силу стягиваемости определены деформации

$$h_m(t,u) \in \mathbb{C}([0,1] \times C_m; X), \quad h_m(0,u) = u, \quad h_m(1,u) = \widehat{u}_m$$

для всех $u \in C_m$.

Поскольку отображение $\eta : A \to X$ гомотопично тождественному отображению id_A, то существует такая деформация $h(t,u) \in \mathbb{C}([0,1] \times \times A; X)$, что

$$h(0,\cdot) = \mathrm{id}_A \cdot, \quad h(1,\cdot) = \eta(\cdot).$$

Рассмотрим множества

$$A_m := \eta^{-1}(C_m) \quad \text{при} \quad m = \overline{1,k}.$$

Множества $\{A_m\}_{m=1}^k$ образуют замкнутое покрытие множества A в силу гомеоморфности отображения η. Ясно, что вместе с семейством замкнутых множеств $\{A_m\}$ семейство $\{A_m \cap A\}$ тоже замкнутое покрытие замкнутого множества A.

Докажем, что множества $A_m \cap A$ при $m = \overline{1,k}$ являются стягиваемыми в X. Действительно, рассмотрим следующую деформацию:

$$\widehat{h}_m(t,u) := \begin{cases} h(2t,u) & \text{при} \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ h_m(2t-1, \eta(u)), & \text{при} \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Понятно, что

$$\widehat{h}_m(t,u) : [0,1] \times A_m \cap A \to X$$

$$\widehat{h}_m(0,u) = u, \quad \widehat{h}_m(1,u) = h_m(1,\eta(u)) = \widehat{u}_m \in X$$

для всех $u \in A_m \cap A$. Осталось доказать, что

$$\widehat{h}_m(t,u) \in \mathbb{C}([0,1] \times A_m \cap A; X).$$

Но это сразу же следует из определения деформаций $h(t,u)$ и $h_m(t,u)$ и следующего равенства

$$h(1,u) = \eta(u) = h_m(0,\eta(u)) \quad \text{для всех} \quad u \in A.$$

Тем самым, каждое множество $A_m \cap A$ при $m = \overline{1,k}$ является стягиваемым в X. Следовательно,

$$\mathrm{cat}_X(A) \leqslant k := \mathrm{cat}_X(\eta(A)).$$

Теорема доказана.

Дадим определение *ретракции*. Пусть X — топологическое пространство и $A \subset X$.

Определение 3. *Непрерывное отображение*

$$r : X \supset A \to A$$

называется ретракцией, если [1]

$$r|_A = \mathrm{id}_A,$$

а множество A называется ретрактом X.

ПРИМЕР 1. Пусть X — топологическое пространство, тогда любая его точка x является ретрактом X. Действительно, проекция

$$r : X \to x$$

является непрерывным отображением топологического пространства X в топологическое пространство X. Проверьте это в терминах окрестностей!

ПРИМЕР 2. Пусть $Z := X \times Y$ и $p \in X$, $q \in Y$ — фиксированные точки. Рассмотрим множества $A := X \times q$ и $B := p \times Y$. Рассмотрим следующие отображения:

$$r_X : (x, y) \to (x, q), \quad r_Y : (x, y) \to (p, y).$$

Эти отображения являются непрерывными отображениями из $X \times Y$ в $X \times Y$ и поэтому, очевидно, являются ретракциями, а множество A и B ретракты $X \times Y$.

Наконец, дадим определение *Абсолютного Окрестностного Ретрактора* или ANR в случае метрического пространства X, которое приведено в работе [49] на стр. 691.

Определение 4. *Метрическое пространство X называется ANR, если для всякого метрического пространства Y, каждого замкнутого множества $D \subset Y$ и всякого непрерывного отображения $\varphi \in \mathbb{C}(D; X)$ существует непрерывное продолжение отображения φ на некоторую окрестность* [2] $U \supset D$. *Если такое продолжение φ можно сделать на все метрическое пространство Y, то мы будем говорить, что X — абсолютный ретракт AR.*

[1] Символом $r|_A$ мы обозначили сужение оператора r на множестве A.

[2] Т. е открытое множество в метрическом пространстве Y.

З а м е ч а н и е 1. Имеет место утверждение (см. [49]) о том, что всякое выпуклое подмножество нормированного пространства есть AR (тем более ANR).

Справедлива следующая важная теорема. [1])

Т е о р е м а 2. *Пусть метрическое пространство X является* ANR *и $A \subset X$ — это произвольное замкнутое множество, тогда найдется такая окрестность $U \subset X$ множества A, что имеет место следующее равенство*:

$$\operatorname{cat}_X(A) = \operatorname{cat}_X(\overline{U}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проведем за несколько шагов.

Шаг 1. Итак, пусть $\operatorname{cat}_X(A) =: k < +\infty$, поскольку в противном случае утверждение теоремы вытекает из теоремы 1.

Пусть $\{A_m\}_{m=1}^k$ — это замкнутое покрытие множества A, причем каждое A_m является стягиваемым в X, т. е. существуют такие деформации

$$h_m(t,u) \in \mathbb{C}([0,1] \times A_m; X), \quad m \in \overline{1,k}, \tag{1.1}$$

что

$$h_m(0,u) = u \quad \text{и} \quad h_m(1,u) = \widehat{u}_m \in X \quad \text{для всех} \quad u \in A_m. \tag{1.2}$$

Шаг 2. Докажем, что для каждого множества A_m найдется такая его окрестность $U_m \supset A$, что ее замыкание $\overline{U}_m$ стягиваемо в X.

□ Действительно, рассмотрим следующее декартово произведение метрических пространств

$$Y \stackrel{\text{def}}{=} [0,1] \times X.$$

Рассмотрим замкнутое подмножество этого метрического пространства:

$$E_m \stackrel{\text{def}}{=} \{[0,1] \times A_m\} \cup \{\{0\} \times X\} \cup \{\{1\} \times X\}.$$

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что замкнутые множества $\{\{0\} \times X\}$ и $\{1\} \times X$ являются ретрактами $[0,1] \times X$. Поскольку A_m стягиваемо в X, то $[0,1] \times A_m$ тоже ретракт в $[0,1] \times X$.

Рассмотрим на этом замкнутом множестве непрерывную функцию

$$u_m(t,u) := \begin{cases} h_m(t,u) & \text{при} \quad t \in [0,1], \ u \in A_m; \\ u & \text{при} \quad t = 0, \ u \in X; \\ \widehat{u}_m & \text{при} \quad t = 1, \ u \in X. \end{cases}$$

Заметим, что в силу свойств (1.1) и (1.2) функции $u_m(t,u)$ непрерывны на Y со значениями в X.

[1]) Доказательство этой теоремы сильно зависит от свойства ANR метрического пространства X.

Поскольку X — это ANR, то $[0,1]\times X$ — это тоже ANR. Поэтому найдется такая окрестность $V_m \subset [0,1]\times X$ множества E_m, что функция u_m допускает непрерывное продолжение

$$\overline{u}_m(t,u) \in \mathbb{C}(V_m; X).$$

Поскольку $[0,1]\times X$ является метрическим пространством и поэтому является нормальным можно предположить, что далее функция $\overline{u}_m(t,u)$ продолжается до функции класса

$$\overline{u}_m(t,u) \in \mathbb{C}(\overline{V}_m; X).$$

Следовательно, в силу непрерывности этого отображения найдется такая окрестность U_m множества A_m, что $[0,1]\times\overline{U}_m \subset \overline{V}_m$. ⊠

Шаг 3. Заметим, что

$$\overline{u}_m(0,u) = u \quad \text{и} \quad \overline{u}_m(1,u) = \widehat{u}_m \in X \quad \text{для всех} \quad u \in \overline{U}_m,$$

т. е. замкнутые множества $\overline{U}_m$ при $m=\overline{1,k}$ являются стягиваемыми в X, причем

$$\overline{U} := \bigcup_{m=1}^{k} \overline{U}_m \supset \bigcup_{m=1}^{k} A_m \supset A.$$

и

$$k = \operatorname{cat}_X(A) \leqslant \operatorname{cat}_X \overline{U} \leqslant k \Rightarrow \operatorname{cat}_X(A) = \operatorname{cat}_X(\overline{U}).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь ряд примеров.

ПРИМЕР 3. Пусть $X = \mathbb{B}$ — это банахово пространство, а

$$A = \overline{B_R(0)} := \{u \in \mathbb{B}:\ \|u\| \leqslant R\}.$$

Очевидно, что множество A замкнуто в $\mathbb{B}$. Докажем, что оно стягиваемо в $\mathbb{B}$. Действительно, рассмотрим следующую деформацию:

$$h(t,u) = (1-t)u \in \mathbb{C}([0,1]\times A; \mathbb{B}).$$

Ясно, что

$$h(0,u) = u \quad \text{и} \quad h(1,u) = \vartheta \in \mathbb{B} \quad \text{для всех} \quad u \in A.$$

Стало быть,

$$\operatorname{cat}_{\mathbb{B}}\left(\overline{B_R(0)}\right) = 1.$$

Следующий пример очень важен нам для дальнейшего.

ПРИМЕР 4. Символом $\mathbb{S}^{N-1}$ обозначим единичную сферу в эвклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$:

$$\mathbb{S}^{N-1} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x \in \mathbb{R}^N:\ \|x\|_N = 1\right\}.$$

Символом $\mathbb{P}^{N-1}$ обозначим следующее множество:

$$\mathbb{P}^{N-1} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{(x, -x);\ x \in \mathbb{S}^{N-1}\right\},$$

которое называется $(N-1)-$мерным *проективным пространством*.
Замечание 3. Заметим, что при отображении «склейки» диаметрально противоположных точек относительно точки $0 \in \mathbb{R}^N$

$$x \in \mathbb{S}^{N-1} \to (x, -x) \in \mathbb{P}^{N-1}$$

отождествляются все точки, лежащие на пересечении единичной сферы и прямой, проходящей через начало координат.

Справедливо следующее равенство:

$$\operatorname{cat}_{\mathbb{P}^{N-1}}(\mathbb{P}^{N-1}) = N \ ^{1)}, \tag{1.3}$$

доказательство которого выходит за рамки настоящей книги.

Пусть теперь $\mathbb{S}^{\infty}$ — это сфера в банаховом пространстве $\mathbb{B}$:

$$\mathbb{S}^{\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in \mathbb{B} :\ \|u\| = 1\}$$

и введем соответствующее проективное пространство

$$\mathbb{P}^{\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \{(u, -u);\ u \in \mathbb{S}^{\infty}\}.$$

Заметим, что

$$\operatorname{cat}_{\mathbb{P}^{\infty}}(\mathbb{P}^{\infty}) = +\infty. \tag{1.4}$$

Отметим, что сфера $\mathbb{S}^{\infty}$ является метрическим пространством, которое удовлетворяет свойству ANR [2)].

§ 2. Вариационные задачи на условный экстремум

Пусть $\mathbb{B}$ — это вещественное и сепарабельное банахово пространство с сопряженным $\mathbb{B}^*$. Пусть, кроме того,

$$\varphi \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{B}; \mathbb{R}^1),$$

т. е. вещественный функционал φ является дважды дифференцируемым по Фреше, причем вторая его производная

$$\varphi''_{ff}(u) : \mathbb{B} \to \mathfrak{L}(\mathbb{B}; \mathbb{B}^*)$$

[1)] Само проективное пространство $\mathbb{P}^{N-1}$ не является стягиваемым в себе самом.

[2)] Смотри работу [47]

является непрерывным отображением

$$\varphi''_{ff}(u) \in \mathbb{C}(\mathbb{B}; \mathcal{L}(\mathbb{B}; \mathbb{B}^*)).$$

Рассмотрим следующее множество:

$$\mathcal{V} \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in \mathbb{B} : \ \varphi(v) = 1\}, \tag{2.1}$$

причем предположим, что

$$\left\|\varphi'_f(v)\right\|_* > 0 \quad \text{для всех} \quad v \in \mathcal{V}. \tag{2.2}$$

В силу последнего условия множество $\mathcal{V} \subset \mathbb{B}$ является неособым многообразием. Из теории гладких многообразий вытекает, что многообразие $\mathcal{V}$ является $\mathbb{C}^2$–многообразием, причем норма банахова пространства $\mathbb{B}$ индуцирует метрику на этом многообразии и относительно этой метрики многообразие $\mathcal{V}$ является метрическим пространством, удовлетворяющее ANR–свойству.

Введем теперь *касательное пространство* в точке $v \in \mathcal{V}$:

$$T_v\mathcal{V} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{u \in \mathbb{B} : \ \left\langle \varphi'_f(v), u \right\rangle = 0\right\}. \tag{2.3}$$

Сделаем следующие наблюдения:

Свойство 1. Заметим, что $T_v\mathcal{V}$ является линейным подпространством в $\mathbb{B}$, слабо замкнутым в $\mathbb{B}$.

Свойство 2. Пространство $T_v\mathcal{V}$ является банаховым пространством относительно нормы $\|\cdot\|$ банахова пространства $\mathbb{B}$.

□ Действительно, пусть $\{u_n\} \subset T_v\mathcal{V}$, причём

$$\|u_n - u_m\| \to +0 \quad \text{при} \quad n, m \to +\infty,$$

но тогда в силу полноты $\mathbb{B}$ имеем

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Но тогда, очевидно,

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Поэтому $u \in T_v\mathcal{V}$. ⊠

Свойство 3. Определено сопряжённое банахово пространство $(T_v\mathcal{V})^*$, которое банахово относительно нормы

$$\|f^*\|_* (T_v\mathcal{V}) := \sup_{\|u\| \leqslant 1, \ u \in T_v\mathcal{V}} |\langle f^*, u\rangle|,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — это скобки двойственности между $(T_v\mathcal{V})^*$ и $T_v\mathcal{V}$, которые совпадают со скобками двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{B}^*$ и $\mathbb{B}$ в случае, когда $f^* \in \mathbb{B}^*$.

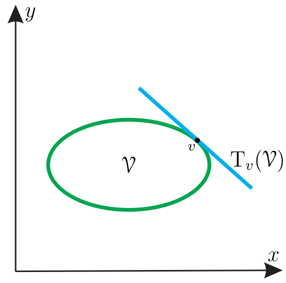

Рис. 4. Касательное многообразие $T_v\mathcal{V}$.

Замечание 4. Отметим, что это действительно невырожденное касательное пространство, поскольку в силу (2.2) в каждой точке $v \in \in \mathcal{V}$ имеем

$$\varphi'_f(v) \neq 0 \Rightarrow T_v\mathcal{V} \neq \mathbb{B}.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать условный экстремум функционала ψ на многообразии $\mathcal{V}$, порожденном функционалом φ.

Теперь введем в рассмотрение функционал

$$\psi : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1,$$

относительно которого предположим, что он принадлежит классу $\mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$, т. е. является дифференцируемым по Фреше на $\mathbb{B}$ и его производная Фреше является непрерывным отображением:

$$\psi'_f(u) \in \mathbb{C}(\mathbb{B};\mathbb{B}^*) : u \in \mathbb{B} \to \psi'_f(u) \in \mathbb{B}^*.$$

Поэтому норма производной Фреше $\psi'_f(v)$ с ограничением на касательное пространство $T_v\mathcal{V}$ имеет следующий вид:

$$\left\|\psi'_f(v)\right\|_* (T_v\mathcal{V}) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|u\|\leqslant 1,\ u \in T_v\mathcal{V}} \left|\left\langle \psi'_f(v), u\right\rangle\right|, \tag{2.4}$$

где $v \in \mathcal{V}$.

Замечание 4. Имеет место следующее неравенство:

$$\left\|\psi'_f(v)\right\|_* (T_v\mathcal{V}) \leqslant \left\|\psi'_f(v)\right\|_*, \tag{2.5}$$

поскольку в определении нормы с ограничением suprеmum берется по меньшему множеству.

В дальнейшем мы будем постоянно пользоваться следующим неравенством:

$$\langle f^*, w\rangle \leqslant \|f^*\|_* (T_v\mathcal{V}) \|w\| \quad \text{для всех} \quad w \in T_v\mathcal{V}, \quad f^* \in \mathbb{B}^*,$$

которое доказывается следующим образом — в силу (2.4) имеет место неравенство

$$\left\langle f^*, \frac{w}{\|w\|} \right\rangle \leqslant \|f^*\|_* (T_v\mathcal{V}) \quad \text{для} \quad w \neq \vartheta, \quad w \in T_v\mathcal{V}, \quad f^* \in \mathbb{B}^*,$$

поскольку при $w = \vartheta$ искомое неравенство имеет место.

Дадим определение.

Определение 5. *Точка $v \in \mathcal{V}$ называется критической точкой функционала ψ по отношению к многообразию $\mathcal{V}$, если имеет место равенство*

$$\left\|\psi_f'(v)\right\|_* (T_v\mathcal{V}) = 0. \tag{2.6}$$

Замечание 5. Заметим, что многообразие $\mathcal{V}$ «искривленно» и является, вообще говоря, не банаховым, а только метрическим пространством. Поэтому и необходимое условие экстремума функционала $\psi(u)$ на нем изменилось. И вместо условия

$$\psi_f'(u_0) = \vartheta^* \in \mathbb{B}^*, \quad \ker(\vartheta^*) = \mathbb{B}$$

мы имеем условие

$$\psi_f'(u_0) = \vartheta^*_{u_0} \in \mathbb{B}^*, \quad \ker(\vartheta^*_{u_0}) = \ker(\varphi_f'(u_0)) = T_{u_0}\mathcal{V} \subset \mathbb{B}.$$

В дальнейшем мы будем пользоваться следующим обозначением:

$$\psi^d \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in \mathcal{V} : \ \psi(v) \leqslant d\}. \tag{2.7}$$

Справедлива следующая *лемма о двойственности.*

Лемма 1. *Пусть $f, g \in \mathbb{B}^*$, тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\|v\| \leqslant 1, \ \langle g, v\rangle = 0} |\langle f, v\rangle| = \min_{\lambda \in \mathbb{R}^1} \|f - \lambda g\|_*. \tag{2.8}$$

Доказательство.

Действительно, с одной стороны

$$\|f\|_* (\ker(g)) := \sup_{\|v\| \leqslant 1, \ \langle g, v\rangle = 0} |\langle f, v\rangle| = \sup_{\|v\| \leqslant 1, \ \langle g, v\rangle = 0} |\langle f - \lambda g, v\rangle|. \tag{2.9}$$

С другой стороны, по следствию из теоремы Хана–Банаха (смотри теорему 2 лекции 13 первой части первого тома настоящего курса лекций) существует такое продолжение $\overline{f} \in \mathbb{B}^*$ функционала f, что

$$\langle \overline{f}, v\rangle = \langle f, v\rangle \quad \text{для всех} \quad v \in \ker(g) := \{v \in \mathbb{B} : \ \langle g, v\rangle = 0\}. \tag{2.10}$$

и имеет место равенство

$$\|\overline{f}\|_* = \|f\|_* (\ker(g)). \tag{2.11}$$

Кроме того, в силу (2.10) имеет место вложение

$$\ker(g) \subset \ker(\overline{f} - f),$$

из которого вытекает существование такого $\lambda_0 \in \mathbb{R}^1$, что [1])

$$\overline{f} - f = \lambda_0 g. \,^{2)} \tag{2.12}$$

Из (2.9), (2.11) и (2.12) вытекает следующая цепочка неравенств:

$$\|f - \lambda_0 g\|_* = \|\overline{f}\|_* = \|f\|_* \left(\ker(g)\right) =$$
$$= \sup_{\|v\| \leqslant 1, \ \langle g, v\rangle = 0} |\langle f - \lambda g, v\rangle| \leqslant \|f - \lambda g\|_* \quad \text{для всех} \quad \lambda \in \mathbb{R}^1.$$

Следовательно,

$$\|f\|_* \left(\ker(g)\right) = \min_{\lambda \in \mathbb{R}^1} \|f - \lambda g\|_*.$$

Лемма доказана.

Замечание к лемме 1. Для полноты изложения докажем вспомогательное утверждение, существенно использованное при доказательстве леммы 1 [3]).

Теорема 3. *Пусть Λ и Λ_i при $i = \overline{1, N}$ — это линейные функционалы на векторном пространстве X, и пусть $\langle \Lambda, x\rangle = 0$ для всех $x \in \mathcal{N}$,*

$$\mathcal{N} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x \in X : \ \langle \Lambda_1, x\rangle = 0, \cdots, \langle \Lambda_n, x\rangle = 0\right\}.$$

Тогда

$$\Lambda = \alpha^1 \Lambda_1 + \cdots + \alpha^n \Lambda_n$$

при некоторых $\alpha^1, ..., \alpha^n \in K$, где K — поле скаляров (либо $K = \mathbb{C}$ либо $K = \mathbb{R}$).

Доказательство.

Действительно, определим отображение

$$\pi(x) : \ X \to K^n \stackrel{\text{def}}{=} K \otimes \cdots \otimes K$$

следующим образом:

$$\pi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\langle \Lambda_1, x\rangle, ..., \langle \Lambda_n, x\rangle\right).$$

Заметим, что если $\pi(x) = \pi(x')$, то справедлива цепочка импликаций

---

[1]) Смотри лемму 3.9 работы У. Рудина [34].

[2]) В частности, $\ker(\overline{f} - f) = \ker(\lambda_0 g)$.

[3]) Смотри книгу У. Рудина [34].

$$\pi(x) = \pi(x') \Rightarrow \Big(\langle \Lambda_1, x - x' \rangle, ..., \langle \Lambda_n, x - x' \rangle\Big) = (0, ..., 0) \in K^n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x - x' \in N \Rightarrow \langle \Lambda, x - x' \rangle = 0 \Rightarrow \langle \Lambda, x \rangle = \langle \Lambda, x' \rangle.$$

Таким образом, на K^n существует однозначная функция $F\circ$, определенная следующим образом:

$$\langle \Lambda, x \rangle = F \circ \pi(x).$$

Докажем, что эта функция является линейной. Заметим, что

$$\alpha^1 \pi(x^1) + \alpha^2 \pi(x^2) = \pi(\alpha^1 x^1 + \alpha^2 x^2) \quad \text{для всех} \quad \alpha^1,\ \alpha^2 \in K,\ x^1, x^2 \in X$$

поэтому имеем

$$F(\pi(\alpha^1 x^1 + \alpha^2 x^2)) = \langle \Lambda, \alpha^1 x^1 + \alpha^2 x^2 \rangle =$$
$$= \alpha^1 \langle \Lambda, x^1 \rangle + \alpha^2 \langle \Lambda, x^2 \rangle = \alpha^1 F(\pi(x^1)) + \alpha^2 F(\pi(x^2)).$$

Следовательно, функция F является линейной на K^n. Значит, она имеет следующий общий вид:

$$F(u_1, ..., u_n) := \alpha^1 u_1 + \cdots + \alpha^n u_n$$

с некоторыми постоянными $\alpha^k \in K$ при $k = \overline{1, n}$. Отсюда сразу же вытекает цепочка равенств

$$\langle \Lambda, x \rangle = F(\pi(x)) = F(\langle \Lambda_1, x \rangle, ..., \langle \Lambda_n, x \rangle) = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \langle \Lambda_i, x \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \Lambda_i, x \right\rangle$$

для всех $x \in X$. Тем самым,

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \Lambda_i.$$

Теорема доказана.

Из леммы 1 сразу же вытекает следующее важное утверждение.

Теорема 4. *Пусть* $\varphi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B}; \mathbb{R}^1)$ *и* $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B}; \mathbb{R}^1)$, $u \in \mathcal{V}$, *где многообразие* $\mathcal{V}$ *определено формулой* (2.1). *Тогда имеет место равенство*

$$\left\| \psi_f'(u) \right\|_* (T_u \mathcal{V}) = \min_{\lambda \in \mathbb{R}^1} \left\| \psi_f'(u) - \lambda \varphi_f'(u) \right\|_*. \tag{2.13}$$

В частности, если $u \in \mathcal{V}$ *— это критическая точка функционала* ψ *относительно многообразия* $\mathcal{V}$, *то найдется такое* $\mu \in \mathbb{R}^1$, *что*

$$\psi_f'(u) - \mu \varphi_f'(u) = \vartheta \in \mathbb{B}^*. \tag{2.14}$$

Доказательство.

Достаточно взять в лемме 1 $f = {\psi'}_f(u) \in \mathbb{B}^*$ и $g = {\varphi'}_f(u) \in \mathbb{B}^*$ при фиксированном $u \in \mathbb{B}$ и $\mu = \lambda_0$.

Теорема доказана.

Замечание 7. Доказательство теоремы 3 является обещанным доказательством теоремы 1 предыдущей лекции в общем случае для функционалов $\varphi, \psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B}; \mathbb{R}^1)$.

Лекция 9

ОБЩАЯ ЛЕММА О ДЕФОРМАЦИИ

§ 1. Псевдоградиентное векторное поле

Теперь дадим определение псевдоградиентного векторного поля на многообразии $\mathcal{V} = \{u \in \mathbb{B} : \varphi(u) = 1\}$. Предположим, что банахово пространство $\mathbb{B}$ рефлексивно. Рассмотрим следующее подмножество $\mathcal{M} \subset \mathcal{V}$:

$$\mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{u \in \mathcal{V} : \left\|\psi_f'(u)\right\|_* (T_u\mathcal{V}) > 0\right\} \neq \varnothing.$$

Замечание 1. Это множество в силу результата (2.13), является дополнительным ко множеству условно критических точек функционала $\psi(u)$ относительно многообразия $\mathcal{V}$. В частности, это множество открыто в метрическом пространстве $\mathcal{V}$.

Замечание 2. В дальнейшем мы будем изучать функционалы ψ класса $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B}; \mathbb{R}^1)$, Поэтому, если в некоторой точке $v \in \mathcal{V}$ имеет место неравенство

$$\left\|\psi_f'(v)\right\|_* (T_v\mathcal{V}) > 0,$$

то и в некоторой малой окрестности из топологии метрического пространства $\mathcal{V}$ будет иметь место это неравенство.

Множества $\mathcal{M} \subset \mathcal{V}$ является метрическими пространствами относительно следующей метрики:

$$d(u_1, u_2) \stackrel{\text{def}}{=} \|u_1 - u_2\|, \quad u_1, u_2 \in \mathcal{V}.$$

Дадим определение локально липшиц–непрерывного отображения.

Определение 1. *Отображение*

$$f(u) : \mathcal{M} \to \mathbb{B}$$

метрического пространства $\mathcal{M} \subset \mathbb{B}$ в банахово пространство $\mathbb{B}$ называется локально липшиц–непрерывным, если для всякой точки $u \in \mathcal{M}$ найдётся такая окрестность $O(u) \subset \mathcal{M}$, что

$$f(v) : O(u) \to \mathbb{B}$$

является липшиц–непрерывным отображением.

Замечание 3. Отметим, что ограниченно липшиц–непрерывное отображение является локально липшиц–непрерывным отображением, но не наоборот!

Определение 2. *Локально липшиц–непрерывное на* $\mathcal{M} \subset \mathcal{V} \subset \mathbb{B}$ *отображение*

$$g(u) : \mathcal{M} \subset \mathcal{V} \to T_u\mathcal{V}$$

называется *псевдоградиентным векторным полем* *на* $\mathcal{M}$, *если для этого отображения выполнены следующие свойства*:

$$\|g(u)\| \leqslant 2 \left\|\psi_f'(u)\right\|_* (T_u\mathcal{V}), \tag{1.1}$$

$$\left\langle \psi_f'(u), g(u) \right\rangle \geqslant \left\|\psi_f'(u)\right\|_*^2 (T_u\mathcal{V}) \tag{1.2}$$

для всех $u \in \mathcal{M}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$ *и* $\varphi \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$, *тогда на* $\mathcal{M}$ *существует псевдоградиентное поле* $g(u) : \mathcal{M} \to \mathbb{B}$.

Доказательство. Доказательство проведем за несколько шагов.

Шаг 1. Итак, пусть $v \in \mathcal{M} \subset \mathcal{V}$ — это произвольная точка и $T_v\mathcal{V}$ — это касательное пространство в этой точке. Напомним, что $x \in T_v\mathcal{V}$, если

$$\left\langle \varphi_f'(v), x \right\rangle = 0.$$

Поскольку $\psi_f'(v) \neq \vartheta \in \mathbb{B}^*$ для всех $v \in \mathcal{M}$, то найдется такое $x \in T_v(\mathcal{V})$, что $\|x\| = 1$ и

$$\left\langle \psi_f'(v), x \right\rangle > \frac{2}{3} \left\|\psi_f'(v)\right\|_* (T_v\mathcal{V}). \tag{1.3}$$

□ Действительно,

$$\psi_f'(v) \neq \vartheta \quad \text{для} \quad v \in \mathcal{M}.$$

Согласно определению

$$\left\|\psi_f'(v)\right\|_* (T_v\mathcal{V}) = \sup_{\|x\|=1, \quad x \in T_v\mathcal{V}} \left|\left\langle \psi_f'(v), x \right\rangle\right|.$$

Поэтому найдётся такое $x \in T_v\mathcal{V}$, $\|x\| = 1$, что имеет место следующее неравенство:

$$\left\langle \psi_f'(v), x \right\rangle > \frac{2}{3} \left\|\psi_f'(v)\right\|_* (T_v\mathcal{V}).$$

Тем самым, неравенство (1.3) доказано. ⊠

Шаг 2. По определению многообразия $\mathcal{M} \subset \mathcal{V}$ в каждой его точке $v \in \mathcal{M}$ имеет место неравенство

$$\varphi_f'(v) \neq \vartheta \in \mathbb{B}^*.$$

Поскольку банахово пространство $\mathbb{B}$ является рефлексивным, то в силу следствия из теоремы Хана–Банаха вытекает существование такого $z \in \in \mathbb{B}$, что

$$\left\langle \varphi_f'(v), z \right\rangle = 1. \tag{1.4}$$

□ Действительно, найдется такое $z_1 \in \mathbb{B}$, что имеет место следующее равенство:

$$\left\langle \varphi_f'(v), z_1 \right\rangle = \left\| \varphi_f'(v) \right\|_* \|z_1\| \quad \text{при} \quad \|z_1\| = 1,$$

т.е.

$$\left\langle \varphi_f'(v), z_1 \right\rangle = \left\| \varphi_f'(v) \right\|_* .$$

Откуда следует, что если положить

$$z = \frac{z_1}{\left\| \varphi_f'(v) \right\|_*},$$

то получим требуемое равенство. ⊠

Замечание 3. Заметим, что эти найденные элементы $x, z \in \mathbb{B}$, естественно, зависят от $v \in \mathcal{M}$.

Шаг 3. Отметим, что $\varphi \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{B}; \mathbb{R}^1)$, поэтому в окрестности (из топологии метрического пространства $\mathcal{M}$) точки $v \in \mathcal{M} \subset \mathcal{V}$ имеет место следующее разложение:

$$\left\langle \varphi_f'(u), z \right\rangle - \left\langle \varphi_f'(v), z \right\rangle = \left\langle \varphi_{ff}''(v)(u - v), z \right\rangle + \omega(z, v, u - v),$$

где

$$\lim_{\|u-v\| \to 0} \frac{\omega(z, v, u - v)}{\|u - v\|} = 0, \quad u, v \in \mathcal{M}, \quad z \in \mathbb{B},$$

но в силу (1.4) отсюда приходим к равенству

$$\left\langle \varphi_f'(u), z \right\rangle = 1 + \left\langle \varphi_{ff}''(v)(u - v), z \right\rangle + \omega(z, v, u - v),$$

из которого вытекает, что для близких точек $u, v \in \mathcal{M}$ в топологии метрического пространства $\mathcal{M}$ справедливо неравенство

$$\left\langle \varphi_f'(u), z \right\rangle > 0. \tag{1.5}$$

Шаг 4. Теперь введем следующие обозначения:

$$y := \frac{3}{2} x \left\| \psi_f'(v) \right\|_* (T_v \mathcal{V}), \quad g_v(u) := y - \frac{\left\langle \varphi_f'(u), y \right\rangle}{\left\langle \varphi_f'(u), z \right\rangle} z,$$

причем второе равенство рассматривается из достаточно малой окрестности точки $v \in \mathcal{M}$, существование которой следует из (1.5), где

$$x \in T_v\mathcal{V}.$$

Заметим, что

$$g_v(u) \in T_u\mathcal{V}.$$

□ Действительно, имеет место следующая цепочка равенств:

$$\left\langle \varphi'_f(u), g_v(u) \right\rangle = \left\langle \varphi'_f(u), y \right\rangle - \frac{\left\langle \varphi'_f(u), y \right\rangle}{\left\langle \varphi'_f(u), z \right\rangle} \left\langle \varphi'_f(u), z \right\rangle = 0. \quad \boxtimes$$

Кроме того,

$$x \in T_v\mathcal{V} \Leftrightarrow \left\langle \varphi'_f(v), x \right\rangle = 0.$$

Следовательно, $y \in T_v\mathcal{V}$ и

$$\left\langle \varphi'_f(v), y \right\rangle = 0 \Rightarrow g_v(v) = y.$$

Шаг 5. Теперь заметим, что в точке $u = v$ отображение $g_v(u)$ удовлетворяет условиям (1.1) и (1.2).

□ Действительно, имеют место следующие выражения

$$\|g_v(v)\| = \|y\| = \frac{3}{2}\|x\| \left\|\psi'_f(v)\right\|_* (T_v\mathcal{V}) = \\ = \frac{3}{2} \left\|\psi'_f(v)\right\|_* (T_v\mathcal{V}) < 2 \left\|\psi'_f(v)\right\|_* (T_v\mathcal{V}),$$

кроме того,

$$\left\langle \psi'_f(v), g_v(v) \right\rangle = \frac{3}{2} \left\langle \psi'_f(v), x \right\rangle \left\|\psi'_f(v)\right\|_* (T_v\mathcal{V}) > \left\|\psi'_f(v)\right\|_*^2 (T_v\mathcal{V}),$$

поскольку

$$\|x\| = 1, \quad x \in T_v\mathcal{V}, \quad \left\langle \psi'_f(v), x \right\rangle = \left\|\psi'_f(v)\right\|_* (T_v\mathcal{V}). \quad \boxtimes$$

Шаг 6. Теперь заметим, что поскольку $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B}; \mathbb{R}^1)$ и $\varphi \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{B}; \mathbb{R}^1)$, то отображение $g_v(u)$ является ограничено липшиц–непрерывным в некоторой окрестности точки $u = v$.

□ Действительно, для этого достаточно доказать локальную непрерывность скалярных функций

$$\left\langle \varphi'_f(u), y \right\rangle \quad \text{и} \quad \left\langle \varphi'_f(u), z \right\rangle$$

в некоторой малой окрестности точки $v \in \mathcal{M}$ из топологии метрического пространства $\mathcal{M}$, где
$$\left\langle \varphi_f'(v), z \right\rangle = 1.$$
Это следствие того, что $\varphi \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$ и следующего разложения:
$$\left\langle \varphi_f'(u), w \right\rangle = \left\langle \varphi_f'(v), w \right\rangle + \left\langle \varphi_{ff}''(v)(u-v), w \right\rangle + \omega(w,v,u-v),$$
где
$$\lim_{\|u-v\|\to 0} \frac{|\omega(w,v,u-v)|}{\|u-v\|} = 0, \quad u,v \in \mathcal{M}, \quad w \in \mathbb{B}.$$
Теперь поскольку
$$\varphi_{ff}''(v) \in \mathcal{L}\left(\mathbb{B};\mathbb{B}^*\right),$$
т. е. при фиксированном $v \in \mathcal{M}$ отображение $\varphi_{ff}''(v)$ является линейным и непрерывным отображением и, значит, ограниченным, поэтому имеет место следующее неравенство:
$$\left| \left\langle \varphi_f'(u), w \right\rangle - \left\langle \varphi_f'(v), w \right\rangle \right| \leqslant K(v,w)\|u-v\|, \quad 0 < K(v,w) < +\infty$$
при достаточно малой величине $\|u-v\|$ и при условии
$$\|v\| \leqslant R, \quad \|w\| \leqslant R,$$
т. е. функция $\left\langle \varphi_f'(u), w \right\rangle$ является ограничено липшиц–непрерывной в некоторой малой окрестности точки $v \in \mathcal{V}$. ⊠

Теперь в качестве $w \in \mathbb{B}$ нужно взять $w = z$ и $w = y$.

Шаг 7. С другой стороны, $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$. Значит, отображение
$$\psi_f'(\cdot) \in \mathbb{C}(\mathbb{B};\mathbb{B}^*),$$
т. е. непрерывно в некоторой окрестности точки $u = v \in \mathcal{V}$. Следовательно, найдется такая окрестность $\mathcal{N}(v) \supset u$ точки $v \in \mathcal{M}$ из топологии метрического пространства $\mathcal{M}$, что будут иметь место следующие неравенства:
$$\|g_v(u)\| \leqslant 2 \left\| \psi_f'(u) \right\|_* (T_u\mathcal{V}), \tag{1.6}$$
$$\left\langle \psi_f'(u), g_v(u) \right\rangle \geqslant \left\| \psi_f'(u) \right\|_*^2 (T_u\mathcal{V}) \tag{1.7}$$
для всех $u \in \mathcal{N}(v)$.

Шаг 8. Рассмотрим теперь семейство
$$\mathcal{W} := \{\mathcal{N}(v);\ v \in \mathcal{M}\}.$$
Это семейство является открытым покрытием метрического пространства $\mathcal{M}$. Заметим, что поскольку $\mathcal{M}$ метрическое пространство, то

существует локально конечное открытое покрытие метрического пространства $\mathcal{M}$

$$\mathcal{U} := \{\mathcal{N}_i, \ i \in \mathbb{N}\},$$

что для всякого $i \in \mathbb{N}$ найдется такое $v_i \in \mathcal{V}$, что [1])

$$\overline{\mathcal{N}}_i \subset \mathcal{N}(v_i).$$

Напомним, локальная конечность семейства $\mathcal{U}$ означает, что для каждого $u \in \mathcal{M}$ найдётся такое конечное семейство

$$\left\{\mathcal{N}_{i_k}, \quad k = \overline{1, m}\right\},$$

что

$$u \in \bigcap_{k=1}^{m} \mathcal{N}_{i_k}, \quad u \notin \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} \mathcal{N}_i\right) \setminus \left(\bigcap_{k=1}^{m} \mathcal{N}_{i_k}\right).$$

Теперь сопоставим каждому $i \in \mathbb{N}$ некоторое $v_i \in \mathcal{V}$ и соответствующее $\mathcal{N}_i$ и $\mathcal{N}(v_i)$. Тогда введем функцию

$$g_i(u) := \begin{cases} g_{v_i}(u), & \text{при} \quad u \in \mathcal{N}(v_i); \\ 0, & \text{при} \quad u \notin \mathcal{N}(v_i). \end{cases}$$

Шаг 9. Наконец, введем весовую функцию

$$\rho_i(u) := \mathrm{distance}(u, \mathbb{B} \setminus \mathcal{N}_i), \quad \mathbb{B} \setminus \mathcal{N}_i - \text{замкнуто в} \quad \mathbb{B}.$$

Теперь рассмотрим отображение $g(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, определенное формулой

$$g(u) := \sum_{i=1}^{+\infty} \rho_i(u) g_i(u) \Bigg/ \sum_{j=1}^{+\infty} \rho_j(u).$$

Заметим, что сумма ряда

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \rho_j(u)$$

в действительности для каждого $u \in \mathcal{M}$ состоит из конечного числа слагаемых, поскольку семейство $\{\mathcal{N}_i, \ i \in \mathbb{N}\}$ — это локально конечное покрытие метрического пространства $\mathcal{M}$.

Теперь осталось проверить, что оно удовлетворяет условиям определения 1 псевдоградиентного векторного поля на $\mathcal{M}$.

□ Действительно, для каждого $i \in \mathbb{N}$ и всякого $u \in \mathcal{N}(v_i)$ в силу (1.6) имеет место неравенство

$$\|g_i(u)\| \leqslant 2 \left\|\psi_f'(u)\right\|_* (T_u \mathcal{V}).$$

[1]) Смотри работу [47] леммы 6.4.16 и 4.3.75.

Следовательно,

$$\|g(u)\| \leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \rho_i(u)\, \|g_i(u)\| \bigg/ \sum_{j=1}^{+\infty} \rho_j(u) \leqslant 2 \left\|\psi_f'(u)\right\|_* (T_u\mathcal{V}).$$

Теперь в силу (1.7) имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\left\langle \psi_f'(u), g(u) \right\rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} \rho_i(u) \left\langle \psi_f'(u), g_i(u) \right\rangle \bigg/ \sum_{j=1}^{+\infty} \rho_j(u) \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \rho_i(u) \left\|\psi_f'(u)\right\|_*^2 (T_u\mathcal{V}) \bigg/ \sum_{j=1}^{+\infty} \rho_j(u) = \left\|\psi_f'(u)\right\|_*^2 (T_u\mathcal{V}). \quad \boxtimes$$

Кроме того, для произвольного $j \in \mathbb{N}$, с одной стороны, имеет место неравенство

$$|\rho_j(u_1) - \rho_j(u_2)| \leqslant \|u_1 - u_2\| \quad \text{для всех} \quad u_1, u_2 \in \mathbb{B},$$

а, с другой стороны, в силу локальной конечности покрытия $\mathcal{N}_i$ имеем

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \rho_j(u) > 0 \quad \text{для всех} \quad u \in \mathcal{M}.$$

Следовательно, в силу липшиц–непрерывности $\rho_j(u)$ на $\mathbb{B}$ в некоторой малой окрестности $O(u,\varepsilon) \subset \mathbb{B}$ точки $u \in \mathcal{M}$ имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \rho_j(v) \geqslant \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{для всех} \quad v \in O(u,\varepsilon).$$

□ Действительно,

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \rho_j(v) \geqslant \rho_{j_0}(u) =: \delta_0 > 0.$$

Для всех $u, v \in \mathbb{B}$ имеет место следующее неравенство треугольника:

$$\|u - w\| \leqslant \|v - w\| + \|u - v\| \quad \text{при} \quad w \in \mathbb{B}\backslash\mathcal{N}_{j_0}.$$

Возьмём точную нижнюю грань от этого неравенства по всем $w \in \mathbb{B}\backslash\mathcal{N}_{j_0}$ и получим неравенство

$$\rho_{j_0}(u) \leqslant \rho_{j_0}(v) + \|u - v\|.$$

Отсюда имеем

$$\delta_0 = \rho_{j_0}(u) \leqslant \rho_{j_0}(v) + \|u - v\| < \rho_{j_0}(v) + \varepsilon.$$

Выберем $\varepsilon = \delta_0/2$ и получим неравенство

$$\rho_{j_0}(v) \geqslant \frac{\delta_0}{2} \quad \text{для всех} \quad v \in O(u, \delta_0/2).$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \rho_j(v) \geqslant \rho_{j_0}(v) = \frac{\delta_0}{2} > 0 \quad \text{для всех} \quad v \in O(u, \delta_0/2). \quad \boxtimes$$

Поэтому отображение $g(u)$ локально липшиц–непрерывно на $\mathcal{M}$. Теорема доказана.

§ 2. Лемма о деформации

Теперь докажем следующую важную лемму о деформации.

Лемма о деформации. *Пусть* $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B}; \mathbb{R}^1)$ *и множество* $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$. *Постоянные* $c \in \mathbb{R}^1$ *и* $\varepsilon, \delta > 0$ *таковы, что*

$$\left\| \psi'_f(u) \right\|_* (T_u\mathcal{V}) \geqslant \frac{8\varepsilon}{\delta} \tag{2.1}$$

для всех

$$u \in \mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \psi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap \mathcal{S}_{2\delta} \cap \mathcal{V},$$

где

$$\mathcal{S}_{2\delta} \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in \mathbb{B} : \operatorname{distance}(u, \mathcal{S}) \leqslant 2\delta\}.$$

Тогда существует такая деформация $\eta(t, u) \in \mathbb{C}([0, 1] \times \mathcal{V}; \mathcal{V})$, *что выполнены следующие свойства*:

(i) *либо* $u \in \mathcal{A}$ *и тогда* $\eta(t, u) = u$ *при* $t = 0$ *либо* $u \notin \mathcal{A}$;

(ii) $\eta(1, \psi^{c+\varepsilon} \cap \mathcal{S}) \subset \psi^{c-\varepsilon}$, *где*

$$\psi^{c\pm\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in \mathbb{B} : \psi(u) \leqslant c \pm \varepsilon\};$$

(iii) $\psi(\eta(t, u))$ *является убывающей функцией по* $t \in [0, 1]$ *для всех* $u \in \mathcal{V}$.

Доказательство.

Шаг 1. В силу теоремы 1 на многообразии

$$\mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ u \in \mathcal{V} : \psi'_f(u) \neq \vartheta \in \mathbb{B}^* \right\}, \quad \mathcal{V} \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in \mathbb{B} : \varphi(u) = 1\}$$

существует псевдоградиентное векторное поле $g(u) : \mathcal{M} \subset \mathcal{V} \to T_u\mathcal{V}$, которое по его определению удовлетворяет условиям:

$$\|g(u)\| \leqslant 2 \left\| \psi'_f(u) \right\|_* (T_u\mathcal{V}), \quad \left\langle \psi'_f(u), g(u) \right\rangle \geqslant \left\| \psi'_f(u) \right\|_*^2 (T_u\mathcal{V})$$

для всех $u \in \mathcal{M}$. В частности, на $\mathcal{S} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{V} \subset \mathbb{B}$.

Шаг 2. Теперь определим следующие замкнутые множества на $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \psi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cap \mathcal{S}_{2\delta} \cap \mathcal{V},$$

$$\mathcal{B} \stackrel{\text{def}}{=} \psi^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]) \cap \mathcal{S}_{\delta} \cap \mathcal{V},$$

где

$$\mathcal{S}_\delta \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in \mathbb{B} : \ \text{distance}(u, \mathcal{S}) \leqslant \delta\}.$$

Ясно, что $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Поэтому

$$(\mathbb{B}\backslash\mathcal{A}) \cap \mathcal{B} = \varnothing.$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$\rho(u) := \frac{\text{distance}(u, \mathbb{B}\backslash\mathcal{A})}{\text{distance}(u, \mathbb{B}\backslash\mathcal{A}) + \text{distance}(u, \mathcal{B})}.$$

Понятно, что введенная функция удовлетворяет условию:

$$\rho(u) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad u \in \mathcal{B}; \\ 0, & \text{при} \quad u \in \mathbb{B}\backslash\mathcal{A}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Рассмотрим векторное поле на $\mathbb{B}$:

$$f(u) := \begin{cases} -\rho(u)g(u)\Big/\|g(u)\|^2, & \text{при} \quad u \in \mathcal{A}; \\ 0, & \text{при} \quad u \in \mathbb{B}\backslash\mathcal{A}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Шаг 3. Теперь нам надо доказать, что это векторное поле является локально липшиц–непрерывным на $\mathbb{B}$.

По определению псевдоградиентного векторного поля $g(u) : u \in \mathcal{M} \subset \subset \mathcal{V} \to T_u\mathcal{V}$ является локально липшиц–непрерывным, поэтому нам достаточно доказать, что функция $\rho(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ является ограниченно липшиц–непрерывной и тем более локально липшиц–непрерывной.

□ Действительно, для любых u_1, u_2 из ограниченного множества $\{u \in \mathbb{B} : \ \|u\| \leqslant R\}$ банахова пространства $\mathbb{B}$ имеет место неравенство [1])

$$\text{distance}(u_k, \mathbb{B}\backslash\mathcal{A}) + \text{distance}(u_k, \mathcal{B}) \geqslant \delta(R) > 0 \quad \text{при} \quad k = 1, 2,$$

поэтому имеет место следующая цепочка неравенств:

$$|\rho(u_1) - \rho(u_2)| \leqslant$$

[1]) Смотри шаг 2 теоремы 1 лекции 5.

$$\leqslant \frac{1}{\delta}\left|\mathrm{distance}(u_1, \mathbb{B}\backslash\mathcal{A}) - \mathrm{distance}(u_2, \mathbb{B}\backslash\mathcal{A})\right| + \\ + \frac{1}{\delta}\left|\mathrm{distance}(u_1, \mathcal{B}) - \mathrm{distance}(u_2, \mathcal{B})\right|.$$

Кроме того, справедливо следующее неравенство:

$$|\mathrm{distance}(\mathcal{C}, u_1) - \mathrm{distance}(\mathcal{C}, u_2)| \leqslant \|u_1 - u_2\|$$

для всех $u_1, u_2 \in \mathbb{B}$ из замкнутого шара $\{u \in \mathbb{B}:\ \|u\| \leqslant R\}$.

Следовательно, приходим к выводу об ограниченной липшиц–непрерывности функции

$$\rho(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1.$$

тем самым, локальная липшиц–непрерывность функции $f(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ доказана. ⊠

Шаг 4. Теперь заметим, что справедливо неравенство

$$\|f(u)\| \leqslant \frac{\delta}{8\varepsilon} \quad \text{для всех} \quad u \in \mathcal{A}.$$

☐ Действительно, по условию теоремы

$$\left\|\psi'_f(u)\right\|_* (T_u\mathcal{V}) \geqslant \frac{8\varepsilon}{\delta} \quad \text{для всех} \quad u \in \mathcal{A}$$

и, кроме того, по определению псевдоградиентного векторного поля на $\mathcal{M}$ имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\left\|\psi'_f(u)\right\|_*^2 (T_u\mathcal{V}) \leqslant \left\langle \psi'_f(u), g(u)\right\rangle \leqslant \\ \leqslant \left\|\psi'_f(u)\right\|_* (T_u\mathcal{V})\, \|g(u)\| \Rightarrow \|g(u)\| \geqslant \left\|\psi'_f(u)\right\|_* (T_u\mathcal{V}) \geqslant \frac{8\varepsilon}{\delta}.$$

Теперь из определения (2.3) векторного поля $f(u)$ имеет место неравенство

$$\|f(u)\| \leqslant \frac{\rho(u)}{\|g(u)\|} \leqslant \frac{1}{\|g(u)\|} \leqslant \frac{\delta}{8\varepsilon}. \quad ⊠$$

Шаг 5. Давайте теперь рассмотрим задачу Коши для обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения на многообразии $\mathcal{V}$:

$$\frac{d\sigma}{dt} = f(\sigma), \quad \sigma(0) = u \in \mathcal{V}. \tag{2.4}$$

Поскольку нелинейная функция $f(\cdot)$ по–доказанному является локально липшиц–непрерывным и ограниченным отображением на $\mathcal{V}$, то согласно общей теории нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений задача Коши (2.4) имеет единственное классическое решение класса $\sigma(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, 8\varepsilon]; \mathcal{V})$, лежащее на многообразии $\mathcal{V}$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$.

Шаг 6. Теперь мы определим искомую деформацию $\eta(t, u)$ и докажем, что она удовлетворяет условиям (i)–(iii). Действительно, пусть

$$\eta(t, u) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sigma(8\varepsilon t, u) \in \mathbb{C}([0, 1] \times \mathcal{V}; \mathcal{V}).$$

Заметим, что всякое классическое решение задачи (2.4) удовлетворяет следующему интегральному уравнению

$$\sigma(t, u) - u = \int\limits_0^t f(\sigma(\tau, u))\, d\tau,$$

поэтому мы отсюда получаем следующую оценку:

$$\|\sigma(t, u) - u\| \leqslant \int\limits_0^t \|f(\sigma(\tau, u))\|\, d\tau \leqslant \frac{\delta}{8\varepsilon} t \leqslant \delta \quad \text{при} \quad t \in [0, 8\varepsilon].$$

Но тогда отсюда приходим к неравенству

$$\|\eta(t, u) - u\| \leqslant \delta \quad \text{для всех} \quad t \in [0, 1]. \tag{2.5}$$

Заметим, что справедлива следующая цепочка неравенств в силу определения псевдоградиентного поля $g(u)$:

$$\begin{aligned}\frac{d\psi(\sigma(t, u))}{dt} &= \left\langle \psi'_f(\sigma(t, u)), \frac{d\sigma(t, u)}{dt} \right\rangle = \left\langle \psi'_f(\sigma(t, u)), f(\sigma(t, u)) \right\rangle = \\ &= -\frac{\rho(\sigma(t, u))}{\|g(\sigma(t, u))\|^2} \left\langle \psi'_f(\sigma(t, u)), g(\sigma(t, u)) \right\rangle \leqslant -\rho(\sigma(t, u)) \leqslant \\ &\leqslant -\frac{1}{4}\rho(\sigma(t, u)) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad t \in [0, 8\varepsilon],\end{aligned} \tag{2.6}$$

в силу свойства (1.2) определения 2 псевдоградиентного поля.

Шаг 7. Давайте теперь проверим, что выполнены все утверждения теоремы. Итак, если $u \in \mathcal{A}$, то

$$\eta(t, u) = u \quad \text{при} \quad t = 0,$$

поскольку

$$\eta(t, u)|_{t=0} = \sigma(8\varepsilon t, u)|_{t=0} = \sigma(0, u) = u.$$

Таким образом, получаем, что (i) выполнено, поскольку либо $u \in \mathcal{A}$ либо $u \notin \mathcal{A}$. Утверждение (iii) вытекает сразу же из (2.6), поскольку

$$\frac{d\psi(\sigma(t, u))}{dt} \leqslant 0 \Rightarrow \frac{d\psi(\eta(t, u))}{dt} \leqslant 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, 1]. \tag{2.7}$$

Осталось доказать только утверждение (ii).

Итак, возьмем $u \in \psi^{c+\varepsilon} \cap \mathcal{S}$. Возможно два случая. Первый случай: для всех $t \in [0, 8\varepsilon]$ имеем $\sigma(t,u) \in \psi^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$. Второй случай: найдется такое $t^* \in [0, 8\varepsilon]$, что $\sigma(t^*, u) \notin \psi^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$.

Рассмотрим сначала второй случай. Поскольку $u \in \psi^{c+\varepsilon} \cap \mathcal{S}$ и выполнено свойство (iii), то при этом $t^* \in [0, 8\varepsilon]$ имеет место неравенство

$$\psi(\sigma(t^*, u)) < c - \varepsilon,$$

то и

$$\psi(\sigma(8\varepsilon, u)) < c - \varepsilon$$

в силу неравенства (2.7).

Рассмотрим теперь первый случай: $\sigma(t,u) \in \psi^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ для всех $t \in [0, 8\varepsilon]$, но тогда в силу (2.5) мы получим, что

$$\|\sigma(t,u) - u\| \leqslant \delta,$$

т. е.

$$\sigma(t,u) \in \mathcal{B} := \psi^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]) \cap \mathcal{S}_\delta \cap \mathcal{V}.$$

Тогда $\rho(\sigma(t,u)) = 1$ и мы получаем из (2.6) неравенство

$$\frac{d\psi(\sigma(t,u))}{dt} \leqslant -\frac{1}{4},$$

следовательно, интегрируя это неравенство по $t \in [0, 8\varepsilon]$, получим неравенство

$$\psi(\sigma(8\varepsilon, u)) \leqslant \psi(u) - \frac{1}{4} 8\varepsilon \leqslant c + \varepsilon - 2\varepsilon = c - \varepsilon,$$

т. е.

$$\psi(\eta(1,u)) = \psi(\sigma(8\varepsilon, u)) \leqslant c - \varepsilon \quad \text{для всех} \quad u \in \mathcal{S} \cap \psi^{c+\varepsilon}.$$

Утверждение (ii) доказано.

Лемма доказана.

Лекция 10

СЧЕТНОЕ МНОЖЕСТВО РЕШЕНИЙ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

§ 1. Минимаксный принцип

Теперь мы можем перейти к рассмотрению общего минимаксного принципа для изучения экстремальных точек функционала $\psi \in \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$, ограниченного снизу на многообразии $\mathcal{V}$, задаваемого вещественным функционалом φ следующим образом:

$$\mathcal{V} \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in \mathbb{B} : \ \varphi(u) = 1\}, \quad \varphi(u) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1), \quad \varphi(\vartheta) = 0,$$

причём $\varphi'_f(u) \neq \vartheta$ для всех $u \in \mathcal{V}$. Сделаем следующее предположение:

$$\langle \varphi'_f(u), u\rangle \neq 0 \quad \text{для всех} \quad u \in \mathcal{V}.$$

Предположим, что многообразие $\mathcal{V}$ замкнуто в $\mathbb{B}$.

Приступим к рассмотрению важного приложения теории категорий Люстерника–Шнирельмана к вариационным задачам на условный экстремум. Пусть $X = \mathcal{V} \subset \mathbb{B}$. Введем следующие обозначения:

$$\mathcal{A}_j \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathcal{A} \subset \mathcal{V} : \ \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{A}) \geqslant j\}, \quad c_j \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_j} \sup_{u \in \mathcal{A}} \psi(u),$$

где $\mathcal{A}$ — это замкнутое множество в топологии метрического пространства $\mathcal{V}$, т. е.

$$\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}.$$

Совершенно понятно, что имеет место вложение

$$\mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_{j-1} \Rightarrow c_j \geqslant c_{j-1},$$

т. е. последовательность множеств $\{\mathcal{A}_j\}_{j=1}^{+\infty}$ является убывающей. Кроме того, понятно, что строгое неравенство

$$c_j > c_{j-1}$$

означает, что minmax в определении этих чисел достигается в различных точках.

Справедлива следующая основная теорема.

Теорема 1. *Предположим, что функционал* $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$ *и ограничен снизу на многообразии* $\mathcal{V} \subset \mathbb{B}$. *Если*

$$c := c_k = c_{k+1} = \cdots = c_{k+m}, \tag{1.1}$$

тогда для всех $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\mathcal{A} \in \mathcal{A}_{k+m}$ *и замкнутого в топологии метрического пространства* $\mathcal{V}$ *множества* $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ *таких, что*

$$\sup_{u\in\mathcal{A}} \psi(u) \leqslant c+\varepsilon, \quad \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{B}) \leqslant m \tag{1.2}$$

найдется такая точка $u_0 \in \mathcal{V}$, *что*

(i) $c - 2\varepsilon \leqslant \psi(u_0) \leqslant c + 2\varepsilon$;

(ii) $\operatorname{distance}(u_0, \mathcal{A}\setminus \operatorname{int}\mathcal{B}) \leqslant 2\delta$;

(iii) $\left\|\psi'_f(u_0)\right\|_*(T_{u_0}\mathcal{V}) \leqslant 8\varepsilon/\delta$.

Доказательство.

Шаг 1. Прежде всего отметим, что при условиях теоремы множество точек $u_0 \in \mathcal{V}$, для которых выполнены свойства (i) и (ii) не пусто.

$\square$ Действительно, заметим, что $\mathcal{A} \not\subset \mathcal{B}$, поскольку в противном случае одновременно выполнены два свойства

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}}\mathcal{A} \geqslant m+k \quad \text{и} \quad \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}\mathcal{A} \leqslant m.$$

Следовательно,

$$\mathcal{A} \supset \mathcal{A}\setminus \operatorname{int}\mathcal{B} \neq \varnothing.$$

Заметим, что $\operatorname{int}\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$ и поэтому

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\operatorname{int}\mathcal{B}) \leqslant \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{B}) \leqslant m.$$

Поэтому в силу (1.2) имеем

$$\sup_{u\in\mathcal{A}\setminus\operatorname{int}\mathcal{B}} \psi(u) \leqslant \sup_{u\in\mathcal{A}} \psi(u) \leqslant c+\varepsilon.$$

Кроме того, $\mathcal{A}\setminus \operatorname{int}\mathcal{B} \in \mathcal{A}_k$, поскольку

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A} = (\mathcal{A}\setminus\operatorname{int}\mathcal{B}) \cup \operatorname{int}\mathcal{B} \Rightarrow \\
&\quad\Rightarrow k+m \leqslant \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{A}) \leqslant \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{A}\setminus\operatorname{int}\mathcal{B}) + \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\operatorname{int}\mathcal{B}) \leqslant \\
&\qquad\leqslant \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{A}\setminus\operatorname{int}\mathcal{B}) + m \Rightarrow k \leqslant \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{A}\setminus\operatorname{int}\mathcal{B}).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathcal{A}\setminus\operatorname{int}\mathcal{B} \in \mathcal{A}_k$$

и поэтому

$$c = c_k = \inf_{\mathcal{A}\subset\mathcal{A}_k} \sup_{u\in\mathcal{A}} \psi(u) \leqslant \sup_{u\in\mathcal{A}\setminus\operatorname{int}\mathcal{B}} \psi(u) \leqslant c+\varepsilon.$$

Отсюда получаем, что

$$c - 2\varepsilon < \sup_{u \in \mathcal{A} \setminus \operatorname{int} \mathcal{B}} \psi(u) < c + 2\varepsilon.$$

Но тогда согласно определению supremum и дифференцируемости по Фреше функционала $\psi(u)$ мы получим, что заведомо существует такое $u_0 \in \mathcal{V}$, что выполнены свойства (i) и (ii). ⊠

Шаг 2. Теперь предположим, что существуют такие $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\mathcal{A} \in \mathcal{A}_{k+m}$ и замкнутое множество $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$, что

$$\sup_{u \in \mathcal{A}} \psi(u) \leqslant c + \varepsilon, \quad \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{B}) \leqslant m,$$

но утверждение (iii) не выполнено, т. е.

$$\left\| \psi'_f(u_0) \right\|_* (T_{u_0}\mathcal{V}) > \frac{8\varepsilon}{\delta}.$$

Тогда введем обозначение

$$\mathcal{S} := \mathcal{A} \setminus \operatorname{int} \mathcal{B}$$

и применим лемму о деформации, которая в этом случае справедлива. Тогда получим существование такой деформации

$$\eta(t, u) \in \mathbb{C}([0,1] \times \mathcal{V}; \mathcal{V}),$$

которая стягивает множество $\psi^{c+\varepsilon} \cap \mathcal{S}$ во множество $\psi^{c-\varepsilon}$, но тогда согласно результату теоремы 1 (v) лекции 8 имеет место неравенство

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}} \left(\psi^{c+\varepsilon} \cap \mathcal{S} \right) \leqslant \operatorname{cat}_{\mathcal{V}} \left(\eta(1, \psi^{c+\varepsilon} \cap \mathcal{S}) \right) \leqslant \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\psi^{c-\varepsilon}), \tag{1.3}$$

поскольку

$$\eta(1, \psi^{c+\varepsilon} \cap \mathcal{S}) \subset \psi^{c-\varepsilon}.$$

Шаг 3. Теперь заметим, что в силу условия теоремы

$$\psi^{c+\varepsilon} \cap \mathcal{A} = \mathcal{A},$$

так как

$$\sup_{u \in \mathcal{A}} \psi(u) \leqslant c + \varepsilon \Rightarrow \mathcal{A} \subset \{u \in \mathcal{V} : \ \psi(u) \leqslant c + \varepsilon\} := \psi^{c+\varepsilon}.$$

Поскольку $\mathcal{S} := \mathcal{A} \setminus \operatorname{int} \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, получаем

$$\psi^{c+\varepsilon} \cap \mathcal{S} = \mathcal{S}.$$

Таким образом, приходим к выводу, что

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}} \left(\psi^{c+\varepsilon} \cap \mathcal{S} \right) = \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{S}).$$

Следовательно, из (1.3) получаем, что

$$\mathrm{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{S}) \leqslant \mathrm{cat}_{\mathcal{V}}\left(\psi^{c-\varepsilon}\right).$$

Шаг 4. Теперь наша задача доказать следующее неравенство:

$$\mathrm{cat}_{\mathcal{V}}(\psi^{c-\varepsilon}) \leqslant k-1. \tag{1.4}$$

□ Действительно, по условию теоремы имеем

$$c := c_k = \inf_{\mathcal{A}\in\mathcal{A}_k} \sup_{u\in\mathcal{A}} \psi(u).$$

Рассмотрим множество

$$\psi^{c-\varepsilon} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{u \in \mathcal{V} : \ \psi(u) \leqslant c-\varepsilon\right\}.$$

Предположим, что

$$\mathrm{cat}_{\mathcal{V}}\left(\psi^{c-\varepsilon}\right) \geqslant k.$$

Заметим, что множество $\psi^{c-\varepsilon}$ замкнуто в $\mathcal{V}$.

□ Действительно, пусть $\{u_n\} \subset \psi^{c-\varepsilon} \subset \mathcal{V}$ и

$$\|u_n - u\| \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Тогда, с одной стороны, имеем $u \in \mathcal{V}$ в силу исходного предположения о замкнутости $\mathcal{V}$, а, с другой стороны, в силу дифференцируемости по Фреше функционала $\psi(u)$ приходим к выводу о локальной липшиц–непрерывности этого функционала. Поэтому в пределе при $n \to +\infty$ получим

$$\psi(u_n) \leqslant c-\varepsilon \Rightarrow \psi(u) \leqslant c-\varepsilon \Rightarrow u \in \psi^{c-\varepsilon}. \quad \boxtimes$$

Тогда, в силу замкнутости множества $\psi^{c-\varepsilon}$ в топологии метрического пространства $\mathcal{V}$, это множество принадлежит системе множеств $\mathcal{A}_k$. Следовательно,

$$c := c_k = \inf_{\mathcal{A}\in\mathcal{A}_k} \sup_{u\in\mathcal{A}} \psi(u) \leqslant \sup_{u\in\psi^{c-\varepsilon}} \psi(u) \leqslant c-\varepsilon,$$

т. е. $\varepsilon \leqslant 0$, что противоречит исходному условию $\varepsilon > 0$. Значит, (1.4) доказано. ⊠

Шаг 5. Следовательно, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$k+m \leqslant \mathrm{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{A}) \leqslant \mathrm{cat}_{\mathcal{V}}\left(\mathcal{A}\setminus \mathrm{int}\,\mathcal{B}\right) + \mathrm{cat}_{\mathcal{V}}\left(\mathcal{B}\right) \leqslant \mathrm{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{S}) + m \leqslant \\ \leqslant \mathrm{cat}_{\mathcal{V}}\left(\psi^{c-\varepsilon}\right) + m \leqslant k-1+m.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Т е о р е м а   д о к а з а н а.

Дадим определение.

Определение 1. *Будем говорить, что функционал* $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$ *удовлетворяет условию Пале–Смейла* (PS_c) *на замкнутом многообразии* $\mathcal{V} \subset \mathbb{B}$, *если у всякой последовательности* $\{u_n\} \subset \mathcal{V}$, *удовлетворяющей условию*

$$\psi(u_n) \to c \in \mathbb{R}^1 \quad \textit{и} \quad \left\|\psi'_f(u_n)\right\|_* (T_{u_n}\mathcal{V}) \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to +\infty, \tag{1.5}$$

имеется сильно сходящаяся подпоследовательность:

$$u_{n_k} \to u \in \mathcal{V} \quad \textit{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \textit{при} \quad k \to +\infty.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$ *является ограниченным снизу на многообразии* $\mathcal{V}$ *функционалом и удовлетворяет на этом многообразии условию* (PS_c) *при некотором* $c \in \mathbb{R}^1$. *Пусть, кроме того, выполнено условие* (1.1). *Тогда для множества*

$$K_c \stackrel{\text{def}}{=} \left\{u \in \mathcal{V} : \ \psi(u) = c, \quad \left\|\psi'_f(u)\right\|_* (T_u\mathcal{V}) = 0\right\}$$

имеем

$$\mathrm{cat}_{\mathcal{V}}(K_c) \geqslant m + 1.$$

Замечание 1. Отметим, что условие $\mathrm{cat}_{\mathcal{V}}(K_c) \geqslant m + 1$ означает, что это множество (множество условно критических точек) состоит по крайней мере из $m + 1$ точки.

Доказательство.

Шаг 1. Предположим, что

$$\mathrm{cat}_{\mathcal{V}}(K_c) \leqslant m.$$

Заметим, что множество K_c замкнуто в метрическом пространстве $\mathcal{V}$ относительно метрики

$$d(u_1, u_2) \stackrel{\text{def}}{=} \|u_1 - u_2\|.$$

□ Действительно, пусть $\{u_n\} \subset K_c$ и

$$u_n \xrightarrow{d} u \quad \text{при} \quad n \to +\infty \Rightarrow u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

В силу замкнутости $\mathcal{V} \subset \mathbb{B}$ приходим к выводу о том, что $u \in \mathcal{V}$, причём поскольку $\varphi(\vartheta) = 0$ приходим к выводу о том, что $u \neq \vartheta$. Докажем, что $u \in K_c$. Поскольку $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$, то

$$c = \psi(u_n) \to \psi(u) = c \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Кроме того, поскольку $\varphi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$ имеет место следующая цепочка равенств:

$$0 = \left\|\psi'_f(u_n)\right\|_*(T_{u_n}\mathcal{V}) = \left\|\psi'_f(u_n) - \lambda_n\varphi'_f(u_n)\right\|_* \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \psi'_f(u_n) = \lambda_n\varphi'_f(u_n) \Rightarrow \lambda_n = \frac{\langle\psi'_f(u_n), u_n\rangle}{\langle\varphi'_f(u_n), u_n\rangle},$$

причём

$$\langle\psi'_f(u_n), u_n\rangle \to \langle\psi'_f(u), u\rangle \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$
$$\langle\varphi'_f(u_n), u_n\rangle \to \langle\varphi'_f(u), u\rangle \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Поскольку $u \in \mathcal{V}$ в силу исходного предположения имеем

$$\langle\varphi'_f(u), u\rangle \neq 0,$$

поэтому начиная с некоторого номера $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\langle\varphi'_f(u_n), u_n\rangle \neq 0 \quad \text{для всех} \quad n \geqslant n_0.$$

Таким образом,

$$\lambda_n := \frac{\langle\psi'_f(u_n), u_n\rangle}{\langle\varphi'_f(u_n), u_n\rangle} \to \lambda := \frac{\langle\psi'_f(u), u\rangle}{\langle\varphi'_f(u), u\rangle} \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Следовательно,

$$0 = \left\|\psi'_f(u_n) - \lambda_n\varphi'_f(u_n)\right\|_* \to \left\|\psi'_f(u) - \lambda\varphi'_f(u)\right\|_* = 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Отсюда в силу теоремы 4 лекции 8 получаем, что

$$\left\|\psi'_f(u)\right\|_*(T_u\mathcal{V}) = 0.$$

Итак, $u \in K_c$. ☒

Шаг 2. По теореме 2 о ANR восьмой лекции (метрическое пространство $\mathcal{V}$ является ANR) для множества K_c существует замкнутая в топологии $\mathcal{V}$ окрестность $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ множества K_c, что

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{B}) = \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(K_c) \leqslant m.$$

Замечание 1. Сделаем одно терминологическое замечание. Под окрестностью $\mathcal{B}$ множества K_c мы понимаем такое множество $\mathcal{B}$, что имеет место следующее вложение:

$$K_c \subset \operatorname{int}\mathcal{B} \subset \mathcal{B}. \tag{1.6}$$

Теперь мы применим теорему 1, в которой положим $\mathcal{A} = \mathcal{V}$. Тогда из теоремы 1, в которой нужно взять $\varepsilon = 1/n$ и $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, вытекает существование такой последовательности $\{u_n\} \subset \mathcal{V}$, что

$$c - \frac{2}{n} \leqslant \psi(u_n) \leqslant c + \frac{2}{n},$$

$$\left\|\psi'_f(u_n)\right\|_* (T_{u_n}\mathcal{V}) \leqslant \frac{8}{\sqrt{n}},$$

$$\operatorname{distance}(u_n, \mathcal{V}\setminus \operatorname{int}\mathcal{B}) \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Отметим, что множество $\operatorname{int}\mathcal{B}$ открыто в метрическом пространстве $\mathcal{V}$, которое является замкнутым множеством в $\mathbb{B}$, и поэтому множество $\mathcal{V}\setminus \operatorname{int}\mathcal{B}$ замкнуто в $\mathcal{V}$. Следовательно,

$$\psi(u_n) \to c, \quad \left\|\psi'_f(u_n)\right\|_* (T_{u_n}\mathcal{V}) \to 0, \quad \operatorname{distance}(u_n, \mathcal{V}\setminus \operatorname{int}\mathcal{B}) \to 0$$

при $n \to +\infty$. Поскольку функционал ψ удовлетворяет условию $(\mathrm{PS_c})$ на многообразии $\mathcal{V}$, то существует подпоследовательность

$$\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\} \subset \mathcal{V},$$

что

$$u_{n_k} \to u_0 \in \mathcal{V} \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}.$$

Шаг 3. Итак, во–первых,

$$\psi(u_0) = c, \quad \left\|\psi'_f(u_0)\right\|_* (T_{u_0}\mathcal{V}) = 0,$$

т. е. $u_0 \in K_c$, а, во–вторых, в силу замкнутости $\mathcal{V}\setminus \operatorname{int}\mathcal{B}$

$$u_0 \in \mathcal{V}\setminus \operatorname{int}\mathcal{B}.$$

Следовательно,

$$u_0 \in K_c \cap (\mathcal{V}\setminus \operatorname{int}\mathcal{B}),$$

но в силу (1.6) имеет место вложение

$$K_c \subset \operatorname{int}\mathcal{B},$$

но тогда

$$K_c \cap (\mathcal{V}\setminus \operatorname{int}\mathcal{B}) = \varnothing.$$

Полученное противоречие доказывает, что

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(K_c) \geqslant m + 1.$$

Теорема доказана.

Важным следствием этой теоремы является следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть функционал* $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B}; \mathbb{R}^1)$ *является ограниченным снизу на* $\mathcal{V}$, *причём*

$$d \geqslant \inf_{u \in \mathcal{V}} \psi(u).$$

Пусть, кроме того, для всех

$$c \in \left[\inf_{u \in \mathcal{V}} \psi(u), d\right]$$

функционал ψ *удовлетворяет условию* $(\mathrm{PS_c})$ *на многообразии* $\mathcal{V}$. *Тогда функционал* ψ *достигает минимума на* $\mathcal{V}$, *причем* ψ *имеет по меньшей мере* $\operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\psi^d)$ [1] *критических точек на* $\mathcal{V}$.

Доказательство.

Пусть

$$n := \operatorname{cat}_{\mathcal{V}} \psi^d \in \mathbb{N}, \quad \psi^d \neq \varnothing.$$

Напомним определение величины c_j:

$$c_j := \inf_{\mathcal{A} \in \mathcal{A}_j} \sup_{u \in A} \psi(u), \quad \mathcal{A}_j = \{\mathcal{A} \in \mathcal{V} : \operatorname{cat}_{\mathcal{V}} \mathcal{A} \geqslant j\},$$

где множества $\mathcal{A}$ замкнуты в метрическом пространстве $\mathcal{V}$. Отметим, что

$$c_1 := \inf_{\{u\} \in \mathcal{A}_1} \sup_{u \in \{u\}} \psi(u) = \inf_{u \in \mathcal{V}} \psi(u),$$

где $\{u\}$ — это одноэлементное множество, которое очевидно замкнуто.

Рассмотрим соответствующие c_j по своему определению имеет место неравенство

$$\inf_{u \in \mathcal{V}} \psi(u) =: c_1 \leqslant c_2 \leqslant \cdots \leqslant c_n \leqslant d,$$

где последнее неравенство связано с тем, что пересечение $\psi^d \cap \mathcal{A}_n$ не пусто, поскольку по определению $\operatorname{cat}_{\mathcal{V}} \psi^d = n \in \mathbb{N}$, то $\psi^d \in \mathcal{A}_n$.

$$c_n := \inf_{\mathcal{A} \in \mathcal{A}_n} \sup_{u \in A} \psi(u) \leqslant \sup_{u \in \psi^d} \psi(u) \leqslant d.$$

Предположим, что для каких-то $m \in \mathbb{N}$ чисел из c_j имеет место равенство. Например, без ограничения общности, можно считать, что это m чисел, например, [2]

$$c_{k+1} = c_{k+2} = \cdots = c_{k+m} = c,$$

[1] Напомним, что $\psi^d := \{u \in \mathcal{V} : \psi(u) \leqslant d\}$.

[2] Это частный случай, на примере которого понятно, что делать в более общей ситуации.

$$c_{k+m} < c_{k+m+1} < \cdots < c_n, \quad c_1 < c_2 < \cdots < c_k < c_{k+1},$$

причем согласно теореме 2 имеем

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(K_c) \geqslant m. \tag{1.7}$$

С учетом того, что оставшиеся числа c_j различны мы приходим к тому факту, что точки u_j, в которых достигается minmax функционала ψ все различны. Поэтому этих точек $n-m$. С учетом, (1.7) мы приходим к выводу о том, что критических точек не меньше величины $\operatorname{cat}_{\mathcal{V}} \psi^d$.

Теорема доказана.

Замечание 2. Отметим, что в данной теореме мы не требуем как ранее слабой замкнутости многообразия $\mathcal{V}$. Относительно многообразия $\mathcal{V}$ мы требуем только сильной замкнутости как подмножества банахова пространства $\mathbb{B}$.

§ 2. Пример счетного множества решений.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\Delta u + |u|^{p-2}u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.1}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область при $N \geqslant 3$. Рассмотрим следующие функционалы:

$$\psi(u) := \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |D_x u|^2\,dx, \quad \varphi(u) := \frac{1}{p}\int\limits_{\Omega} |u|^p\,dx. \tag{2.2}$$

Рассмотрим соответствующее многообразие в $H_0^1(\Omega)$

$$\mathcal{V} := \left\{u \in H_0^1(\Omega) : \ \varphi(u) = 1\right\}. \tag{2.3}$$

Сначала, как и ранее, применим метод доказательства существования нетривиального слабого решения задачи (2.1).

Пункт 1. Докажем, что *многообразие $\mathcal{V}$ является слабо замкнутым.*

□ Действительно, пусть $\{u_n\} \subset \mathcal{V}$, $\varphi(u_n) = 1$,

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega), \quad 1 < p < \frac{2N}{N-2}, \quad N \geqslant 3.$$

Пусть

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad H_0^1(\Omega) \quad \text{при} \quad n \to +\infty, \quad \varphi(u_n) = 1,$$

тогда в силу вполне непрерывного вложения $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$ и линейности оператора вложения вытекает полная непрерывность оператора вложения

$$J : H_0^1(\Omega) \to L^p(\Omega) \Rightarrow J(u_n) \to J(u) \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Стало быть, имеем

$$1 = \varphi(u_n) \to \varphi(u) = 1 \quad \text{при} \quad n \to +\infty \Rightarrow u \in \mathcal{V}. \quad \boxtimes$$

Пункт 2. Функционал $\psi(u)$ является слабо полунепрерывным снизу, потому что

$$\psi(u) := \frac{1}{2}\|D_x u\|_2^2,$$

а норма рефлексивного банахова пространства является полунепрерывным снизу функционалом.

Пункт 3. Функционал $\psi(u)$ является слабо коэрцитивным, потому что

$$\lim_{\|D_x u\|_2 \to +\infty} \psi(u) = \frac{1}{2} \lim_{\|D_x u\|_2 \to +\infty} \|D_x u\|_2^2 = +\infty.$$

Пункт 4. Итак, согласно теореме 1 четвертой лекции функционал $\psi(u)$ достигает минимума на многообразии $\mathcal{V}$ в некоторой точке $u_1 \in \mathcal{V}$, в которой

$$\psi'_f(u_1) - \lambda_1 \varphi'_f(u_1) = \vartheta^* \in \mathbb{B}^*,$$

$$\langle \Delta u_1 - \lambda_1 |u_1|^{p-2} u_1, u_1 \rangle = 0 \Rightarrow \|D_x u_1\|_2^2 = \lambda_1 \|u_1\|_p^p = p\lambda_1 > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \psi(u_1) = \inf_{u \in \mathcal{V}} \psi(u) = \frac{\lambda_1 p}{2}.$$

Однако, для доказательства существования счетного множества линейно независимых слабых решений задачи (2.1) нужно вместо вариационной задачи (2.2), (2.3) рассмотреть следующую вариационную задачу:

$$\inf\left\{\psi_1(u) : \ \varphi_1(u) = 1, \quad u \in H_0^1(\Omega)\right\}, \tag{2.4}$$
$$\mathcal{V}_1 = \left\{u \in H_0^1(\Omega) : \ \varphi_1(u) = 1\right\},$$

где

$$\psi_1(u) := \frac{1}{p}\int\limits_\Omega |u|^p\,dx, \quad \varphi_1(u) := \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |D_x u|^2\,dx. \tag{2.5}$$

Заметим, что в силу неравенства Фридрихса имеют место выражения

$$u \in \mathcal{V}_1 \Rightarrow \frac{1}{p}\int\limits_\Omega |u|^p\,dx \leqslant \frac{c_p}{p}\left(\int\limits_\Omega |D_x u|^2\,dx\right)^{p/2} = \frac{c_p}{p} 2^{p/2}.$$

Пункт 5. Докажем, что функционал $\psi_1(u)$ удовлетворяет условию $(\mathrm{PS})_c$ на $\mathcal{V}$ при

$$0 < c \leqslant d, \quad d = \frac{c_p}{p} 2^{p/2}.$$

$\Box$ Действительно, пусть $\{u_n\} \subset \mathcal{V}_1$ и имеют место свойства

a) последовательность $\psi_1(u_n) \to c$ при $n \to +\infty$;

b) для этой последовательности

$$\|\psi'_{1f}(u_n)\|_*\,(T_{u_n}\mathcal{V}_1) \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Докажем, что существует такая подпоследовательность $\{u_{n_n}\} \subset \{u_n\}$, что

$$u_{n_n} \to u \quad \text{сильно в} \quad H^1_0(\Omega) \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{2.6}$$

Прежде всего отметим, что

$$\varphi_1(u_n) = 1 \Rightarrow \|D_x u_n\|_2 = \sqrt{2}$$

поэтому найдется такая подпоследовательность

$$\{u_{n_n}\} \subset \{u_n\}, \quad u_{n_n} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad H^1_0(\Omega) \quad \text{при} \quad n \to +\infty, \tag{2.7}$$

а в силу вполне непрерывного вложения $H^1_0(\Omega)$ в $L^p(\Omega)$ имеем

$$u_{n_n} \to u \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Отсюда вытекает, что

$$|u_{n_n}|^{p-2}u_{n_n} \to |u|^{p-2}u \quad \text{сильно в} \quad L^{p'}(\Omega) \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{2.8}$$

Наконец, из второго условия $(PS)_c$ вытекает, что

$$-\Delta u_{n_n} - \mu_n |u_{n_n}|^{p-2}u_{n_n} \to \vartheta^* \quad \text{сильно в} \quad H^{-1}(\Omega) \tag{2.9}$$

при $n \to +\infty$, где числовая последовательность $\{\mu_n\}$ ограничена.

$\Box\Box$ Действительно, в силу (2.9) имеем

$$\left\|\Delta u_{n_n} + \mu_n |u_{n_n}|^{p-2}u_{n_n}\right\|_* \leqslant M < +\infty,$$

где $M > 0$ не зависит от $n \in \mathbb{N}$. Поэтому, с одной стороны, имеет место следующая цепочка неравенств:

$$|\mu_n| \left\||u_{n_n}|^{p-2}u_{n_n}\right\|_* \leqslant M + \|\Delta u_{n_n}\|_* \leqslant M_1, \tag{2.10}$$

где последнее неравенство имеет место в силу свойства (2.7). С другой стороны, имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\left|\left\||u_{n_n}|^{p-2}u_{n_n}\right\|_* - \left\||u|^{p-2}u\right\|_*\right| \leqslant \left\||u_{n_n}|^{p-2}u_{n_n} - |u|^{p-2}u\right\|_* \leqslant$$
$$\leqslant c_1 \left\||u_{n_n}|^{p-2}u_{n_n} - |u|^{p-2}u\right\|_{p'} \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{2.11}$$

Заметим, что

$$\|D_x u\|_2 = \sqrt{2} \Rightarrow u(x) \neq \vartheta \Rightarrow \left\| |u|^{p-2}u \right\|_* \neq 0,$$

поэтому в силу (2.11) начиная с некоторого номера $n_0 \in \mathbb{N}$ имеем

$$\left\| |u_{n_n}|^{p-2} u_{n_n} \right\|_* \geqslant \delta_0(n_0) > 0 \quad \text{для всех} \quad n \geqslant n_0.$$

Следовательно, в силу (2.10) имеем

$$|\mu_n| \leqslant \frac{M_1}{\delta_0} < +\infty. \quad \boxtimes\boxtimes$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$\mu_n \to \mu \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Кроме того, по доказанному

$$-\Delta u_{n_n} - \mu_n |u_{n_n}|^{p-2} u_{n_n} \rightharpoonup -\Delta u - \mu |u|^{p-2} u \quad \text{слабо в} \quad H^{-1}(\Omega)$$

при $n \to +\infty$. Поэтому

$$-\Delta u - \mu |u|^{p-2} u = \vartheta^*. \tag{2.12}$$

Таким образом, в силу (2.8) и (2.9) имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}
\|D_x(u_{n_n} - u)\|_2 = \|\Delta(u_{n_n} - u)\|_* \leqslant \\
\leqslant \|\Delta u_{n_n} + \mu_n |u_{n_n}|^{p-2} u_{n_n} - \mu_n |u_{n_n}|^{p-2} u_{n_n} + \\
+ \mu |u|^{p-2} u - \mu |u|^{p-2} u - \Delta u\|_* \leqslant \\
\leqslant \|\Delta u_{n_n} + \mu_n |u_{n_n}|^{p-2} u_{n_n}\|_* + \|\mu_n |u_{n_n}|^{p-2} u_{n_n} - \mu |u|^{p-2} u\|_* + \\
+ \|\Delta u + \mu |u|^{p-2} u\|_* \to +0,
\end{aligned}$$

при $n \to +\infty$, где мы воспользовались равенством (2.12). Следовательно,

$$u_{n_n} \to u \quad \text{сильно в} \quad H_0^1(\Omega) \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \quad \boxtimes$$

Пункт 6. Докажем, что на самом деле *существует счётное множество линейно независимых в $H_0^1(\Omega)$ слабых решений задачи* (2.1).

Заметим, что функционалы $\varphi_1(w)$ и $\psi_1(w)$ являются чётными. Мы можем отождествить диаметрально противоположные точки многообразия $\mathcal{V}$. Поэтому введем в рассмотрение банахово пространство

$$X \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ z := [w, -w] : \ w \in H_0^1(\Omega) \right\}$$

с нормой $\|z\|_X := \|w\|$. Определим функционалы на X следующим образом:

$$\varphi_2(z) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_1(w) \quad \text{и} \quad \psi_2(z) \stackrel{\text{def}}{=} \psi_1(w) \quad \text{для всех} \quad z = [w, -w] \in X.$$

Рассмотрим теперь многообразие $\mathcal{V}_2 \subset X$:

$$\mathcal{V}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in X : \varphi_2(z) = 1\}.$$

Сопряженным пространством X^* к банахову пространству X — есть следующее множество:

$$X^* \stackrel{\text{def}}{=} \left\{z^* := [f^*, -f^*] : f^* \in H^{-1}(\Omega)\right\}$$

со следующими скобками двойственности между X и X^* :

$$(z^*, z) \stackrel{\text{def}}{=} \langle f^*, w\rangle.$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что функционалы $\psi_2(z)$ и $\varphi_2(z)$ удовлетворяют всем условиям теоремы 3, в которой функционал $\psi_2(z)$ рассматривается на многообразии $\mathcal{V}_2$.

Заметим, что (смотри первый параграф лекции 8)

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}_2} \mathcal{V}_2 = +\infty. \tag{2.13}$$

Рассмотрим теперь произвольное число $d > 0$ и соответствующее множество:

$$(\psi_2)^d \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in X : \psi_2(z) = \psi_1(w) \leqslant d\}.$$

Заметим, что имеет место равенство множеств

$$\psi_2^d = (\psi_2)^d \cap \mathcal{V}_2,$$

где напомним

$$\psi_2^d \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathcal{V}_2 : \psi_2(z) := \psi_1(w) \leqslant d\}.$$

Кроме того, очевидно, имеет место вложение

$$(\psi_2)^{d_1} \subset (\psi_2)^{d_2} \quad \text{при} \quad d_1 \leqslant d_2.$$

Заметим, что в силу теоремы вложения С. Л. Соболева имеет место неравенство

$$\int\limits_\Omega |u|^p \, dx \leqslant c_p \left(\int\limits_\Omega |D_x u|^2 \, dx\right)^p \quad \text{для всех} \quad H_0^1(\Omega), \quad 1 < p \leqslant 2^*.$$

При этом справедливы следующие выражения:

$$u \in \mathcal{V}_1 \Rightarrow \frac{1}{p} \int\limits_{\Omega} |u|^p \, dx \leqslant \frac{c_p}{p} \left(\int\limits_{\Omega} |D_x u|^2 \, dx \right)^{p/2} = \frac{c_p}{p} 2^{p/2}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{V}_1 \subset (\psi_1)^d \quad \text{при} \quad d := \frac{c_p}{p} 2^{p/2} \Rightarrow \mathcal{V}_2 \subset (\psi_2)^d \,.$$

Заметим, что при таком d имеет место следующее неравенство:

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}_2} \mathcal{V}_2 \subset \operatorname{cat}_{\mathcal{V}_2} \psi_2^d.$$

Отсюда сразу же получаем, что

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}_2} \psi_2^d = +\infty.$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 3 и существует счетное множество линейно независимых слабых решений задачи.

§ 3. Литературные указания

В данной лекции мы использовали материал, изложенный в работах [2], [15], [24], [27], [55], [47], [49] и [61].

Тематическая лекция III

МЕТОДЫ МОНОТОННОСТИ И КОМПАКТНОСТИ

Лекция 11

МЕТОД ГАЛЕРКИНА И МОНОТОННОСТИ. ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

В этой лекции мы рассмотрим применение метода Галеркина в сочетании с методом монотонных операторов, который успешно может быть применен к задачам с главным нелинейным монотонным оператором.

§ 1. Введение

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$-\Delta u = f(x), \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.1}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — это ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0,1]$, понимаемую сначала в классическом смысле, т. е. поточечно.

Хорошо известно, что если функция $f(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}(\Omega)$ при $\alpha \in (0,1]$, то существует единственное классическое решение этой задачи в Гельдеровском пространстве

$$u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\Omega).$$

Однако, довольно часто в физических задачах возникает ситуация, когда функция $f(x)$ теряет свойство быть даже непрерывной на каком-то множестве из области Ω. Поэтому возникает необходимость каким–то образом обобщить понятие решения задачи.

С этой целью заметим, что во–первых, многие краевые задачи появляются в физике как некоторые интегральные равенства. Во–вторых, если умножить обе части равенства (1.1) на функцию $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^{\infty}(\Omega)$ и проинтегрировать получившееся равенство по области Ω в смысле Лебега, то после интегрирования по частям мы получим следующее равенство:

$$\int\limits_{\Omega} (D_x u(x), D_x \varphi(x))\, dx = \int\limits_{\Omega} f(x)\varphi(x)\, dx \tag{1.2}$$

для всех $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^{\infty}(\Omega)$.

Именно, такого вида интегральное равенство берут за основу при формулировке *слабого решения краевой задачи.*

В следующих параграфах мы рассмотрим различные краевые задачи для нелинейных эллиптических уравнений и рассмотрим некоторые методы их исследования. При этом мы делаем упор на слабую формулировку рассматриваемых задач и на метод *слабой сходимости*.

§ 2. Метод Галеркина и монотонности

Рассмотрим следующую краевую задачу для одного из самых известных нелинейных эллиптических операторов, в классической постановке имеющую следующий вид:

$$- \operatorname{div}(|D_x u|^{p-2} D_x u) = f(x), \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{при} \quad p \geqslant 2. \tag{2.1}$$

Очевидно, что при $p = 2$ приходим к задаче (1.1). Поскольку курс лекций адресован в первую очередь физикам мы приведем для полноты изложения вывод краевой задачи (2.1).

Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ имеем гладкую поверхностно–односвязную границу $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0, 1]$. Рассмотрим приближение квазистационарного поля, а именно электрическую часть системы уравнений Максвелла в квазистационарном приближении (см., например, [24]):

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi n(x), \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \tag{2.2}$$

где распределение плотности свободных зарядов, описываемое функцией $n = n(x)$ считается заданным. Теперь предположим, что зависимость $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$ является нелинейной, причем соответствует так называемой керровской нелинейности

$$\mathbf{D} = |\mathbf{E}|^{p-2}\mathbf{E} \quad \text{при} \quad p \geqslant 2. \tag{2.3}$$

Поскольку область Ω имеет поверхностно–односвязную границу, то можно ввести потенциал электрического поля согласно формуле

$$\mathbf{E} = -D_x \varphi. \tag{2.4}$$

Кроме того, предположим, что границы области Ω «заземлена», поэтому с учетом известного соглашения о том, что «земля» имеет нулевой потенциал, приходим к граничному условию

$$\varphi|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.5}$$

Следствием системы уравнений (2.2)–(2.5) является задача (2.1), в которой $f(x) = 4\pi n(x)$.

Теперь мы займемся исследованием свойств оператора

$$\operatorname{div}(|D_x u|^{p-2} D_x u),$$

который носит название *p–лапласиана*. Прежде всего покажем, что он действует следующим образом:

$$\operatorname{div}(|D_x u|^{p-2} D_x u) : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega), \quad p' = \frac{p}{p-1}. \tag{2.6}$$

Напомним, $W^{-1,p'}(\Omega)$ является пространством линейных непрерывных функционалов над пространством С. Л. Соболева $W_0^{1,p}(\Omega)$. С этой целью заметим, что оператор p–лапласиана можно представить в виде композиции трех отображений следующим образом:

$$\mathrm{div}(|D_x u|^{p-2} D_x u) := \mathrm{div}(\xi), \quad \xi := |\eta|^{p-2}\eta, \quad \eta := D_x u. \tag{2.7}$$

Пусть $u(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Тогда, во–первых, согласно определению пространства $W_0^{1,p}(\Omega)$ имеем

$$\eta := D_x u : W_0^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega) \otimes L^p(\Omega) \otimes L^p(\Omega). \tag{2.8}$$

Во–вторых, имеет место следующее выражение для нелинейного оператора $\xi := |\eta|^{p-2}\eta$:

$$\xi := |\eta|^{p-2}\eta : L^p(\Omega) \otimes L^p(\Omega) \otimes L^p(\Omega) \to \\ \to L^{p'}(\Omega) \otimes L^{p'}(\Omega) \otimes L^{p'}(\Omega). \tag{2.9}$$

Действительно, представим покоординатно выражение для вектора ξ.

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad \eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3),$$

$$\xi_1 = |\eta|^{p-2}\eta_1, \quad \xi_2 = |\eta|^{p-2}\eta_2, \quad \xi_3 = |\eta|^{p-2}\eta_3.$$

Справедливо следующее неравенство:

$$|\xi_i|^{p'} = \left||\eta|^{p-2}\eta_i\right|^{p'} \leqslant \left||\eta|^{p-1}\right|^{p'} = |\eta|^p, \quad i = \overline{1,3}.$$

Отсюда вытекает, что если $\eta \in L^p(\Omega) \otimes L^p(\Omega) \otimes L^p(\Omega)$, то $\xi_i \in L^{p'}(\Omega)$. Третий оператор $\mathrm{div}(\xi)$ действует следующим образом:

$$\mathrm{div}(\xi) : L^{p'}(\Omega) \otimes L^{p'}(\Omega) \otimes L^{p'}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega), \tag{2.10}$$

т. е. понимается в смысле дифференцирования обобщенных функций.

Итак, оператор (2.7) как композиция трех операторов (2.8)–(2.10) действует согласно формуле (2.6).

Пусть

$$\langle f, u \rangle : W^{-1,p'}(\Omega) \otimes W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}^1 \tag{2.11}$$

— это скобки двойственности между сопряженными банаховыми пространствами $W_0^{1,p}(\Omega)$ и $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Докажем теперь очень важное свойство оператора *p–лапласиана*, а именно свойство *строгой монотонности*. Действительно, введем сначала более короткое обозначение

$$\Delta_p u \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{div}(|D_x u|^{p-2} D_x u) \tag{2.12}$$

и докажем следующее свойство:

$$\langle -\Delta_p u_1 + \Delta_p u_2, u_2 - u_2\rangle \geqslant 0, \tag{2.13}$$

причем равенство в этом неравенстве имеет место, тогда и только тогда, когда $u_1 = u_2$. Заметим, что скобки двойственности (2.11) определены при

$$f = \Delta_p u \in W^{-1,p'}(\Omega).$$

Теперь заметим, что в силу построения оператора p–лапласиана имеет место формула «интегрирования по частям»:

$$\langle -\Delta_p u, v\rangle = \sum_{i=1}^{3} \Big\langle |D_x u|^{p-2} u_{x_i}, v_{x_i} \Big\rangle_p = \int\limits_{\Omega} |D_x u|^{p-2} \left(D_x u, D_x v\right) dx \tag{2.14}$$

для всех $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$ — это скобки двойственности между банаховыми пространствами $L^p(\Omega)$ и $L^{p'}(\Omega)$ при $p \in [2, +\infty)$, которые имеют следующий явный вид

$$\langle f, u\rangle_p = \int\limits_{\Omega} f(x)u(x)\, dx \quad \text{для всех} \quad f(x) \in L^{p'}(\Omega), \quad u(x) \in L^p(\Omega),$$

чем мы и воспользовались в формуле (2.14).

Итак, теперь мы докажем неравенство (2.13).

□ Действительно, пусть $u_1(x), u_2(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, тогда после «интегрирования по частям» получим следующую формулу:

$$\langle -\Delta_p u_1 + \Delta_p u_2, u_2 - u_2\rangle = \\ = \int\limits_{\Omega} \Big(|D_x u_1|^{p-2} D_x u_1 - |D_x u_2|^{p-2} D_x u_2, D_x u_1 - D_x u_2\Big)\, dx. \tag{2.15}$$

Справедлива следующая цепочка выражений для всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$:

$$\Big(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta, \xi - \eta\Big) = |\xi|^p + |\eta|^p - |\xi|^{p-2}(\xi,\eta) - |\eta|^{p-2}(\xi,\eta) \geqslant \\ \geqslant |\xi|^p + |\eta|^p - |\xi|^{p-1}|\eta| - |\eta|^{p-1}|\xi| = \\ = [|\xi|^{p-1} - |\eta|^{p-1}][|\xi| - |\eta|] \geqslant 0, \tag{2.16}$$

поскольку функция $f(x) = x^{p-1}$ является монотонной при $x \geqslant 0$ и при $p > 1$. ⊠

З а м е ч а н и е 1. Заметим, что можно доказать более сильное неравенство при $p \geqslant 2$ следующего вида:

$$\Big(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta, \xi - \eta\Big) \geqslant 2^{2-p}|\xi - \eta|^p \quad \text{для всех} \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^N, \quad (2.17)$$

из которого в применении к неравенству (2.15) вытекает строгая монотонность p–лапласиана, определение которой мы сейчас дадим.

О п р е д е л е н и е 1. *Отображение*

$$F : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$$

называется монотонным относительно скобок двойственности

$$\langle \cdot, \cdot \rangle$$

между сопряженными банаховыми пространствами $\mathbb{B}$ *и* $\mathbb{B}^*$, *если для всех* $u, v \in \mathbb{B}$ *имеет место следующее неравенство*:

$$\langle F(u) - F(v), u - v \rangle \geqslant 0, \qquad (2.18)$$

и называется строго монотонным, если равенство в формуле (2.18) *имеет место, тогда и только тогда, когда* $u = v$.

Теперь как мы и обещали дадим определение слабого решения задачи (2.1).

О п р е д е л е н и е 2. *Слабым решением задачи* (2.1) *при условии, что* $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, *называется функция* $u(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *удовлетворяющая следующему равенству*:

$$\langle -\Delta_p u, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \textit{для всех} \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega). \qquad (2.19)$$

Давайте обсудим как связаны слабое решение и решение задачи (2.1), понимаемой в классическом смысле. Действительно, пусть решение задачи (2.1) принадлежит к классу $u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, конечно, при условии, что $f(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}(\overline{\Omega})$ при $\alpha \in (0, 1]$. Тогда такая функция $u(x)$ является решением задачи (2.19). Но, естественно, не всякое слабое решение является классическим.

Для дальнейшего нам нужно ввести новое понятие *коэрцитивности*. Дадим определение.

О п р е д е л е н и е 3. *Оператор* $F : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ *называется коэрцитивным, если имеет место следующее предельное равенство*:

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} \frac{\langle F(u), u \rangle}{\|u\|} = +\infty. \qquad (2.20)$$

Докажем, что оператор p–лапласиана со множителем -1 является коэрцитивным. Действительно, «интегрированием по частям» доказывается следующая формула:

$$\langle -\Delta_p u, u \rangle = \int\limits_{\Omega} |D_x u|^p \, dx = \|D_x u\|_p^p \quad \text{при} \quad p \geqslant 2. \qquad (2.21)$$

Отсюда и вытекает коэрцитивность.

Для дальнейшего нам потребуется следующая *лемма об остром угле*:

Лемма 1. *Пусть* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — *непрерывное отображение, для некоторого* $R > 0$ *удовлетворяющее условию*

$$(Ta, a) \geqslant 0 \quad \textit{при} \quad |a| = R.$$

Тогда существует такое $a \in \mathbb{R}^n$, *что* $|a| \leqslant R$ *и* $Ta = 0$.

Доказательство.

Допустим, что

$$Ta \neq 0 \quad \text{для всех} \quad a \in K_R = \{a | a \in \mathbb{R}^n, \ |a| \leqslant R\}.$$

Тогда отображение, определяемое по правилу

$$a \to -R\frac{Ta}{|Ta|},$$

является непрерывным отображением из K_R в K_R. В силу теоремы Брауэра о неподвижной точке существует $a \in K_R$, такое, что

$$a = -R\frac{Ta}{|Ta|}.$$

Очевидно, $|a| = R$ и $(Ta, a) = -R|Ta| < 0$, в противоречие с нашим предположением, что $(Ta, a) \geqslant 0$ для $|a| = R$.

Лемма доказана.

Дадим сейчас определение очень полезного в приложениях S^+ свойства оператора p–лапласиана Δ_p.

Определение 4. *Будем говорить, что оператор*

$$A : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$$

удовлетворяет так называемому S^+ *свойству, если из того, что*

$$u_m \rightharpoonup u \quad \textit{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \textit{при} \quad m \to +\infty$$

и условия, что

$$\limsup_{m \to +\infty} \langle A(u_m), u_m - u \rangle \leqslant 0, \tag{2.22}$$

вытекает, что

$$u_m \to u \quad \textit{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \textit{при} \quad m \to +\infty.$$

Справедлива следующая вспомогательная лемма.

Л е м м а 2. *Оператор*

$$A = -\Delta_p : \mathbb{B} = W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{B}^* = W^{-1,p'}(\Omega)$$

удовлетворяет S^+ *свойству.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Справедливы следующие выражения:

$$\langle \Delta_p u - \Delta_p u_m, u_m - u\rangle =$$
$$= \int\limits_{\Omega} \Big(|D_x u_m|^{p-2} D_x u_m - |D_x u|^{p-2} D_x u, D_x u_m - D_x u \Big) \geqslant$$
$$\geqslant 2^{p-2} \int\limits_{\Omega} |D_x u_m - D_x u|^p \, dx, \quad (2.23)$$

где в последнем неравенстве мы воспользовались неравенством (2.17). Теперь заметим, что в силу слабой сходимости последовательности $\{u_m\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ вытекает, что [1]

$$\langle \Delta_p u, u_m - u\rangle \to 0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty, \quad (2.24)$$

поэтому переходя к пределу в неравенстве (2.23) в силу предельного свойства (2.22), имеющего в данном случае вид

$$\limsup_{m\to+\infty} \langle -\Delta_p u_m, u_m - u\rangle \leqslant 0,$$

получим, что

$$0 \geqslant \limsup_{m\to+\infty} \int\limits_{\Omega} |D_x u_m - D_x u|^p \, dx \geqslant 0.$$

Ясно, что

$$\liminf_{m\to+\infty} \int\limits_{\Omega} |D_x u_m - D_x u|^p \, dx \geqslant 0.$$

Значит,

$$u_m \to u \quad \text{сильно в} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Л е м м а д о к а з а н а.

---

[1] Заметим, что $\Delta_p u(x) \in W^{-1,p'}(\Omega)$.

Теперь мы приступим к доказательству слабой обобщенной разрешимости задачи (2.1) в смысле определения 2. Действительно, воспользуемся теперь методом Галеркина.

Шаг 1. С этой целью заметим, что банахово пространство $W_0^{1,p}(\Omega)$ является сепарабельным, т. е. в нем существует счетное всюду плотное множество $\{w_j\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$. Рассмотрим следующее «галеркинское» приближение:

$$u_m(x) = \sum_{k=1}^{m} c_{mk} w_k(x), \quad c_{mk} \in \mathbb{R}^1, \tag{2.25}$$

причем функции $u_m(x)$ удовлетворяют следующему равенству:

$$\langle -\Delta_p u_m, w_j \rangle = \langle f, w_j \rangle \quad \text{для всех} \quad j = \overline{1, m}. \tag{2.26}$$

Шаг 2. Теперь наша задача доказать разрешимость этой системы алгебраических уравнений. С этой целью мы и воспользуемся сформулированной и доказанной ранее леммы 1 об остром угле. Рассмотрим следующий оператор:

$$T(c_m) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m,$$

где

$$T(c_m) := (T_1(c_m), ..., T_m(c_m)), \quad c_m = (c_{m1}, ..., c_{mm}).$$
$$T_j(c_m) := -\langle \Delta_p u_m, w_j \rangle - \langle f, w_j \rangle \quad \text{при} \quad j = \overline{1, m}.$$

Теперь рассмотрим стандартное скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ в $\mathbb{R}^m$. Справедлива следующая цепочка выражений: [1])

$$\begin{aligned}(T(c_m), c_m) = -\langle \Delta_p u_m, u_m \rangle - \langle f, w_m \rangle = \|D_x u_m\|_p^p - \langle f, w_m \rangle \geqslant \\ \geqslant \|D_x u_m\|_p^p - \|f\|_* \|D_x u_m\|_p = \|D_x u_m\|_p \left(\|D_x u_m\|_p^{p-1} - \|f\|_*\right) \geqslant 0\end{aligned}$$

при достаточно большом $r : \|D_x u_m\|_p = r > 0$, где символом $\|\cdot\|_*$ обозначена норма банахова пространства $W^{-1,p'}(\Omega)$, а символом $\|D_x u\|_p$ обозначена норма банахова пространства $W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\|D_x u\|_p := \left(\int\limits_{\Omega} |D_x u|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

и мы воспользовались следующим общим неравенством:

$$|\langle f, u \rangle| \leqslant \|f\|_* \|u\| \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{B}^*, \quad u \in \mathbb{B}.$$

---

[1]) Здесь мы воспользовались равенством $\langle -\Delta_p v, v \rangle = \|D_x v\|_p^p$ для всех $v(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

☐ Докажем его. Действительно, если $u = \vartheta$ — это нулевой элемент банахова пространства $\mathbb{B}$, то неравенство выполняется. Пусть $u \neq \vartheta$, тогда в силу определения нормы $\|\cdot\|_*$ имеет место следующее равенство

$$\|f\|_* := \sup_{\|w\| \leqslant 1} |\langle f, w\rangle| ,$$

из которого сразу же вытекает неравенство

$$|\langle f, w\rangle| \leqslant \|f\|_* \quad \text{для всех} \quad \|w\| \leqslant 1.$$

Теперь возьмем в качестве w величину

$$w = \frac{u}{\|u\|}$$

и подставим это выражение в предыдущее неравенство и получим искомое неравенство. ☒

Шаг 3. Осталось заметить, что на конечномерном эвклидововм пространстве $\mathbb{R}^m$ все нормы эквивалентны, поэтому мы приходим к выводу, что найдется такое достаточно большое $R > 0$, что будет выполнено неравенство

$$(T(c_m), c_m) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad |c_m| = R > 0.$$

Следовательно, в силу леммы об остром угле существует такое $c_m \in \in \mathbb{R}^m$, что

$$T(c_m) = 0 \quad \text{при} \quad |c_m| \leqslant R,$$

т. е. алгебраическая система (2.26) имеет решение $u_m \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Тем самым, определена последовательность $\{u_m\}$ «галеркинских» приближений.

Шаг 4. Здесь заключается важный момент — нужно доказать, что при $m \to +\infty$ для некоторой подпоследовательности $\{u_{m_m}\} \subset \{u_m\}$ имеет место слабая сходимость

$$u_{m_m} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty,$$

причем $u(x)$ удовлетворяет равенству (2.19). Теперь приступим к реализации этой схемы доказательства.

Прежде всего умножим равенство (2.26) на c_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1, m}$, тогда получим следующее равенство:

$$\langle -\Delta_p u_m, u_m\rangle = \langle f, u_m\rangle, \tag{2.27}$$

в котором после «интегрирования по частям» мы получим следующую цепочку выражений:

$$\|D_x u_m\|_p^p = \langle f, u_m\rangle \leqslant \|f\|_* \|D_x u_m\|_p.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\|D_x u_m\|_p \leqslant \|f\|_*^{1/(p-1)} \quad \text{для всех} \quad m \in \mathbb{N}. \tag{2.28}$$

Следовательно, последовательность $\{u_m\}$ равномерно ограничена в банаховом пространстве $W_0^{1,p}(\Omega)$, и поэтому существует такая ее подпоследовательность [1] $\{u_{m_m}\} \subset \{u_m\}$, для которой

$$u_{m_m} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \tag{2.29}$$

Шаг 5. Теперь докажем, что выполнено свойство (2.22). Выберем последовательность вида

$$v_m = \sum_{j=1}^{m} k_{mj} w_j \tag{2.30}$$

такую, что

$$v_m \to u \quad \text{сильно в} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \tag{2.31}$$

Умножим обе части равенства (2.26) на k_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1,m}$ и в результате получим равенство

$$\langle -\Delta_p u_m, v_m \rangle = \langle f, v_m \rangle\,. \tag{2.32}$$

Тогда в силу (2.27) и (2.32) справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}\langle -\Delta_p u_m, u_m - u \rangle &= \langle f, u_m \rangle - \langle -\Delta_p u_m, u \rangle = \\ &= \langle f, u_m \rangle - \langle -\Delta_p u_m, u - v_m \rangle - \langle -\Delta_p u_m, v_m \rangle = \\ &= \langle f, u_m \rangle - \langle -\Delta_p u_m, u - v_m \rangle - \langle f, v_m \rangle = \\ &= \langle f, u_m - v_m \rangle - \langle -\Delta_p u_m, u - v_m \rangle =: \mathrm{I}_{1m} + \mathrm{I}_{2m}.\end{aligned}$$

Рассмотрим каждое слагаемое в правой части последнего равенства.

Имеет место предельное свойство

$$|\mathrm{I}_{1m}| \leqslant |\langle f, u_m - v_m \rangle| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty, \tag{2.33}$$

поскольку

$$u_m - v_m = (u_m - u) - (v_m - u) \rightharpoonup 0 \quad \text{слабо в} \quad W_0^{1,p}(\Omega).$$

Оценим второе слагаемое I_{2m}. Действительно, имеет место следующая оценка:

$$|\mathrm{I}_{2m}| \leqslant |\langle -\Delta_p u_m, u - v_m \rangle| \leqslant \|\Delta_p u_m\|_* \|u - v_m\| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty, \tag{2.34}$$

[1] Смотри первый том первую часть курса лекций М. О. Корпусова и А. А. Панина «Линейный и нелинейный функциональный анализ».

поскольку имеет место свойство (2.31) и справедлива цепочка неравенств

$$
\begin{aligned}
\|\Delta_p u_m\|_* = \sup_{\|D_x\varphi\|_p \leqslant 1} |\langle -\Delta_p u_m, \varphi\rangle| = \\
= \sup_{\|D_x\varphi\|_p \leqslant 1} \left| \int\limits_\Omega |D_x u_m|^{p-2}(D_x u_m, D_x\varphi)\, dx \right| \leqslant \\
\leqslant \sup_{\|D_x\varphi\|_p \leqslant 1} \int\limits_\Omega |D_x u_m|^{p-1}|D_x\varphi|\, dx \leqslant \\
\leqslant \sup_{\|D_x\varphi\|_p \leqslant 1} \left(\int\limits_\Omega |D_x u_m|^p\, dx\right)^{1/p'} \left(\int\limits_\Omega |D_x\varphi|^p\, dx\right)^{1/p} \leqslant \\
\leqslant \left(\int\limits_\Omega |D_x u_m|^p\, dx\right)^{1/p'} \leqslant \|f\|_*.
\end{aligned}
$$

Следовательно, имеет место свойство (2.22). Теперь осталось воспользоваться леммой 2 об S^+–свойстве p–лапласиана и получить следующий важный результат:

$$
u_{m_m} \to u \quad \text{сильно в} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \tag{2.35}
$$

Шаг 6. Наша ближайшая задача доказать, что

$$
\Delta_p u_{m_m} \to \Delta_p u \quad \text{сильно в} \quad W^{-1,p'}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \tag{2.36}
$$

С этой целью нам нужно доказать *ограниченную липшиц–непрерывность* оператора p–лапласиана. Рассмотрим следующее выражение:

$$
\left| |\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta \right| \quad \text{для любых} \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n
$$

и получим для него две «грубые» оценки, из которых потом получим одну «тонкую» оценку.

□ Действительно, имеет место первая оценка

$$
\begin{aligned}
\left| |\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta \right| = \left| |\xi|^{p-2}[\xi - \eta] + \eta \left[|\xi|^{p-2} - |\eta|^{p-2} \right] \right| \leqslant \\
\leqslant |\xi|^{p-2}|\xi - \eta| + (p-2)|\eta| \max\left\{ |\xi|^{p-3}, |\eta|^{p-3} \right\} |\xi - \eta|,
\end{aligned} \tag{2.37}
$$

а теперь вторая

$$\left||\eta|^{p-2}\eta - |\xi|^{p-2}\xi\right| = \left||\eta|^{p-2}[\eta-\xi] + \xi\left[|\eta|^{p-2} - |\xi|^{p-2}\right]\right| \leqslant$$
$$\leqslant |\eta|^{p-2}|\eta-\xi| + (p-2)|\xi|\max\left\{|\eta|^{p-3}, |\xi|^{p-3}\right\}|\eta-\xi|, \quad (2.38)$$

из которых вытекает «тонкая» оценка и дальнейшие выражения

$$\left||\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta\right| \leqslant \min\left\{|\xi|^{p-2}, |\eta|^{p-2}\right\}|\xi-\eta| +$$
$$+ (p-2)\min\{|\xi|, |\eta|\}\frac{\max\left\{|\xi|^{p-2}, |\eta|^{p-2}\right\}}{\min\{|\xi|, |\eta|\}}|\xi-\eta| =$$
$$= (p-1)\max\left\{|\xi|^{p-2}, |\eta|^{p-2}\right\}|\xi-\eta| \quad (2.39)$$

для всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ и $p \geqslant 2$. ☒

Теперь согласно определению нормы банахова пространства $W^{-1,p'}(\Omega)$ имеют место следующие выражения:

$$\|\Delta_p u - \Delta_p u_m\|_* = \sup_{\|D_x w\|_p \leqslant 1} |\langle \Delta_p u - \Delta_p u_m, w\rangle| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\|D_x w\|_p \leqslant 1} \left|\int\limits_\Omega \left||D_x u|^{p-2}D_x u - |D_x u_m|^{p-2}D_x u_m\right| |D_x w|\, dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant (p-1)\sup_{\|D_x w\|_p \leqslant 1} \int\limits_\Omega |D_x u_m - D_x u| \max\left\{|D_x u|^{p-2}, |D_x u_m|^{p-2}\right\}|D_x w|\, dx =$$
$$=: (p-1)\sup_{\|D_x w\|_p \leqslant 1} \mathrm{I}, \quad (2.40)$$

где мы воспользовались неравенством (2.39). Воспользуемся обобщенным неравенством Гельдера для последнего интеграла в цепочке выражений (2.40).

□ Действительно, в обобщенном неравенстве Гельдера положим соответственно

$$p_1 = p, \quad p_2 = \frac{p}{p-2}, \quad p_3 = p, \quad r = 1, \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1, \quad p \geqslant 2.$$

И тогда получим следующее неравенство для I :

$$\mathrm{I} \leqslant \left(\int\limits_\Omega |D_x u - D_x u_m|^p\, dx\right)^{1/p} \times$$
$$\times \left(\int\limits_\Omega \max\left\{|D_x u|^p, |D_x u_m|^p\right\}\, dx\right)^{(p-2)/p} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\Omega} |D_x w|^p \, dx \right)^{1/p} . \quad \boxtimes \qquad (2.41)$$

Таким образом, из неравенств (2.40) и (2.41) вытекает следующая оценка:

$$\|\Delta_p u - \Delta_p u_m\|_* \leqslant \mu(R_m) \|D_x u - D_x u_m\|_p, \qquad (2.42)$$

$$\mu(R_m) = c_1 R_m^{p-2}, \quad R_m = \max \left\{ \|D_x u\|_p, \|D_x u_m\|_p \right\}.$$

В силу свойства (2.28) приходим к выводу, что имеет место неравенство

$$\mu(R_m) \leqslant c_1 \max \left\{ \|D_x u\|_p, \|f\|_*^{1/(p-1)} \right\}.$$

Тем самым, мы в силу (2.35) и (2.42) приходим к выводу о том, что

$$\Delta_p u_m \to \Delta_p u \quad \text{сильно в} \quad W^{-1,p'}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \qquad (2.43)$$

Осталось перейти к пределу при $m \to +\infty$ в равенстве (2.26) и получить с учетом (2.43) следующий результат:

$$\langle -\Delta_p u, w_j \rangle = \langle f, w_j \rangle \quad \text{для всех} \quad j = \overline{1, +\infty}, \qquad (2.44)$$

из которого в силу плотности счетного семейства $\{w_j\}$ в $W_0^{1,p}(\Omega)$ вытекает, что построенная функция $u(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ удовлетворяет равенству (2.19) определения 2 слабого решения.

Шаг 7. Осталось доказать единственность слабого решения. Для этого воспользуемся неравенством (2.17), из которого вытекает следующее неравенство:

$$\langle -\Delta_p u_1 + \Delta_p u_2, u_2 - u_1 \rangle =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \Big(|D_x u_2|^{p-2} D_x u_2 - |D_x u_1|^{p-2} D_x u_1, D_x u_2 - D_x u_1 \Big) \, dx \geqslant$$

$$\geqslant 2^{2-p} \int\limits_{\Omega} |D_x u_1 - D_x u_2|^p \, dx. \qquad (2.45)$$

Теперь возьмем в неравенстве (2.45) в качестве $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ любые два слабых решения в смысле определения 2, но тогда из неравенства (2.45) вытекает, равенство

$$\int\limits_{\Omega} |D_x u_1 - D_x u_2|^p \, dx = 0.$$

Отсюда вытекает единственность решения задачи (2.1), понимаемого в слабом смысле определения 2. Таким образом, мы доказали следующее утверждение:

Теорема 1. *Для всякой* $f(x) \in W^{-1,p'}(\Omega)$ *существует единственное слабое решение* $u(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *задачи* (2.1), *понимаемой в слабом смысле определения* 2.

Лекция 12

МЕТОД МОНОТОННЫХ ОПЕРАТОРОВ. ОБЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

§ 1. Основные понятия теории монотонных операторов

Пусть $\mathbb{B}$ — это банахово пространство с сильным сопряженным $\mathbb{B}^*$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — это скобки двойственности между этими банаховыми пространствами. Через $\|\cdot\|$ обозначим норму банахова пространства $\mathbb{B}$, а через $\|\cdot\|_*$ — норму банахова пространства $\mathbb{B}^*$. Дадим некоторые определения.

Определение 1. *Оператор $A : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ называется*

(i) *радиально непрерывным, если при любых фиксированных $u, v \in \mathbb{B}$ вещественная функция $s \to \langle A(u + sv), v\rangle$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$;*

(ii) *деминепрерывным, если из $u_n \to u$ сильно в $\mathbb{B}$ следует, что*

$$Au_n \rightharpoonup Au \quad *-\textit{слабо в} \quad \mathbb{B}^* \quad \textit{при} \quad n \to +\infty;$$

(iii) *липшиц-непрерывным, если существует такая постоянная M, что*

$$\|Au - Av\| \leqslant M\|u - v\|$$

для любых $u, v \in \mathbb{B}$;

(iv) *ограниченно липшиц-непрерывным, если существует неубывающая и ограниченная на компактах функция μ на $[0, +\infty)$, такая, что для любых $u, v \in \mathbb{B}$*

$$\|Au - Av\| \leqslant \mu(R)\|u - v\|,$$

где $R = \max\{\|u\|, \|v\|\}$.

Замечание 1. Заметим, что из деминепрерывности оператора $A : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ вытекает радиальная непрерывность.

☐ Действительно, пусть $\{s_n\} \in [0, 1]$ и

$$s_n \to s \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Очевидно, что $s \in [0, 1]$. При этом для любых $u, v \in \mathbb{B}$

$$u + s_n v \to u + sv \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Поэтому в силу деминепрерывности оператора A имеем

$$\langle A(u+s_n v), v\rangle \to \langle A(u+sv), v\rangle \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Следовательно, функция

$$\varphi(s) := \langle A(u+sv), v\rangle \in \mathbb{C}[0,1]$$

для каждых $u, v \in \mathbb{B}$ фиксированных. ☒

Теперь дадим определения различных вариантов свойства монотонности операторов.

Определение 2. *Пусть u, v — произвольные элементы из $\mathbb{B}$. Оператор $A : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ называется*:

(i) *монотонным, если*

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geqslant 0;$$

(ii) *строго монотонным, если*

$$\langle Au - Av, u - v\rangle > 0 \quad \text{для} \quad u \neq v;$$

(iii) *сильно монотонным (с постоянной монотонности m), если*

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geqslant m\|u - v\|^2, \quad m > 0;$$

(iv) *локально ограниченным, если для любого фиксированного $u \in \mathbb{B}$ существуют постоянные $\varepsilon > 0$ и $M > 0$, такие, что $\|Av\|_* \leqslant M$ при $\|u - v\| \leqslant \varepsilon$.*

Наконец, напомним определение важного свойства операторов — *коэрцитивности* операторов.

Определение 3. *Оператор $A : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ называется коэрцитивным [1], если существует определенная на $[0, +\infty)$ вещественная функция $\gamma(s)$, удовлетворяющая предельному свойству с*

$$\lim_{s \to +\infty} \gamma(s) = +\infty,$$

такая, что

$$\langle Au, u\rangle \geqslant \gamma(\|u\|)\|u\|.$$

Для дальнейшего нам необходимы следующие вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Каждый монотонный оператор $A : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ локально ограничен.*

[1] Это определение эквивалентно ранее данному определению 3 коэрцитивности лекции 11.

Доказательство.

Шаг 1. Допустим, что A не является локально ограниченным. Тогда существует последовательность $\{u_n\}$, такая, что $u_n \to u$ сильно в $\mathbb{B}$ и $\|Au_n\|_* \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Без ограничения общности можно считать, что

$$\|Au_n\|_* > 1 \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Шаг 2. Для $n = 1, 2...$ положим

$$\alpha_n := 1 + \|Au_n\|_* \|u_n - u\|.$$

В силу монотонности A, для любого $v \in \mathbb{B}$ имеем

$$\langle Au_n - A(u+v), u_n - u - v \rangle \geqslant 0$$

и поэтому имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha_n} \langle Au_n, v \rangle &\leqslant \frac{1}{\alpha_n} \left(\langle Au_n, v \rangle + \langle Au_n - A(u+v), u_n - u - v \rangle \right) \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{\alpha_n} \left(\langle Au_n, u_n - u \rangle + \langle A(u+v), v + u - u_n \rangle \right) \leqslant \\
&\leqslant \frac{\|Au_n\|_* \|u_n - u\|}{\alpha_n} + \frac{1}{\alpha_n} \|A(u+v)\|_* \left(\|v\| + \|u - u_n\| \right) \leqslant \\
&\leqslant 1 + \frac{1}{\alpha_n} \|A(u+v)\|_* \left(\|v\| + \|Au_n\|_* \|u - u_n\| \right) \leqslant M_1, \quad (1.1)
\end{aligned}$$

где постоянная M_1 зависит от u, v, но не зависит от n.

Шаг 3. Соответствующая оценка справедлива и для $-v$. Таким образом,

$$\limsup_{n \to +\infty} \left| \frac{1}{\alpha_n} \langle Au_n, v \rangle \right| < +\infty \quad \forall\, v \in \mathbb{B},$$

откуда вытекает следующая цепочка неравенств:

$$\frac{1}{\alpha_n} \|Au_n\|_* = \frac{1}{\alpha_n} \sup_{\|v\| \leqslant 1} |\langle Au_n, v \rangle| \leqslant M_1$$

т. е.

$$\|Au_n\|_* \leqslant M_1 \alpha_n = M_1 \left(1 + \|Au_n\|_* \|u - u_n\| \right).$$

Пусть $n_0 \in \mathbb{N}$ выбрано так, чтобы для $n \geqslant n_0$ выполнялось условие

$$M_1 \|u - u_n\| \leqslant 1/2.$$

Тогда из последнего неравенства следует, что при $n \geqslant n_0$

$$\|Au_n\|_* \leqslant 2M_1.$$

Но это противоречит тому факту, что $\|Au_n\|_* \to +\infty$.

Лемма доказана.

Справедлива следующая лемма:

Лемма 2. *Каждый линейный монотонный оператор* $A : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ *сильно непрерывен.*

Доказательство.

Пусть $u_n \to u$ сильно в $\mathbb{B}$. Положим

$$v_n = \begin{cases} (u_n - u)\Big/\|u_n - u\|^{1/2}, & \text{при} \quad u_n \neq u; \\ \vartheta, & \text{при} \quad u_n = u. \end{cases}$$

Тогда $v_n \to 0$ сильно в $\mathbb{B}$ и по лемме 1

$$\|Av_n\|_* \leqslant M = const.$$

Отсюда получаем

$$\|Au_n - Au\|_* = \|u_n - u\|^{1/2}\|Av_n\|_* \leqslant M\|u_n - u\|^{1/2} \to +0.$$

Лемма доказана.

Справедлива следующая важная лемма.

Лемма 3. *Пусть* $A : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ *— монотонный оператор. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1. *оператор* A *радиально непрерывен*;
2. *из* $\langle f - Av, u - v\rangle \geqslant 0\ \forall\, v \in \mathbb{B}$ *следует* $Au = f$;
3. *из соотношений*

$$\text{а)}\ u_n \rightharpoonup u \quad \textit{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \textit{при} \quad n \to +\infty,$$

$$\text{б)}\ Au_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad * - \textit{слабо в} \quad \mathbb{B}^* \quad \textit{при} \quad n \to +\infty,$$

$$\text{в)}\ \limsup_{n\to+\infty}\langle Au_n, u_n\rangle \leqslant \langle f, u\rangle$$

   следует, что $Au = f$;
4. *оператор* A *деминепрерывен*;

Доказательство.

Шаг 1. 1. $\Rightarrow$ 2. Пусть v — произвольный элемент из $\mathbb{B}$ и $v_t = u - tv$, $t > 0$. Имеем

$$0 \leqslant \langle f - Av_t, u - v_t\rangle = \langle f - Av_t, tv\rangle = t\langle f - Av_t, v\rangle$$

или, после деления на t, $0 \leqslant \langle f - Av_t, v\rangle$. Отсюда при $t \to 0$ получаем в силу радиальной непрерывности оператора A неравенство

$$0 \leqslant \langle f - Au, v\rangle \quad \text{для всех} \quad v \in \mathbb{B}.$$

Ввиду произвольности $v \in \mathbb{B}$ из этого неравенства следует, что $Au = f$.

$\square$ Действительно, пусть, например,

$$\langle f - Au, v\rangle > 0 \quad \text{при некотором} \quad v \in \mathbb{B},$$

но тогда при $-v$ мы получим неравенство

$$0 \leqslant \langle f - Au, -v\rangle \Rightarrow 0 < \langle f - Au, v\rangle \leqslant 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что

$$\langle f - Au, v\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad v \in \mathbb{B} \Rightarrow f - Au = \vartheta^* \in \mathbb{B}^*. \quad \boxtimes$$

Шаг 2. 2. $\Rightarrow$ 3. Пусть

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

$$Au_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad *-\text{слабо в} \quad \mathbb{B}^* \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

и

$$\limsup_{n\to+\infty}\langle Au_n, u_n\rangle \leqslant \langle f, u\rangle.$$

Тогда для произвольного $v \in \mathbb{B}$ имеем

$$\begin{aligned}\langle f - Av, u - v\rangle = \langle f, u\rangle - \langle f, v\rangle - \langle Av, u - v\rangle \geqslant \\ \geqslant \limsup_{n\to+\infty}\left(\langle Au_n, u_n\rangle - \langle f, v\rangle - \langle Av, u - v\rangle\right) = \\ = \limsup_{n\to+\infty}\left(\langle Au_n, u_n\rangle - \langle Au_n, v\rangle - \langle Av, u_n - v\rangle\right) = \\ = \limsup_{n\to+\infty}\langle Au_n - Av, u_n - v\rangle \geqslant 0.\end{aligned}$$

Отсюда на основании свойства 2. вытекает, что $Au = f$.

Шаг 3. 3. $\Rightarrow$ 4.

Пункт 1. Пусть $u_n \to u$ сильно в $\mathbb{B}$ при $n \to +\infty$.

Пункт 2. Вследствие локальной ограниченности оператора A последовательность $\{\|Au_n\|_*\}$ ограничена. Тогда найдется такая подпоследовательность $\{v_n\}$ последовательности $\{u_n\}$, такая, что

$$Av_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad *-\text{слабо в} \quad \mathbb{B}^* \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Ясно, что при этом имеем

$$v_n \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

поэтому

$$v_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Тогда имеет место следующее равенство:

$$\langle Av_n, v_n\rangle = \langle Av_n, v_n - u\rangle + \langle Av_n, u\rangle,$$

причем

$$|\langle Av_n, v_n - u\rangle| \leqslant \|Av_n\|_*\|v_n - u\| \leqslant M_1\|v_n - u\| \to +0,$$

$$\langle Av_n, u\rangle \to \langle f, u\rangle$$

при $n \to +\infty$. Тогда имеем

$$\lim_{n\to+\infty} \langle Av_n, v_n\rangle = \langle f, u\rangle,$$

откуда, в силу свойства 3., $Au = f$ и

$$Av_n \overset{*}{\rightharpoonup} Au \quad *-\text{слабо в} \quad \mathbb{B}^* \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Пункт 3. Теперь предположим, что найдется такая подпоследовательность $\{w_n\} \subset \{u_n\}$, что последовательность $\{Aw_n\}$ не сходится $*$–слабо к Au в $\mathbb{B}^*$. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$ и такой элемент $z \in \in \mathbb{B}$, что для некоторой подпоследовательности $\{w_n\} \subset \{u_n\}$ выполнено неравенство

$$|\langle Aw_n, z\rangle - \langle Au, z\rangle| > \varepsilon \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Отметим, что

$$\|Aw_n\|_* \leqslant M_1 \quad \text{и} \quad w_n \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Тогда повторяя рассуждения, мы получим, что найдется такая ее подпоследовательность $\{w_{n_n}\}$, что

$$Aw_{n_n} \overset{*}{\rightharpoonup} Au \quad *-\text{слабо в} \quad \mathbb{B}^* \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

При этом для $\{w_{n_n}\}$ должно быть выполнено неравенство (1.2). Полученное противоречие доказывает, что

$$Au_n \overset{*}{\rightharpoonup} Au \quad *-\text{слабо в} \quad \mathbb{B}^* \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Шаг 4. 4. $\Rightarrow$ 1. Это утверждение было доказано ранее в замечании 1.

Лемма доказана.

Справедлива следующая вспомогательная лемма:

Лемма 4. *Пусть $A : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ — радиально непрерывный монотонный оператор. Тогда при любом $f \in \mathbb{B}^*$ множество $K(f)$ решений уравнения $Au = f$ выпукло и слабо замкнуто.*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $u_1, u_2 \in K(f)$ и $u_t = tu_1 + (1-t)u_2$, $t \in [0,1]$. Тогда для любого $v \in \mathbb{B}$

$$\begin{aligned}\langle f - Av, u_t - v\rangle &= \\ &= \langle f - Av, tu_1 - tv\rangle + \langle f - Av, (1-t)u_2 - (1-t)v\rangle = \\ &= t\langle Au_1 - Av, u_1 - v\rangle + (1-t)\langle Au_2 - Av, u_2 - v\rangle \geqslant 0\end{aligned}$$

откуда в силу леммы 3 свойства 2 вытекает

$$Au_t = f,$$

т. е. $K(f)$ выпукло.

Шаг 2. Пусть $\{u_n\}$ — последовательность элементов $u_n \in K$ такая, что

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Для любого $v \in \mathbb{B}$ имеем

$$\langle f - Av, u - v\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle f - Av, u_n - v\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle Au_n - Av, u_n - v\rangle \geqslant 0,$$

поскольку $Au_n = f$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, в силу утверждения 2 леммы 3 вытекает равенство

$$Au = f,$$

т. е. $K(f)$ слабо замкнуто.

Лемма доказана.

§ 2. Теорема существования Браудера–Минти

В этом параграфе мы изложим важную теорию Браудера–Минти монотонных, коэрцитивных операторов, нашедшую важное приложение в теории эллиптических краевых задач.

Пусть банахово пространство $\mathbb{B}$ является сепарабельным. Справедлива следующая основная теорема.

Теорема Браудера–Минти. *Пусть $A : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ — радиально непрерывный монотонный коэрцитивный оператор. Тогда множество решений уравнения*

$$Au = f \tag{2.1}$$

при любом $f \in \mathbb{B}^*$ непусто, слабо замкнуто и выпукло.

Доказательство. Нам нужно доказать существование решения $u \in \mathbb{B}$ следующей задачи:

$$\langle Au, v\rangle = \langle f, v\rangle \quad \text{для всех} \quad v \in \mathbb{B}. \tag{2.2}$$

Шаг 1. Ввиду леммы 4 нам надо лишь показать, что (2.1) имеет по крайней мере одно решение. Пусть $\{w_n\} \subset \mathbb{B}$ — счётная система линейно независимых элементов плотная в $\mathbb{B}$, и пусть $\mathbb{B}_n$ — замкнутая линейная оболочка векторов $\{w_1, ..., w_n\}$. Тогда соответствие

$$L : \mathbb{R}^n \ni c = \{c_1, ..., c_n\} \to \sum_{i=1}^n c_i w_i =: u_n$$

определяет взаимно однозначное непрерывное отображение L пространства $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{B}_n$. Очевидно,

$$|c|_1 := \|Lc\| \quad \forall\, c \in \mathbb{R}^n$$

является нормой на $\mathbb{R}^n$. В силу эквивалентности всех норм на конечномерном пространстве имеем

$$|c| \leqslant a|c|_1 = a\|Lc\|, \quad a > 0.$$

Шаг 2. Сопоставим задаче (2.2) конечномерную задачу о существовании галеркинских приближений

$$u_n := \sum_{i=1}^{n} c_i w_i, \quad \langle Au_n, w_k\rangle = \langle f, w_k\rangle \quad \text{при} \quad k = \overline{1,n}. \tag{2.3}$$

Определим оператор $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ по правилу

$$T\mathrm{c} = \{b_1, ..., b_n\}, \quad b_k = \langle ALc - f, w_k\rangle.$$

Поскольку A как радиально непрерывный монотонный оператор деминепрерывен (смотри утверждение 4 леммы 3), то оператор T непрерывен.

□ Оператор $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{B}_n$ непрерывен в соответствующих сильных топологиях указанных пространств, а оператор $A : \mathbb{B}_n \subset \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ деминепрерывен. Поэтому композиция указанных операторов является деминепрерывным оператором. ⊠

Из коэрцитивности A следует, что для достаточно больших $R_1 > 0$

$$\left(\frac{\langle Au_n, u_n\rangle}{\|u_n\|} - \|f\|_*\right)\|u_n\| \geqslant 0 \quad \text{при} \quad \|u_n\| \geqslant R_1.$$

Поэтому для $|c| = R = aR_1$

$$(Tc, c) = \sum_{i=1}^{n} b_i c_i = \langle Au_n, u_n\rangle - \langle f, u_n\rangle \geqslant$$
$$\geqslant \left(\frac{\langle Au_n, u_n\rangle}{\|u_n\|} - \|f\|_*\right)\|u_n\| \geqslant 0.$$

Следовательно, согласно лемме об остром угле (смотри лекцию 11), существует такое $c \in \mathbb{R}^n$, что $Tc = 0$. Значит, для $u_n = Lc$

$$\langle Au_n, w_k\rangle = \langle f, w_k\rangle, \quad k = \overline{1,n}. \tag{2.4}$$

Таким образом, существует решение задачи (2.3).

Шаг 3. Умножим обе части равенства (2.4) на c_k, просуммируем по $k = \overline{1, n}$ и в результате получим равенство

$$\langle Au_n, u_n \rangle = \langle f, u_n \rangle. \tag{2.5}$$

Из этого равенства вытекает неравенство

$$\langle Au_n, u_n \rangle \leqslant \|f\|_* \|u_n\| \Rightarrow \frac{\langle Au_n, u_n \rangle}{\|u_n\|} \leqslant \|f\|_*. \tag{2.6}$$

Из оценки (2.6) и коэрцитивности A вытекает, что

$$\|u_n\| \leqslant M_1. \tag{2.7}$$

□ Действительно, в противном случае мы бы имели

$$\lim_{\|u_n\| \to +\infty} \frac{\langle Au_n, u_n \rangle}{\|u_n\|} = +\infty. \quad \boxtimes$$

Поэтому из (2.6) и (2.7) вытекает следующее неравенство:

$$\langle Au_n, u_n \rangle \leqslant M_2 \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.8}$$

Шаг 4. Докажем теперь, что из неравенств (2.7) и (2.8) вытекает оценка

$$\|Au_n\|_* \leqslant M \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.9}$$

□ Действительно, в силу монотонности оператора A он является локально ограниченным в нуле. Поэтому существуют такие постоянные $\varepsilon > 0$ и $M_3 > 0$, что имеет место следующие неравенства:

$$\|Av\|_* \leqslant M_3 \quad \text{для всех} \quad \|v\| \leqslant \varepsilon.$$

Из монотонности оператора A имеем

$$\langle Au_n - Av, u_n - v \rangle \geqslant 0 \Rightarrow \langle Au_n, v \rangle \leqslant \langle Au_n, u_n \rangle + \langle Av, v \rangle - \langle Av, u_n \rangle.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\|Au_n\|_* = \sup_{\|w\| \leqslant 1} |\langle Au_n, w \rangle| = \left\{ w = \frac{v}{\varepsilon} \right\} = \sup_{\|v\| \leqslant \varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} |\langle Au_n, v \rangle| \leqslant \\
\leqslant \sup_{\|v\| \leqslant \varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} |\langle Au_n, u_n \rangle + \langle Av, v \rangle - \langle Av, u_n \rangle| \leqslant \\
\leqslant \sup_{\|v\| \leqslant \varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} [M_2 + \|Av\|_* \|v\| + \|Av\|_* \|u_n\|] \leqslant \\
\leqslant \frac{1}{\varepsilon} (M_2 + M_3 \varepsilon + M_3 M_1) = M. \quad \boxtimes
\end{aligned}$$

Шаг 5. Далее, в силу (2.4)

$$\lim_{n\to+\infty}\langle Au_n, w\rangle = \langle f, w\rangle \quad \forall\, w \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbb{B}_n.$$

Отсюда следует, что

$$Au_n \rightharpoonup f \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}^* \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{2.10}$$

В силу априорной оценки (2.7) существует такая подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$ последовательности $\{u_n\}$, что

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad k \to +\infty. \tag{2.11}$$

Из равенства (2.5), записанного для подпоследовательности $\{u_{n_k}\}$ и из (2.11) получаем

$$\lim_{k\to+\infty}\langle Au_{n_k}, u_{n_k}\rangle = \lim_{k\to+\infty}\langle f, u_{n_k}\rangle = \langle f, u\rangle. \tag{2.12}$$

Но тогда в силу (2.10)–(2.12) согласно утверждения 3 леммы 3 элемент $u \in \mathbb{B}$ является решением уравнения $Au = f$.

Теорема доказана.

Справедливо следующая важная теорема:

Теорема 2. *Пусть оператор $A : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ радиально непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Тогда существует обратный оператор $A^{-1} : \mathbb{B}^* \to \mathbb{B}$, и этот обратный оператор строго монотонен и ограничен.*

Доказательство. Доказательство проведем за три шага.

Шаг 1. Оператор $A^{-1} : \mathbb{B}^* \to \mathbb{B}$ существует. Очевидно, достаточно показать, что уравнение $Au = f$ при любом $f \in \mathbb{B}^*$ имеет точно одно решение. Теорема 1 гарантирует существование хотя бы одного решения u. Пусть v — другое решение. Тогда

$$\langle Au - Av, u - v\rangle = 0.$$

Вследствие строгой монотонности A отсюда следует, что $u = v$.

Шаг 2. Оператор A^{-1} строго монотонен. Пусть $f, g \in \mathbb{B}^*$, $f \neq g$. Положим $u = A^{-1}f$, $v = A^{-1}g$. Заметим, что $u \neq v$.

□ Действительно, в противном случае имеет место следующая цепочка выражений:

$$u = v \Rightarrow A^{-1}f = A^{-1}g \Rightarrow f = g. \quad \boxtimes$$

В силу строгой монотонности A и доказанного неравенства $u \neq v$ вытекает неравенство

$$\langle f - g, A^{-1}f - A^{-1}g\rangle = \langle Au - Av, u - v\rangle > 0 \quad \text{для всех} \quad f \neq g.$$

Шаг 3. Оператор A^{-1} ограничен. Пусть $Au = f$ и $\|f\|_* \leqslant M$. Поскольку

$$\langle Au, u\rangle \geqslant \gamma(\|u\|)\|u\| \quad \text{и} \quad \langle Au, u\rangle = \langle f, u\rangle \leqslant \|f\|_* \|u\|,$$

то мы приходим к неравенству

$$\gamma(\|u\|) \leqslant \|f\|_*. \tag{2.13}$$

Так как $\gamma(s) \to +\infty$ при $s \to +\infty$, то отсюда вытекает, что

$$\|u\| = \|A^{-1}f\| \leqslant K$$

с постоянной K, зависящей только от M. Следовательно, оператор A^{-1} ограничен.

Теорема доказана.

Лекция 13

МЕТОД ГАЛЕРКИНА И КОМПАКТНОСТИ. ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

§ 1. Параболическое уравнение с p—лапласианом

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для уравнения параболического типа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(|D_x u|^{p-2} D_x u) = f(x,t), \quad (x,t) \in D = \Omega \otimes (0,T), \tag{1.1}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad (x,t) \in \partial\Omega \otimes (0,T),$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \quad p > 2.$$

Определение 1. *Слабым решением задачи* (1.1) *назовем функцию* $u(x)(t)$, *удовлетворяющую условию*

$$\int_0^T \langle L(u), w \rangle \, dt = \int_0^T \langle f, w \rangle \, dt \tag{1.2}$$

для любого $w(x,t) \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))$,

$$L(u) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(|D_x u|^{p-2} D_x u),$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ — *это скобки двойственности между банаховыми пространствами* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *и* $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Замечание 1. Введём линейное пространство

$$W \overset{\text{def}}{=} \Big\{ u(t) : \ u(t) \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)), \\ u'(t) \in L^{p'}(0,T; W^{-1,p'}(\Omega)) \Big\}, \quad p' = \frac{p}{p-1}, \quad p > 1, \tag{1.3}$$

которое является банаховым относительно нормы

$$\|u\|_W \overset{\text{def}}{=} \left(\int_0^T \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \, dt \right)^{1/p} + \left(\int_0^T \|u'\|^{p'}_{W^{-1,p'}(\Omega)} \, dt \right)^{1/p'}. \tag{1.4}$$

Справедлива следующая важная лемма, доказательство которой имеется в [4] (смотри лемму 1.11 четвёртой главы):

Л е м м а 1. *Имеет место непрерывное вложение* W *в* $\mathbb{C}([0,T];L^2(\Omega))$.

Докажем основную теорему этой лекции.

Т е о р е м а 1. *Пусть заданы функции* $f(x,t)$ *и* $u_0(x)$, *удовлетворяющие условиям*

$$f(x,t)\in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)),\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,$$

$$u_0(x)\in L^2(\Omega).$$

Тогда существует единственное слабое решение $u(x)(t)$ *задачи* (1.2) *в классе*

$$u(x)(t)\in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)),\quad u'(x)(t)\in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)). \tag{1.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 1. Положим

$$A(v):=-\operatorname{div}(|D_xv|^{p-2}D_xv). \tag{1.6}$$

Представим оператор $A(v)$ в виде композиции трёх операторов — двух линейных и одного нелинейного:

$$A(v)=-\operatorname{div}\eta,\quad \eta=|\xi|^{p-2}\xi,\quad \xi=D_xv. \tag{1.7}$$

Пусть $v(t)\in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, тогда

$$\xi=D_xv:\ L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))\to\underbrace{L^p(0,T;L^p(\Omega))\otimes\cdots\otimes L^p(0,T;L^p(\Omega))}_{N},$$

$$\eta=|\xi|^{p-2}\xi:\ \underbrace{L^p(0,T;L^p(\Omega))\otimes\cdots\otimes L^p(0,T;L^p(\Omega))}_{N}\to$$
$$\to\underbrace{L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega))\otimes\cdots\otimes L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega))}_{N},$$

$$\operatorname{div}\eta:\underbrace{L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega))\otimes\cdots\otimes L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega))}_{N}\to$$
$$\to L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)).$$

Таким образом, отсюда и из (1.7) вытекает, что [1])

$$A(v) : L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \to L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)). \tag{1.8}$$

Тогда из (1.1) следует, что

$$u' = \frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t) + \operatorname{div}(|D_x u|^{p-2} D_x u) \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)). \tag{1.9}$$

Значит, если слабое решение рассматриваемой задачи существует, то

$$u(t) \in W,$$

а, значит, в силу леммы 1 имеем $u(t) \in \mathbb{C}([0,T];L^2(\Omega))$ и поэтому определено начальное условие $u(0) \in L^2(\Omega)$.

Шаг 2. Пусть $\{w_j\}_{j=1}^{+\infty} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ — это линейное счётное множество, плотное в $W_0^{1,p}(\Omega)$. Определим галеркинское приближение $u_m(t)$ задачи (1.2) следующим образом:

$$\left(u_m'(t), w_j\right)_2 + \langle A(u_m(t)), w_j\rangle = \langle f(t), w_j\rangle\,, \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{1.10}$$

где

$$u_m(t) := \sum_{k=1}^{m} c_{mk}(t) w_k, \quad c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}[0,T_m],$$

$$u_m(0) = u_{0m} := \sum_{k=1}^{m} c_{mk}(0) w_k, \quad u_{0m} \to u_0 \in L^2(\Omega) \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega)$$

при $m \to +\infty$, где $(\cdot,\cdot)_2$ — это скалярное произведение в $L^2(\Omega)$.

Если ввести матрицу

$$a_{kj} := (w_k, w_j)_2,$$

то можно переписать систему обыкновенных дифференциальных уравнений (1.10) в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^{m} a_{kj} \frac{dc_{mk}(t)}{dt} = f_j(c_{m1}, \ldots, c_{mm}, t) :=$$
$$= -\langle A(u_m(t)), w_j\rangle + \langle f(t), w_j\rangle\,, \quad j = \overline{1,m}, \tag{1.11}$$

вместе с начальными условиями

$$c_{mk}(0) := \alpha_{mk}, \quad \sum_{k=1}^{m} \alpha_{mk} w_k \to u_0 \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega). \tag{1.12}$$

[1]) В работе [25] доказано, что оператор A переводит измеримые функции в измеримые.

Отметим, что матрица (a_{kj}) размера $m \otimes m$ в силу линейной независимости базисных элементов $\{w_k\}_{k=1}^m \subset W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ для всякого $m \in \mathbb{N}$ невырожденная. Поэтому в силу классической теорема Пеано приходим к выводу о существовании такого $T_m > 0$, что существует решение $c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_m])$ задачи Коши (1.12) системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.11).

Итак, для каждого $m \in \mathbb{N}$ найдется такое $T_m > 0$, что существует галеркинские приближения $u_m(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_m]; W_0^{1,p}(\Omega))$.

Шаг 3. Займемся выводом априорных оценок. Заметим, что

$$\langle A(u), u \rangle = \langle -\Delta_p u, u \rangle = \|u\|^p, \tag{1.13}$$

где $\|\cdot\|$ — это «стандартная» норма на $W_0^{1,p}(\Omega)$, т. е.

$$\|v\| \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int\limits_{\Omega} |D_x v|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Символом $|\cdot|$ обозначим норму в $L^2(\Omega)$. Тогда умножим (1.10) на $c_{mj}(t)$, просуммируем по $j = \overline{1, m}$ и получим следующее равенство:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m(t)|^2 + \langle A(u_m), u_m \rangle = \langle f(t), u_m \rangle,$$

$$\langle A(u_m), u_m \rangle = \|u_m\|^p, \quad \langle f(t), u_m \rangle \leqslant \|f\|_* \|u_m\|.$$

Откуда в силу (1.13) после интегрирования по времени получим неравенство

$$\frac{1}{2} |u_m(t)|^2 + \int\limits_0^t \|u_m(s)\|^p \, ds \leqslant \int\limits_0^t \|f(s)\|_* \|u_m(s)\| \, ds + \frac{1}{2} |u_{0m}|^2. \tag{1.14}$$

Напомним вид трех параметрического неравенства Юнга

$$a \cdot b \leqslant \varepsilon a^p + c(\varepsilon) b^{p'}, \quad p' = \frac{p}{p-1}, \quad c(\varepsilon) := \frac{1}{p' (p\, \varepsilon)^{1/(p-1)}}.$$

Используя это неравенство, из неравенства (1.14) получим априорную оценку

$$\frac{1}{2} |u_m(t)|^2 + (1 - \varepsilon) \int\limits_0^t \|u_m(s)\|^p \, ds \leqslant c(\varepsilon) \int\limits_0^t \|f(s)\|_*^{p'} \, ds + \frac{1}{2} |u_{0m}|^2 \ ^{1)}. \tag{1.15}$$

[1] Это уравнение рассматривается и при $t = T$.

Отсюда следует, что время $T_m > 0$ может быть выбрано не зависящим от $m \in \mathbb{N}$. Ниже вместо T_m мы буде писать просто T. Кроме того, из (1.15) вытекает, что последовательность

$$\{u_m\}_{m=1}^{+\infty} \quad \text{ограничена в} \quad L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)). \quad (1.16)$$

Поскольку

$$\|A(u)\|_* = \|u\|^{p-1} \Rightarrow \|A(u)\|_*^{p'} = \|u\|^p \Rightarrow \int\limits_0^T \|A(u)\|_*^{p'}\,dt = \int\limits_0^T \|u\|^p\,dt,$$

где $\|\cdot\|_*$ — норма банахова пространства $W^{-1,p'}(\Omega)$, то последовательность

$$\{A(u_m)\}_{m=1}^{+\infty} \quad \text{ограничена в} \quad L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)). \quad (1.17)$$

Шаг 4. В силу (1.16) и (1.17), мы можем выделить такую подпоследовательность $\{u_\mu\}$, что

$$u_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} u \qquad * -\text{слабо в} \quad L^{\infty}(0,\mathrm{T};L^2(\Omega)), \quad (1.18)$$

$$u_\mu \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)), \quad (1.19)$$

$$u_\mu(T) \rightharpoonup \xi \quad \text{слабо в} \quad L^2(\Omega), \quad (1.20)$$

$$A(u_\mu) \rightharpoonup \chi \quad \text{слабо в} \quad L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)) \quad (1.21)$$

при $\mu \to +\infty$. В частности, из этих предельных свойств вытекает, что

$$u(t) \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)), \quad (1.22)$$

$$\xi \in L^2(\Omega), \quad \chi \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)). \quad (1.23)$$

Шаг 5. Продолжим $u_m(t)$, $A(u_m(t))$, f и χ на $\mathbb{R}$ нулем вне $[0,T]$; соответствующие продолжения обозначим через $\overline{u}_m(t)$, $\overline{A(u_m(t))}$, $\overline{f}$ и $\overline{\chi}$. Из (1.10) следует, что

$$\left(\frac{d}{dt}\overline{u}_m(t), w_j\right)_2 + \left(\overline{A(u_m(t))}, w_j\right)_2 = \\ = \left(\overline{f}(t), w_j\right)_2 + (u_m(0), w_j)_2\,\delta(t-0) - (u_m(T), w_j)_2\,\delta(t-T). \quad (1.24)$$

Здесь мы воспользовались известными формулами связи классической производной с производной в смысле распределений, которая в данном случае имеет вид

$$\left(\frac{d}{dt}\overline{u}_m(t), w_j\right)_2 =$$

$$= \left(\overline{u}'_m(t), w_j\right)_2 + (u_m(0), w_j)_2\, \delta(t-0) - (u_m(T), w_j)_2\, \delta(t-T),$$

поскольку $(\overline{u}_m(t), w_j)_2 \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T])$.

Теперь можно перейти к пределу в (1.24) [1]) при $m = \mu \to +\infty$ и фиксированном j. В результате получим равенство в смысле $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$

$$\left(\frac{d}{dt}\overline{u}, w_j\right)_2 + (\overline{\chi}, w_j)_2 = \left(\overline{f}, w_j\right)_2 + \\ + (u_0, w_j)_2\, \delta(t-0) - (\xi, w_j)_2\, \delta(t-T) \quad (1.25)$$

для всех $j \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$\frac{d\overline{u}}{dt} + \overline{\chi} = \overline{f} + u_0\delta(t-0) - \xi\delta(t-T). \quad (1.26)$$

Сужая (1.26) на $(0,T)$, получим равенство

$$u' + \chi = f \Rightarrow u' = f - \chi \in L^{p'}(0,T; W^{-1,p'}(\Omega)), \quad (1.27)$$

поскольку в силу (1.23) имеем $\chi \in L^{p'}(0,T; W^{-1,p'}(\Omega))$. Следовательно, в силу (1.22) имеем $u(t) \in W \subset \mathbb{C}([0,T]; L^2(\Omega))$. Таким образом, $u(0) \in \in L^2(\Omega)$ и $u(T) \in L^2(\Omega)$ имеют смысл.

Заметим, что с одной стороны по определению производной обобщенной функции имеет место равенство

$$\frac{d\overline{u}(t)}{dt} = u'(t) + u(0)\delta(t-0) - u(T)\delta(t-T), \quad (1.28)$$

а, с другой стороны, из (1.26) с учётом (1.27) получим равенство

$$u'(t) = \begin{cases} f - \chi, & \text{если} \quad t \in [0,T]; \\ 0, & \text{если} \quad t \in \mathbb{R}^1 \backslash [0,T], \end{cases} = \overline{f} - \overline{\chi},$$

из которого вытекает, что

$$\frac{d\overline{u}(t)}{dt} = u'(t) + u_0\delta(t-0) - \xi\delta(t-T). \quad (1.29)$$

Из сравнения (2.37) с (1.29) приходим к выводу о том, что

$$u(0) = u_0 \in L^2(\Omega), \quad u(T) = \xi \in L^2(\Omega). \quad (1.30)$$

Шаг 6. Итак, мы докажем существование решения, если покажем, что

$$\chi = A(u). \quad (1.31)$$

[1]) Уравнение (1.24) при этом рассматривается в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$.

Из свойства монотонности оператора A следует, что

$$X_\mu := \int\limits_0^T \langle A(u_\mu) - A(v(t)), u_\mu(t) - v(t)\rangle \, dt \geqslant 0 \tag{1.32}$$

для всех

$$v \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)).$$

Умножим (1.10) на c_{mj}, просуммируем по $j = \overline{1,m}$, проинтегрируем по $t \in (0,T)$ и в результате получим равенство

$$\int\limits_0^T \langle A(u_\mu), u_\mu\rangle \; dt = \int\limits_0^T \langle f, u_\mu\rangle \; dt + \frac{1}{2}|u_{0\mu}|^2 - \frac{1}{2}|u_\mu(T)|^2.$$

Следовательно,

$$X_\mu = \int\limits_0^T \langle A(u_\mu), u_\mu\rangle \; dt - \int\limits_0^T \langle A(u_\mu), v\rangle \; dt - \int\limits_0^T \langle A(v), u_\mu - v\rangle \; dt =$$
$$= \int\limits_0^T \langle f, u_\mu\rangle \; dt + \frac{1}{2}|u_{0\mu}|^2 - \frac{1}{2}|u_\mu(T)| -$$
$$- \int\limits_0^T \langle A(u_\mu), v\rangle \; dt - \int\limits_0^T \langle A(v), u_\mu - v\rangle \; dt. \tag{1.33}$$

Поскольку норма рефлексивного банахова пространства слабо полунепрерывна снизу, то в силу (1.20) и (1.30) имеем [1)]

$$\liminf_{\mu\to+\infty} |u_\mu(T)| \geqslant |\xi| = |u(T)| \quad \text{при} \quad \mu \to +\infty.$$

В силу этого предельного неравенства имеем

$$0 \leqslant \limsup_{\mu\to+\infty} X_\mu \leqslant \int\limits_0^T \langle f, u\rangle \; dt + \frac{1}{2}|u_0|^2 - \frac{1}{2}|u(T)|^2 -$$
$$- \int\limits_0^T \langle \chi, v\rangle \, dt - \int\limits_0^T \langle A(v), u - v\rangle \; dt. \tag{1.34}$$

[1)] Напомним, что мы символом $|\cdot|$ обозначили норму банахова пространства $L^2(\Omega)$.

Из (1.27) можно заключить, что

$$\langle u' + \chi - f, u\rangle = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + \langle \chi, u\rangle = \langle f, u\rangle,$$

$$\int\limits_0^T \langle f, u\rangle\, dt + \frac{1}{2}|u_0|^2 - \frac{1}{2}|u(T)|^2 = \int\limits_0^T \langle \chi, u\rangle\, dt. \tag{1.35}$$

Шаг 7. Сопоставляя равенство (1.35) с (1.34), получим, что

$$0 \leqslant \limsup_{\mu\to+\infty} X_\mu \leqslant \int\limits_0^T \langle \chi, u\rangle\, dt - \int\limits_0^T \langle \chi, v\rangle\, dt - \int\limits_0^T \langle A(v), u - v\rangle\, dt =$$
$$= \int\limits_0^T \langle \chi - A(v), u - v\rangle\, dt. \tag{1.36}$$

Положим $v = u - \lambda w,\ \lambda > 0,\ w \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ — произвольно. Тогда из (1.36) следует, что

$$\lambda \int\limits_0^T \langle \chi - A(u - \lambda w), w\rangle\, dt \geqslant 0. \tag{1.37}$$

Откуда

$$\int\limits_0^T \langle \chi - A(u - \lambda w), w\rangle\, dt \geqslant 0. \tag{1.38}$$

устремляя $\lambda \to +0$ в (1.38), в силу радиальной непрерывности оператора $A(u)$ получим

$$\int\limits_0^T \langle \chi - A(u), w\rangle\, dt \geqslant 0 \tag{1.39}$$

для всех $w \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$. Из (1.39) вытекает. что

$$\chi = A(u).$$

□ Действительно, предположим, что для некоторого $w \in$ $\in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ имеет место строгое неравенство

$$\int\limits_0^T \langle \chi - A(u), w\rangle\, dt > 0,$$

то для $-w$ должны быть выполнены следующие неравенства:

$$0 \leqslant \int_0^T \langle \chi - A(u), -w \rangle \; dt < 0.$$

Противоречие. ☒

Шаг 8. Докажем теперь единственность слабого решения задачи. Пусть u_1 и u_2 — два решения задачи класса $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$. Тогда разность $w = u_1 - u_2$ удовлетворяет уравнению

$$w^{'} + A(u_1) - A(u_2) = 0, \quad w(0) = 0,$$

откуда

$$\langle w^{'}, w \rangle + \langle A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2 \rangle = 0.$$

Благодаря монотонности, имеем

$$\langle w^{'}, w \rangle \leqslant 0.$$

Итак,

$$\langle w^{'}, w \rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 \leqslant 0 \Rightarrow |w|^2(t) \leqslant |w(0)|^2 = 0.$$

Откуда $w = 0$.

Теорема доказана.

§ 2. Литературные указания

В данной лекции мы использовали материал, изложенный в работах [8], [9].

Лекция 14

МЕТОД ГАЛЕРКИНА И КОМПАКТНОСТИ. ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

В данной лекции мы рассмотрим один из самых мощных методов нелинейного анализа — метод компактности. Данный метод применим ко всем трем классическим классам дифференциальных уравнений в частных производных, а также к нелинейным уравнениям соболевского типа.

§ 1. Введение

Метод компактности формально заключается в том, что при доказательстве сходимости приближенного решения, построенного по методу Галеркина, *существенно* используются вполне непрерывные вложения пространств С. Л. Соболева.

§ 2. Нелинейное гиперболическое уравнение

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega \in \in \mathbb{C}^{2,\delta}$, $\delta \in (0, 1]$.

Приведем классическую постановку рассматриваемой в дальнейшем задачи.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + |u|^q u = 0 \quad \text{в} \quad (x,t) \in D = \Omega \otimes (0,T), \quad q > 0, \tag{2.1}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S = \partial\Omega \otimes (0,T), \tag{2.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u^{'}(x,0) = u_1(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{2.3}$$

где

$$\Delta u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}, \quad x = (x_1, x_2, x_3).$$

Сейчас мы приведем обобщенную постановку задачи (2.1)–(2.3). Дадим следующее определение:

Определение 1. *Слабым решением задачи* (2.1)–(2.3) *назовем функцию* $u(x)(t)$ *класса* $u(x)(t) \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))$, $u^{'}(x)(t) \in$

$\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, $u^{''}(x)(t) \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$, *удовлетворяющую равенству*

$$\int\limits_0^T dt \left\langle u^{''} - \Delta u + |u|^q u, v \right\rangle = 0 \tag{2.4}$$

для всех $v(x)(t) \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$ *при* $q \in (0,4]$,

$$u(0) = u_0 \in H_0^1(\Omega), \quad u^{'}(0) = u_1 \in L^2(\Omega), \tag{2.5}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *— скобки двойственности между гильбертовыми пространствами* $H_0^1(\Omega)$ *и* $H^{-1}(\Omega)$.

Задача (2.4)–(2.5) эквивалентна следующей

$$\int\limits_0^T dt\varphi(t) \left\langle u^{''} - \Delta u + |u|^q u, w \right\rangle = 0 \tag{2.6}$$

для всех $w \in H_0^1(\Omega)$ и всех $\varphi(t) \in L^1(0,T)$,

$$u(0) = u_0 \in H_0^1(\Omega), \quad u^{'}(0) = u_1 \in L^2(\Omega). \tag{2.7}$$

З а м е ч а н и е 1. С одной стороны, в классе $u(x)(t) \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ и $u^{'}(x)(t) \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ в силу леммы 1 предыдущей лекции имеем $u(x)(t) \in \mathbb{C}([0,T];L^2(\Omega))$. А с другой стороны, из того, что $u^{'}(x)(t) \in \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ и $u^{''}(x)(t) \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$ вытекает $u^{'}(x)(t) \in \in \mathbb{C}([0,T];H^{-1}(\Omega))$. Следовательно, начальные условия (2.5) имеют смысл.

Справедлив следующий основной результат.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ *и* $q \in (0,2]$. *Тогда существует единственное слабое решение задачи* (2.1), (2.2) *в смысле определения* 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 1. П р и б л и ж е н н ы е р е ш е н и я.

Рассмотрим теперь «приближенную» к задаче (2.6)–(2.7) следующую задачу о галёркинских приближениях

$$\int\limits_0^{T_m} dt\varphi(t) \left\langle u_m^{''} - \Delta u_m + |u_m|^q u_m, w_j \right\rangle = 0 \quad \text{при} \quad j = \overline{1,m} \tag{2.8}$$

для всех $\varphi(t) \in L^1(0,T)$, где

$$u_m(t) := \sum_{k=1}^m c_{mk}(t) w_k$$

— это галеркинские приближения, а $\{w_j\} \subset H_0^1(\Omega)$ — это базис этого гильбертова пространства, составленный из собственных функций оператора Лапласа

$$\Delta w_j + \lambda_j w_j = 0, \quad w_j \in H_0^1(\Omega).$$

Система уравнений (2.8) дополняется следующими начальными условиями:

$$u_m(0) = u_{m0} \in H_0^1(\Omega), \quad u_m^{'}(0) = u_{m1} \in L^2(\Omega), \tag{2.9}$$

где

$$u_{m0} := \sum_{i=1}^{m} \alpha_{mi} w_i \to u_0 \quad \text{сильно в} \quad H_0^1(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty, \tag{2.10}$$

$$u_{m1} := \sum_{i=1}^{m} \beta_{mi} w_i \to u_1 \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \tag{2.11}$$

Решение системы уравнений (2.8) ищется в следующем классе:

$$c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, T_m]. \tag{2.12}$$

Шаг 2. Локальная разрешимость.

Поскольку $\mathbb{C}_0^\infty[0, T_m] \subset L^1(0, T_m)$, то в (2.6) возьмем функцию $\varphi(t) \in \mathbb{C}_0^\infty[0, T_m]$. В классе $c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, T_m]$ имеем

$$\left\langle u_m^{''} - \Delta u_m + |u_m|^q u_m, w_j \right\rangle \in \mathbb{C}[0, T_m].$$

Отсюда и в силу основной леммы вариационного исчисления получим поточечную по $t \in [0, T_m]$ систему m обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\left\langle u_m^{''} - \Delta u_m + |u_m|^q u_m, w_j \right\rangle = 0, \quad j = \overline{1, m}. \tag{2.13}$$

Поскольку $w_j \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, то

$$\langle w_k, w_j \rangle = (w_k, w_j)_2, \quad \langle -\Delta w_k, w_j \rangle = (D_x w_k, D_x w_j)_2.$$

Кроме того, поскольку по построению $u_m \in L^\infty(0, T_m; H_0^1(\Omega)) \subset$ $\subset L^\infty(0, T_m; L^{q+2}(\Omega))$ при $q \in [0, 4]$ имеем

$$|u_m|^q u_m \in L^\infty(0, T_m; L^{(q+2)/(q+1)}(\Omega)).$$

С другой стороны, $w_j \in H_0^1(\Omega) \subset L^{q+2}(\Omega)$. Поэтому

$$\langle |u_m|^q u_m, w_j \rangle = (|u_m|^q u_m, w_j)_2 .$$

В силу этого систему уравнений (2.13) можно переписать в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^{m} (w_k, w_j)_2 \, c''_{mk}(t) + \sum_{l=1}^{m} (D_x w_k, D_x w_j)_2 \, c_{mk}(t) + \\ + (|u_m|^q u_m, w_j)_2 = 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.14)$$

В силу линейной независимости системы $w_1, ..., w_m$ для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$\det (w_k, w_j)_2 \neq 0.$$

Поэтому система (2.14) после обращения матрицы $||a_{kj}|| = || \, (w_k, w_j)_2 \, ||$ примет вид системы типа Коши–Ковалевской, а, значит, найдется такое $T_m > 0$, что система (2.14) с соответствующими начальными условиями имеет решение $c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, T_m]$.

Шаг 3. Априорные оценки.

Умножим уравнение (2.13), отвечающее индексу j, на c'_{mj} и просуммируем по j. Тогда получим равенство

$$\left(u''_m, u'_m\right)_2 + (D_x u_m, D_x u'_m)_2 + \left(|u_m|^q u_m, u'_m\right)_2 = 0. \quad (2.15)$$

Откуда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|u'_m\|_2^2 + \|D_x u_m\|_2^2\right] + \frac{1}{q+2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{q+2}^{q+2} = 0. \quad (2.16)$$

Интегрируя (2.16) по времени, получим

$$\frac{1}{2}\left[\|u'_m\|_2^2 + \|D_x u_m\|_2^2\right] + \frac{1}{q+2}\|u_m\|_{q+2}^{q+2} = \\ = \frac{1}{2}\left[\|u_{m1}\|_2^2 + \|D_x u_{m0}\|_2^2\right] + \frac{1}{q+2}\|u_{m0}\|_{q+2}^{q+2}. \quad (2.17)$$

В силу (2.10) и (2.11) имеем

$$u_{m0} \to u_0 \quad \text{сильно в} \quad H_0^1(\Omega), \quad u_{m1} \to u_1 \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega).$$

Это означает, что правая часть равенства (2.17) ограничена константой $c_1 > 0$, независящей от $m \in \mathbb{N}$. Таким образом, имеем

$$\frac{1}{2}\left[\|u'_m\|_2^2 + \|D_x u_m\|_2^2\right] + \frac{1}{q+2}\|u_m\|_{q+2}^{q+2} \leqslant \mathrm{c}_1. \quad (2.18)$$

Из (2.18) вытекает, что последовательности

$$\{u_m\} \quad \text{ограничена в} \quad L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (2.19)$$

$$\{u_m'\} \quad \text{ограничена в} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.20}$$

Отсюда в частности следует что $T_m > 0$ не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Поэтому в дальнейшем вместо T_m мы будем писать T.

Шаг 4. Предельный переход.

Пространство

$$L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$$

является сопряженным [1] к

$$L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$$

и поэтому из последовательности $\{u_m\}$ можно выделить такую последовательность $\{u_\mu\}$, что

$$u_\mu \rightharpoonup u \;\; *\text{–слабо в } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{2.21}$$

$$u_\mu' \rightharpoonup v \;\; *\text{–слабо в } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.22}$$

при $\mu \to +\infty$. Из (2.21) вытекает, что

$$u_\mu' \rightharpoonup u' \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(0,T;H_0^1(\Omega)) \quad \text{при} \quad \mu \to +\infty. \tag{2.23}$$

Следовательно, в силу (2.22) имеем $v = u'$.

Кроме того, из (2.18) вытекает, что последовательность $\{D_x u_m\}$ ограничена в $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \subset L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(D)$, $D := \Omega \otimes (0,T)$, а последовательность $\{u_m'\}$ ограничена в $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \subset L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(D)$. Следовательно, последовательность $\{u_m\}$ принадлежит ограниченному множеству в $H^1(D)$. Однако, как известно вложение $H^1(D)$ в $L^2(D)$ вполне непрерывно, а значит, полностью непрерывно. Здесь мы применяем метод компактности.

Дальнейшие наши рассуждения таковы. Поскольку последовательность $\{u_m\}$ ограничена в $H^1(D)$, то можно выделить подпоследовательность $\{u_\mu\} \subset \{u_m\}$ такую, что

$$u_\mu \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad H^1(D) \quad \text{при} \quad \mu \to +\infty.$$

В силу полностью непрерывного вложения $H^1(D)$ в $L^2(D)$ имеем

$$u_\mu \to u \quad \text{сильно в} \quad L^2(D) \quad \text{при} \quad \mu \to +\infty$$

и поэтому некоторая подпоследовательность сходится к той же функции u почти всюду.

---

[1] Смотри том II часть 1 курса лекций М. О. Корпусова, А. А. Панина «Линейный и нелинейный функциональный анализ».

Итак, мы можем считать, что подпоследовательность u_μ, удовлетворяет условию

$$u_\mu \to u \quad \text{сильно в} \quad L^2(D) \quad \text{и почти всюду в} \quad D := \Omega \otimes (0,T) \tag{2.24}$$

при $\mu \to +\infty$. Поскольку последовательность $\{|u_m|^q u_m\}$ ограничена в $L^\infty(0,T; L^{(q+2)/(q+1)}(\Omega))$, то можно еще предположить, что

$$|u_\mu|^q u_\mu \rightharpoonup g \quad *\text{−слабо в} \quad L^\infty(0,T; L^{(q+2)/(q+1)}(\Omega)) \tag{2.25}$$

при $\mu \to +\infty$. Существенно важный момент — здесь мы сталкиваемся с одной из наиболее типичных трудностей нелинейных задач — доказательство того, что

$$g = |u|^q u. \tag{2.26}$$

На этот вопрос отвечает следующая лемма, доказательство которой имеется в книге [25].

Лемма 1. *Пусть D — ограниченная область в $(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+ := \mathbb{R}^N \times \times \mathbb{R}_+$, g_m и g — такие функции из $L^p(D)$, $1 < p < +\infty$, что*

$$\|g_m\|_{L^p(D)} \leqslant C, \quad g_m \to g \quad \textit{почти всюду в} \quad D \quad \textit{при} \quad m \to +\infty.$$

Тогда

$$g_m \rightharpoonup g \quad \textit{слабо в} \quad L^p(D) \quad \textit{при} \quad m \to +\infty.$$

Замечание 2. Прежде всего заметим, что мы не можем сразу же воспользоваться теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега, поскольку у нас есть лишь условие

$$\|g_m\|_{L^p(D)} \leqslant C,$$

а не условие

$$|g_m(x,t)| \leqslant h(x,t), \quad h(x,t) \in L^p(D).$$

Поэтому для доказательства утверждения нам нужно выделить плотное в $L^q(D)$ при $q = p/(p-1)$ семейство функций Φ, что для любой функции $\varphi(z) \in \Phi$ можно было бы воспользоваться теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла и тогда

$$|\langle \varphi, g_m - g \rangle| = \left| \int\limits_D (g_m(z) - g(z))\, \varphi(z)\, dz \right| \to +0$$

при $m \to +\infty$.

Мы применим эту лемму в случае, когда

$$g_\mu := |u_\mu|^q u_\mu, \quad p = \frac{q+2}{q+1}.$$

Поскольку

$$g_\mu \to |u|^q u = g \quad \text{почти всюду} \quad Q \quad \text{при} \quad \mu \to +\infty,$$

то отсюда в силу леммы 1 имеем

$$g_\mu \rightharpoonup g \quad \text{слабо в} \quad L^p(Q) \quad \text{при} \quad \mu \to +\infty.$$

Итак, мы доказали равенство $g = |u|^q u$.

Таким образом, можно перейти к пределу в (2.13), полагая $m = \mu$. В силу (2.21) и (2.22) имеем

$$(D_x u_\mu, D_x w_j)_2 \rightharpoonup (D_x u, D_x w_j)_2 \quad * \text{-слабо в} \quad L^\infty(0,T), \tag{2.27}$$

$$\left(u'_\mu, w_j\right)_2 \rightharpoonup \left(u', w_j\right)_2 \quad * \text{-слабо в} \quad L^\infty(0,T), \tag{2.28}$$

$$(|u_\mu|^q u_\mu, w_j)_2 \rightharpoonup (|u|^q u, w_j)_2 \quad * \text{-слабо в} \quad L^\infty(0,T) \tag{2.29}$$

при $\mu \to +\infty$. С одной стороны,

$$\left\langle u''_\mu, w_j \right\rangle = \frac{d}{dt}\left\langle u'_\mu, w_j \right\rangle \to \left\langle u'', w_j \right\rangle \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(0,T). \tag{2.30}$$

С другой стороны, в силу (2.13) имеем

$$\left\langle u''_m, w_j \right\rangle = \left(u''_m, w_j\right)_2 = \\ = (D_x u_m, D_x w_j)_2 - (|u_m|^q u_m, w_j)_2 \in L^\infty(0,T). \tag{2.31}$$

Значит,

$$\left\langle u''_m, w_j \right\rangle \to \langle v, w_j \rangle = \\ = (D_x u, D_x w_j)_2 - (|u|^q u, w_j)_2 \quad * \text{-слабо в} \quad L^\infty(0,T). \tag{2.32}$$

В силу (2.30) получаем равенство

$$v = u'' \in L^\infty(0,T; H^{-1}(\Omega)). \tag{2.33}$$

Теперь мы можем перейти к пределу при $m = \mu \to +\infty$ в равенстве (2.8) при $T_m = T$ и с учетом (2.27)–(2.29), (2.32) и (2.33) получить следующее выражение:

$$\int\limits_0^T dt \varphi(t) \left\langle u'' - \Delta u + |u|^q u, w_j \right\rangle = 0 \tag{2.34}$$

для всех $\varphi(t) \in L^1(0,T)$ при $j \in \mathbb{N}$.

В силу того, что $\{w_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — это базис в $H_0^1(\Omega)$ мы получим из (2.34) равенство (2.6), из которого в свою очередь вытекает равенство (2.4).

Шаг 5. Начальные условия.

Нам осталось доказать, что построенная функция $u(x)(t)$ удовлетворяет начальным условиям (2.7).

По построению имеем

$$u_\mu(0) = u_{\mu 0} \to u_0 \quad \text{сильно в} \quad H_0^1(\Omega) \quad \text{при} \quad \mu \to +\infty. \tag{2.35}$$

С другой стороны, в силу (2.21)–(2.23) после возможного исправления на $[0,T]$ на множестве нулевой меры Лебега получим

$$u_\mu(0) \to u(0) \quad \text{слабо в} \quad L^2(\Omega) \quad \text{при} \quad \mu \to +\infty. \tag{2.36}$$

□ Действительно, рассмотрим следующую функцию:

$$\varphi_\mu(t) := \int\limits_\Omega (u_\mu(x)(t) - u(x)(t))\, w(x)\, dx$$

для всех $w(x) \in L^2(\Omega)$. С одной стороны, в силу второго свойства в (2.24) и леммы 1 имеем

$$\varphi_\mu(t) \to 0 \quad \text{для почти всех} \quad t \in [0,T]. \tag{2.37}$$

С другой стороны, в силу (2.21)–(2.23) и леммы 1 предыдущей лекции имеем

$$u_\mu(x)(t), u(x)(t) \in \mathbb{C}([0,T]; L^2(\Omega)) \Rightarrow \varphi_\mu(t) \in \mathbb{C}([0,T]).$$

Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ и $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что для всех $\mu \geqslant n_0$ и для всех $0 < t < \delta(\varepsilon)$ и $t \in [0,T]\backslash E$, $\mu(E) = 0$ имеет место следующая цепочка неравенств:

$$|\varphi_\mu(0)| \leqslant |\varphi_\mu(0) - \varphi_\mu(t)| + |\varphi_\mu(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно,

$$u_\mu(0) \rightharpoonup u(0) \quad \text{слабо в} \quad L^2(\Omega) \quad \text{при} \quad \mu \to +\infty. \quad \boxtimes$$

Из (2.35) и (2.36) следует, что имеет место начальное условие $u(0) = u_0$ [1].

С одной стороны, в силу (2.32) имеем

$$\left\langle u_\mu'', w_j \right\rangle \to \left\langle u'', w_j \right\rangle \quad * \text{–слабо в} \quad L^\infty(0,T) \quad \text{при} \quad \mu \to +\infty. \tag{2.38}$$

---

[1] $u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$ в силу наших предположений.

Рассмотрим следующую функцию:

$$\psi_{j,\,\mu}(t) := \left\langle u_{\mu}^{'}, w_j \right\rangle. \tag{2.39}$$

Заметим, что имеет место следующее равенство:

$$\psi_{j,\,\mu}(t) = \psi_{j,\,\mu}(0) + \int\limits_0^t \left\langle u_{\mu}^{''}(s), w_j \right\rangle ds =$$

$$= \langle u_{\mu 1}, w_j \rangle + \int\limits_0^T \left\langle u_{\mu}^{''}(s), w_j \right\rangle \chi(s)\, ds, \tag{2.40}$$

где

$$\chi(s) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad s \in [0,t]; \\ 0, & \text{если} \quad s \in (t,T], \end{cases} \quad \chi(s) \in L^1(0,T).$$

В силу (2.11), (2.40) и (2.38) вытекает предельное свойство

$$\psi_{j,\,\mu}(t) \to \psi_j(t) := \langle u_1, w_j \rangle + \int\limits_0^T \left\langle u^{''}(s), w_j \right\rangle \chi(s)\, ds =$$

$$= \langle u_1, w_j \rangle + \int\limits_0^t \left\langle u^{''}(s), w_j \right\rangle ds \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T]. \tag{2.41}$$

Докажем, что $\psi_j(t) = \left\langle u^{'}(t), w_j \right\rangle$.

□ Действительно, с одной стороны, в силу (2.22) имеет место следующая цепочка выражений:

$$\int\limits_0^t \psi_{j,\,\mu}(s)\, ds = \int\limits_0^T \psi_{j,\,\mu}(s) \chi(s)\, ds \to$$

$$\to \int\limits_0^T \left\langle u^{'}(t), w_j \right\rangle \chi(s)\, ds = \int\limits_0^t \left\langle u^{'}(t), w_j \right\rangle ds \tag{2.42}$$

при $\mu \to +\infty$. С другой стороны, имеем

$$\int\limits_0^t \psi_{j,\,\mu}(s)\, ds \to \int\limits_0^t \psi_j(s)\, ds \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T] \tag{2.43}$$

при $\mu \to +\infty$. Из сравнения (2.42) с (2.43) получим следующее равенство:

$$\int_0^t \left\langle u^{'}(t), w_j \right\rangle ds = \langle u_1, w_j \rangle t + \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \left\langle u^{''}(s_2), w_j \right\rangle,$$

в силу теоремы Лебега о производной абсолютно непрерывной функции из последнего равенства получим равенство

$$\left\langle u^{'}(t), w_j \right\rangle = \langle u_1, w_j \rangle + \int_0^t \left\langle u^{''}(s), w_j \right\rangle ds \qquad (2.44)$$

для почти всех $t \in [0, T]$. ⊠

Теперь в силу (2.41) имеем

$$\left\langle u_\mu^{'}, w_j \right\rangle \to \left\langle u^{'}, w_j \right\rangle \quad \text{при} \quad \mu \to +\infty$$

для почти всех $t \in [0, T]$. Кроме того, $\left\langle u^{'}, w_j \right\rangle \in \mathbb{C}[0, T]$. Далее точно также как и при доказательстве (2.36) приходим к выводу о том, что

$$\left\langle u_\mu^{'}(0), w_j \right\rangle \to \left\langle u^{'}(0), w_j \right\rangle \quad \text{при} \quad \mu \to +\infty. \qquad (2.45)$$

Но при этом в силу (2.11) имеем

$$\left\langle u_\mu^{'}(0), w_j \right\rangle = \langle u_{1\mu}, w_j \rangle \to \langle u_1, w_j \rangle \quad \text{при} \quad \mu \to +\infty. \qquad (2.46)$$

Следовательно,

$$\left\langle u^{'}(0), w_j \right\rangle = \langle u_1, w_j \rangle \quad \text{для всех} \quad j \in \mathbb{N} \Rightarrow u^{'}(0) = u_1.$$

Шаг 6. Единственность.

Сначала докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Пусть $v \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $v^{'} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, тогда имеет место следующее равенство для почти всех $t \in (0, T)$*

$$\|v\|_2^2(t) - \|v\|_2^2(0) = 2 \int_0^t ds \left(v^{'}, v\right)_2 (s).$$

Доказательство.

Шаг 1. Регуляризируя функцию $\widehat{v}$ с помощью операции сглаживания, действующую из $\mathbb{R}$ в $L^2(\Omega)$ и равную v на $[0, T]$ и 0 вне этого интервала, мы легко получаем последовательность функций v_m, удовлетворяющую условиям

$$v_m \in \mathbb{C}^\infty([0,T];L^2(\Omega)), \quad v_m \to v \quad \text{сильно в} \quad L^2_{loc}(0,T;L^2(\Omega))$$

при $m \to +\infty$.

Шаг 2. Совершенно очевидно, что для функций v_m выполнено равенство

$$\frac{d}{dt}(v_m, v_m)_2 = 2\left(v_m, v_m^{'}\right)_2. \tag{2.47}$$

Далее имеем

$$\|v_m\|_2^2 \to \|v\|_2^2, \quad \left(v_m^{'}, v_m\right)_2 \to \left(v^{'}, v\right)_2 \quad \text{сильно в} \quad L^1_{loc}(0,T)$$

при $m \to +\infty$.

Шаг 3. Отсюда переходя к пределу при $m \to +\infty$ в равенстве (2.47) в смысле $\mathcal{D}^{'}(0,T)$, получим равенство в смысле $\mathcal{D}^{'}(0,T)$:

$$\frac{d}{dt}(v,v)_2 = 2\left(v, v^{'}\right)_2. \tag{2.48}$$

Теперь заметим, что

$$(v,v)_2 \in L^1(0,T), \quad \left(v, v^{'}\right)_2 \in L^1(0,T),$$

откуда в силу (2.48) следует, что

$$(v,v)_2 \in \mathbb{AC}[0,T].$$

Таким образом, интегрируя (2.48) по $t \in (0,T)$ приходим к утверждению леммы.

Лемма доказана.

Справедлива следующая лемма:

Лемма 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того,* $q \in (0,2]$. *Тогда решение* u, *полученное в теореме 1, единственно.*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть u_1 и u_2 — два слабых решения задачи в смысле определения 1 и $w = u_1 - u_2$. Пусть $s \in (0,T)$. Положим

$$\psi(t) := \left\{ -\int\limits_t^s w(\sigma)\,d\sigma \quad \text{при} \quad t \leqslant s; \quad 0 \quad \text{при} \quad t > s \right\}.$$

Отсюда имеем

$$\psi(t) = w_1(t) - w_1(s), \quad \text{если} \quad t \leqslant s,$$

где

$$w_1(t) := \int\limits_0^t w(\sigma)\, d\sigma.$$

Шаг 2. Тогда из (2.4) положив $v = \psi(t)$ получим

$$\int\limits_0^T dt \left\langle w^{''} - \Delta w + |u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2, \psi(t) \right\rangle = 0, \tag{2.49}$$

где

$$w(0) = 0, \quad w^{'}(0) = 0. \tag{2.50}$$

Откуда, интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_0^s (w^{''}(t), \psi(t))_2\, dx = (w^{'}(t), \psi(t))_2 \Big|_{t=0}^{t=s} - \int\limits_0^s \left(w^{'}, \psi^{'}\right)_2 dt = -\int\limits_0^s \left(w^{'}, \psi^{'}\right)_2 dt,$$

поскольку $\psi(s) = 0$ и $w^{'}(0) = 0$. Следовательно, из (2.49) получим равенство

$$-\int\limits_0^s \left(w^{'}, \psi^{'}\right)_2 dt + \int\limits_0^s (D_x w, D_x \psi)_2\; dt = -\int\limits_0^s (|u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2, \psi)_2\; dt, \tag{2.51}$$

а поскольку $\psi^{'}(t) = w(t)$, в силу леммы 2 имеем

$$-\int\limits_0^s \left(w^{'}, w\right)_2 dt = -\frac{1}{2}\|w\|_2^2(s),$$

так как $w(0) = 0$.

Шаг 3. Поскольку $w_1(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T]; H_0^1(\Omega))$, $w(t) = \psi^{'}(t)$ и $w(t) = w_1^{'}(t)$ справедлива цепочка равенств

$$\int\limits_0^s (D_x w(t), D_x \psi(t))_2 = \int\limits_0^s (D_x \psi^{'}(t), D_x \psi(t))_2\, dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^s \frac{d}{dt}(D_x \psi(t), D_x \psi(t))_2\, dt =$$
$$= \frac{1}{2}(D_x \psi(s), D_x \psi(s))_2 - \frac{1}{2}(D_x \psi(0), D_x \psi(0))_2 = -\frac{1}{2}\|D_x w_1(s)\|_2^2,$$

поскольку $\psi(0) = -w_1(s)$. Тогда приходим из (2.51) к равенству

$$\frac{1}{2}\|w\|_2^2(s) + \frac{1}{2}\|D_x w_1\|_2^2(s) = \int\limits_0^s (|u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2, \psi)_2\; dt. \tag{2.52}$$

Шаг 4. Рассмотрим отдельно выражение в правой части

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} = \int_0^s (|u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2, \psi)_2 \, dt = \\
= \int_0^s (|u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2, w_1(t) - w_1(s))_2 \, dt \leqslant \\
\leqslant (q+1) \int_0^s \int_\Omega dx \, |w(t)| \, [|w_1(t)| + |w_1(s)|] \max\{|u_1|^q, |u_2|^q\} \, dt. \quad (2.53)
\end{aligned}
$$

Теперь воспользуемся обобщенным неравенством Гельдера со следующими соответствующими показателями:

$$
p_1 = 2, \quad p_2 = r, \quad p_3 = N, \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1 \Rightarrow r = \frac{2N}{N-2}.
$$

При этом имеет место непрерывное вложение

$$
H_0^1(\Omega) \subset L^r(\Omega).
$$

Кроме того, имеем

$$
qN \leqslant \frac{2N}{N-2} \Rightarrow q \leqslant \frac{2}{N-2} \quad \text{при} \quad N \geqslant 3,
$$

поэтому имеем

$$
\| |u_k|^q \|_N = \|u_k\|_{qN}^q \leqslant c_1 \|D_x u_k\|_2^q \leqslant c_2 \quad \text{при} \quad k = 1, 2.
$$

Итак, из (2.53) получим следующее неравенство

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} \leqslant (q+1) \int_0^s dt \, \|w\|_2(t) \, [\|w_1\|_r(t) + \|w_1\|_r(s)] \times \\
\times \max\{\| |u_1|^q \|_N(t), \| |u_2|^q \|_N(t)\} \leqslant \\
\leqslant c_3 \int_0^s \|w\|_2(t) \, [\|D_x w_1\|_2(t) + \|D_x w_1\|_2(s)] \, dt. \quad (2.54)
\end{aligned}
$$

Справедливы следующие неравенства:

$$
\|w\|_2(t) \|D_x w_1\|_2(t) \leqslant \frac{1}{2} \|w\|_2^2(t) + \frac{1}{2} \|D_x w_1\|_2^2(t),
$$

$$\|D_x w_1\|_2(s)\|w\|_2(t) \leqslant \frac{\varepsilon}{2T}\|D_x w_1\|_2^2(s) + \frac{T}{2\varepsilon}\|w\|_2^2(t)$$

при любом $\varepsilon > 0$. С учетом этих неравенств из (2.52) получим неравенство

$$\frac{1}{2}\|w\|_2^2(s) + \frac{1}{2}\|D_x w_1\|_2^2(s) \leqslant \frac{c_3}{2}\int\limits_0^s \left[\|w\|_2^2(t) + \|D_x w_1\|_2^2(t)\right]\,dt +$$

$$+\frac{c_3}{2}\varepsilon\|D_x w_1\|_2^2(s) + \frac{T}{2\varepsilon}c_3\int\limits_0^s \|w\|_2^2(t)\,dt,$$

в котором положим

$$\varepsilon = \frac{1}{2c_3}.$$

Отсюда приходим к следующему неравенству:

$$\|w\|_2^2(s) + \|D_x w_1\|_2^2(s) \leqslant c_4(T)\int\limits_0^s dt\,\left[\|w\|_2^2(t) + \|D_x w_1\|_2^2(t)\right]$$

при $s \in [0, T]$. Отсюда в силу леммы Гроноулла–Белмана [7] приходим к выводу, что $u_1 = u_2$ почти всюду.

Лемма доказана.

Теорема доказана.

§ 3. Литературные указания

В данной лекции мы использовали материал, изложенный в работах [8], [9], [18], [23], [25], [39], [46] и [56].

Тематическая лекция IV

МЕТОДЫ, ОСНОВАННЫЕ НА ПРИНЦИПЕ МАКСИМУМА

Лекция 15

МЕТОД ВЕРХНИХ И НИЖНИХ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ

В этой лекции мы рассмотрим один из самых мощных методов исследования нелинейных краевых и начально–краевых задач для эллиптических и параболических уравнений. Этот метод может быть применен и к другим уравнениям, для которых справедлив признак сравнения решений, например, для так называемых псевдопараболических уравнений.

§ 1. Метод слабых верхних и нижних решений

В этом параграфе мы рассмотрим метод слабых нижних и верхних решений для нелинейного уравнения Пуассона в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ при $N \geqslant 3$ с гладкой границей $\partial\Omega$

$$-\Delta u = f(x,u) \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{1.1}$$

где

$$f(x,u) : \overline{\Omega} \otimes \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$$

— это непрерывная функция и

$$|f(x,u)| \leqslant a_1 + b_1 |u|^{q+1}, \quad 0 < q \leqslant \frac{4}{N-2}, \tag{1.2}$$

где постоянные $a_1, b_1 \geqslant 0$ и

$$a_1 + b_1 > 0.$$

Причем либо

$$f'_u(x,u) \geqslant 0 \quad \text{либо} \quad |f'_u(x,u)| \leqslant a \tag{1.3}$$

для всех $x \in \Omega$ и $u \in \mathbb{R}^1$. Здесь мы будем использовать следующие обозначения

$$H^1_0(\Omega) \stackrel{def:}{=} W^{1,2}_0(\Omega), \quad H^{-1}(\Omega) \stackrel{def:}{=} W^{-1,2}(\Omega).$$

Определение 1.

(i) *Функция* $\overline{U}(x) \in H^1(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ *называется слабым верхним решением задачи* (1.1), *если*

$$\int\limits_{\Omega} \big(D_x\overline{U}(x), D_x v(x)\big)\, dx \geqslant \int\limits_{\Omega} f(x, \overline{U}(x)) v(x)\, dx \tag{1.4}$$

для любой функции $v(x) \in H^1_0(\Omega)$, $v(x) \geqslant 0$ *почти всюду.*

(ii) *Функция* $\underline{U}(x) \in H^1(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ *называется слабым нижним решением задачи* (1.1), *если*

$$\int\limits_{\Omega} (D_x\underline{U}(x), D_x v(x))\, dx \leqslant \int\limits_{\Omega} f(x, \underline{U}(x)) v(x)\, dx \tag{1.5}$$

для любой функции $v(x) \in H^1_0(\Omega)$, $v(x) \geqslant 0$ *почти всюду.*

(iii) *Функция* $u(x) \in H^1(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ *называется слабым решением задачи* (1.1), *если*

$$\int\limits_{\Omega} (D_x u(x), D_x v(x))\, dx = \int\limits_{\Omega} f(x, u(x)) v(x)\, dx \tag{1.6}$$

для любой функции $v(x) \in H^1_0(\Omega)$.

Замечание 1. Если $\overline{U}(x), \underline{U}(x) \in \mathbb{C}^2(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, то из (1.4) и (1.5) получаем

$$-\Delta\overline{U}(x) \geqslant f(x, \overline{U}(x)), \quad -\Delta\underline{U}(x) \leqslant f(x, \underline{U}(x)) \quad \text{в} \quad \Omega,$$

что соответствует классическим определениям верхних и нижних решений. [1])

Теорема 1. *Пусть существует верхнее* $\overline{U}(x)$ *и нижнее* $\underline{U}(x)$ *решения задачи* (1.1) *такие, что*

$$\underline{U}(x) \leqslant 0, \quad \overline{U}(x) \geqslant 0 \quad \textit{на} \quad \partial\Omega, \quad \underline{U}(x) \leqslant \overline{U}(x) \quad \textit{в} \quad \Omega. \tag{1.7}$$

Тогда существует слабое решение $u(x)$ *задачи* (1.1) *такое, что*

$$\underline{U}(x) \leqslant u(x) \leqslant \overline{U}(x) \quad \textit{п.в.} \quad \textit{в} \quad \Omega.$$

Доказательство.

Доказательство проведем в несколько шагов.

---

[1]) Идея доказательства этого утверждения такая — пусть в какой–то точке $x_0 \in \Omega$ выражение $-\Delta\overline{U}(x) < f(x, \overline{U}(x))$, но тогда в силу непрерывности этого выражения и в некоторой замкнутой ее окрестности неравенство будет то же. Теперь достаточно взять $v(x) \geqslant 0$ с носителем, лежащим в этой замкнутой окрестности и получить противоречие с определением слабого верхнего решения $\overline{U}(x)$. Аналогично для нижнего решения $\underline{U}(x)$.

Шаг 1. Фиксируем достаточно большое $\lambda > 0$ так, что отображение

$$z \to f(x,z) + \lambda z \tag{1.8}$$

неубывающее для всех $x \in \Omega$. Такой выбор возможен в силу условия (1.3).

Теперь запишем $u_0(x) = \underline{U}(x)$ и при заданном $u_k(x) \in H^1(\Omega)$ при $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ индуктивно определим $u_{k+1}(x) \in H_0^1(\Omega)$ как единственное слабое решение линейной краевой задачи при $k \geqslant 0$

$$-\Delta u_{k+1}(x) + \lambda u_{k+1}(x) = f(x, u_k(x)) + \lambda u_k(x) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1.9}$$

$$u_{k+1}(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{1.10}$$

понимаемой в слабом смысле

$$\int\limits_{\Omega} [(D_x u_{k+1}(x), D_x v(x)) + \lambda u_{k+1}(x) v(x)]\, dx =$$
$$= \int\limits_{\Omega} [f(x, u_k(x)) v(x) + \lambda u_k(x) v(x)]\, dx \tag{1.11}$$

для всех $v(x) \in H_0^1(\Omega)$ и $u_k(x) \in H^1(\Omega)$ при $k \geqslant 0$.

Шаг 2. Покажем, что

$$\underline{U}(x) = u_0(x) \leqslant u_1(x) \leqslant \cdots \leqslant u_k(x) \leqslant u_{k+1}(x) \leqslant \cdots \quad \text{п.в. в} \quad \Omega. \tag{1.12}$$

Пункт 1. Для этого сначала заметим, что в силу (1.11) при $k = 0$

$$\int\limits_{\Omega} ((D_x u_1(x), D_x v(x)) + \lambda u_1(x) v(x))\, dx =$$
$$= \int\limits_{\Omega} (f(x, u_0(x)) + \lambda u_0(x))\, v(x)\, dx \tag{1.13}$$

для любой $v(x) \in H_0^1(\Omega)$. Вычитая (1.13) из (1.5) [1]), получим следующее неравенство:

$$\int\limits_{\Omega} [(D_x u_0(x) - D_x u_1(x), D_x v(x)) + \lambda (u_0(x) - u_1(x), v(x))]\, dx \leqslant 0,$$

$$u_0(x) = \underline{U}(x),$$

[1]) Предварительно нужно в неравенстве (1.5) прибавить к обеим частям этого неравенства слагаемое $\lambda \underline{U}(x)$. Напомним, что $\underline{U}(x) = u_0(x)$.

и полагая

$$v(x) = (u_0(x) - u_1(x))^+ \in H_0^1(\Omega), \quad v(x) \geqslant 0 \quad \text{почти всюду},$$

находим

$$\int\limits_\Omega \Bigl(D_x(u_0(x) - u_1(x)), D_x(u_0(x) - u_1(x))^+ + \\ + \lambda(u_0(x) - u_1(x))(u_0(x) - u_1(x))^+\Bigr)\, dx \leqslant 0. \quad (1.14)$$

Однако,

$$D_x(u_0(x) - u_1(x))^+ = \begin{cases} D_x(u_0(x) - u_1(x)) & \text{п. в. на} \quad \{u_0(x) \geqslant u_1(x)\}, \\ 0 & \text{п. в. на} \quad \{u_1(x) \geqslant u_0(x)\}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\int\limits_{u_0 \geqslant u_1} \Bigl[|D_x(u_0(x) - u_1(x))|^2 + \lambda(u_0(x) - u_1(x))^2\Bigr]\, dx \leqslant 0,$$

откуда вытекает, что

$$u_0(x) \leqslant u_1(x) \quad \text{почти всюду на} \quad \Omega.$$

Пункт 2. Теперь по индукции предположим, что

$$u_{k-1}(x) \leqslant u_k(x) \quad \text{п.в. в} \quad \Omega. \quad (1.15)$$

Из (1.11) находим

$$\int\limits_\Omega [(D_x u_{k+1}(x), D_x v(x)) + \lambda u_{k+1}(x) v(x)]\, dx = \\ = \int\limits_\Omega (f(x, u_k(x)) + \lambda u_k(x))\, v(x)\, dx \quad (1.16)$$

и

$$\int\limits_\Omega [(D_x u_k(x), D_x v(x)) + \lambda u_k(x) v(x)]\, dx = \\ = \int\limits_\Omega (f(x, u_{k-1}(x)) + \lambda u_{k-1}(x))\, v(x)\, dx \quad (1.17)$$

для любых $v(x) \in H_0^1(\Omega)$. Вычитая и полагая

$$v(x) = (u_k(x) - u_{k+1}(x))^+,$$

находим

$$\int\limits_{u_k \geqslant u_{k+1}} \left[|D_x(u_k(x) - u_{k+1}(x))|^2 + \lambda (u_k(x) - u_{k+1}(x))^2 \right] dx =$$
$$= \int\limits_{\Omega} [(f(x, u_{k-1}(x)) + \lambda u_{k-1}(x)) - (f(x, u_k(x)) + \lambda u_k(x))] \times$$
$$\times (u_k(x) - u_{k+1}(x))^+ \, dx \leqslant 0.$$

Последнее неравенство верно в силу (1.15) и (1.8). Поэтому $u_k(x) \leqslant u_{k+1}(x)$ почти всюду в Ω, как и утверждалось.

Шаг 3. Теперь покажем, что

$$u_k(x) \leqslant \overline{U}(x) \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega \quad \text{при} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{1.18}$$

При $k = 0$ (1.18) верно в силу (1.7), поскольку $u_0(x) = \underline{U}(x)$. Пусть для некоторого k

$$u_k(x) \leqslant \overline{U}(x) \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega. \tag{1.19}$$

Вычитая (1.4) из (1.16) и полагая

$$v = \left(u_{k+1}(x) - \overline{U}(x)\right)^+,$$

находим

$$\int\limits_{u_{k+1} \geqslant \overline{U}} \left[\left|D_x(u_{k+1}(x) - \overline{U}(x))\right|^2 + \lambda(u_{k+1}(x) - \overline{U}(x))^2 \right] dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\Omega} \left[(f(x, u_k(x)) + \lambda u_k(x)) - (f(x, \overline{U}(x)) + \lambda \overline{U}(x))\right] \times$$
$$\times \left(u_{k+1}(x) - \overline{U}(x)\right)^+ dx \leqslant 0$$

в силу (1.19) и (1.8). Таким образом, $u_{k+1}(x) \leqslant \overline{U}(x)$ почти всюду в Ω.

Шаг 4. Теперь мы должны перейти к пределу при $k \to +\infty$.

Пункт 1. Ввиду (1.12) и (1.18)

$$\underline{U}(x) \leqslant \cdots \leqslant u_k(x) \leqslant u_{k+1}(x) \leqslant \cdots \leqslant \overline{U}(x) \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega. \tag{1.20}$$

Поэтому

$$u(x) := \lim_{k \to +\infty} u_k(x) \tag{1.21}$$

существует для почти всех $x \in \Omega$. Кроме того,

$$u_k \to u \quad \text{сильно в} \quad L^{q+2}(\Omega) \subset L^2(\Omega), \quad q \geqslant 0 \tag{1.22}$$

что гарантируется теоремой о мажорируемой сходимости и (1.20).

□ Действительно, имеем

$$|u_k(x) - u(x)| \leqslant 2|V(x)| < +\infty,$$

$$V(x) \stackrel{def:}{=} \max\left\{|\underline{U}(x)|, |\overline{U}(x)|\right\} \in \mathbb{C}(\overline{\Omega}).$$

В совокупности с (1.21) получаем утверждение. ⊠

Пункт 2. Наконец, в силу того, что функция $f(x,u)$ каратеодориева с условием роста (1.3), то соответствующий оператор Немыцкого

$$N_f(u) : L^{q+2}(\Omega) \to L^{(q+2)/(q+1)}(\Omega)$$

является сильно непрерывным, т. е., в частности, в силу (1.22)

$$\|N_f(u_k) - N_f(u)\|_{(q+2)/(q+1)} \to +0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty. \tag{1.23}$$

Пункт 3. Положим в (1.11) $v(x) = u_{k+1}(x) \in H_0^1(\Omega)$ и получим следующее равенство:

$$\|D_x u_{k+1}\|_2^2 + \lambda\|u_{k+1}\|_2^2 = \\ = \int\limits_{\Omega} f(x, u_k(x)) u_{k+1}(x)\, dx + \lambda \int\limits_{\Omega} u_k(x) u_{k+1}(x)\, dx. \tag{1.24}$$

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\left|\int\limits_{\Omega} f(x, u_k(x)) u_{k+1}(x)\, dx\right| \leqslant \\ \leqslant a_1 \int\limits_{\Omega} |u_{k+1}(x)|\, dx + b_1 \int\limits_{\Omega} |u_k(x)|^{q+1} |u_{k+1}(x)|\, dx \leqslant \\ \leqslant \varepsilon\|u_{k+1}\|_2^2 + c_1(\varepsilon) + b_1\|u_k\|_{q+2}^{q+1}\|u_{k+1}\|_{q+2}, \tag{1.25}$$

где мы воспользовались неравенством Юнга с параметром $\varepsilon > 0$

$$a_1|u_{k+1}| \leqslant \varepsilon|u_{k+1}|^2 + c_1(\varepsilon), \quad c_1(\varepsilon) := \frac{a_1^2}{4\varepsilon}$$

и неравенством Гёльдера

$$\int\limits_{\Omega} |u_k(x)|^{q+1}|u_{k+1}(x)|\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_{\Omega} |u_k(x)|^{p_1(q+1)}\,dx\right)^{1/p_1} \left(\int\limits_{\Omega} |u_{k+1}(x)|^{p_2}\,dx\right)^{1/p_2},$$
$$p_1 = \frac{q+2}{q+1}, \quad p_2 = q+2, \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1.$$

Заметим, что

$$\underline{U}(x) \leqslant u_k(x) \leqslant \overline{U}(x) \quad \text{для п. вс.} \quad x \in \Omega,$$

причём

$$\underline{U}(x), \overline{U}(x) \in H^1(\Omega) \subset L^{q+2}(\Omega).$$

Поэтому

$$|u_k(x)| \leqslant V(x) \stackrel{def:}{=} \max\left\{|\underline{U}(x)|\,, \left|\overline{U}(x)\right|\right\} \in L^{q+2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

для почти всех $x \in \Omega$. Тогда имеем

$$b_1\|u_k\|_{q+2}^{q+1}\|u_{k+1}\|_{q+2} \leqslant b_1\|V(x)\|_{q+2}^{q+1}K_{fr}\|D_x u_{k+1}\|_2, \tag{1.26}$$

где K_{fr} — это постоянная Фридрихса. Далее применяя неравенство Юнга с параметром $\varepsilon > 0$ к правой части в (1.26), мы из (1.25) получим неравенство

$$\left|\int\limits_{\Omega} f(x, u_k(x))u_{k+1}(x)\,dx\right| \leqslant c_2(\varepsilon) + \varepsilon\|u_{k+1}\|_2^2 + \varepsilon\|D_x u_{k+1}\|_2^2. \tag{1.27}$$

Также справедливо очевидное неравенство

$$\lambda\left|\int\limits_{\Omega} u_k(x)u_{k+1}(x)\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\|u_{k+1}\|_2^2 + c_3(\varepsilon)\|u_k\|_2^2 \leqslant \varepsilon\|u_{k+1}\|_2^2 + c_3(\varepsilon)\|V(x)\|_2^2. \tag{1.28}$$

В силу (1.25), (1.27) и (1.28) из неравенства (1.24) мы получим неравенство

$$(1-\varepsilon)\|D_x u_{k+1}\|_2^2 + (\lambda - 2\varepsilon)\|u_{k+1}\|_2^2 \leqslant c_4(\varepsilon) \tag{1.29}$$

при $\varepsilon \in (0, \min\{1, \lambda/2\})$. Из оценки (1.29) мы приходим к выводу о том, что последовательность $\{u_k\}$ равномерно по $k \in \mathbb{N}$ ограничена в

$H_0^1(\Omega)$. Поскольку гильбертово пространство $H_0^1(\Omega)$ рефлексивно [1], то существует такая подпоследовательность $\{u_{k_j}\} \subset \{u_k\}$, что

$$u_{k_j}(x) \rightharpoonup u(x) \quad \text{слабо в} \quad H_0^1(\Omega) \quad \text{при} \quad k_j \to +\infty. \tag{1.30}$$

Поскольку имеет место вполне непрерывное вложение

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega),$$

то имеет место предельное свойство

$$u_{k_j}(x) \to u(x) \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega) \quad \text{при} \quad k_j \to +\infty.$$

Шаг 5. Наконец, проверим, что $u(x) \in H_0^1(\Omega)$ — это слабое решение задачи (1.1). Для этого фиксируем $v(x) \in H_0^1(\Omega) \subset L^{q+2}(\Omega)$. Тогда из (1.9) находим

$$\int_\Omega \left[\bigl(D_x u_{k_j}(x), D_x v(x)\bigr) + \lambda u_{k_j}(x) v(x) \right] dx =$$
$$= \int_\Omega \bigl(f(x, u_{k_j-1}(x)) + \lambda u_{k_j-1}(x)\bigr) v(x)\, dx. \tag{1.31}$$

Устремляя $k_j \to +\infty$, имеем

$$f(x, u_{k_j-1}) \to f(x, u) \quad \text{сильно в} \quad L^{(q+2)/(q+1)}(\Omega),$$
$$u_{k_j-1} \to u \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega)$$

и поэтому из (1.31) в силу (1.30) получим предельное равенство

$$\int_\Omega [(D_x u(x), D_x v(x)) + \lambda u(x) v(x)]\, dx = \int_\Omega (f(x, u(x)) + \lambda u(x))\, v(x)\, dx.$$

Сокращая член, содержащий λ, приходим к требуемому равенству

$$\int_\Omega (D_x u(x), D_x v(x))\, dx = \int_\Omega f(x, u(x)) v(x)\, dx \quad \text{для всех} \quad v(x) \in H_0^1(\Omega).$$

Теорема доказана.

§ 2. Литературные указания

В данной лекции мы использовали материал, изложенный в работе [39].

[1] И поэтому является слабо замкнутым.

Тематическая лекция V

ПРИНЦИП ШАУДЕРА И ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Лекция 16

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП ШАУДЕРА

§ 1. Введение

В данной лекции мы рассмотрим самый простой, но чрезвычайно распространенный метод, основанный на принципе Шаудера.

§ 2. Принцип сжимающих отображений

Метод сжимающих отображений является, по всей видимости, наиболее широко используемым методом нелинейного анализа. Дадим определение неподвижной точки.

Определение 1. *Точка* $f \in \operatorname{dom} A$ *называется неподвижной точкой оператора* A, *если* $f = Af$.

Напомним определение непрерывного по Липшицу оператора A, действующего в банаховом пространстве $\mathbb{B}$ относительно нормы $\|\cdot\|$.

Определение 2. *Оператор* $A : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ *удовлетворяет условию Липшица на* $D \subset \mathbb{B}$, *если существует такое* $0 < q < +\infty$, *что*

$$\|Af - Ag\| \leqslant q \|f - g\| \quad \textit{для всех} \quad f, g \in D.$$

При этом число $q > 0$ *называется постоянной Липшица.*

Наконец, введем определение *сжимающего отображения*.

Определение 3. *Оператор* A, *удовлетворяющий условию Липшица с константой* $q \in (0, 1)$, *называется сжимающим.*

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Если выполнено неравенство*

$$\|f_{n+1} - f_n\| \leqslant q \|f_n - f_{n-1}\| \quad \textit{при} \quad n \geqslant 1, \tag{2.1}$$

в котором $q \in (0, 1)$, *то при всяком* $n \geqslant 1$

$$\|f_{n+k} - f_n\| \leqslant q^n (1 - q)^{-1} \|f_1 - f_0\| \quad \textit{при} \quad k \geqslant 1.$$

Таким образом, последовательность $\{f_n\}$ — *это последовательность Коши в банаховом пространстве* $\mathbb{B}$.

Доказательство.

Из (2.1) по индукции получаем, что

$$\|f_{n+1} - f_n\| \leqslant q^n \|f_1 - f_0\| \quad \text{при} \quad n \geqslant 1.$$

Следовательно, при $k \geqslant 1$

$$\|f_{n+k} - f_n\| = \left\|\sum_{j=1}^{k} (f_{n+j} - f_{n+j-1})\right\| \leqslant \sum_{j=1}^{k} \|f_{n+j} - f_{n+j-1}\| \leqslant$$

$$\leqslant \|f_1 - f_0\| \sum_{j=1}^{k} q^{n+j-1} \leqslant q^n (1-q)^{-1} \|f_1 - f_0\|.$$

Так как $q < 1$, правая часть стремится к нулю при $n \to +\infty$. Значит, $\{f_n\}$ — это последовательность Коши.

Лемма доказана.

Справедлив следующий важный принцип.

Принцип сжимающих отображений. *Предположим, что оператор A отображает замкнутое подмножество D банахова пространства $\mathbb{B}$ в D и является сжимающим на D. Тогда A имеет в D единственную неподвижную точку, скажем f. Далее, при любом начальном значении $f_0 \in D$ последовательные приближения $f_{n+1} = Af_n$ $(n \geqslant 0)$ сходятся к f, и справедлива следующая оценка скорости сходимости*:

$$\|f - f_n\| \leqslant q^n (1-q)^{-1} \|Af_0 - f_0\|. \tag{2.2}$$

Доказательство.

Шаг 1. Прежде всего заметим, что итерационная последовательность $\{f_n\} \subset D$.

□ Действительно, во–первых, имеем

$$f_0 \in D \Rightarrow f_1 = Af_0 \in D.$$

Во–вторых, предположим, что $f_n \in D$, тогда, очевидно, $f_{n+1} = Af_n \in D$. Следовательно, по индукции получаем $\{f_n\} \subset D$. ⊠

Поскольку A — сжимающий оператор на $D \subset \mathbb{B}$, то

$$\|f_{n+1} - f_n\| = \|Af_n - Af_{n-1}\| \leqslant q\|f_n - f_{n-1}\|.$$

Отсюда получаем неравенство

$$\|f_{n+1} - f_n\| \leqslant q \|f_n - f_{n-1}\| \quad \text{при} \quad n \geqslant 1 \quad \text{и} \quad q \in (0,1). \tag{2.3}$$

Из леммы 1 следует, что при $n > m$

$$\|f_n - f_m\| \leqslant q^m (1-q)^{-1} \|Af_0 - f_0\| \quad \text{при} \quad k \geqslant 1, \tag{2.4}$$

поскольку $f_1 = Af_0$. Этим доказано, что построенная по $f_0 \in D$ последовательность $\{f_n\} \subset D$ — это последовательность Коши в банаховом пространстве $\mathbb{B}$.

Шаг 2. В силу (2.4) последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна в $\mathbb{B}$ и поэтому сильно сходится в $\mathbb{B}$ к некоторому $\overline{f} \in \mathbb{B}$. В силу замкнутости $D \subset \mathbb{B}$ приходим к выводу о том, что $\overline{f} \in D$.

В силу непрерывности A на замкнутом множестве $D \subset \mathbb{B}$, что вытекает из сжимаемости оператора A на D справедлива следующая цепочка предельных равенств:

$$A\overline{f} = \lim_{n\to+\infty} Af_n = \lim_{n\to+\infty} f_{n+1} = \overline{f}, \tag{2.5}$$

т. е. $\overline{f}$ — неподвижная точка. Заметим, что пределы в (2.5) понимаются в смысле сильной сходимости в $\mathbb{B}$.

Шаг 3. Чтобы доказать единственность, допустим, что $\overline{g}$ — другая неподвижная точка A. Тогда

$$\left\|\overline{f} - \overline{g}\right\| = \left\|A\overline{f} - A\overline{g}\right\| \leqslant q \left\|\overline{f} - \overline{g}\right\|.$$

Поскольку $0 < q < 1$, это означает, что $\overline{f} = \overline{g}$.

Теорема доказана.

§ 3. Принцип неподвижной точки Шаудера

Сначала напомним знаменитую теорему Брауэра о неподвижной точке в конечномерном пространстве.

Теорема Брауэра о неподвижной точке 1. *Пусть D — ограниченное замкнутое выпуклое подмножество конечномерного нормированного векторного пространства. Если A — непрерывное отображение D в себя, то A имеет неподвижную точку в D.*

Имеет место и ослабленный вариант теоремы Брауэра.

Теорема Брауэра о неподвижной точке 2. *Пусть непрерывный оператор A отображает единичный шар $S := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$ $n-$мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ в себя. Тогда в S найдется неподвижная точка оператора A.*

Определение 4. *Пусть в банаховом пространстве $\mathbb{B}$ задано множество M из конечного числа элементов*

$$M := \{x_i \in \mathbb{B} : \; i = 1, ..., n\}.$$

Множество всевозможных линейных комбинаций

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \quad \text{и} \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad x_i \in M, \quad i = \overline{1, n}\right\}$$

называется выпуклой оболочкой $\mathrm{Co}(M)$ множества M.

С помощью теоремы Брауэра можно доказывать различные теоремы о неподвижных точках нелинейных операторов в бесконечномерных банаховых пространствах. Справедлив основной результат этого параграфа.

Теорема о принципе Шаудера. *Пусть оператор A отображает замкнутое ограниченное выпуклое множество D банахова пространства $\mathbb{B}$ в себя. Тогда, если A вполне непрерывен* [1] *на D, то он имеет на D неподвижную точку.*

Доказательство.

Шаг 1. Будем рассуждать от противного. Пусть оператор A не имеет на D неподвижных точек. Тогда найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для всех $x \in D$
$$\|A(x) - x\| \geqslant \varepsilon_0. \tag{3.1}$$

$\square$ Действительно, если это не так, то найдется последовательность $\{x_n\} \subset D$ такая, что
$$\|A(x_n) - x_n\| \to 0, \quad n \to +\infty. \tag{3.2}$$

Но тогда, вследствие компактности $\overline{A(D)}$ в $\mathbb{B}$, из последовательности $\{A(x_n)\} \subset \overline{A(D)}$ можно выделить подпоследовательность $\{A(x_{n'})\}$, что
$$A(x_{n'}) \to x_0 \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n' \to +\infty.$$

Причем $x_0 \in \overline{A(D)}$ в силу замкнутости $\overline{A(D)}$. Заметим, что имеет место неравенство
$$\|x_{n'} - x_0\| \leqslant \|x_{n'} - A(x_{n'})\| + \|A(x_{n'}) - x_0\|$$

В силу (3.2) из этого неравенства вытекает, что
$$x_{n'} \to x_0 \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n' \to +\infty.$$

При этом $x_0 \in D$, ибо $\overline{A(D)} \subset D$, а D замкнуто. Полагая в (3.2) $n = n'$ и переходя к пределу при $n' \to +\infty$ вследствие непрерывности $A(x)$ получаем $A(x_0) = x_0$, что противоречит нашему предположению об отсутствии у A неподвижных точек на D. Итак, выполняется неравенство (3.1). $\boxtimes$

Шаг 2. Будем далее считать, что $\vartheta \in D$ [2]. Это условие не является ограничением. В самом деле, пусть $y_0 \in D$. Рассмотрим множество $D_0 := D - y_0$ и оператор
$$A_0 x := A(x + y_0) - y_0.$$

[1] Т. е. компактен и непрерывен.

[2] Символом $\vartheta \in \mathbb{B}$ мы обозначаем нулевой элемент пространства $\mathbb{B}$.

Докажем, что D_0 — замкнутое и выпуклое множество.

$\square$ Действительно, пусть $\{x_n\} \subset D_0$ и

$$x_n \to x_0 \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Но тогда последовательность $\{x_n + y_0\} \subset D$ и

$$x_n + y_0 \to x_0 + y_0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Множество D замкнуто в $\mathbb{B}$ и поэтому $x_0 + y_0 \in D$. Следовательно, $x_0 \in D_0 = D - y_0$. Множество D_0 замкнуто. Теперь докажем выпуклость D_0. Пусть $x_1, x_2 \in D_0$. Поэтому

$$z_1 = x_1 + y_0 \in D \quad \text{и} \quad z_2 = x_2 + y_0 \in D.$$

Множество D выпукло. Значит,

$$\begin{aligned} & tz_1 + (1-t)z_2 \in D \quad \text{для всех} \quad t \in [0,1] \Rightarrow \\ & \qquad \Rightarrow t(x_1 + y_0) + (1-t)(x_2 + y_0) = tx_1 + (1-t)x_2 + y_0 \in D \Rightarrow \\ & \qquad\qquad \Rightarrow tx_1 + (1-t)x_2 \in D - y_0 = D_0 \quad \text{для всех} \quad t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Следовательно, множество D_0 выпукло. $\boxtimes$

Понятно, что A_0 — вполне непрерывный оператор. Если $x_0 \in D$ — неподвижная точка оператора A, то $x_0 - y_0 \in D_0$ — неподвижная точка оператора A_0.

Шаг 3. Зафиксируем любое $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Пусть

$$M_\varepsilon := \{y_i \in \overline{A(D)},\ i = 1, ..., n\}$$

есть конечная $\varepsilon-$сеть компактного множества $\overline{A(D)}$. Выделим во множестве M_ε максимальную линейно независимую систему элементов. Можно считать, что ее образуют элементы множества

$$N_\varepsilon := \{y_i,\ i = 1, ..., m\}, \quad m \leqslant n.$$

Рассмотрим $m-$мерное банахово пространство $\mathbb{B}_m$, натянутое на элементы множества N_ε и, очевидно, являющееся подпространством банахова пространства $\mathbb{B}$. Пусть, далее,

$$K_\varepsilon := \overline{\mathrm{Co}(\vartheta \cup M_\varepsilon)}$$

— выпуклая оболочка множества, состоящего из объединения нулевого элемента $\vartheta \in \mathbb{B}$ и точек конечной $\varepsilon-$сети M_ε. Очевидно, что $K_\varepsilon \subset \mathbb{B}_m$. Далее, K_ε является согласно его определению выпуклым телом [1] в $\mathbb{B}_m$.

[1] Замкнутое выпуклое множество в банаховом пространстве называется выпуклым телом, если оно содержит хотя бы одну внутреннюю точку.

Кроме того, $K_\varepsilon \subset D$, так как по условию теоремы $\overline{A(D)} \subset D$, а D выпукло.

Шаг 4. Рассмотрим оператор A_ε, действующий из D в D и определяемый следующим образом:

$$A_\varepsilon(x) := \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(x) y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(x)} \quad \text{для всех} \quad x \in D, \tag{3.3}$$

где

$$\mu_i(x) := \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \|A(x) - y_i\| > \varepsilon; \\ \varepsilon - \|A(x) - y_i\|, & \text{если} \quad \|A(x) - y_i\| \leqslant \varepsilon. \end{cases} \tag{3.4}$$

Оператор A_ε часто называют $\varepsilon-$проектором Шаудера.

Шаг 5. Рассмотрим теперь сужение оператора A_ε на множество K_ε. Можно доказать, что

a) A_ε отображает K_ε в себя;

□ Это вытекает, из того, что оператор определен на K_ε и, кроме того, из определения оператора A_ε вытекает, что

$$A_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) y_i \subset \overline{\mathrm{Co}(\vartheta \cup M_\varepsilon)} =: K_\varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in K_\varepsilon,$$

где

$$\lambda_i(x) := \frac{\mu_i(x)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j(x)} \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) = 1 \quad \text{при} \quad x \in K_\varepsilon. \quad \boxtimes$$

b) A_ε непрерывен на K_ε.

□ Действительно, пусть $\{x_k\} \subset K_\varepsilon$ — это произвольная последовательность такая, что

$$x_k \to x \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

В силу замкнутости K_ε имеем $x \in K_\varepsilon$. Согласно определению A_ε имеет место равенство

$$A_\varepsilon(x_k) - A_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{n} [\lambda_i(x_k) - \lambda_i(x)]\, y_i, \quad \lambda_i(x) := \frac{\mu_i(x)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j(x)}. \tag{3.5}$$

Поскольку $K_\varepsilon \subset \overline{A(D)}$, то для всякого $x \in K_\varepsilon$ найдется такой номер $j_0 \in \overline{1, n}$, что $\mu_{j_0}(x) > 0$. Заметим, что имеет место следующее свойство нормы:

$$|\|A(x) - y_i\| - \|A(x_k) - y_i\|| \leqslant \|A(x) - A(x_k)\| \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

поскольку оператор A непрерывен на D. Отсюда вытекает, что [1])

$$\mu_i(x_k) \to \mu_i(x) \quad \text{при} \quad k \to +\infty, \quad i = \overline{1, n}. \tag{3.6}$$

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(x) - \lambda_i(x_k)| = \\
&= \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j(x) \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j(x_k)} \sum_{i=1}^{n} \left| \mu_i(x) \sum_{j=1}^{n} \mu_j(x_k) - \mu_i(x_k) \sum_{j=1}^{n} \mu_j(x) \right| \leqslant \\
&\leqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} |\mu_i(x) - \mu_i(x_k)|}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j(x)} + \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} |\mu_j(x_k) - \mu_j(x)|}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j(x)} = \\
&= 2 \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} |\mu_i(x) - \mu_i(x_k)|}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j(x)} \to +0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Стало быть, из (3.5) с учетом (3.7) мы получим предельное свойство

$$\begin{aligned}
\|A_\varepsilon(x_k) - A_\varepsilon(x)\| &\leqslant \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(x_k) - \lambda_i(x)| \, \|y_i\| \leqslant \\
&\leqslant \max_{i=\overline{1,n}} \|y_i\| \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(x_k) - \lambda_i(x)| \to +0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty.
\end{aligned}$$

Непрерывность A_ε на K_ε доказана. ☒

Таким образом, к сужению оператора A_ε на замкнутое выпуклое и ограниченное множество K_ε можно применить теорему Брауэра 1, согласно которой существует неподвижная точка $x_\varepsilon \in K_\varepsilon$ оператора A_ε, т. е.

$$A_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon.$$

Шаг 6. Заметим, что оператор A_ε обладает следующим свойством:

$$\|A(x) - A_\varepsilon(x)\| \leqslant \varepsilon \tag{3.8}$$

для всех $x \in D$, т. е. оператор A_ε аппроксимирует оператор A на D с точностью ε.

---

[1]) Поскольку вещественная функция $x^+ := \max\{x, 0\}$ является непрерывной при $x \in \mathbb{R}^1$.

□ Действительно,

$$A(x)-A_\varepsilon(x)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i(x)A(x)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i(x)}-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i(x)y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i(x)}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i(x)(A(x)-y_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i(x)}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\|A(x)-A_\varepsilon(x)\|\leqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i(x)\|A(x)-y_i\|}{\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i(x)},$$

где суммирование в числителе и знаменателе ведется только по тем индексам i, для которых $\|A(x)-y_i\|<\varepsilon$, поскольку если

$$\|A(x)-y_i\|\geqslant\varepsilon\Rightarrow\mu_i(x)=0.$$

Следовательно,

$$\|A(x)-A_\varepsilon(x)\|\leqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i(x)\varepsilon}{\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i(x)}=\varepsilon.\quad\boxtimes$$

Шаг 7. В силу (3.8) имеем

$$\|A(x_\varepsilon)-x_\varepsilon\|=\|A(x_\varepsilon)-A_\varepsilon(x_\varepsilon)\|\leqslant\varepsilon.$$

Это противоречит неравенству (3.1), ибо мы взяли $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$. Значит, допущение о том, что A не имеет на D неподвижных точек, неверно, и теорема Шаудера доказана.

Теорема доказана.

В приложениях к нелинейным краевым задачам важным является следующее следствие из принципа Шаудера:

Следствие 1. *Пусть A — это вполне непрерывное отображение банахова пространства $\mathbb{B}$ в себя. Пусть существует постоянная $M>0$ такая, что для всех пар $(x,\alpha)\in\mathbb{B}\otimes[0,1]$, удовлетворяющих уравнению*

$$x=\alpha Ax,$$

справедливо неравенство

$$\|x\|<M\ ^{1)}. \tag{3.9}$$

[1] Постоянная M не зависит от выбора пары (x,α).

Тогда оператор A имеет неподвижную точку.

Доказательство.

Шаг 1. Без ограничения общности можно предположить, что $M = 1$. Определим отображение

$$A^* x := \begin{cases} Ax & \text{если} \quad \|Ax\| \leqslant 1, \\ Ax/\|Ax\|, & \text{если} \quad \|Ax\| \geqslant 1. \end{cases}$$

Докажем, что это отображение переводит единичный шар $D_1 = \{x \in \mathbb{B} : \|x\| \leqslant 1\}$ в единичный шар.

□ Действительно, пусть $x \in D_1$, тогда возможны два случая:

(i) $\|Ax\| \leqslant 1$,

(ii) $\|Ax\| > 1$.

В обоих случаях получаем, что $\|A^* x\| \leqslant 1$. ⊠

Шаг 2. Получим теперь оценку разности $A^* x_1 - A^* x_2$ по норме $\|\cdot\|$ банахова пространства $\mathbb{B}$ в случае, когда $x_1, x_2 \in D_1$.

□ Действительно, возможны два принципиальных для нас случая:

1) $\|Ax_1\| \leqslant 1$ и $\|Ax_2\| \leqslant 1$;

2) $\|Ax_1\| \geqslant 1$ и $\|Ax_2\| \geqslant 1$.

В первом случае мы сразу же получаем равенство

$$\|A^* x_1 - A^* x_2\| = \|Ax_1 - Ax_2\|. \tag{3.10}$$

Во втором случае справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \|A^* x_1 - A^* x_2\| &\leqslant \left\| \frac{Ax_1}{\|Ax_1\|} - \frac{Ax_2}{\|Ax_2\|} \right\| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{\|Ax_1\|\|Ax_2\|} \, \big\| \|Ax_2\| Ax_1 - \|Ax_1\| Ax_2 \big\| = \\ &= \frac{1}{\|Ax_1\|\|Ax_2\|} \, \big\| \|Ax_2\| \, [Ax_1 - Ax_2] + [\|Ax_2\| - \|Ax_1\|] \, Ax_2 \big\| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{\|Ax_1\|} \|Ax_1 - Ax_2\| + \frac{1}{\|Ax_1\|} \, \big| \|Ax_2\| - \|Ax_1\| \big| \leqslant \\ &\leqslant 2\|Ax_1 - Ax_2\|, \end{aligned} \tag{3.11}$$

где мы воспользовались легко проверяемым неравенством

$$\big| \|Ax_2\| - \|Ax_1\| \big| \leqslant \|Ax_1 - Ax_2\|.$$

Из неравенств (3.10) и (3.11) вытекает, что если оператор A непрерывен и вполне непрерывен, то таков соответственно и оператор A^*.

□ Действительно, <u>докажем сначала непрерывность</u>. Пусть $\{x_n\} \subset D_1$ и

$$x_n \to x \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{3.12}$$

В силу замкнутости D_1 имеем $x \in D_1$. В силу непрерывности A справедливо предельное свойство

$$Ax_n \to Ax \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{3.13}$$

Возможны следующие три случая:

$$\|Ax\| < 1, \quad \|Ax\| > 1 \quad \text{и} \quad \|Ax\| = 1. \tag{3.14}$$

В первом случае в силу (3.12) и (3.13) найдется такой номер $n_0 \in \mathbb{N}$, что последовательность $\{Ax_n\}_{n=n_0}^{+\infty}$ лежит в единичном шаре

$$\|Ax_n\| < 1 \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \|A^*x_n - A^*x\| = \|Ax_n - Ax\| \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Во втором случае рассуждения аналогичные нужно только воспользоваться оценкой (3.11) и тоже прийти к выводу о том, что

$$\|A^*x_n - A^*x\| \leqslant 2\|Ax_n - Ax\| \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{3.15}$$

Рассмотри третий случай. В этом случае имеет место либо оценка (3.10) либо оценка (3.11) в зависимости от того куда попадет Ax_n внутрь шара или вне шара. В любом случае имеет место грубая оценка (3.11) и мы снова приходим к выводу, что справедливо предельное свойство (3.15). Непрерывность доказана. ⊠

Таким же образом может быть доказана компактность оператора A^* на D_1.

□ Действительно, пусть $\{x_n\} \subset D_1$ — это произвольная последовательность, тогда в силу компактности A на D_1 найдется такая подпоследовательность $\{x_{n_m}\} \subset \{x_n\}$, что

$$Ax_{n_m} \to v \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \tag{3.16}$$

Нужно рассмотреть три случая

$$\|v\| < 1, \quad \|v\| > 1 \quad \text{и} \quad \|v\| = 1.$$

В первом случае можно воспользоваться оценкой (3.10) и получить как и ранее предельное свойство

$$\|A^*x_{n_m} - v\| = \|Ax_{n_m} - v\| \to +0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Во втором и третьем случаях нужно воспользоваться оценкой (3.11) и получить предельное свойство

$$\left\|A^*x_{n_m} - \frac{v}{\|v\|}\right\| \leqslant 2\|Ax_{n_m} - v\| \to +0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \quad ⊠$$

Шаг 3. Поэтому в силу теоремы о принципе Шаудера получаем, что оператор A^* имеет неподвижную точку x_0. Покажем, что точка x_0 является неподвижной точкой отображения A.

$\square$ Действительно, предположим, что $\|Ax_0\| \geqslant 1$. Тогда $x_0 = A^*x_0 = \alpha Ax_0$ с $\alpha = 1/\|Ax_0\|$, и поэтому $\|x_0\| = \|A^*x_0\| = 1$. Но это противоречит неравенству (3.9) с постоянной $M = 1$.

Следовательно, предположение $\|Ax_0\| \geqslant 1$ неверно, т.е.

$$\|Ax_0\| < 1.$$

Тогда

$$x_0 = A^*x_0 = Ax_0.$$

Следствие доказано.

§ 4. Квазилинейное уравнение с p–лапласианом

Рассмотрим следующую задачу при $p \geqslant 2$

$$\Delta_p u \overset{\text{def}}{=} \operatorname{div}(|D_x u|^{p-2} D_x u) = -f(x,u) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{4.1}$$

$$u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega, \tag{4.2}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0,1]$. Введем обозначение

$$p^* := \begin{cases} Np/(N-p), & \text{если} \quad p < N, \\ \infty, & \text{если} \quad p \geqslant N. \end{cases}$$

Предположим, что функция $f : \Omega \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ является каратеодориевой [1)] и удовлетворяет условию роста

$$|f(x,s)| \leqslant c|s|^{q-1} + b(x), \quad x \in \Omega, \quad s \in \mathbb{R}^1, \quad q \in (1, p^*), \tag{4.3}$$

где $c > 0$ — некоторая постоянная, $b(x) \in L^{q'}(\Omega)$, $b(x) \geqslant 0$ почти всюду в Ω,

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Ограничение $q \in (1, p^*)$ гарантирует компактность непрерывного вложения $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$.

Теперь сопоставим каратеодориевой функции $f(x,u)$ оператор Немыцкого

$$N_f(u) \overset{\text{def}}{=} f(x, u(x)) : L^q(\Omega) \to L^{q'}(\Omega).$$

[1)] Смотри первую лекцию.

Заметим, что справедлива следующая цепочка вложений

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \overset{N_f}{\to} L^{q'}(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega),$$

из которой вытекает, что оператор Немыцкого N_f в силу теоремы М. А. Красносельского является компактным и непрерывным оператором, действующий следующим образом:

$$N_f : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega).$$

Определение 5. *Слабым решением задачи* (4.1), (4.2) *называется функция* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *удовлетворяющая уравнению*

$$\langle -\Delta_p u, v\rangle = \langle N_f u, v\rangle \quad \textit{для всех} \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{4.4}$$

где $\langle \cdot, \cdot\rangle$ *— скобки двойственности между банаховыми пространствами* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *и* $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Как мы уже установили ранее оператор

$$(-\Delta_p)^{-1} : W^{-1,p'}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)$$

является ограниченным и непрерывным. Поэтому (4.4) может быть переписано в эквивалентном виде

$$u = (-\Delta_p)^{-1} N_f u, \tag{4.5}$$

с вполне непрерывным оператором

$$A \overset{\text{def}}{=} (-\Delta_p)^{-1} N_f : W_0^{1,p}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega). \tag{4.6}$$

Докажем, что следующее множество ограничено в $W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$S := \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Big| \; u = \alpha A(u) \quad \text{для пары} \quad (u, \alpha) \in W_0^{1,p}(\Omega) \otimes [0,1] \right\}.$$

□ Действительно, справедлива следующая цепочка равенств для произвольного $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\|A(u)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|D_x A(u)\|_p^p = \langle (-\Delta_p) A(u), A(u)\rangle = \langle N_f u, A(u)\rangle =$$
$$= \int\limits_\Omega f(x, u(x)) A(u)\, dx \leqslant \int\limits_\Omega \left(c|u|^{q-1} + b(x)\right) |A(u)|\, dx.$$

Более того, для $u \in S$, т.е. $u = \alpha A(u)$ с некоторыми $\alpha \in [0,1]$ и $u(x) \in \in W_0^{1,p}(\Omega)$ мы имеем цепочку неравенств

$$
\begin{aligned}
\|A(u)\|^p_{W^{1,p}_0(\Omega)} \leqslant c\alpha^{q-1}\|A(u)\|^q_q + \|b\|_{q'}\|A(u)\|_q \leqslant \\
\leqslant cc_1^q\alpha^{q-1}\|A(u)\|^q_{W^{1,p}_0(\Omega)} + c_1\|b\|_{q'}\|A(u)\|_{W^{1,p}_0(\Omega)} \leqslant \\
\leqslant cc_1^q\|A(u)\|^q_{W^{1,p}_0(\Omega)} + c_1\|b\|_{q'}\|A(u)\|_{W^{1,p}_0(\Omega)},
\end{aligned}
$$

где c_1 — наилучшая постоянная вложения $W^{1,p}_0(\Omega) \to L^q(\Omega)$. Следовательно, для каждого $u \in S$ справедливо неравенство

$$
\|A(u)\|^p_{W^{1,p}_0(\Omega)} \leqslant K_1\|A(u)\|^q_{W^{1,p}_0(\Omega)} + K_2\|A(u)\|_{W^{1,p}_0(\Omega)} \tag{4.7}
$$

с некоторыми постоянными $K_1, K_2 \geqslant 0$. Заметим, что из (4.7) при $q \in \in (1,p)$ вытекает существование такой постоянной $M > 0$, что

$$
\|A(u)\|_{W^{1,p}_0(\Omega)} < M.
$$

$\square$ Действительно, в силу трех параметрического неравенства Юнга имеем

$$
K_1 \cdot a^q \leqslant \varepsilon a^p + c_2(\varepsilon), \tag{4.8}
$$

где мы помимо параметра $\varepsilon > 0$ взяли параметры

$$
p_1 := \frac{p}{q} > 1, \quad p_2 := \frac{p}{p-q}, \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1.
$$

Кроме того, снова в силу трех параметрического неравенства Юнга имеет место неравенство

$$
K_2 \cdot a \leqslant \varepsilon a^p + c_3(\varepsilon). \tag{4.9}
$$

Из (4.7) в силу (4.8) и (4.9) мы получим при

$$
a := \|A(u)\|_{W^{1,p}_0(\Omega)}
$$

неравенство

$$
\|A(u)\|^p_{W^{1,p}_0(\Omega)} \leqslant 2\varepsilon\|A(u)\|^p_{W^{1,p}_0(\Omega)} + c_4(\varepsilon),
$$

в котором положим $\varepsilon = 1/4$. $\boxtimes$

Отсюда вытекает ограниченность S поскольку

$$
\|u\|_{W^{1,p}_0(\Omega)} = \alpha\|A(u)\|_{W^{1,p}_0(\Omega)} < M. \quad \boxtimes
$$

Отметим, что всегда $p < p^*$.

Таким образом, в силу следствия 1 из теоремы Шаудера мы приходим к следующей теореме о разрешимости:

Теорема 1. *Если каратеодориева функция $f : \Omega \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ удовлетворяет* (4.3) *с $q \in (1,p)$, тогда оператор $(-\Delta_p)^{-1}N_f$ имеет неподвижную точку в $W^{1,p}_0(\Omega)$ или, что эквивалентно, задача* (4.4) *имеет решение. Более того, все решения этой задачи образуют ограниченное множество в $W^{1,p}_0(\Omega)$.*

§ 5. Литературные указания

Материал для этой лекции взят из работ [12], [23], [25], [32], [36], [19], [48] и [46].

Лекция 17

ПРОСТЕЙШИЙ СЛУЧАЙ ТЕОРЕМЫ ПИКАРА

§ 1. Автономное уравнение с глобально липшицевой правой частью

Теорема 1. *Пусть B — банахово пространство с нормой $\|.\|$. Пусть функция $\Phi : B \to B$ определена на всём пространстве B и липшиц-непрерывна, т. е. существует такое число $L > 0$, что при всех $x_1, x_2 \in B$ верно неравенство*

$$\|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\| \leqslant L\|x_1 - x_2\|. \text{ [1]}$$

Тогда задача Коши (при любых $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in B$)

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x = \Phi(x), \quad t \geqslant t_0; \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

глобально и однозначно разрешима, т. е.
1) *её решение $x(t) \in C^1([t_0, +\infty); B)$ существует;*
2) *каково бы ни было другое решение $\widetilde{x}(t)$ задачи Коши (1.1) на промежутке $\mathcal{T} = [t_0, T]$ ($t_0 < T < +\infty$) или $\mathcal{T} = [t_0, T)$ ($t_0 < T \leqslant +\infty$), оно совпадает с $x(t)$ на $\mathcal{T} \cap [t_0, +\infty)$.*

Доказательство.

Доказательству теоремы предпошлём две леммы.

Лемма 1. *Зафиксируем некоторое $h \leqslant \frac{1}{2L}$. Каковы бы ни были $t_1 \geqslant t_0$ и $x_1 \in B$, существует и единственно решение задачи Коши*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x = \Phi(x), \quad t \in [t_1, t_1 + h]; \\ x(t_1) = x_1. \end{cases} \tag{1.2}$$

[1] Очевидно, липшиц-непрерывная функция является непрерывной — это нам вскоре понадобится.

Доказательство. Запишем абстрактное интегральное уравнение Вольтерра

$$x(t) = x_1 + \int\limits_{t_1}^{t} \Phi(x(\tau))\, d\tau. \tag{1.3}$$

Докажем прежде, что утверждение (А): $x(t) \in C^1([t_1, t_1 + h]; B)$ *и* $x(t)$ *является решением задачи Коши* (1.2); и утверждение (В): $x(t) \in C([t_1, t_1 + h]; B)$ *и* $x(t)$ *является решением интегрального уравнения* (1.3) равносильны.

(А) $\Longrightarrow$ (Б). Заметим, что если производная функции $x(t)$ непрерывна на отрезке $[t_1, t_1 + h]$, то (в силу уравнения (1.2)) непрерывна на нём и правая часть уравнения — сложная функция $x \mapsto \Phi(x(t))$. Следовательно, обе части уравнения (1.2) можно проинтегрировать по t в пределах от t_1 до произвольной точки на отрезке $[t_1, t_1 + h]$:

$$\int\limits_{t_1}^{t} x'(\tau)\, d\tau = \int\limits_{t_1}^{t} \Phi(x(\tau))\, d\tau, \quad t \in [t_1, t_1 + h].$$

Применяя далее к левой части формулу Ньютона—Лейбница, получаем

$$x(t) - x(t_1) = \int\limits_{t_1}^{t} \Phi(x(\tau))\, d\tau, \quad t \in [t_1, t_1 + h],$$

что с учётом равенства $x(t_1) = x_1$ из (1.2) совпадает с (1.3).

(Б) $\Longrightarrow$ (А). Поскольку функция $x(t)$ непрерывна на отрезке $[t_1, t_1 + h]$, то и функция $t \mapsto \Phi(x(t))$ — как композиция непрерывных функций $x(t)$ и $\Phi(x)$ — тоже непрерывна на нём. Следовательно, к правой части интегрального уравнения (1.3) можно применить теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом. Получаем равенство

$$x(t) = \Phi(x(t)), \quad t \in [t_0, t_0 + h], \tag{1.4}$$

а при подстановке в интегральное уравнение значения $t = t_1$ получаем начальное условие. При этом в силу равенства (1.4) производная $x'(t)$ тоже непрерывна на отрезке $[t_1, t_1 + h]$.

Следовательно, для доказательства существования и единственности непрерывно дифференцируемого решения задачи Коши (1.2) достаточно доказать существование и единственность решения интегрального уравнения (1.3) [1)].

[1)] Подчеркнём, что из существования и единственности решения одного уравнения следует не только существование, но и единственность решения другого!

Для доказательства существования и единственности решения уравнения (1.3) введём банахово пространство (см. задачу 1)

$$\mathbb{B} = C([t_1, t_1 + h]; B)$$

с нормой

$$\|x\|_{\mathbb{B}} = \sup_{t \in [t_1, t_1+h]} \|x(t)\|$$

и оператор (вообще говоря, нелинейный) $A : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, действующий по правилу

$$(Ax)(t) = x_1 + \int_{t_1}^{t} \Phi(x(\tau))d\tau,$$

с помощью которого уравнение (1.3) переписывается в виде

$$x = Ax. \tag{1.5}$$

Заметим, что этот оператор (определённый на всём банаховом пространстве B) является сжимающим. В самом деле, для любых непрерывных функций $\widetilde{x}(t)$, $\widetilde{\widetilde{x}}(t)$ в любой точке $t \in [t_1, t_1 + h]$ имеем

$$\begin{aligned}
&\left\|A\widetilde{x}(t) - A\widetilde{\widetilde{x}}(t)\right\| = \\
&\qquad = \left\| x_1 + \int_{t_1}^{t} \Phi(\widetilde{x}(\tau))\, d\tau - x_1 - \int_{t_1}^{t} \Phi(\widetilde{\widetilde{x}}(\tau))\, d\tau \right\| = \\
&\qquad = \left\| \int_{t_1}^{t} \Big(\Phi(\widetilde{x}(\tau)) - \Phi(\widetilde{\widetilde{x}}(\tau)) \Big)\, d\tau \right\| \leqslant \\
&\qquad \leqslant \int_{t_1}^{t} \left\| \Phi(\widetilde{x}(\tau)) - \Phi(\widetilde{\widetilde{x}}(\tau)) \right\| d\tau \leqslant \\
&\qquad \leqslant \int_{t_1}^{t} L \|\widetilde{x}(\tau) - \widetilde{\widetilde{x}}(\tau)\|\, d\tau \leqslant \int_{t_1}^{t} L \sup_{t \in [t_1, t_1+h]} \|\widetilde{x} - \widetilde{\widetilde{x}}\|\, d\tau = \\
&\qquad = \int_{t_1}^{t} L \|\widetilde{x} - \widetilde{\widetilde{x}}\|_{\mathbb{B}}\, d\tau \leqslant \\
&\qquad \leqslant |t - t_1| L \|\widetilde{x} - \widetilde{\widetilde{x}}\|_{\mathbb{B}} \leqslant Lh \|\widetilde{x} - \widetilde{\widetilde{x}}\|_{\mathbb{B}} \leqslant \frac{1}{2} \|\widetilde{x} - \widetilde{\widetilde{x}}\|_{\mathbb{B}}.
\end{aligned}$$

Беря точную верхнюю грань по всем $t \in [t_1, t_1 + h]$, получаем

$$\left\| A\widetilde{x}(t) - A\widetilde{\widetilde{x}}(t) \right\|_{\mathbb{B}} \leqslant \frac{1}{2} \|\widetilde{x} - \widetilde{\widetilde{x}}\|_{\mathbb{B}}, \tag{1.6}$$

т. е. оператор A является сжимающим оператором, действующим на всём пространстве $\mathbb{B}$. Следовательно, к нему приме́ним принцип сжимающих отображений (теорема о неподвижной точке), что и доказывает существование и единственность решения интегрального уравнения (1.3) и — в силу вышесказанного — аналогичный результат для задачи Коши (1.2).

Лемма доказана.

Лемма 2. *Если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — соответственно решения задачи Коши* (1.1) *на некоторых промежутках $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ с началом в точке t_0 ($t_0 \in \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$), то эти функции совпадают на $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$.*

Доказательство.

1. Для сокращения записи введём обозначение $\mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$. Рассмотрим множество

$$\mathcal{T}_4 = \{t \in \mathcal{T}_3 \mid x_1(t) \neq x_2(t)\}.$$

Если оно пусто, то лемма доказана. Предположим теперь, что $\mathcal{T}_4$ непусто. Заметим, что это множество открыто в метрическом пространстве $\mathcal{T}_4$ как прообраз открытого множества $(0, +\infty)$ при непрерывном отображении $g(t) := \|x_1(t) - x_2(t)\|$.

2. Положим

$$T = \inf \mathcal{T}_4. \tag{1.7}$$

Докажем, что $T \notin \mathcal{T}_4$, т. е. $x_1(T) = x_2(T)$. В самом деле, если $T = 0$, то это следует из определения решений (точнее, из начального условия задачи Коши (1.1)). Если же $T > 0$, то в любой левой полуокрестности есть точки, не принадлежащие $\mathcal{T}_4$, а в любой правой полуокрестности — точки, принадлежащие ему. Следовательно, T является граничной точкой множества $\mathcal{T}_4$ и поэтому не принадлежит этому открытому множеству.

3. Из только что установленного факта $T \notin \mathcal{T}_4$ и предположении о непустоте $\mathcal{T}_4$ следует, в частности, что $\mathcal{T}_3$ «не может заканчиваться» точкой T и содержит некоторый промежуток $[T, T + h_1]$. Тогда можно выбрать достаточно малый отрезок $[T, T + h]$ (где $h \leqslant \min(h_1, \frac{1}{2L})$) и поставить на нём задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x = \Phi(x), \quad t \in [t_1, t_1 + h]; \\ x(T) = x_1(T). \end{cases} \tag{1.8}$$

Ограничения каждой из функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, очевидно, были бы её решениями, но не совпадали бы тождественно на отрезке $[T, T + h]$ (поскольку T есть точная нижняя грань $\mathcal{T}_4$). Последнее противоречит лемме 1.

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы. Теперь утверждение теоремы следует из доказанных выше двух лемм. В силу леммы 1 можно, двигаясь по шагам длины h, «составить» решение задачи Коши (1.1) из решений задач типа (1.2). При этом в силу равенства $x'(t) = \Phi(x(t))$, верного и в граничных точках отрезков для соответствующих односторонних производных, и непрерывности функции $x(t)$ (а следовательно, и сложной функции $\Phi(x(t))$), мы получаем, что производная в точках «сшивки» тоже существует и непрерывна. Из леммы 2 мы получаем утверждение о единственности решения.

Теорема доказана.

§ 2. Пример применения теоремы

Рассмотрим обобщенное уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова (ОКПП)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon^4 \Delta u - \varepsilon^2 u) + k\varepsilon^2 \Delta u - f(u, x, \varepsilon) = 0$$

с начальными и граничными условиями

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega,\ u|_{\Gamma\times(0,T)} = 0,\ x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T).$$

Пусть оператор $\mathbb{D}$ действует на трижды дифференцируемую функцию u по правилу

$$\mathbb{D}u = (\varepsilon^4 \Delta u - \varepsilon^2 u)_t + \varepsilon^2 k \Delta u - f(u,x), \tag{2.1}$$

где непрерывная функция $f(u,x)$ удовлетворяет условию

$$f(0,x) = 0$$

для всех $x \in \Omega$ и условию Липшица

$$|f(u_1,x) - f(u_2,x)| \leqslant C|u_1 - u_2| \tag{2.2}$$

для любых $x \in \Omega$, $u_{1,2} \in \mathbb{R}^1$, где $C > 0$ – постоянная величина.

В качества примера мы рассмотрим функцию f такую, что

$$f(u,x) = \begin{cases} \gamma u(u^2 - U^2(x)), & |u| \leqslant U_0, \quad x \in D, \\ (3\gamma U_0^2 - \gamma U^2(x))u - 2\gamma U_0^3, & |u| \geqslant U_0. \end{cases} \tag{2.3}$$

где $U_0 > \max_D |U(x)|$.

Рассмотрим начально-краевую задачу для обобщённого уравнения Колмогорова—Петровского—Пискунова (ОКПП)

$$\begin{cases} \mathbb{D}u = 0, & x \in \Omega \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, \\ u(x,0) = u_0(x), & \partial\Omega \end{cases} \tag{2.4}$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0,1]$.

Скалярное произведение и норму в $\mathbb{L}^2(\Omega)$ будем обозначать соответственно через $(u,v)_2$ и $\|u\|_2$, а скалярное произведение и норму в $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$ — соответствующими символами без индексов.

Чтобы сформулировать обобщённую постановку задачи (2.4), удобно будет сразу ввести некоторые операторы.

Определим оператор $\mathbb{J} : \mathbb{H}^1_0(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ действующим по правилу

$$\langle \mathbb{J}v, w\rangle = \int\limits_\Omega vw\,dx \quad \forall v,w \in \mathbb{H}^1_0(\Omega).$$

Очевидно, это линейный оператор. Оценим его норму. Имеем

$$|\langle \mathbb{J}v, w\rangle| = \left|\int\limits_\Omega vw\,dx\right| \leqslant \|v\|_2\|w\|_2 \leqslant C_F^2\|v\|\|w\|, \tag{2.5}$$

где C_F — константа в неравенстве Фридрихса

$$\|w\|_2 \leqslant C_F\|w\| \quad \forall w \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$$

для области Ω. Из (2.5) имеем

$$\|\mathbb{J}\| \leqslant C_F^2. \tag{2.6}$$

Далее, введём оператор $\Delta : \mathbb{H}^1_0(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ по правилу

$$\langle \Delta v, w\rangle = -\int\limits_\Omega (\nabla v, \nabla w)\,dx \quad \forall v,w \in \mathbb{H}^1_0(\Omega).$$

В силу оценки

$$\left|\int\limits_\Omega (\nabla v, \nabla w)\,dx\right| \equiv |(\nabla v, \nabla w)| \leqslant \|v\|\|w\|$$

имеем

$$\|\Delta\| \leqslant 1 \tag{2.7}$$

(на самом деле эта норма равна 1, как показывает выбор $w = v$, но для нас это не принципиально).

Наконец, введём нелинейный оператор $\mathbb{F}$ по правилу $\mathbb{F}(v) = f(v(x), x)$.

Справедлива следующая лемма:

Лемма 3. *Оператор $\mathbb{F}(v)$ является липшиц-непрерывным оператором, действующим в $\mathbb{L}^p(\Omega)$ (при любом $p > 1$), с константой Липшица, равной C из формулы* (2.2).

Доказательство. Поскольку $|U(x)| < U_0 < +\infty$, из (2.3) следует оценка (с некоторыми константами C_1, C_2)

$$|f(v,x)| \leqslant C_1 + C_2|u|,$$

откуда в силу теоремы Красносельского об операторе Немыцкого следует, что оператор $v \mapsto \mathbb{F}(v)$ переводит функцию, принадлежащую $\mathbb{L}^p(\Omega)$, в функцию, принадлежащую $\mathbb{L}^p(\Omega)$. Далее, имеем оценку

$$\|\mathbb{F}(v_1) - \mathbb{F}(v_2)\|_p = \left(\int\limits_\Omega |f(v_1,x) - f(v_2,x)|^p dx\right)^{1/p} \leqslant \{(2.2)\} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_\Omega C^p |v_1 - v_2|^p dx\right)^{1/p} = C\|v_1 - v_2\|_p,$$

что и доказывает лемму.

Лемма доказана.

Мы зафиксируем $p = 2$ и будем считать, что $\mathbb{F} : \mathbb{L}^2(\Omega) \to \mathbb{L}^2(\Omega)$.

Введём также операторы вложения $\mathbb{J}_1 : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{L}^2(\Omega)$ (действующий естественным образом) и $\mathbb{J}_2 : \mathbb{L}^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, действующий по правилу

$$\langle \mathbb{J}_2 v, w\rangle = \int\limits_\Omega vw\, dx \quad \forall v, w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Оценим их нормы. Очевидно, $\|\mathbb{J}_1\| = C_F$ по самому определению константы Фридрихса. Далее,

$$|\langle \mathbb{J}_2 v, w\rangle| = |(v,w)_2| \leqslant \|v\|_2 \|w\|_2 \leqslant C_F \|v\|_2 \|w\|,$$

откуда сразу следует, что $\|\mathbb{J}_1\| \leqslant C_F$.

Замечание 1. Очевидно, что $\mathbb{J} = \mathbb{J}_2\mathbb{J}_1$.

Теперь мы можем строго определить оператор $\mathbb{D}$. Именно, для всякого $v(x) \equiv v(x,t) \in \mathbb{C}^1([0,T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ или $v(x) \equiv v(x,t) \in \mathbb{C}^1([0,T); \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ (где $T > 0$ произвольно и во втором случае может быть равно $+\infty$) положим

$$\mathbb{D}(v) = \frac{d}{dt}(\varepsilon^4 \Delta v - \varepsilon^2 \mathbb{J} v) + \varepsilon^2 k \Delta v - \mathbb{J}_2 \mathbb{F}(\mathbb{J}_1 v), \tag{2.8}$$

где $\frac{d}{dt}$ обозначает дифференцирование в смысле предела по норме $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$:

$$\frac{d}{dt} v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}(v(t + \Delta t) - v(t)).$$

Очевидно,

$$\mathbb{D} : \mathbb{C}^1([0,T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega)) \to \mathbb{C}([0,T]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)).$$

Теперь мы можем дать определение обобщённого решения задачи (2.4).

Определение 1. *Обобщённым решением задачи* (2.4) *будем называть функцию* $u(x,t) \equiv u(x)(t)$ *из класса* $\mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{H}_0^1(\Omega))$, *где* $0 < T < +\infty$ (*или из класса* $\mathbb{C}^{(1)}([0,T);\mathbb{H}_0^1(\Omega))$, *где* $0 < T \leqslant +\infty$), *удовлетворяющую условиям*

$$\begin{cases} \mathbb{D}(u) = 0, \quad t \in [0,T] \quad (\textit{соответственно } t \in [0,T)), \\ u(0) = u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.9}$$

Замечание 2. Как показывает «интегрирование по частям», классическое решение задачи (2.4), если оно существует, удовлетворяет нашему определению обобщённого решения.

Замечание 3. Здесь 0 есть элемент пространства $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, т. е. задачу (2.9) можно переписать так:

$$\begin{cases} \forall w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \quad \langle \mathbb{D}(u), w\rangle = 0, \quad t \in [0,T] \quad (\text{соответственно } t \in [0,T)), \\ u(0) = u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Оказывается, задача (2.9) может быть переформулирована в виде абстрактной задачи Коши. Для этого нам понадобится некоторая подготовительная работа.

Прежде всего введём линейный оператор

$$\mathbb{A} \equiv \mathbb{J} - \varepsilon^2 \Delta : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

В силу доказанной ранее ограниченности операторов $\mathbb{J}$ и Δ и оценок их норм сразу получаем: $\|\mathbb{A}\| \leqslant C_F^2 + \varepsilon^2$. Итак, доказана

Лемма 4. *Оператор* $\mathbb{A} : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ *является ограниченным линейным оператором с нормой* $\|A\| \leqslant C_F^2 + \varepsilon^2$.

Напомним некоторые определения.

Определение 2. *Пусть* X *– вещественное банахово пространство,* X^* *– его сопряженное. Оператор* $\mathbb{A} : X \to X^*$ *называется радиально непрерывным, если для любых фиксированных* $v_1, v_2 \in X$ *вещественнозначная функция* $S(s)$, *заданная равенством* $S(s) = \langle \mathbb{A}(v_1 + sv_2), v_2\rangle$, *непрерывна на отрезке* $[0,1]$.

Следствие из леммы. *Оператор* $\mathbb{A}$ *является радиально непрерывным. Действительно,* $|S(s_1) - S(s_2)| \leqslant \|A\| \|v_2\|^2 |s_1 - s_2|$.

Напомним определение сильно монотонного оператора.

Определение 3. *Оператор* $\mathbb{A} : X \to X^*$ *называется сильно монотонным* (*с константой* $m > 0$), *если для любых* $v_1, v_2 \in X$ *существует такое* $m > 0$, *что*

$$\langle \mathbb{A}v_1 - \mathbb{A}v_2, v_1 - v_2\rangle \geqslant m\|v_1 - v_2\|^2.$$

Лемма 5. *Оператор* $\mathbb{A}$ *является сильно монотонным.*

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}\langle \mathbb{A}v_1 - \mathbb{A}v_2, v_1 - v_2\rangle = \langle \mathbb{A}(v_1 - v_2), v_1 - v_2\rangle = \\ = \|v_1 - v_2\|_2^2 + \varepsilon^2\|\nabla(v_1 - v_2)\|_2^2 \geqslant \\ \geqslant \varepsilon^2\|\nabla(v_1 - v_2)\|_2^2 = \varepsilon^2\|v_1 - v_2\|^2. \quad (2.10)\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Напомним определение коэрцитивного оператора.

Определение 4. *Оператор* $\mathbb{A} : X \to X^*$ *называется коэрцитивным, если существует вещественнозначная функция* $\gamma(s) > 0$, *заданная на множестве* $s \in [0, +\infty)$ *такая, что*

$$\langle \mathbb{A}v, v\rangle \geqslant \|u\|\gamma(\|u\|) \quad \forall v \in X,$$

где $\lim_{s\to+\infty}\gamma(s) = +\infty$.

Лемма 6. *Оператор* $\mathbb{A}$ *является коэрцитивным.*

Доказательство. Имеем

$$\langle \mathbb{A}v, v\rangle = \|v\|_2^2 + \varepsilon^2\|\nabla v\|_2^2 \geqslant \varepsilon^2\|\nabla v\|_2^2 = \varepsilon^2\|v\|^2.$$

Следовательно, оператор $\mathbb{A}$ является коэрцитивным с $\gamma(s) = \varepsilon^2 s$.

Лемма доказана.

Итак, оператор $\mathbb{A}$ является радиально непрерывным, строго монотонным, коэрцитивным.

Лемма 7. *Оператор* $\mathbb{A}$ *имеет обратный оператор*

$$\mathbb{A}^{-1} : \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \to \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Доказательство. Так как оператор $\mathbb{A}$ явяется радиально непрерывным, строго монотонным, коэрцитивным, то утверждение леммы вытекает из теоремы Браудера.

Лемма доказана.

Лемма 8. *Оператор* $\mathbb{A}^{-1}$ *является липшиц-непрерывным с постоянной Липшица, равной* $1/\varepsilon^2$.

Доказательство.

1. Заметим, что в силу определения нормы на сопряжённом пространстве X^*

$$\|f\|_{X^*} \geqslant \frac{|\langle f, w\rangle|}{\|w\|_X}. \tag{2.11}$$

2. Пусть $w_1, w_2 \in H^{-1}(\Omega)$, $v_1 = A^{-1}w_1$, $v_2 = A^{-1}w_2$. Тогда $w_1 = Av_1$, $w_2 = Av_2$ и с учётом (2.11), а также неравенства (2.10), полученного при доказательстве леммы 4, имеем

$$\|w_1 - w_2\|_{X^*} = \|Av_1 - Av_2\|_{X^*} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{|\langle Av_1 - Av_2, v_1 - v_2|}{\|v_1 - v_2\|} \geqslant \varepsilon^2 \|v_1 - v_2\| = \varepsilon^2 \|A^{-1}w_1 - a^{-1}w_2\|,$$

где в силу обратимости операторов A и A^{-1} $v_1 \neq v_2$ тогда и только тогда, когда $w_1 \neq w_2$. Итак, при всех $v_1 \neq v_2$ имеем

$$\|A^{-1}w_1 - A^{-1}w_2\| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\|w_1 - w_2\|_{X^*}.$$

Лемма доказана.

Теперь обобщённая постановка, данная в определении 1, может быть переписана в виде

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \dfrac{d}{dt}(\mathbb{A}u) = -\varepsilon^2 k\Delta u - \mathbb{J}_2\mathbb{F}(\mathbb{J}_1 u), \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.12}$$

В силу свойств гладкости решения по t операторы $\frac{d}{dt}$ и $\mathbb{A}$ коммутируют, и мы можем записать (после деления на ε^2)

$$\begin{cases} \mathbb{A}\dfrac{d}{dt}(u) = -k\Delta u + \dfrac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{J}_2\mathbb{F}(\mathbb{J}_1 u), \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.13}$$

Наконец, пользуясь ранее доказанной непрерывной обратимостью оператора $\mathbb{A}$, мы можем преобразовать задачу к виду

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(u) = -\mathbb{A}^{-1}\left(k\Delta u - \dfrac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{J}_2\mathbb{F}(\mathbb{J}_1 u)\right), \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.14}$$

Обозначим оператор, стоящий в правой части, через $\Phi(u)$. Таким образом, $\Phi : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ — это оператор, действующий по правилу

$$\Phi(v) = -\mathbb{A}^{-1}\left(k\Delta u - \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{J}_2\mathbb{F}(\mathbb{J}_1 u)\right). \tag{2.15}$$

Очевидно, этот (нелинейный) оператор является липшиц-непрерывным. В самом деле, оператор $\mathbb{A}^{-1}\Delta : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ является ограниченным линейным оператором в силу вышедоказанного; оператор $\mathbb{A}^{-1} \circ \mathbb{J}_2 \circ \mathbb{F} \circ \mathbb{J}_1$ липишиц-непрерывен как композиция непрерывных линейных операторов $\mathbb{A}^{-1}$, $\mathbb{J}_i$, $i = 1, 2$, и липшиц-непрерывного оператора $\mathbb{F}$.

Итак, исходная задача (в обобщённой постановке) приведена к виду абстрактной задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u = \Phi(u), \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{2.16}$$

с липшиц-непрерывной правой частью.

В силу теоремы предыдущего параграфа абстрактная задача Коши (2.16) глобально разрешима, т. е. существует единственное решение $u(t) \in \mathbb{C}([0, +\infty); \mathbb{H}_0^1(\Omega))$, а любое другое решение (на конечном промежутке $\mathcal{T}$) является его ограничением с промежутка $[0, +\infty)$ на промежуток $\mathcal{T}$.

§ 3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Доказать, что линейное пространство $C([0, T]; B)$ действительно является банаховым.

Задача 2. Конкретизировать рассуждение о «сшивке» решений, полученных на отрезках, которым мы пользовались в конце доказательства теоремы.

Задача 3. Сформулировать и доказать теорему о глобальной разрешимости системы линейной однородной системы линейных дифференциальных уравнений.

Лекция 18

ТЕОРЕМА О НЕПРОДОЛЖАЕМОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ

В данной лекции будет доказана теорема о существовании, единственности и свойстве непродолжаемости решения абстрактного дифференциального уравнения $y' = A(t, y)$.

§ 1. Теорема о непродолжаемом решении задачи Коши

Пусть B — банахово пространство с нормой $\|.\|$. Рассмотрим также метрическое пространство $\mathbb{R}_+ \times B$ с расстоянием

$$\rho\big((t_1, y_1), (t_2, y_2)\big) = \max(|t_1 - t_2|, \|y_1 - y_2\|). \tag{1.1}$$

Пусть отображение

$$A(t, y) : \mathbb{R}_+ \times B \to B$$

обладает свойствами (A_1) и (A_2):

(A_1) оно непрерывно в смысле метрики (1.2) (т. е. «по совокупности переменных»);

(A_2) существует такая функция

$$\mu(t, s) : {\mathbb{R}_+}^2 \to \mathbb{R}_+,$$

ограниченная на каждом прямоугольнике $[0; T] \times [0; S]$ $(T, S > 0)$, что

$$\forall t \geqslant 0;\ \forall z_1, z_2 \in B\ \ \|A(t, z_1) - A(t, z_2)\| \leqslant \mu(t, \max(\|z_1\|, \|z_2\|))\|z_1 - z_2\|.$$

Замечание 1. Функции $A(t, y)$, удовлетворяющие условию (A_2) (как частный случай, они могут вообще не зависеть от t), будем называть ограниченно липшиц-непрерывными. Смысл названия: они липшиц-непрерывны в каждой ограниченной части пространства B (при этом константа Липшица зависит от t и ограничена конечной величиной, если t изменяется на ограниченном множестве).

Сразу отметим, что из (A_1) вытекает свойство (A_3):

(A_3) функция $\nu(t) \equiv \|A(t, \vartheta)\|$ (где ϑ — нулевой элемент пространства B) ограничена на каждом отрезке $[0; T]$. Действительно, в силу (A_1) числовая функция $\|A(t, \vartheta)\|$ непрерывна при всех $t \geqslant 0$.

Далее, из (A_2) и (A_3) следует свойство

(A_4) существует такая функция

$$\lambda(t,s) : {\mathbb{R}_+}^2 \to \mathbb{R}_+,$$

ограниченная на каждом прямоугольнике $[0;T] \times [0;S]$ $(T,S > 0)$, что

$$\forall t \geqslant 0;\ \forall z \in B\ \ \|A(t,z)\| \leqslant \lambda(t, \|z\|).$$

Действительно, имеем

$$\|A(t,z)\| \leqslant \\ \leqslant \|A(t,\vartheta)\| + \|A(t,z) - A(t,\vartheta)\| \leqslant \nu(t) + \mu(t,\|z\|)\|z\| =: \lambda(t,\|z\|),$$

причём

$$\sup_{\substack{t \in [0;T] \\ s \in [0;S]}} \lambda(t,s) \leqslant \sup_{t \in [0;T]} \nu(t) + S \sup_{\substack{t \in [0;T] \\ s \in [0;S]}} \mu(t,s).$$

Докажем теперь одну простую, но важную лемму.

Лемма 1. *Пусть $y(t) \in C([a;b],B)$, $[a;b] \subset \mathbb{R}_+$. Тогда сложная функция $f(t) \equiv A(t,y(t))$ (где A — введённое выше отображение) непрерывна: $f(t) \in C([a;b],B)$.*

Доказательство.

Заметим, что отображение $F : t \mapsto (t, y(t))$, действующее из $[a;b]$ в $\mathbb{R}_+ \times B$ с метрикой (1.2), непрерывно. В самом деле, при $t \to t_0$ имеем $\|y(t) - y(t_0)\| \to 0$ и, следовательно,

$$\max(|t - t_0|, \|y(t) - y(t_0)\|) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to t_0.$$

Но тогда функция $f(t)$ непрерывна как композиция непрерывных отображений

$$t \overset{F}{\mapsto} (t, y(t)) \overset{A}{\mapsto} A(t, y(t)).$$

(Мы воспользовались свойством (A_1).)

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь в пространстве B абстрактную задачу Коши

$$\begin{cases} y'(t) = A(t,y), \quad t \geqslant 0; \\ y(0) = Y_0; \quad Y_0 \in B. \end{cases} \tag{1.2}$$

Наряду с ней рассмотрим задачу Коши с начальным условием в произвольный момент времени $t_0 \geqslant 0$:

$$\begin{cases} y'(t) = A(t,y), \quad t \geqslant t_0; \\ y(0) = y_0; \quad y_0 \in B, \quad t_0 \geqslant 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Очевидно, (1.2) — частный случай (1.3).

Определение 1. *Пусть*

$$\mathcal{T} = [t_0; T), \quad t_0 < T \leqslant +\infty, \quad \text{или} \quad \mathcal{T} = [0; T], \quad t_0 < T < +\infty.$$

Решением задачи Коши (1.2) *на промежутке* $\mathcal{T}$ *будем называть всякую абстрактную функцию*

$$y(t) \in C^1(\mathcal{T}, B),$$

удовлетворяющую
1) *начальному условию* $y(t_0) = y_0$;
2) *при каждом* $t \in \mathcal{T}$ *уравнению* $y'(t) = A(t, y(t))$, *где дифференцирование понимается в смысле сильной производной в пространстве* B, *причём в граничных точках промежутка* $\mathcal{T}$, *принадлежащих ему, подразумевается односторонняя производная.*

Замечание 2. Если $z(t)$ — решение задачи Коши (1.2) на промежутке $\mathcal{T} = [0, T]$ (или $\mathcal{T} = [0, T)$), то ограничение функции $z(t)$ на любой промежуток $\mathcal{T}_1 = [t_0, t_1]$ (или $\mathcal{T}_1 = [t_0, t_1]$) есть решение задачи Коши (1.3) с $y_0 = z(t_0)$ на промежутке $\mathcal{T}_1$. (Очевидно.)

Определение 2. *Решение* $y_1(t) \in C^1(\mathcal{T}_1, B)$ *задачи Коши* (1.2) *на промежутке* $\mathcal{T}_1$ *будем называть непродолжаемым, если не существует решения* $y_2(t) \in C^1(\mathcal{T}_2, B)$ *на промежутке* $\mathcal{T}_2$ *той же задачи, удовлетворяющего условиям*
1) $\mathcal{T}_2 \supsetneq \mathcal{T}_1$;
2) $\forall t \in \mathcal{T}_1 \ y_2(t) = y_1(t)$.

Нам потребуется ряд предварительных результатов.

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра

$$y(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} A(\tau, y(\tau))\, d\tau. \tag{1.4}$$

Определение 3. *Решением интегрального уравнения* (1.4) *на промежутке* $[t_0, t_0 + T]$ *назовём функцию*

$$y(t) \in C([t_0, t_0 + T, B]), \tag{1.5}$$

удовлетворяющую при каждом $t \in [t_0, t_0 + T]$ *уравнению* (1.4), *где интеграл понимается в смысле Римана.*

Замечание 3. Как следует из леммы 1, при условии (1.5) имеем $A(t, y(t)) \in C([t_0, t_0 + T], B)$, а поэтому в силу результатов лекции 1 интеграл в (1.4) существует при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Лемма 2. *Для всех* $T > 0$ *эквивалентны следующие утверждения*:

(diff) $y(t) \in C^1([t_0, t_0 + T], B)$ *и* $y(t)$ — *решение задачи Коши* (1.3) *на промежутке* $[t_0, t_0 + T]$;

(int) $y(t) \in C([t_0, t_0 + T], B)$ *и* $y(t)$ — *решение интегрального уравнения* (1.4) *на промежутке* $[t_0, t_0 + T]$.

Доказательство.

1) (diff) $\Rightarrow$ (int). Очевидно, $C^1([t_0, t_0+T], B) \subset C([t_0, t_0+T], B)$. Далее, правая часть уравнения $y'(t) = A(t, y(t))$ непрерывна (поскольку непрерывна $y'(t)$), а поэтому при всех $t \in [0; T]$ существует интеграл

$$\int_{t_0}^{t} A(\tau, y(\tau))\, d\tau. \tag{1.6}$$

Интегрируя обе части уравнения $y'(t) = A(t, y(t))$ от t_0 до t, в силу формулы Ньютона—Лейбница (см. лекцию 1) и начального условия $y(t_0) = y_0$ получаем:

$$\forall t \in [t_0, t_0+T] \;\; y(t) - y_0 = \int_{t_0}^{t} A(\tau, y(\tau))\, d\tau,$$

что и требовалось.

2) (int) $\Rightarrow$ (diff). В силу леммы 1 и непрерывности функции $y(t)$ подынтегральная функция в (1.4) непрерывна, а поэтому интеграл (1.6) при всех $t \in [t_0, t_0+T]]$ существует и допускает дифференцирование по верхнему пределу. Но тогда из получаем: $y(t) \in C^1([0; T], B)$, $y'(t) = A(t, y(t))$ при всех $t \in [t_0, t_0+T]$, $y(t_0) = y_0$, что и требовалось.

Лемма доказана.

Значение леммы 2 в том, что вопрос о существовании и единственности решения задачи Коши (1.3) (или (1.2)) на конечном отрезке сводится к аналогичному вопросу для интегрального уравнения (1.4).

Как нетрудно доказать, линейное пространство

$$\mathbb{B}_{\mathbb{B}_{t_0,T}} \equiv C([t_0, t_0+T], B)$$

zвляется банаховым относительно нормы

$$\|y\|_{\mathbb{B}_{t_0,T}} = \sup_{t \in [t_0, t_0+T]} \|y(t)\|. \tag{1.7}$$

Следовательно, для фиксированного элемента $z_0 \in B$ «полоса»

$$\mathbb{B}^R_{t_0,z_0,T} \equiv \left\{ y(t) \in \mathbb{B}_{t_0,T} \mid \sup_{t \in [t_0, t_0+T]} \|y(t) - z_0\| \leqslant R \right\}$$

zвляется замкнутым шаром в банаховом пространстве $\mathbb{B}_{t_0,T}$, а следовательно, полным метрическим пространством относительно расстояния, порождённого нормой $\|.\|_{\mathbb{B}_{t_0,T}}$. Здесь параметры $t_0 \geqslant 0$, $z_0 \in B$, $R > 0$ произвольны.

Лемма 3. *Пусть* $t_0 \geqslant 0$, $R > 0$, $y_0 \in B$ *произвольны. Тогда найдётся такое* T', *что при всех* $T \in (0, T']$ *решение интегрального уравнения* (1.4) *на промежутке* $[t_0, t_0 + T]$ *существует и единственно в классе* $\mathbb{B}^R_{t_0,y_0,T}$. *(Иными словами, интегральное уравнение* (1.4) *имеет некоторое решение на промежутке* $[t_0, t_0 + T]$, *принадлежащее множеству*$\mathbb{B}^R_{t_0,y_0,T}$, *а другим решений <u>из этого множества</u> уравнение* (1.4) *не имеет.)*

Доказательства.

Для доказательства воспользуемся методом сжимающих отображений.

1. Введём оператор

$$\mathbb{A}_{t_0,y_0,T} : \mathbb{B}_{t_0,T} \to \mathbb{B}_{t_0,T}$$

(зависящий от $t_0 \geqslant 0$, $y_0 \in B$, $T > 0$ как от параметров) по формуле

$$\mathbb{A}_{t_0,y_0,T} z = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} A(\tau, z(\tau))\, d\tau. \tag{1.8}$$

(Тот факт, что при каждом значении параметров этот оператор действительно ставит каждому элементу банахова пространства $\mathbb{B}_{t_0,T}$ некоторый элемент этого же пространства, следует из леммы 1 и непрерывности интеграла с переменным верхним пределом от ограчниенной функции.)

2. Нам надо выбрать T' таким образом, чтобы при всех $T \in (0, T']$ а) оператор $\mathbb{A}_{t_0,y_0,T}$ отображал каждый элемент множества $\mathbb{B}^R_{t_0,y_0,T}$ снова во множество $\mathbb{B}^R_{t_0,y_0,T}$ и б) являлся в этом множестве сжимающим оператором. (В дальнейшем для сокращения записи параметры t_0, y_0, T у оператора A опустим.)

Для а) проведём оценку

$$\begin{aligned}
&\|\mathbb{A}z(t) - y_0\|_{\mathbb{B}_{t_0,T}} = \\
&\qquad = \sup_{t \in [t_0, t_0+T]} \left\| \int\limits_{t_0}^{t} A(\tau, z(\tau))\, d\tau \right\| \leqslant \sup_{t \in [t_0, t_0+T]} \int\limits_{t_0}^{t} \|A(\tau, z(\tau))\|\, d\tau \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant \int\limits_{t_0}^{t_0+T} \|A(\tau, z(\tau))\|\, d\tau \leqslant T \sup_{\substack{t \,\in\, [0;T] \\ s \,\in\, [0;S]}} \lambda(t, s).
\end{aligned}$$

Для б) проведём оценку

$$\|\mathbb{A}z_1(t) - \mathbb{A}z_2(t)\|_{B_{t_0,T}} = \sup_{t \in [t_0, t_0+T]} \left\| \int\limits_{t_0}^{t} \mathbb{A}(\tau, z_1(\tau))\, d\tau - \int\limits_{t_0}^{t} \mathbb{A}(\tau, z_2(\tau))\, d\tau \right\| \leqslant$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \sup_{t\in[t_0,t_0+T]} \int\limits_{t_0}^{t} \|A(\tau, z_1(\tau)) - A(\tau, z_2(\tau))\| d\tau \leqslant \\
&\leqslant \int\limits_{t_{)}}^{t_0+T} \|A(\tau, z_1(\tau)) - A(\tau, z_2(\tau))\| d\tau \leqslant \\
&\leqslant \int\limits_{t_0}^{t_0+T} \mu(\tau, \max(\|z_1(\tau)\|, \|z_2(\tau)\|))\|z_1(\tau) - z_2(\tau)\|\, d\tau \leqslant \\
&\leqslant T \sup_{\substack{t\,\in\,[0;\,t_0+T] \\ s\,\in\,[0;\,\|z_0\|+R]}} \mu(t,s)\|z_1 - z_2\|_{\mathbb{B}_{t_0,T}}.
\end{aligned}
$$

3. Итак, для выполнения условий (а), (б) при некотором T достаточно, чтобы для этого T выполнялись условия

$$
\begin{cases}
T \sup\limits_{\substack{t\,\in\,[0;\,t_0+T] \\ s\,\in\,[0;\,\|z_0\|+R]}} \lambda(t,s) \leqslant R, \\
T \sup\limits_{\substack{t\,\in\,[0;\,t_0+T] \\ s\,\in\,[0;\,\|z_0\|+R]}} \mu(t,s) \leqslant \dfrac{1}{2}.
\end{cases}
\tag{1.9}
$$

4. Нам требуется, чтобы условия (1.9) выполнялись при всех $T \in \in (0, T']$ для некоторого T'. Выберем сначала $\overline{T}$ произвольно, затем подберём $T' \leqslant \overline{T}$ такое, что

$$
\begin{cases}
T' \sup\limits_{\substack{t\,\in\,[0;\,t_0+\overline{T}] \\ s\,\in\,[0;\,\|z_0\|+R]}} \lambda(t,s) \leqslant R, \\
T' \sup\limits_{\substack{t\,\in\,[0;\,t_0+\overline{T}] \\ s\,\in\,[0;\,\|z_0\|+R]}} \mu(t,s) \leqslant \dfrac{1}{2}
\end{cases}
\tag{1.10}
$$

(это можно сделать, поскольку при фиксированном $\overline{T}$ в левых частях обоих неравенств (1.10) T' умножается на константу). Но тогда тем более

$$
\begin{cases}
T' \sup\limits_{\substack{t\,\in\,[0;\,t_0+T'] \\ s\,\in\,[0;\,\|z_0\|+R]}} \lambda(t,s) \leqslant R, \\
T' \sup\limits_{\substack{t\,\in\,[0;\,t_0+T'] \\ s\,\in\,[0;\,\|z_0\|+R]}} \mu(t,s) \leqslant \dfrac{1}{2},
\end{cases}
$$

а также

$$\begin{cases} T \sup\limits_{\substack{t \in [0; t_0 + T] \\ s \in [0; \|z_0\| + R]}} \lambda(t,s) \leqslant R, \\ T \sup\limits_{\substack{t \in [0; t_0 + T] \\ s \in [0; \|z_0\| + R]}} \mu(t,s) \leqslant \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

для любого $T \in (0, T']$.

Лемма доказана.

В силу леммы2 результат леммы 3 полностью переносится на задачу Коши (1.3). Сформулируем соответствующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть $t_0 \geqslant 0$, $R >$), $y_0 \in B$ фиксированы произвольным образом. Тогда найдётся такое T', что для всех $T \in (0, T']$ решение задачи Коши (1.3) на промежутке $[t_0, t_0 + T]$ существует и единственно в классе $\mathbb{B}^R_{t_0, y_0, T}$.*

Прямо сейчас выведем отсюда утверждение об отсутствии «разветвлений» решения задачи (1.2).

Лемма 5. *Пусть $y_1(t)$, $y_2(t)$ — решения задачи (1.2) соответственно на промежутках $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$. Тогда одно из этих решений является продоолжением другого (в частности, они совпадают, если $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$).*

Доказательство.

1. Предположим противное:

$$y_1(t) \not\equiv \quad \text{на } \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2.$$

2. Рассмотрим множество

$$\mathcal{T}^{\neq} \equiv \{t \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 \mid y_1(t) \neq y_2(t)\}.$$

Сразу заметим: $0 \notin \mathcal{T}^{\neq}$ (в силу начального условия задачи (1.2)). Далее, множество $\mathcal{T}^{\neq}$ открыто как подмножество $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$, поскольку является прообразом множества $(0, +\infty)$ при непрерывном отображении $t \mapsto \|y_1(t) - y_2(2)\|$, определённом на $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$. Положим

$$T^* = \inf \mathcal{T}^{\neq}.$$

Заметим: $T^* \notin \mathcal{T}^{\neq}$. В самом деле, если $T^* = 0$, это уже доказано ранее. Если же $T^* > 0$, то T^* — граничная точка множества $\mathcal{T}^{\neq}$, а следовательно, $T^* \notin \mathcal{T}^{\neq}$, поскольку это множество открыто в $\mathcal{T}_1 \cap \cap \mathcal{T}_2$. Значит существует такое $t_1 > T^*$, что $t_1 \in \mathcal{T}^{\neq} \subset \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$, причём пересечение любой правой полуокрестности точки T^* с $\mathcal{T}^{\neq}$ непусто.

3. В силу замечания 2 функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ являются решениями задачи Коши

$$\begin{cases} y'(t) = A(t, y), \quad t \geqslant T^*; \\ y(T^*) = y_1(T^*) \end{cases} \tag{1.11}$$

на промежутке $[T^*, t_1]$. В силу непрерывности $y_1(t)$, $y_2(t)$ имеем

$$R_{12} = \max_{i=1,2} \sup_{t\in[T^*,t_1]} \|y_i(t) - y_1(T^*)\| < +\infty. \qquad (1.12)$$

4. В силу леммы 4 существует такое T', что для любого $T \in \in (0, T']$ решение задачи Коши (1.11) на промежутке $[T^*, T^* + T]$, удовлетворяющее условию $\|y(t) - y_1(T^*)\| \leqslant R_{12}$, единственно. Взяв $T = = \min(T', t_1 - T^*)$, получим противоречие, поскольку в силу **(??)** условие **(??)** выполнено, а $y_1 \not\equiv y_2$ в любой правой полуокретсности T^*.

Лемма доказана.

Теперь мы готовы сформулировать и доказать основную теорему этой лекции.

Теорема о непродолжаемом решении. *Существует и единственно непродолжаемое решение* $\widetilde{y}(t) \in C^1(\mathcal{T}_0; B)$ *задачи Коши* (1.2). *Оно удовлетворяет следующим условиям*:
1) $\mathcal{T}_0 = [0; T_0)$, $0 < T_0 \leqslant +\infty$;
2) *в случае* $T_0 < +\infty$ *верно предельное соотношение*

$$\lim_{t\to T_0-0} \|\widetilde{y}(t)\| = +\infty; \qquad (1.13)$$

3) *всякое другое решение задачи* (1.2) *является ограничением решения* $\widetilde{y}(t)$ *на промежуток* $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}_0$.

Замечание 4. В случае $T_0 = +\infty$ соотношение $\lim_{t\to+\infty} \|\widetilde{y}(t)\| = + +\infty$ может как выполняться, так и не выполняться.

Доказательство.

1. В силу леммы 4 существует решение задачи Коши (1.2) хотя бы на некотором отрезке $[0, T]$. В силу леммы 5 из любых двух решений задачи Коши (1.2) одно является продолэжением другого (в частности, они могут совпадать).

2. Рассмотрим теперь для каждого $T > 0$ все функции из $C^1([0; T]; B)$. Среди них или есть решение задачи (1.2) на промежутке $[0; T]$, или нет. Положим

$$\mathbb{T} = \{T > 0 : \exists \text{ решение задачи (1.2) из } C^1([0; T], B)\}, \quad T_0 = \sup \mathbb{T}.$$

Если $T_0 = +\infty$, то существует решение $\widetilde{y}(t) \in C^1([0; +\infty), B)$. В самом деле, выбирая последовательность $T_n \uparrow +\infty$ и соответствующую ей последовательность решений $\{y_n(t)\}$, в силу леммы 5 получим, что при всех $n \in \mathbb{N}$ решение y_{n+1} есть продолжение решения y_n. Поэтому функция

$$\widetilde{y}(t) = \begin{cases} y_n(t), & t \in [T_{n-1}; T_n), \quad n \geqslant 2, \\ y_1(t), & t \in [0; T_1) \end{cases}$$

и будет непродолжаемым решением, определённым на $[0; +\infty)$. Других же решений (не сводящихся к ограничению $\widetilde{y}(t)$ на меньший промежуток) не будет.

3. Пусть теперь $T_0 < +\infty$. Тогда гипотетически возможны два случая: а) $T_0 \in \mathbb{T}$; б) $T_0 \notin \mathbb{T}$.

В случае а) существует решение $y(t) \in C^1([0; T_0], B)$. Но тогда в силу леммы 4, применённой к задаче (1.3) с $t_0 = T_0$, решение можно продолжить за точку T_0, причём обе односторонние производные $y'_-(T_0)$ и $y'_+(T_0)$ будут существовать и равняться $A(T_0; y(T_0))$: левая — по определению решения на $[0; T_0]$, правая — по определению решения задачи Коши с началом промежутка в точке T_0. Следовательно, мы получим решение на большем промежутке и придём к противоречию с определением T_0. Итак, случай а) исключается.

В случае б) рассуждениями, аналогичными проведённым для $T_0 = +\infty$, устанавливаем существование и единственность решения $y(t)$ задачи (1.2) на полуинтервале $[0; T_0)$. Случай б) распадается на два подслучая:

(б$_1$) $\overline{\lim}_{t\to T-0}\|y(t)\| = +\infty$ (т. е. решение неограничено в любой левой полуокрестности точки T_0);

(б$_2$) $\underline{\lim}_{t\to T-0}\|y(t)\| < +\infty$.

4. Покажем, что вариант (б$_2$) исключается. В самом деле, пусть функция $y(t)$ ограничена в некотором полуинтервале $(T_0 - \gamma; T_0)$:

$$\exists C \geqslant 0 \ \forall t \in (T_0 - \gamma; T_0) \ \ \|y(t)\| \leqslant C.$$

Тогда в силу (A_4) имеем

$$\forall t \in (T_0 - \gamma; T_0) \ \ \|A(t, y(t))\| \leqslant \sup_{\substack{t \in [0; T_0] \\ s \in [0; C]}} \lambda(t, s) =: \mathfrak{L}.$$

Но тогда из уравнения задачи (1.2) вытекает, что производная $y'(t)$ ограничена величиной $\mathfrak{L}$ при $t \in (T_0 - \gamma; T_0)$. Следовательно (см. лекцию 1), функция $y(t)$ липшиц-непрерывна на $(T_0 - \gamma; T_0)$, а значит, удовлетворяет в точке T_0 слева условию Коши. Итак, существует предел

$$Y_0 = \lim_{t\to T_0-0} y(t).$$

5. Доопределим функцию $y(t)$ в точке T_0 значанием Y_0. Полученная функция $Y(t)$ будет непрерывной в точке T_0 слева. Тогда в силу леммы 1 этой лекции функция $A(t, Y(t))$ тоже непрерывна в точке T_0 слева, а следовательно,

$$\lim_{t\to T_0-0} A(t, y(t)) = \lim_{t\to T_0-0} A(t, Y(t)) = A(T_0; Y_0). \tag{1.14}$$

Но поскольку при $t < T_0$ верно равенство $y' = A(t, y(t))$, из (1.14) получаем соотношение

$$\lim_{t\to T_0-0} y'(t) = A(T_0; Y_0). \tag{1.15}$$

Однако отсюда в силу леммы о продолжении в точку следует, что решение $y(t)$ продолжимо с $[0;T_0)$ на $[0;T_0]$, и мы приходим к противоречию с условием случая (б) (решения на $[0;T_0]$ не существует).

6. Таким образом, при $T_0 < +\infty$ реализуется лишь случай ($б_1$):

$$\overline{\lim}_{t\uparrow T}\|y(t)\| = +\infty. \tag{1.16}$$

7. Установим теперь, что имеет место более сильное, чем (1.16), соотношение

$$\lim_{t\to T_0-0}\|y(t)\| = +\infty. \tag{1.17}$$

8. Итак, требуется доказать:

$$\forall M > 0\,\exists\delta > 0\ \forall t \in (T_0-\delta;T_0)\cap[0;T_0)\ \ \|y(t)\| > M.$$

Предположим противное:

$$\exists M > 0\,\forall\delta > 0\ \exists t \in (T_0-\delta;T_0)\cap[0;T_0)\ \ \|y(t)\| \leqslant M. \tag{1.18}$$

9. Зафиксируем число M из (1.18). В силу (A_4) будем иметь

$$\forall t \in [0;T_0),\ \forall z \in B\ \ \Bigl(\|z\| \leqslant 2M\ \Rightarrow\ \|A(t,z)\| \leqslant \sup_{\substack{t\,\in\,[0;T_0]\\ s\,\in\,[0;2M]}}\lambda(t,s) =: E\Bigr). \tag{1.19}$$

10. Из (1.19) и уравнения $y'(t) = A(t,y)$ получаем:

$$\|y'(t)\| \leqslant E \quad \text{при} \quad \|y(t)\| \leqslant 2M, \quad t \in [0;T_0). \tag{1.20}$$

Выберем $\delta \leqslant \frac{1}{2}\frac{M}{E}$ и возьмём из (1.18) соответствующее $t = t^*$: $\|y(t^*)\| \leqslant M$, $T_0 - \delta < t^*$. В силу (1.16) существует такое t^{**}, что $T_0 < t^* < t^{**} < T_0$ и $\|y(t^{**})\| \geqslant 2M$. Но тогда в силу непрерывности функции $y(t)$ («прообраз замкнутого множества замкнут») существует такое $t^{***} \in (t^*;t^{**}]$, что

$$\|y(t^{***})\| = 2M, \quad \forall t \in (t^*;t^{***})\ \|y(t)\| < 2M,$$

откуда в силу (1.20)

$$\|y'(t)\| \leqslant E \quad \text{при всех} \quad t \in [t^*;t^{***}].$$

Однако в этом случае одновременно

$$\|y(t^{***}) - y(t^*)\| \leqslant |t^{***} - t^*|\cdot E < \delta\cdot E \leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{M}{E}\cdot E < M,$$
$$\|y(t^{***}) - y(t^*)\| \geqslant \|y(t^{***})\| - \|y(t^*)\| \geqslant M.$$

Получленное противоречие доказывает (1.17).

Теорема доказана.

Замечание 5. Функция $f(y) : B_1 \to B_2$ называется ограниченно липшиц-непрерывной, если существует такая функция $\mu(x) : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, ограниченная на каждом ограниченном множестве, что

$$\forall y_1, y_2 \ \ \|f(y_1) - f(y_2)\|_2 \leqslant \mu(\max(\|y_1\|, \|y_2\|))\|y_1 - y_2\|_1.$$

Иными словами, это функция, липшиц-непрерывная в каждом шаре (возможно, со своей константой Липшица).
Замечание 6. Функция $f(y) : B_1 \to B_2$ называется локально липшиц-непрерывной, если для каждой точки $y_0 \in B_1$ существует такая окрестность $B_\delta(y_0)$, в которой данная функция является липшиц-непрерывной.

$$\forall y_1, y_2 \ \ \|f(y_1) - f(y_2)\|_2 \leqslant \mu(\max(\|y_1\|, \|y_2\|))\|y_1 - y_2\|_1.$$

В теореме фигурирует ограниченно липшиц-непрерывная функция. Условие локальной липшиц-непрерывности является более слабым.

§ 2. Задачи для самостоятельного решения

Задача. Провести подробнее рассуждение, показывающее невозможность «разветвления» решений уравнения (1.2).

Лекция 19

УРАВНЕНИЕ БЕНДЖАМЕНА—БОНА—МАХОНИ—БЮРГЕРСА

§ 1. Постановка задачи и её эквивалентные переформулировки

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_{xx} - u) + u_{xx} + uu_x = 0, \quad (x,t) \in [0,l] \times (0,T_0), \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [0,l], \tag{1.2}$$

$$u(0,t) = 0, \quad lu_x(0,t) = u(l,t), \quad t \in [0,T_0), \tag{1.3}$$

где $u_0(x) \in C^2([0,l])$ и удовлетворяет граничным условиям (1.3). Величина T_0, которая может быть конечной или бесконечной ($T_0 = +\infty$), будет определена ниже. Здесь и далее производные по переменной x обозначены нижним индексом (даже для функций, зависящих только от x), а штрих может обозначать лишь производную по времени t.

Нам потребуется ввести функциональные пространства

$$Z = C([0,l]), \quad \|z\|_Z = \|z\|_{C([0,T])},$$

$$Z_1 = \{z(x) \in C^1([0,l]) \mid z(0) = 0,\, lz_x(0) = z(l)\},$$

$$\|z\|_{Z_1} = \|z\|_{C([0,T])} + \|z_x\|_{C([0,T])},$$

$$Z_2 = \{z(x) \in C^2([0,l]) \mid z(0) = 0,\, lz_x(0) = z(l)\},$$

$$\|z\|_{Z_2} = \|z\|_{C([0,T])} + \|z_x\|_{C([0,T])} + \|z_{xx}\|_{C([0,T])}.$$

Пространства Z_1, Z_2, очевидно, полны относительно выбранных норм как замкнутые подпространства пространств $C^1([0,l])$ и $C^2([0,l])$ соответственно.

Введём также непрерывный при действии $Z_2 \to Z$ оператор $\mathbb{L}$ по формуле

$$\mathbb{L}z = z_{xx} - z.$$

Оператор $\mathbb{L}$ имеет непрерывный обратный $\mathbb{G} : Z \to Z_2$, который можно выписать явно:

$$(\mathbb{G}f)(x) = \int_0^l G(x,s)f(s)\,ds \tag{1.4}$$

с помощью функции Грина задачи

$$\begin{cases} v_{xx} - v = f(x), & x \in [0, l], \\ v(0) = 0, \\ l v_x(0) = v(l). \end{cases}$$

Эта функция Грина, как нетрудно проверить непосредственно, имеет вид

$$G(x, s) = G_0(x, s) + \frac{\operatorname{sh} x (l \operatorname{ch} s - \operatorname{ch} l \operatorname{sh} s)}{l - \operatorname{sh} l},$$

где

$$G_0(x, s) = \begin{cases} -\operatorname{sh} x \operatorname{ch} s, & 0 \leqslant x \leqslant s \leqslant l, \\ -\operatorname{ch} x \operatorname{sh} s, & 0 \leqslant s \leqslant x \leqslant l \end{cases}$$

— функция Грина первой краевой задачи для уравнения $v_{xx} - v = f(x)$. Непрерывность оператора $\mathbb{G} : Z \to Z_2$ следует из общих свойств функции Грина, а также может быть легко проверена непосредственно для явно выписанной функции Грина.

Определение 1. *Решением задачи* (1.1)—(1.3) *будем называть функцию*

$$u(x)(t) \in C^1([0, T_0); Z_2), \tag{1.5}$$

где $T_0 < +\infty$ *или* $T_0 = +\infty$, *удовлетворяющую уравнению* (1.1) *и начальному условию* (1.2) (*отметим, что граничные условия включены в определения пространств* Z_1, Z_2). *При этом в уравнении* (1.1) *выражение под знаком производной по* t *мы понимаем в смысле оператора* $\mathbb{L}$, *второе слагаемое — в смысле оператора дифференцирования, действующего при каждом фиксированном* t *из* Z_2 *в* Z *естественным образом, а третье — как результат вложения в* Z *функции* uu_x, *получаемой естественным образом при каждом фиксированном* t.

Таким образом, равенство в (1.1) следует понимать как равенство двух элементов пространства Z, второй из которых представляет собой тождественный нуль, т. е. уравнение (1.1) интерпретируется следующим образом:

$$\frac{d}{dt}(\mathbb{L}u) + u_{xx} + uu_x = 0, \tag{1.6}$$

где производную по времени следует считать обычной (не частной) в смысле пространства (1.5). Операторы $\mathbb{L}$ и $\frac{d}{dt}$ коммутируют между собой (см. лекцию 1), поэтому уравнение (1.6) может быть переписано в виде

$$\mathbb{L}u' + u_{xx} + uu_x = 0. \tag{1.7}$$

Далее, уравнение (1.7) в силу обратимости операторов $\mathbb{L} = \mathbb{G}^{-1}$ эквивалентно в пространстве (1.5) уравнению

$$u' + \mathbb{G}(u_{xx}) + \mathbb{G}(uu_x) = 0.$$

А поскольку $\mathbb{G}(u_{xx}) = \mathbb{G}(u_{xx} - u + u) = u + \mathbb{G}u$, мы приходим к эквивалентному виду

$$u' + u + \mathbb{G}u + \mathbb{G}(uu_x) = 0. \tag{1.8}$$

Сделав теперь в (1.8) замену

$$w(t) = e^t u(t), \tag{1.9}$$

мы получим в силу вышесказанного, что функция $u(x)(t) \in \in C^1([0, T_0); Z_2)$ является решением задачи (1.1)—(1.3) тогда и только тогда, когда функция $w(x)(t) \in C^1([0, T_0); Z_2)$, связанная с ней тождеством (1.9), является решением задачи Коши

$$w' = -(\mathbb{G}w + e^{-t}\mathbb{G}(ww_x)), \quad w(x)(0) = u_0(x) \equiv w_0(x) \in Z_2. \tag{1.10}$$

Стандартным образом (см., например, предыдущую лекцию) задача (1.10) может быть сведена к интегральному уравнению

$$w(t) = w_0 - \int\limits_0^t d\tau A(\tau, w(\tau)), \tag{1.11}$$

где $w_0 = u_0(x)$, $A(t, z) = \mathbb{G}z + e^{-t}\mathbb{G}(zz_x)$.

§ 2. Интегральное уравнение в пространстве $C^1([0, T_0); Z_1)$

Будем вначале искать решение интегрального уравнения (1.11) ослабленного типа:

$$w(x)(t) \in C^1([0, T_0); Z_1).$$

Отметим, что по-прежнему $w_0 \in Z_2 \subset Z_1$.

Нетрудно видеть, что оператор

$$A(t, z) : z \mapsto \mathbb{G}z + e^{-t}\mathbb{G}(zz_x)$$

ограниченно липшиц-непрерывен при действии $Z_1 \to Z_1$ в силу свойств функции Грина. (Ниже будет доказано более сильное утверждение.) Далее, этот оператор непрерывен и по совокупности переменных (t, z) в силу непрерывности произведения непрерывных функций $e^{-t} : \mathbb{R} \to \to \mathbb{R}$ и $\mathbb{G}(zz_x) : Z_1 \to Z_1$. Кроме того, $A(t, 0) = 0$. Итак, оператор $A(t, z)$ удовлетворяет всем условиям теоремы из предыдущей лекции. Поэтому в силу этой теоремы уравнение (1.11) имеет единственное непродолжаемое решение. Точнее, верна

Теорема 1. *Решение интегрального уравнения* (1.11) (*или, что то же самое, задачи Коши* (1.10)) *существует на некотором максимальном промежутке* $[0,T_0)$, *где* $0 < T_0 \leqslant +\infty$, *и единственно на нём. При этом в том случае, когда* $T_0 < +\infty$, *верно предельное равенство*

$$\lim_{t\to T_0-0} \|Aw\|_{Z_1} = +\infty.$$

§ 3. Повышение гладкости до $C^1([0,T_0);Z_2)$

Теорема 2. *Пусть на промежутке* $[0,T_0)$ (*где* T_0 *может быть конечным или бесконечным*) *существует решение* $w(x)(t) \in \in C^1([0,T_0);Z_1)$ *задачи Коши* (1.10) (*или, что то же самое, интегрального уравнения* (1.11)). *Тогда это решение принадлежит классу* $C^1([0,T_0);Z_2)$.

Доказательство.

Заметим, что оператор

$$A(t,z): z \mapsto \mathbb{G}z + e^{-t}\mathbb{G}(zz_x)$$

ограниченно липшиц-непрерывен при действии $Z_1 \to Z_2$ с не зависящей от t константой Липшица. Действительно, имеем при всех $t \geqslant 0$

$$\begin{aligned}\|A(t,\overline{z}) - A(t,\overline{\overline{z}})\|_{Z_2} &= \left\|\mathbb{G}(\overline{z}-\overline{\overline{z}}) + e^{-t}\mathbb{G}(\overline{z}\overline{z}_x) - e^{-t}\mathbb{G}(\overline{\overline{z}}\overline{\overline{z}}_x)\right\|_{Z_2} \leqslant \\ &\leqslant \|\mathbb{G}\|_{Z\to Z_2}\|\overline{z}-\overline{\overline{z}}\|_Z + e^{-t}\|\mathbb{G}(\overline{z}\overline{z}_x) - \mathbb{G}(\overline{\overline{z}}\overline{\overline{z}}_x)\|_{Z_2} \leqslant \\ &\leqslant \|\mathbb{G}\|_{Z\to Z_2}\|\overline{z}-\overline{\overline{z}}\|_{Z_1} + \|\mathbb{G}(\overline{z}\overline{z}_x - \overline{\overline{z}}\overline{\overline{z}}_x)\|_{Z_2}.\end{aligned}$$

Для оценки второго слагаемого в правой части заметим, что

$$\begin{aligned}\|\overline{z}\overline{z}_x - \overline{\overline{z}}\overline{\overline{z}}_x\|_Z &= \|\overline{z}\overline{z}_x - \overline{z}\overline{\overline{z}}_x + \overline{z}\overline{\overline{z}}_x - \overline{\overline{z}}\overline{\overline{z}}_x\|_Z \leqslant \\ &\leqslant \|\overline{z}(\overline{z}_x - \overline{\overline{z}}_x)\|_Z + \|(\overline{z}-\overline{\overline{z}})\overline{\overline{z}}_x\|_Z \leqslant \\ &\leqslant \|\overline{z}\|_Z\|\overline{z}-\overline{\overline{z}}\|_{Z_1} + \|\overline{z}-\overline{\overline{z}}\|_Z\|\overline{\overline{z}}\|_{Z_1} \leqslant \\ &\leqslant \|\overline{z}\|_{Z_1}\|\overline{z}-\overline{\overline{z}}\|_{Z_1} + \|\overline{z}-\overline{\overline{z}}\|_{Z_1}\|\overline{\overline{z}}\|_{Z_1} \leqslant 2\max(\|\overline{z}\|_{Z_1}, \|\overline{\overline{z}}\|_{Z_1})\|\overline{z}-\overline{\overline{z}}\|_{Z_1}.\end{aligned}$$

А поэтому в силу непрерывности линейного оператора $\mathbb{G}$ при действии $Z \to Z_2$ мы и получаем требуемый результат с константой Липшица, зависящей от $\max(\|\overline{z}\|_{Z_1}, \|\overline{\overline{z}}\|_{Z_1})$.

Итак, $A(t,z)$ есть ограниченно липшиц-непрерывный оператор при действии из Z_1 в Z_2, причём константа Липшица зависит от $\max(\|\overline{z}\|_{Z_1}, \|\overline{\overline{z}}\|_{Z_1})$ и не зависит от t. (Отметим, что локальная липшиц-непрерывность оператора $A(t,z): Z_1 \to Z_1$ отсюда непосредственно следует в силу непрерывности вложения $Z_2 \to Z_1$ с константой вложения, не превышающей единицу для выбранных нормировок пространств Z_1 и Z_2.) Из только что доказанной ограниченной липшиц-непрерывности в силу теоремы о композиции непрерывных отображений мы получаем, что если $w(x,t) \in C^1([0,T_0);Z_1)) \subset C([0,T_0,Z_1))$, то $A(t,w(x)(t)) \in C([0,T_0);Z_2))$, поэтому интеграл в правой части уравнения (1.11) является интегралом от непрерывной функции и в смысле пространства Z_2. Следовательно, правая часть уравнения (1.11) принадлежит Z_2 при каждом t (напомним, что $w_0 \in Z_2$) и дифференцируема как функция от t со значениями в Z_2. Поэтому то же можно сказать о левой части, и мы получаем, что $w(x)(t) \in C^1([0,T_0);Z_2)$.

Теорема доказана.

§ 4. Дальнейшее усиление результатов

Можно, однако, исходить из решения не в пространстве Z_1, а в пространстве Z. Для этого нам следует распространить оператор $A(t,z)$ на функции $z \in C([0,l])$. Для этого рассмотрим более подробно оператор $\mathbb{G}$ (см. (1.4) и ниже). Положим

$$g_1(x,s) = -\operatorname{sh} x \operatorname{ch} s + \frac{\operatorname{sh} x(l \operatorname{ch} s - \operatorname{ch} l \operatorname{sh} s)}{l - \operatorname{sh} l},$$

$$g_2(x,s) = -\operatorname{ch} x \operatorname{sh} s + \frac{\operatorname{sh} x(l \operatorname{ch} s - \operatorname{ch} l \operatorname{sh} s)}{l - \operatorname{sh} l}.$$

Тогда

$$(\mathbb{G}f)(x) = \int\limits_0^x g_2(x,s)f(s)\,ds + \int\limits_x^l g_1(x,s)f(s)\,ds. \tag{4.1}$$

Естественно, это определение не годится для функции $f = zz_x$, если z только непрерывна. Поэтому мы формально запишем $zz_x = (1/2)(z^2)_x$ и формально проинтегрируем по частям в (4.1). Это даст

$$\mathbb{G}(zz_x)(x) = \frac{1}{2}\left[\int\limits_0^x g_2(x,s)(z^2(s))_s ds + \int\limits_x^l g_1(x,s)(z^2(s))_s ds\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\; g_2(x,s)z^2(s)\Big|_{s=0}^{s=x} - \int\limits_0^x \frac{\partial g_2}{\partial s} z^2(s)\,ds + \right.$$

$$\left. + \; g_1(x,s)z^2(s)\Big|_{s=x}^{s=l} - \int\limits_x^l \frac{\partial g_1}{\partial s} z^2(s)\,ds\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[g_1(x,l)z^2(l) - g_2(x,0)z^2(0) - \int\limits_0^x \frac{\partial g_2}{\partial s} z^2(s)\,ds - \int\limits_x^l \frac{\partial g_1}{\partial s} z^2(s)\,ds\right], \tag{4.2}$$

где в последнем равенстве мы воспользовались непрерывностью функции Грина. Формулу (4.2) следует рассматривать как определение оператора $\mathbb{G}(zz_x)$, применимое к $z \in Z$. Существенно, однако, что при $z \in$ $\in Z_1$ цепочку равенств (4.2) можно прочитать с конца и убедиться тем самым, что при таких z новое определение равносильно старому. Но теперь мы будем считать, что второе слагаемое в операторе $A(t,z)$ определено с помощью формулы (4.2).

Заметим теперь, что функция $(\mathbb{G}(zz_x))(x)$ дифференцируема по x, как следует из свойств интегралов, зависящих от параметров и свойств функции Грина. Имеем

$$(\mathbb{G}(zz_x))_x(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,l)z^2(l) - \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,0)z^2(0) - \frac{\partial g_2}{\partial s}(x,s)\Big|_{s=x} z^2(x) - \right.$$
$$\left. - \int\limits_0^x \frac{\partial^2 g_2}{\partial x \partial s}(x,s)z^2(s)\,ds + \frac{\partial g_1}{\partial s}(x,s)\Big|_{s=x} z^2(x) - \int\limits_x^l \frac{\partial^1 g_2}{\partial x \partial s}(x,s)z^2(s)\,ds\right] \tag{4.3}$$

Отметим ещё, что при $z \in Z$ для функции $A(t,z)$ выполнены граничные условия (1.3), — это следует из свойств функции Грина. Поэтому при $z \in Z$ имеем $A(t,z) \in Z_1$.

Используя ограниченность функций $g_1(x,s)$ и $g_2(x,s)$ и их первых и вторых производных на отрезке $[0,l]$, а также неравенство

$$|z_1^2(x) - z_2^2(x)| = |z_1(x) - z_2(x)| \cdot |z_1(x) + z_2(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \|z_1 - z_2\|_{C([0,l])} \cdot (\|z_1\|_{C([0,l])} + \|z_2\|_{C([0,l])}),$$

устанавливаем, что оператор $z \mapsto \mathbb{G}(zz_x)$, а с ним и оператор $A(t,z)$ (в котором второе слагаемое теперь определено формулой (4.2)) является равномерно по t ограниченно липшиц-непрерывным при действии $Z \to$ $\to Z_1$. А из теоремы о непрерывности произведения получаем, как и прежде, что $A(t,z)$ непрерывен по совокупности переменных (t,z) относительно рассматриваемых норм. Тогда тем более это верно при рассмотрении оператора A при действии $Z \to Z$. Итак, для оператора $A(t,z)$ в рассматриваемом теперь смысле выполнены все условия теоремы из предыдущей лекции и, следовательно, уравнение (1.11) имеет единственное непродолжаемое решение класса

$$w(x)(t) \in C^1([0,T_0);Z). \tag{4.4}$$

Далее, пользуясь только что установленными равномерной по t ограниченной липшиц-непрерывностью и непрерывностью по совокупности переменных (t,z) оператора $A(t,z)$ при действии $Z \to Z_1$, аналогично предыдущему разделу получаем, что существование решения класса (4.4) на промежутке $[0,T_0)$ гарантирует существование решения класса

$$w(x)(t) \in C^1([0,T_0);Z_1)$$

на этом же промежутке. А последнее в силу теоремы 2 обеспечивает существование классического решения

$$w(x)(t) \in C^1([0, T_0); Z_2)$$

на этом же промежутке. Эти рассуждения доказывают, что верна

Теорема 3. 1. *Решение интегрального уравнения* (1.11) *(или, что то же самое, задачи Коши* (1.10)) *в классе*

$$w(x)(t) \in C^1([0, T_0); Z)$$

существует на некотором максимальном промежутке $[0, T_0)$, *где* $0 < T_0 \leqslant +\infty$, *и единственно на нём. При этом в том случае, когда* $T_0 < +\infty$, *верно предельное равенство*

$$\lim_{t \to T_0 - 0} \|Aw\|_Z = +\infty.$$

2. *Существование решения интегрального уравнения* (1.11) *в классе*

$$w(x)(t) \in C^1([0, T_0); Z)$$

гарантирует существование его решения в классе

$$w(x)(t) \in C^1([0, T_0); Z_2)$$

с тем же T_0.

§ 5. Разрушение решения

В предыдущем разделе мы доказали существование единственного максимального решения задачи (1.1)—(1.3), понимаемого в «усиленном классическом» смысле

$$u(x)(t) \in C^1([0, T_0); C^2([0, l])).$$

Теперь умножим обе части уравнения (1.1) на пробную функцию $l - x$ и проинтегрируем по $x \in (0, l)$. С учетом граничных условий справедливы следующие формулы интегрирования по частям:

$$\int\limits_0^l (l - x) u'_{xx}\, dx = -l u'_x(0, t) + u'(l, t) - u'(0, t) = 0,$$

$$\int\limits_0^l (l - x) u_{xx}\, dx = -l u_x(0, t) + u(l, t) - u(0, t) = 0,$$

$$\int\limits_0^l (l-x)uu_x dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^l u^2(x,t)\,dx.$$

Таким образом с учётом уравнения (1.1) приходим к следующему равенству:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{2}\int\limits_0^l u^2\,dx, \quad J(t) = \int\limits_0^l (l-x)u\,dx. \tag{5.1}$$

С помощью неравенства Коши—Буняковского получаем следующую оценку:

$$(J(t))^2 = \left(\int\limits_0^l (l-x)u\,dx\right)^2 \leqslant \int\limits_0^l (l-x)^2 dx \int\limits_0^l u^2 dx = \frac{l^3}{3}\int\limits_0^l u^2 dx, \tag{5.2}$$

откуда с учётом (5.1) следует, что

$$\frac{dJ}{dt} \geqslant \frac{3}{2l^3} J^2(t). \tag{5.3}$$

Теперь мы предположим, что начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяет условию

$$J(0) = \int\limits_0^l (l-x)u_0(x)\,dx > 0. \tag{5.4}$$

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть функция $J(t)$ удовлетворяет следующим условиям*:

1. $J(t) \in C[0,T) \cap C^1(0,T)$;
2. $J(0) > 0$*;*
3. $\exists a > 0 \quad \forall t \in (0,T)$

$$\frac{dJ}{dt} \geqslant aJ^2.$$

Здесь $0 < T \leqslant +\infty$. *Тогда при всех* $t \in [0,T)$

$$J(t) \geqslant \frac{J(0)}{1 - aJ(0)t}. \tag{5.5}$$

Доказательство.

В силу второго и третьего условий имеем $J(t) \geqslant J(0)$ при всех $t \in [0,T)$. Следовательно, верна цепочка

$$\frac{J'}{J^2} \geqslant a \Rightarrow -\frac{1}{J}\bigg|_{t=0}^{t=t} \geqslant at \Rightarrow \frac{1}{J(0)} - \frac{1}{J(t)} \geqslant at \Rightarrow \frac{1}{J(t)} \leqslant \frac{1}{J(0)} - at \Rightarrow$$

$$(\text{при } t \in \Big(0, \tfrac{1}{aJ(0)}\Big)) \Rightarrow J(t) \geqslant \frac{J(0)}{1 - aJ(0)t}.$$

Но из последнего неравенства и условия 1 следует, что $T \leqslant \frac{1}{aJ(0)}$, следовательно, неравенство (5.5) выполнено на всём промежутке существования функции $J(t)$.

Лемма доказана.

В силу леммы из (5.2) получим следующее неравенство:

$$J(t) \geqslant \frac{J(0)}{1 - aJ(0)t}, \tag{5.6}$$

где $a = \frac{3}{2l^3}$, из которого следует, что

$$T_0 \leqslant T_1 \equiv \frac{2l^3}{3} J(0)^{-1}, \tag{5.7}$$

т. е. на большем временном промежутке решение существовать не может.

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 4. *При условии* (5.4) *решение задачи* (1.1)—(1.3) *в смысле* (1.5) *не может существовать при всех* $t \in [0, +\infty)$. *Промежуток* $[0, T_0)$ *существования решения ограничен условием* (5.7).

§ 6. Основной результат

Из вышеизложенных результатов непосредственно следует

Теорема 5. *В условиях теорем* 1, 4 *решение задачи* (1.1)—(1.3) *существует в классическом смысле*

$$u(x)(t) \in C^1([0, T_0); C^2([0, l]))$$

и разрушается за конечное время с режимом «жёсткий blow-up», т. е. $T_0 \leqslant T_1 \equiv l^3 J(0)^{-1}$ *и*

$$\lim_{t \to T_0 - 0} \|u(x)(t)\|_{C([0,l])} = +\infty.$$

Доказательство. В самом деле, теорема 4 с учётом замены (1.9) гарантирует существование и единственность решения в классическом смысле, причём решение принадлежит $C^1([0, T_0); C^2([0, l]))$ для тех же самых T_0, для которых оно принадлежит $C^1([0, T_0); C([0, l]))$. Теорема 5 гарантирует разрушение классического решения за конечное время при условии (5.4). Следовательно, решение из $C^1([0, T_0); C^2([0, l]))$, а с ним и решение из $C^1([0, T_0); C([0, l]))$ существует лишь для $T_0 \leqslant T_1$. А тогда в силу теоремы из предыдущей лекции имеем

$$\lim_{t \to T_0 - 0} \|A(t, w(x)(t))\|_{C([0,l])} = +\infty. \tag{6.1}$$

Из ранее доказанного следует, что оператор $A(t)$ равномерно по t ограничен при действии $Z \to Z$ на каждом ограниченном множестве пространства $C([0,l])$. Поэтому из (6.1) получаем

$$\lim_{t \to T_0 - 0} \|w(x)(t)\|_{C([0,l])} = +\infty,$$

а в силу соотношения (1.9) и неравенств $0 \leqslant t < T_0 < +\infty$ имеем

$$\lim_{t \to T_0 - 0} \|u(x)(t)\|_{C([0,l])} = +\infty.$$

Теорема доказана.

§ 7. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Проверить, что для функции (4.2) выполнены граничные условия (1.3), если $z(x) \in C([0,l])$.

Задача 2. Проверить, что решение класса (1.5) является классическим решением, т. е. что все производные, входящие в уравнение (1.1), существуют и непрерывны.

Лекция 20

ПРИМЕР ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ

§ 1. Применение теоремы Пикара

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + \Delta u - u^3 = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Мы сразу перейдём к формулировке и исследованию обобщённой постановки этой задачи.

Подобно тому, как это было сделано в лекции 2, введём линейный оператор

$$Au = \Delta u - Iu, \quad A : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega).$$

Здесь линейные операторы Δ и I действуют из пространства $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ в пространство $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ соответственно по правилам

$$\langle \Delta v, w \rangle = -\int\limits_{\Omega} (\nabla v, \nabla w)\, dx \quad \forall v, w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \tag{1.1}$$

$$\langle Iv, w \rangle = \int\limits_{\Omega} vw\, dx \quad \forall v, w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \tag{1.2}$$

(Тот факт, что определённый согласно (1.1) оператор Δ является ограниченным, проверяется с помощью неравенство Коши—Буняковского. В случае оператора I приходится привлечь ещё и неравенство Фридрихса.) Аналогично случаю лекции 2 с помощью теоремы Браудера—Минти устанавливаем, что оператор A имеет ограниченный обратный оператор

$$A^{-1} : \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \to \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Попытаемся искать обобщённое решение задачи (1) как функцию

$$u(t) \in C^1([0,T), \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \quad 0 < T \leqslant +\infty.$$

Тогда уравнение из (1) можно, пока формально, переписать в виде

$$\frac{d}{dt}Au + \Delta u - u^3 = 0$$

или, с учётом тождества $\frac{d}{dt}Au = Au'$ (см. лекцию 1) и обратимости оператора A, в виде

$$\frac{d}{dt}u = A^{-1}(u^3 - \Delta u).$$

Почему формально? Потому что мы пока не знаем, принадлежит ли u^3 области определения $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ оператора A^{-1}. Однако сейчас мы установим нужный нам факт. Именно, из теорем вложения соболевских пространств известно, что для ограниченной области Ω имеет место непрерывное вложение

$$J_1 : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to L^4(\Omega). \tag{1.3}$$

В силу теоремы Красносельского об операторе Немыцкого можно утверждать, что отображение $u \mapsto u^3$ преобразует функцию из пространства $L^4(\Omega)$ в функцию из пространства $L^{4/3}(\Omega)$. (Впрочем, в данном случае это очевидно из более простых соображений: $|u^3|^{4/3} = |u|^4$, поэтому если $u \in L^4(\Omega)$, то $u^3 \in L^{4/3}(\Omega)$.) С другой стороны, $L^{4/3}(\Omega) = (L^4(\Omega))^*$, а поэтому в силу известной теоремы о вложении банаховых пространств и их сопряжённых [1)] из получаем непрерывное вложение

$$J_2 : L^{4/3}(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

понимаемое в естественном смысле:

$$\langle J_2 v, w \rangle = \int\limits_{\Omega} vw\,dx \quad \forall v \in L^{4/3}(\Omega), \forall w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \tag{1.4}$$

Итак, имеется цепочка отображений

$$\mathbb{H}_0^1(\Omega) \xrightarrow{J_1} L^4(\Omega) \xrightarrow{F_3} L^{4/3}(\Omega) \xrightarrow{J_1} \mathbb{H}^{-1}(\Omega). \tag{1.5}$$

Следовательно, имеется отображение $A^{-1} \circ J_2 \circ F_3 \circ J_1$. Чтобы доказать его ограниченную липшиц-непрерывность, достаточно доказать таковую для отображения $F_3 : L^4(\Omega) \to L^{4/3}(\Omega)$, поскольку остальные отображения являются ограниченными линейными операторами (см. задачу 1). Итак, если мы докажем, что отображение F_3 является

[1)] Если X, Y суть рефлексивные бесконечномерные банаховы пространства, то условие «X плотно и непрерывно вложено в Y» равносильно условию «Y^* плотно и непрерывно вложено в X^*».

ограниченно липшиц-непрерывным, то сможем свести исходную задачу к исследованию абстрактной задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u = A^{-1}(J_2F_3(J_1u) - \Delta u), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.6}$$

и применить к ней теорему из лекции 3.

Продемонстрируем на этом примере стандартную технику использования неравенств Гёльдера и Юнга. Имеем

$$\|u_1^3 - u_2^3\|_{4/3} = \left(\int\limits_\Omega |u_1^3 - u_2^3|^{\frac{4}{3}} dx\right)^{\frac{3}{4}} =$$

$$= \left(\int\limits_\Omega |u_1 - u_2|^{\frac{4}{3}} \cdot |u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = \{\text{неравенство Гёльдера}\} =$$

$$= \left(\left(\int\limits_\Omega |u_1 - u_2|^{\frac{4}{3}\cdot 3} dx\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\int\limits_\Omega |u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2|^{\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}} dx\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} =$$

$$= \left(\left(\int\limits_\Omega |u_1 - u_2|^4 dx\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\int\limits_\Omega |u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2|^2 dx\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} =$$

$$= \left(\int\limits_\Omega |u_1 - u_2|^4\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\int\limits_\Omega |u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \|u_1 - u_2\|_4 \cdot \left(\int\limits_\Omega |u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для оценки второго множителя заметим, что

$$|u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2|^2 = u_1^4 + u_2^4 + 3u_1^2u_2^2 + 2(u_1^3u_2 + u_1u_2^3) \leqslant C(u_1^4 + u_2^4),$$

где последний переход произведён с помощью неравенства Юнга, применённого в виде

$$u_1^2u_2^2 \leqslant \frac{u_1^4 + u_2^4}{2}, \quad |u_1||u_2|^3 \leqslant \frac{u_1^4}{4} + \frac{u_2^4}{4/3} \quad \text{и} \quad |u_1|^3|u_2| \leqslant \frac{u_1^4}{4/3} + \frac{u_2^4}{4}.$$

Следовательно,

$$\left(\int\limits_\Omega |u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \left(\int\limits_\Omega (u_1^4 + u_2^4) dx\right)^{\frac{1}{2}} = C_1 \left(\int\limits_\Omega u_1^4 dx + \int\limits_\Omega u_2^4 dx\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= C_1 \left(\|u_1\|_4^4 + \|u_2\|_4^4\right)^{\frac{1}{2}} = C_1 \left(2\max(\|u_1\|_4, \|u_2\|_4)\right)^2. \quad (1.7)$$

Итак, в силу всего вышесканного ограниченная липшиц-непрерывность отображения $A^{-1} \circ J_2 \circ F_3 \circ J_1$ доказана. Следовательно, применяя теорему 3 к задаче Коши (1.6), получаем локальную (по t) разрешимость рассматриваемой задачи.

§ 2. Глобальная разрешимость

Применим метод априорных оценок.

Итак, решение задачи есть функция $u(t) \in C^1([0,T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$. Следовательно (в силу всего вышесказанного) левая часть есть элемент пространства $C([0,T]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$. Поэтому при каждом $t \geqslant 0$ можно подействовать левой частью уравнения на $u(t)$. Получим

$$\left\langle \frac{d}{dt}(Au) + \Delta u - J_2 F_3(J_1 u) \right\rangle = 0, \quad t \in [0,T).$$

Пользуясь перестановочностью дифференцирования и применения линейного оператора (см. лекцию 1), приводим предыдущее равенство к виду

$$\left\langle A\frac{d}{dt}u + \Delta u - J_2 F_3(J_1 u) \right\rangle = 0, \quad t \in [0,T),$$

или

$$\left\langle A\frac{d}{dt}u, u \right\rangle + \langle \Delta u, u\rangle - \langle J_2 F_3(J_1 u), u\rangle = 0, \quad t \in [0,T).$$

Распишем в явном виде оператор A и скобки двойственности (см. (1.1) и (1.2)):

$$-\int\limits_\Omega (\nabla u', \nabla u) dx - \int\limits_\Omega u' u\, dx - \int\limits_\Omega (\nabla u, \nabla u) dx - \int\limits_\Omega u^3 \cdot u\, dx = 0,$$

где последний член получается с учётом (1.4), или

$$-(u', u) - (u', u) - \int\limits_\Omega (\nabla u, \nabla u) dx - \int\limits_\Omega u^4 dx = 0. \quad (2.1)$$

Поскольку в вещественном гильбертовом пространстве H для любой непрерывно дифференцируемой функции $v(t) \in C^1(\mathcal{T}, H)$ верно

$$\frac{d}{dt}\|v\|^2 = 2(v', v),$$

равенство (2.1) можно преобразовать к виду

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \|u\|^2_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)}\right) - \int\limits_{\Omega} u^4\,dx = 0, \tag{2.2}$$

или, обозначив $E(t) := \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)}$,

$$\frac{1}{2}\frac{dE}{dt} = -\left(\|u\|^2_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)} + \int\limits_{\Omega} u^4\,dx\right),$$

откуда

$$\frac{1}{2}\frac{dE}{dt} \leqslant 0.$$

Учтя, что $E(0) = \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)} < +\infty$, получаем, что на всём промежутке существования решения выполнено неравенство

$$E(t) \leqslant E(0). \tag{2.3}$$

Теперь вспомним, что абстрактная задача Коши, к которой мы свели исходную задачу, ставилась в пространстве $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$. Следовательно, норма именно в этом пространстве будет фигурировать в теореме лекции 3 при применении этой теоремы к нашей задаче. Но из (2.3) получаем

$$\|u\|_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)} \leqslant E(t) \leqslant E(0)$$

и, в частности, для любого конечного $T_1 < +\infty$ имеем

$$\lim_{t\to T_1} \|u\|_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)} < +\infty. \tag{2.4}$$

Но из теоремы лекции 3 вытекает, что если бы решение существовало бы лишь на конечном промежутке, его норма стремилась бы к бесконечности на конце этого промежутка. Следовательно, решение существует на всей полупрямой $[0, +\infty)$.

Замечание 1. Как видно, здесь важна не сама по себе оценка (2.3), а более слабое утверждение: ограниченность нормы решения на каждом ограниченном промежутке.

§ 3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Пользуясь оценкой (1.7), получить в явном виде функцию $\mu(t,s)$ из теоремы лекции 3 для отображения $A^{-1}\circ J_2\circ F_3\circ J_1$.

Задача 2. Доказать ограниченную липшиц-непрерывность следующих операторов:
1) $u\mapsto u^5$, $L^6(\Omega)\to L^{6/5}(\Omega)$;
2*) $u\mapsto |u|^q$, $L^{q+1}(\Omega)\to L^{(q+1)/q}(\Omega)$, $q>1$.

Задача 3. Доказать формулу дифференцирования скалярного квадрата дифференцируемой функции со значении в вещественном гильбертовом пространстве:

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2=2(u',u).$$

(Рекомендуется сослаться на подходящее утверждение из лекции 1, проверив условия его применимости.)

Задача 4. Сформулировать соответствующие обобщённые постановки и доказать глобальную разрешимость аналогичной задачи, в правой части уравнения которой вместо 0 стоит:
1) $f(x)\in L^2(\Omega)$;
2) $f(x)\in \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$;
3) $f(x,t)\in C([0,+\infty);L^2(\Omega))$;
4) $f(x,t)\in C([0,+\infty);\mathbb{H}^{-1}(\Omega))$;
5*) $f(x,u)$;
6*) $f(x,|\nabla u|)$,
где в последних двух случаях функция $f(x,s)$ является каратеодориевой и равномерно по $x\in\Omega$ удовлетворяет оценке

$$|f(x,t)|\leqslant |s|^\gamma,\quad \gamma\in(0,1).$$

Лекция 21

РАЗЛИЧНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ И ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ

§ 1. Непродолжаемое решение интегрального уравнения Вольтерра

Рассмотрим в банаховом пространстве B с нормой $\|\cdot\|$ интегральное уравнение

$$u(t) = \overline{u}(t) + \int\limits_0^t K(t,\tau)A(\tau, u(\tau))\,d\tau. \tag{1.1}$$

Условия на ядро $K(t,\tau) : \mathbb{R}_+^2 \to L(B,B)$ [1] и функции $A(t,u) : \mathbb{R}_+ \times \times B \to B$, $\overline{u}(t) : \mathbb{R}_+ \to B$ будут сформулированы ниже. Интегралы здесь и далее понимаются в смысле Римана см. лекцию 1).

Определение 1. *Назовём функцию $u(t)$ решением уравнения (1.1) на промежутке $\mathcal{T} \equiv [0;T]$ [2], если $u(t) \in C(\mathcal{T}, B)$ и $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) при всех $t \in \mathcal{T}$.*

Замечание 1. В дальнейшем слова «уравнения (1.1)» будем часто опускать.

Замечание 2. Как видно, мы используем не понятие «решение», а понятие «решение на промежутке». Если $u_1(t)$, $u_2(t)$ — решения соответственно на промежутках $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ и $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$, то они считаются разными решениями независимо от совпадения значений функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ на $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$.

Определение 2. *Назовём решение u_2 на промежутке $\mathcal{T}_2$ продолжением решения $u_1(t)$ на промежутке $\mathcal{T}_1$, если*

1) $\mathcal{T}_2 \supseteq \mathcal{T}_1$ и 2) $u_2(t) = u_1(t)$ на $\mathcal{T}_1$.

Замечание 3. Нам удобно использовать такую терминологию, в которой решение является своим собственным продолжением.

---

[1] Здесь и далее $\mathbb{R}_+ \equiv [0;+\infty)$.

[2] Т. е. $\mathcal{T} = [0;T]$ или $\mathcal{T} = [0;T)$, причём в последнем случае допускается $T = +\infty$. Если не оговорено иное, промежуток $\mathcal{T}$ всегда начинается с 0 и $0 \in \mathcal{T}$.

Определение 3. *Решение u_2 на промежутке $\mathcal{T}$ назовём непродолжаемым, если оно не имеет продолжения, отличного от него самого, т. е. если не существует такого решения $\widetilde{u}(t)$ на промежутке $\widetilde{\mathcal{T}}$, что*

$$\textit{1) } \widetilde{u}(t) \textit{ — продолжение решения } u(t), \textit{ 2) } \widetilde{\mathcal{T}} \supsetneq \mathcal{T}.$$

Если же такое решение $\widetilde{u}(t)$ существует, то решение $u(t)$ назовём продолжаемым.

Для формулировки условий на функцию $A(t,u)$ рассмотрим метрическое пространство $\mathbb{R}_+ \times B$ с расстоянием

$$\rho\big((t_1,u_1),(t_2,u_2)\big) = \max(|t_1-t_2|, \|u_1-u_2\|). \tag{1.2}$$

Очевидно, это пространство полно. Пусть отображение

$$A(t,u) : \mathbb{R}_+ \times B \to B$$

обладает свойствами (A_1) и (A_2):

(A_1) оно непрерывно в смысле метрики (1.2);

(A_2) существует такая функция

$$\mu(t,s) : {\mathbb{R}_+}^2 \to \mathbb{R}_+,$$

ограниченная на каждом прямоугольнике $[0;T]\times[0;S]$ $(T,S>0)$, что

$$\forall t \geqslant 0,\ \forall u_1,u_2 \in B \ \ \|A(t,u_1)-A(t,u_2)\| \leqslant \mu(t, \max(\|u_1\|,\|u_2\|))\|u_1-u_2\|.$$

Сразу отметим, что из (A_1) вытекает свойство (A_3):

(A_3) функция $\nu(t) \equiv \|A(t,\vartheta)\|$ (где ϑ — нулевой элемент пространства B) ограниченна на каждом отрезке $[0;T]$. Действительно, в силу (A_1) числовая функция $\|A(t,\vartheta)\|$ непрерывна при всех $t \geqslant 0$.

Далее, из (A_2) и (A_3) следует свойство

(A_4) существует такая функция

$$\lambda(t,s) : {\mathbb{R}_+}^2 \to \mathbb{R}_+,$$

ограниченная на каждом прямоугольнике $[0;T]\times[0;S]$ $(T,S>0)$, что

$$\forall t \geqslant 0,\ \forall u \in B \ \ \|A(t,u)\| \leqslant \lambda(t,\|u\|).$$

Действительно, имеем

$$\|A(t,u)\| \leqslant \|A(t,\vartheta)\| + \|A(t,u)-A(t,\vartheta)\| \leqslant \nu(t) + \mu(t,\|u\|)\|u\| =: \lambda(t,\|u\|),$$

причём

$$\sup_{\substack{t\in[0;T]\\ s\in[0;S]}} \lambda(t,s) \leqslant \sup_{t\in[0;T]} \nu(t) + S \sup_{\substack{t\in[0;T]\\ s\in[0;S]}} \mu(t,s).$$

Нам понадобится лемма, доказанная в лекции 3. Для удобства напомним её формулировку.

Лемма 1. *Пусть* $u(t) \in C([a;b], B)$, $[a;b] \subset \mathbb{R}_+$. *Тогда сложная функция* $f(t) \equiv A(t, u(t))$ *(где* A *— введённое выше отображение) непрерывна*: $f(t) \in C([a;b], B)$.

Теперь сформулируем и докажем основную теорему.

Теорема 1. *Пусть*

1) $\overline{u}(t) \in C(\mathbb{R}_+, B)$;

2) *ядро* $K(t,\tau)$ *непрерывно по совокупности переменных на* $\mathbb{R}_+{}^2$ *(в равномерной операторной топологии, т. е. по норме банаховой алгебры* $L(B,B)$*)*;

3) *функция* $A(t,u)$ *обладает свойствами* (A_1) *и* (A_2).

Тогда верны следующие утверждения.

1. *Существует хотя бы одно решение* $u(t)$ *на промежутке* $\mathcal{T}$, $\mathcal{T} \neq \varnothing$, $\mathcal{T} \neq \{0\}$.
2. *Из любых двух решений* u_1, u_2 *одно является продолжением другого.* (*В частности, совпадающие решения являются продолжениями друг друга.*)
3. *Если* $u(t)$ *— решение на* <u>*отрезке*</u> $[0;T]$, *то решение* $u(t)$ *продолжаемо.* (*В частности, «решение»* $\overline{u}(0)$ *продолжаемо с «отрезка»* $\{0\}$, *как следует из п.* 1.)
4. *Существует такое* $T_0 > 0$ *и такое решение* $u_0(t)$ *на промежутке* $\mathcal{T}_0 = [0;T_0)$, *что* $u_0(t)$ *— непродолжаемое решение.*
5. *Непродолжаемое решение единственно.*
6. *Для непродолжаемого решения верно, что если* $T_0 < +\infty$, *то*

$$\limsup_{t \to T_0 - 0} \|u(t)\| = +\infty. \tag{1.3}$$

При этом если $K(t,\tau) \equiv I$ (*единичный оператор*), *то непродолжаемое решение является не просто неограниченным, но бесконечно большим*:

$$\lim_{t \to T_0 - 0} \|u(t)\| = +\infty. \tag{1.4}$$

В случае $T_0 = +\infty$ *соотношение* (1.3) (*соответственно* (1.4)) *может как выполняться, так и не выполняться.*

Замечание 4. В частности, можно рассматривать числовые ядра $K(t,\tau) : \mathbb{R}_+{}^2 \to \mathbb{R}$: банахова алгебра $\mathbb{R}$ изометрически изоморфна подалгебре скалярных операторов в $L(B,B)$.

Доказательство.

1. Для каждого $T > 0$ рассмотрим банахово пространство

$$\mathbb{B}_T := C([0;T], B), \quad \|u\|_{\mathbb{B}_T} \equiv \sup_{t \in [0;T]} \|u(t)\|,$$

и оператор $\mathbb{A}_T : \mathbb{B}_T \to \mathbb{B}_T$,

$$\mathbb{A}_T(u) := \overline{u}(t) + \int\limits_0^t K(t,\tau) A(\tau, u(\tau))\, d\tau.$$

Заметим, что при условии непрерывности функции $u(t)$ интеграл в правой части последней формулы непрерывен. (Это следует из леммы 1 и стандартных оценок, использующих равномерную непрерывность ядра $K(t,\tau)$ на любом прямоугольнике $[0;T_1]\times[0;T_2]$). Поэтому функция $u(t)\in C([0;T],B)$ будет решением уравнения (1.1) тогда и только тогда, когда она является решением уравнения

$$u = \mathbb{A}_T(u) \tag{1.5}$$

в банаховом пространстве $\mathbb{B}_T$.

Сейчас мы укажем, как выбрать $T>0$ таким образом, чтобы доказать однозначную разрешимость уравнения (1.5) методом сжимающих отображений. Для этого зафиксируем некоторое произвольно выбранное $R>0$ и рассмотрим замкнутое подмножество

$$\mathbb{B}_T^R = \left\{ u(t)\in\mathbb{B}_T \mid \sup_{t\in[0;T]}\|u(t)-\overline{u}(t)\| \equiv \|u-\overline{u}\|_{\mathbb{B}_T} \leqslant R \right\}.$$

В силу общих свойств метрических пространств множество $\mathbb{B}_T^R$ само является полным метрическим пространством относительно расстояния, порождённого нормой пространства $\mathbb{B}_T$. Итак, нам требуется, чтобы оператор $\mathbb{A}_T$ а) не выводил из множества $\mathbb{B}_T^R$; б) являлся в нём сжимающим.

Для а) проведём оценку

$$\left\|\int_0^t K(t,\tau)A(\tau,u(\tau))\,d\tau\right\|_{\mathbb{B}_T} \equiv \sup_{t\in[0;T]}\left\|\int_0^t K(t,\tau)A(\tau,u(\tau))\,d\tau\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^T \|K(t,\tau)\|\|A(\tau,u(\tau))\|\,d\tau \leqslant T\sup_{t,\tau\in[0;T]}\|K(t,\tau)\| \sup_{\substack{t\,\in\,[0;\,T] \\ s\,\in\,[0;\,\|\overline{u}(t)\|_{\mathbb{B}_T}+R]}} \lambda(t,s). \tag{1.6}$$

Для б) — оценку

$$\left\|\int_0^t K(t,\tau)A(\tau,u_1(\tau))\,d\tau - \int_0^t K(t,\tau)A(\tau,u_2(\tau))\,d\tau\right\|_{\mathbb{B}_T} \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^T \|K(t,\tau)\|\|A(\tau,u_1(\tau))-A(\tau,u_2(\tau))\|\,d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{t,\tau\in[0;T]}\|K(t,\tau)\| \sup_{\substack{t\,\in\,[0;\,T] \\ s\,\in\,[0;\,\|\overline{u}(t)\|_{\mathbb{B}_T}+R]}} \mu(t,s)\int_0^T \|u_1(\tau)-u_2(\tau)\|\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant T \sup_{t,\tau\in[0;T]} \|K(t,\tau)\| \sup_{\substack{t\,\in\,[0;\,T]\\ s\,\in\,[0;\,\|\overline{u}(t)\|_{\mathbb{B}_T}+R]}} \mu(t,s)\|u_1-u_2\|_{\mathbb{B}_T}. \quad (1.7)$$

Заметим, что в силу свойств функций μ и λ, а также непрерывности функций $\overline{u}(t)$ и $K(t,\tau)$ точные верхние грани в (1.6) и (1.7) конечны (и, очевидно, не возрастают при уменьшении T). Поэтому существует такое $T>0$, что выполняются условия

$$\begin{cases} T \sup\limits_{t,\tau\in[0;T]} \|K(t,\tau)\| \sup\limits_{\substack{t\,\in\,[0;\,T]\\ s\,\in\,[0;\,\|\overline{u}(t)\|_{\mathbb{B}_T}+R]}} \lambda(t,s) \leqslant R,\\ T \sup\limits_{t,\tau\in[0;T]} \|K(t,\tau)\| \sup\limits_{\substack{t\,\in\,[0;\,T]\\ s\,\in\,[0;\,\|\overline{u}(t)\|_{\mathbb{B}_T}+R]}} \mu(t,s) \leqslant \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

В этом случае в силу принципа сжимающих отображений уравнение (1.5) однозначно разрешимо, а поэтому и исходное уравнение (1.1) имеет единственное решение на промежутке $[0;T]$.

2. Рассмотрим сначала случай, когда $\mathcal{T}_1=\mathcal{T}_2=:\mathcal{T}$. Предположим, что $u_1(t)\not\equiv u_2(t)$ на $\mathcal{T}$. Заметим, что множество точек t, где $u_1(t)=u_2(t)$, является замкнутым подмножеством промежутка $\mathcal{T}$ как прообраз замкнутого множества $\{\vartheta\}$ при непрерывном отображении u_2-u_1, а поэтому множество $\mathfrak{T}$, где равенство решений нарушается, открыто в $\mathcal{T}$. Следовательно, имеется точка $T^*=\inf\mathfrak{T}$, причём $u_1(T^*)=u_2(T^*)=:u^*$, и такое T^{**}, что $(T^*;T^{**}]\subset\mathfrak{T}$. Но тогда каждая из функций $u_1(t)$, $u_2(t)$ является решением уравнения

$$u(t)=\overline{u}(t)+u^*-\overline{u}(T^*)+\int\limits_{T^*}^{t} K(t,\tau)A(\tau,u(\tau))\,d\tau$$

на отрезке $[T^*;T^{**}]$. Уменьшив, если потребуется, величину T^{**}, мы с помощью рассуждений, аналогичных п. 1, сможем доказать единственность решения этого уравнения на отрезке $[T^*;T^{**}]$ и прийти к противоречию.

Теперь рассмотрим случай, когда промежутки $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ различны. Пусть для определённости $\mathcal{T}_2\supsetneq\mathcal{T}_1$. Тогда, перейдя к функциям $u_1(t)$ и $u_2|_{\mathcal{T}_1}(t)$, мы получаем предыдущий случай, невозможность которого уже доказана.

3. Для доказательства достаточно перейти к рассмотрению уравнения

$$u(t)=\overline{u}(t)+u(T)-\overline{u}(T)+\int\limits_{T}^{t} K(t,\tau)A(\tau,u(\tau))\,d\tau$$

при $t \geqslant T$ и применить рассуждения, аналогичные п. 1. Очевидно, что полученные решения будут «сшиваться» непрерывно и дадут продолжение решения $u(t)$.

4. Пусть

$$\mathfrak{T} = \{T > 0: \text{ существует решение задачи (1.1) на промежутке } [0;T]\}$$

при $T_0 = \sup \mathfrak{T} \leqslant +\infty$. В силу п. 1 множество $\mathfrak{T}$ непусто и содержит некоторый отрезок ненулевой длины. Поэтому $T_0 > 0$ и существует такая последовательность решений $\{u_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ на промежутках $[0;T_n]$, что $T_n > 0$, $T_n \uparrow T_0$. В силу п. 2 любые два решения уравнения (1.1) совпадают на их общей области определения. Поэтому при всех $n \in \mathbb{N}$ решение $u_{n+1}(t)$ есть продолжение решения $u_n(t)$. Тогда можно построить функцию

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), & t \in [0;T_1], \\ u_{n+1}(t), & t \in (T_n;T_{n+1}], \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Эта функция будет решением уравнения (1.1) на промежутке $[0;T_0)$. Если $T_0 = +\infty$, то $u(t)$ будет очевидным образом непродолжаемым. Если $T_0 < +\infty$, то по самому определению T_0 максимально возможный промежуток существования решения — это либо полуинтервал $[0;T_0)$, либо отрезок $[0;T_0]$. Однако последнее исключается в силу п. 3, ведь тогда существовало бы некоторое решение на промежутке, большем отрезка $[0;T_0]$, а следовательно, и на некотором отрезке $[0;T_1]$ с $T_1 > T_0$. Следовательно, решение $u(t)$, $t \in [0;T_0)$, непродолжаемо.

Итак, существует непродолжаемое решение, определённое на полуоткрытом промежутке $[0;T_0)$ с $T_0 \leqslant +\infty$.

5. Пусть $u_1(t)$, $u_2(t)$ — два непродолжаемых решения. Тогда в силу п. 2 одно из них является продолжением другого. Следовательно, или они совпадают, или одно из них является продолжаемым.

6. Пусть $u(t)$ — решение на $[0;T_0)$, $T_0 < +\infty$ и $u(t)$ — непродолжаемое решение. Будем доказывать от противного. Предположим, что решение $u(t)$ ограниченно, т. е. существует число C_0 такое, что

$$\|u(t)\| \leqslant C_0, \quad t \in [0;T_0).$$

Но интеграл в правой части уравнения (1.1) удовлетворяет в левой полуокрестности точки T_0 условию Коши. Это вытекает из неравенства (где $0 < t_1 < t_2 < T_0$)

$$\left\| \int\limits_0^{t_2} K(t_2,\tau)A(\tau,u(\tau))\,d\tau - \int\limits_0^{t_1} K(t_1,\tau)A(\tau,u(\tau))\,d\tau \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_0^{t_1} \|K(t_2,\tau) - K(t_1,\tau)\| \|A(\tau,u(\tau))\|\,d\tau + \int\limits_{t_1}^{t_2} \|K(t_2,\tau)\| \|A(\tau,u(\tau))\|\,d\tau \tag{1.8}$$

с использованием равномерной непрерывности ядра $K(t,\tau)$ на любом прямоугольнике и свойства (A_4). С другой стороны, функция $\overline{u}(t)$ непрерывна всюду по условию. Следовательно, функция $u(t)$ непрерывно продолжима в точку T_0. Обозначим продолженную функцию через $\widetilde{u}(t)$. Тогда функция

$$\overline{u}(t) + \int\limits_0^t K(t,\tau)A(\tau,\widetilde{u}(\tau))\,d\tau,$$

заведомо совпадающая с $u(t) = \overline{u}(t) + \int_0^t K(t,\tau)A(\tau,u(\tau))\,d\tau$ на $[0;T_0)$, существует и непрерывна на $[0;T_0]$, а следовательно, её значение в точке T_0 совпадает с $\widetilde{u}(T_0)$ в силу единственности непрерывного продолжения на замыкание. Следовательно, функция $\widetilde{u}(t)$ является решением уравнения (1.1) на отрезке $[0;T_0]$, что противоречит условию непродолжаемости решения $u(t)$ на промежутке $[0;T_0)$. Таким образом, соотношение (1.3) доказано.

Замечание 5. Дальнейшие рассуждения аналогичны проведённым в лекции 3 для дифференциального уравнения.

Покажем теперь, что в случае $K(t,\tau) \equiv I$ выполняется предельное соотношение (1.4). Надо доказать:

$$\forall M > 0\ \exists \delta > 0\ \forall t \in (T_0-\delta;T_0)\cap[0;T_0)\ \ \|u(t)\| > M.$$

Предположим противное:

$$\exists M > 0\ \forall \delta > 0\ \exists t \in (T_0-\delta;T_0)\cap[0;T_0)\ \ \|u(t)\| \leqslant M. \tag{1.9}$$

Зафиксируем M из (1.9). В силу свойства (A_4) будем иметь

$$\forall t \in [0;T_0),\ \forall z \in B\ \Big(\|z\| \leqslant 2M \Rightarrow \|A(t,z)\| \leqslant \sup_{\substack{t\,\in\,[0;T_0]\\ s\,\in\,[0;2M]}} \lambda(t,s) =: E\Big). \tag{1.10}$$

Выберем $\delta \leqslant \frac{M}{4E}$ из условия

$$\|\overline{u}(t'') - \overline{u}(t')\| < \frac{M}{4} \quad \text{при} \quad |t''-t'| < \delta.$$

(Это возможно, поскольку функция $\overline{u}(t)$, как непрерывная на $\mathbb{R}_+$, равномерно непрерывна на отрезке $[0;T_0]$.) Возьмём из (1.9) такое $t = t^*$, что $T_0 - \delta < t^* < T_0$, $\|u(t^*)\| \leqslant M$. В силу (1.3) существует такое t^{**}, что $T_0-\delta < t^* < t^{**} < T_0$ и $\|u(t^{**})\| \geqslant 2M$. Но тогда в силу непрерывности функции $u(t)$ существует такое $t^{***} \in (t^*;t^{**}]$, что

$$\|u(t^{***})\| = 2M, \quad \|u(t)\| < 2M \text{ при всех } t \in (t^*;t^{***}). \tag{1.11}$$

Имеем тогда, с одной стороны,

$$\|u(t^{***}) - u(t^*)\| \geqslant \|u(t^{***})\| - \|u(t^*)\| = M,$$

а с другой, в силу уравнения (1.1), утверждений (1.11) и (1.10), а также выбора δ:

$$\|u(t^{***}) - u(t^*)\| \leqslant \|\overline{u}(t^{***}) - \overline{u}(t^*)\| + \int\limits_{t^*}^{t^{***}} \|A(\tau, u(\tau))\|\, d\tau <$$

$$< \frac{M}{4} + |t^{***} - t^*|E \leqslant \frac{M}{4} + \delta E \leqslant \frac{M}{2}.$$

Полученное противоречие завершает доказательство п. 6 и всей теоремы.

Теорема доказана.

Замечание 6. Легко видеть, что в случае, когда ядро K не зависит от t и является непрерывной функцией аргумента τ, оно может быть «включено» в $A(t, u)$, и поэтому соотношение (1.4) верно и в этом случае.

§ 2. Пример непродолжаемого решения, не имеющего предела

В случае ядра, зависящего от t и удовлетворяющего условиям теоремы 1, соотношение (1.4) может не выполняться. Приведём один из возможных примеров. Для этого рассмотрим функцию

$$u(t) = 1 + \frac{1}{T_0 - t} \cos^2 \frac{1}{T_0 - t} \in C[0; T_0), \quad T_0 = \frac{2}{\pi}, \tag{2.1}$$

и построим интегральное уравнение вида (1.1), решением которого является функция (2.1), причём его ядро будет зависеть лишь от переменной t. Легко видеть, что при $t \to T_0 - 0$ функция (2.1) предела не имеет (потому что она принимает значение 1 сколь угодно близко к точке T_0), но

$$\limsup_{t \to T_0 - 0} u(t) = +\infty.$$

Таким образом, функция (2.1) удовлетворяет соотношению (1.3), но не соотношению (1.4). Нужно найти такую функцию $K(t) \in C[0; +\infty)$, чтобы при $t \in [0; T_0)$ выполнялось тождество

$$u(t) = u(0) + K(t) \int\limits_0^t (u(s))^k ds.$$

Натуральное k будет выбрано ниже. Поскольку $u(0) = 1$, имеем

$$1 + \frac{1}{T_0 - t} \cos^2 \frac{1}{T_0 - t} = 1 + K(t) \int\limits_0^t \left(1 + \frac{1}{T_0 - s} \cos^2 \frac{1}{T_0 - s}\right)^k ds,$$

или
$$K(t) = \frac{\frac{1}{T_0-t}\cos^2\frac{1}{T_0-t}}{\int_0^t \left(1+\frac{1}{T_0-s}\cos^2\frac{1}{T_0-s}\right)^k ds}, \quad T_0 = \frac{2}{\pi}. \tag{2.2}$$
При всех натуральных k дробь в правой части доставляет непрерывную на интервале $t \in (0; T_0)$ функцию. С помощью правила Лопиталя нетрудно получить, что $K(t) \to 0$ при $t \to +0$. Если к тому же
$$K(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to T_0 - 0, \tag{2.3}$$
то функция $K(t)$ может быть продолжена до непрерывной функции аргумента $t \in [0; +\infty)$ и, тем самым, будет удовлетворять условию теоремы 1. Будем добиваться выполнения условия (2.3).

В силу бинома Ньютона с учётом неотрицательности второго слагаемого имеем при всех $k \geqslant 3$, $k \in \mathbb{N}$, $s \in [0; T_0)$
$$\left(1+\frac{1}{T_0-s}\cos^2\frac{1}{T_0-s}\right)^k \geqslant \\ \geqslant \frac{k(k-1)(k-2)}{6}\frac{1}{(T_0-s)^3}\cos^6\frac{1}{T_0-s}, \tag{2.4}$$
откуда при всех $t \in [0; T_0)$
$$\int_0^t \left(1+\frac{1}{T_0-s}\cos^2\frac{1}{T_0-s}\right)^k ds \geqslant \\ \geqslant \frac{k(k-1)(k-2)}{6}\int_0^t \frac{1}{(T_0-s)^3}\cos^6\frac{1}{T_0-s}ds. \tag{2.5}$$
Вычислим интеграл в правой части последней формулы:
$$\int_0^t \frac{1}{(T_0-s)^3}\cos^6\frac{1}{T_0-s}ds = \left\{y = \frac{1}{T_0-s}\right\} = \int_{\frac{1}{T_0}}^{\frac{1}{T_0-t}} y\cos^6 y\,dy = \\ = \frac{5}{32}y^2 + \frac{15}{32}\left(\frac{y\sin 2y}{2}+\frac{\cos 2y}{4}\right) + \\ + \frac{6}{32}\left(\frac{y\sin 4y}{4}+\frac{\cos 4y}{16}\right) + \frac{1}{32}\left(\frac{y\sin 6y}{6}+\frac{\cos 6y}{36}\right)\Bigg|_{\frac{1}{T_0}}^{\frac{1}{T_0-t}} = \\ = \frac{5}{32}\frac{1}{(T_0-t)^2} + O\left(\frac{1}{T_0-t}\right) \quad \text{при} \quad t \to T_0 - 0. \tag{2.6}$$

Из (2.2), (2.4)—(2.6) получаем

$$0 \leqslant K(t) \leqslant \frac{6}{k(k-1)(k-2)} \frac{\frac{1}{T_0-t}\cos^2\frac{1}{T_0-t}}{\frac{5}{32}\frac{1}{(T_0-t)^2} + O\left(\frac{1}{T_0-t}\right)} =$$

$$= \frac{32 \cdot 6}{5k(k-1)(k-2)} \frac{\cos^2\frac{1}{T_0-t}}{\frac{1}{T_0-t} + O(1)} \to +0 \quad \text{при} \quad t \to T_0 - 0.$$

Это и доказывает предельное соотношение (2.3) в случае выбора, например, $k = 3$.

Итак, уравнение имеет вид

$$u(t) = 1 + \int\limits_0^t K(t)(u(s))^3 ds,$$

где

$$K(t) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{T_0-t}\cos^2\frac{1}{T_0-t}}{\int_0^t\left(1+\frac{1}{T_0-s}\cos^2\frac{1}{T_0-s}\right)^3 ds}, & t \in (0; T_0), \\ 0, & t \in \{0\} \cup [T_0; +\infty), \end{cases}$$

$T_0 = \frac{2}{\pi}$, а соответствующее решение —

$$u(t) = 1 + \frac{1}{T_0 - t}\cos^2\frac{1}{T_0 - t}.$$

Замечание 7. К данному результатату примыкает результат работы

V. Komornik, P. Martinez, M. Pierre, J. Vanconsenoble. “Blow-up” of bounded solutions of differential equations.
Acta Sci. Math. (Szeged). Vol. 69. Pp. 651–657 (2003),

где показано, что непродолжаемое решение задачи Коши для автономного абстрактного дифференциального уравнения

$$u' = f(u)$$

с локально липшицевой правой частью $f(u)$ в произвольном бесконечномерном банаховом пространстве B может (в отличие от случаев (1.3) и (1.4)) быть даже ограниченным, если $f(u)$, являясь локально липшиц-непрерывной, не является ограниченной на каждом ограниченном подмножестве пространства B.

Замечание 8. Важно различать *ограниченно липшиц-непрерывные* и *локально липшиц-непрерывные* функции. Последни – это такие, что для любой точки найдётся окрестность, в которой такая функция Липшиц-непрерывна. В бесконечномерном банаховом пространстве эти условия не равносильны.

§ 3. Теорема Пеано

Замечание 9. См. лекцию 12 основного курса.

Теорема Пеано. *Рассмотрим дифференциальное уравнение относительно скалярной функции* $u(t)$

$$u' = f(t, u). \tag{3.1}$$

Если правая часть $f(t, u)$ *непрерывна в некоторой ограниченной замкнутой области* G, *то через каждую внутреннюю точку* (t_0, u_0) *этой области проходит* <u>*хотя бы одна*</u> *интегральная кривая этого уравнения.*

Легко видеть, что единственность не гарантируется этой теоремой не случайно: достаточно рассмотреть задачу Коши

$$\begin{cases} u' = 3u^{\frac{2}{3}}, \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Задача (3.2) имеет как тривиальное решение $u = 0$, так и решение $u = t^3$. Кроме того, при любом t_0 функция $(t - t_0)^3$ также является решением уравнения задачи (3.2), причём

$$\left.\frac{d}{dt}(t - t_0)^3\right|_{t=t_0} = 0.$$

Следовательно, решения $u = 0$ и $u = (t - t_0)^3$ можно гладко сшить и получить (при произвольном $t_0 > 0$) решение

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, t_0), \\ (t - t_0)^3, & t \in [t_0, +\infty), \end{cases} \tag{3.3}$$

также являющееся решением задачи (3.2). Итак, задача (3.2) имеет не два, а бесконечно много решений, определённых на всей полупрямой $t \geqslant 0$.

Оказывается, существуют и более «патологические» примеры. Не будем приводить их ввиду громоздкости построения, но отметим лишь, что существует такая функция $f(t, u)$, непрерывная на всей плоскости (t, u), что для любой пары (t_0, u_0) задача Коши

$$\begin{cases} u' = f(t, u), \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

имеет более одного решения <u>на любом отрезке</u> $[t_0, t_0 + \varepsilon]$. (Задача (3.2) обладает таким свойством лишь при $u_0 = 0$.)

Не случайно мы сформулировали теорему Пеано для скалярной функции. Дело в том, что теорема Пеано верна только для конечномерных линейных пространств. Напротив, в любом бесконечномерномерном банаховом пространстве задача (3.1) может не иметь ни одного (даже локального по времени) решения. Этот результат был получен в

А. Н. Годунов, О теореме Пеано в банаховых пространствах. Функц. анализ и его прил., 1975, том 9, выпуск 1, 59—60.

§ 4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Опираясь на задачу (3.2) (или подобные ей), построить задачу Коши со следующими свойствами:
1) её тривиальное решение $u = 0$ существует на полупрямой;
2) для любого $T > 0$ существует нетривиальное решение на промежутке $[0, T)$ (возможно, продолжаемое), 3) никакое её нетривиальное решение не продолжаемо на всю полупрямую.

Задача 2. Привести пример локально липшиц-непрерывной, но не ограниченно липшиц-непрерывной функции.

Предметный указатель

Список литературы

1. *Байокки К., Капело А.* Вариационные и квазивариационые неравенства. — М.: Наука, 1988. — 448 с.
2. *Вайнберг М.М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. — М.: Гос. изд. технико-теор. лит., 1956. — 344 с.
3. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1988. — 512 с.
4. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978. — 336 с.
5. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка М.: Наука, 1989.
6. *Данфорд Н.*, *Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория.
7. *Демидович В.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967, 472 с.
8. *Дубинский Ю. А.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения. — Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат., 1976. N 9. — 130 с.
9. *Дубинский Ю. А.* Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях// Матем. сб., 1965, 67(109)–4, 609–642.
10. *Зорич В.А.* Математический анализ. — М.: Наука, 1981. — 544 с.
11. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 624 с.
12. *Канторович Л.В.*, *Акилов Г.П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 744 с. — М.: Мир, 1962. — 897 с.
13. *Климов В. С.* О функционалах с бесконечным числом критических значений// Матем. сб., т. 100, N 1(5), с. 102–116.
14. *Ф. Клемент, Х. Хейманс, С. Ангенент, К. ван Дуйн, Б. де Пахтер* Однопараметрические полугруппы. Абстрактные дифференциальные уравнения с приложениями. М.: Мир, 1992, с. 352.
15. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1956, 392 с.
16. *Крылов Н. В.* Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гельдера. Н.: Научная книга, 1998.
17. *Корпусов М. О., Свешников А. Г.* Нелинейный функциональный анализ и математическое моделирование физики. Т. I. Геометрические и топологические свойства линейных пространств. — М.: УРСС, 2010. — 420 с.
18. *Корпусов М. О., Свешников А. Г.* Нелинейный функциональный анализ и математическое моделирование физики. Т. II. Методы исследования нелинейных операторов. — М.: УРСС, 2011. — 480 с.
19. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

20. *Кузин И. А.* Разрешимость некоторых эллиптических задач с критическим показателем нелинейности//Матем. сб., т. 180, N 11, 1989, с. 1475–1485.
21. *Кузин И. А.* О кратной разрешимости некоторых эллиптических задач с критическим показателем нелинейности//Матем. заметки, т. 52, N 1, 1992, с. 51–56.
22. *Кузин И. А.* Теоремы сравнения для вариационных задач и их приложение к эллиптическим уравнениям в $\mathbb{R}^N$//Известия РАН. Серия Матем., т. 57, N 5, 1993, с. 149–167.
23. *Куфнер А., Фучик С.* Нелинейные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1988. — 304 с.
24. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика. М.: Наука, 1992, т. 8., 664 с.
25. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 588 с.
26. *Лионс Ж.-Л., Madженес Э.* Неоднородные граничные задачи. — М.: Мир, 1971. — 372 с.
27. *Люстерник Л. А., Шнирельман Л. Г.* Топологические методы в вариационных задачах. М.: Гос. издат., 1930. — 68 с.
28. *Митидиери Э.*, *Похожаев С. И.* Априорные оценки и отсутствие решений дифференциальных неравенств в частных производных. Труды МИАН, т. 234, 2001.
29. *Морен К.* Методы Гильбертова пространства. — М.: Мир, 1965. — 572 с.
30. *Осмоловский В. Г.* Нелинейная задача Штурма-Лиувилля. — С.-П.: 2003. — 260 с.
31. *Похожаев С. И.* О методе расслоения решения нелинейных краевых задач//Труды МИАН СССР.1990. Т. 192. С. 146–163.
32. *Хатсон В., Пим Дж.*. Приложения функционального анализа и теории операторов. — М.: Мир, 1983. — 432 с.
33. *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.
34. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
35. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О.* Нелинейный функциональный анализ и его приложения к уравнениям в частных производных. — М.: Научный Мир, 2008. — 400 с.
36. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980. — 496 с.
37. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 832 с.
38. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. — М.: Мир, 1969. —1072 с.
39. *Эванс Л. К.* Уравнения с частными производными. — Новосибирск.: Тамара Рожковская, 2003. — 563 с.
40. *Adams R,* Sobolev spaces. Academic press, 1975.
41. *Ambrosetti A.* Critical points and nonlinear variational problems//Memoires de la S.M.F., V. 49, 1992, pp. 1–139.
42. *Berger M. S.* On von Karman's equation and the buckling of a thin elastic plate. I. the clamped plate// Comm. Pure Appl. Math. 20 (1967), pp. 687–719.

43. *Berger M. S.* A Sturm–Liouville theorem for nonlinear elliptic partial differential equations//Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, V. 20, N 3, 1966, pp. 543–582.
44. *Clark C. D.* A variant of the Lusternik–Schnirelman theory//Indiana University Mathematics Jornal, V. 22, N 1, 1972, pp. 65–74.
45. *Crandall M. G., Liggett T. M.* Generation of semigroups of nonlinear transformations on general Banach spaces//Amer. J. Math. V. 93, 1971, pp. 265–298.
46. *Dinca G., Jebelean P., Mawhin J.* Variational and topological methods for Dirichlet problems with p-Laplacian//Portugaliae Mathematica, V. 58, N. 3, 2001, pp. 339–378.
47. *Pavel Drabek, Yaroslav Milota* Methods of nonlinear analisys. Applications to differential equations. Birkhaser. 2007. pp. 575.
48. *Fujita H.* On the blowing up solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$//J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.— 1966.— Sect. IA, V. 13.—pp. 109–124.
49. *Leszek Gasinski, Nikolaos S. Papageorgiou* Nonlinear analisys. Volume 9. Chapman and Hall. Series in Mathematical Analysis and Applications. Edited by Ravi P. Agarwal and Donal O Regan. 2005. pp. 960.
50. *Leszek Gasinski, Nikolaos S. Papageorgiou* Nonsmooth critical point theory and nonlinear boundary value problems. Volume 8. Chapman and Hall. Series in Mathematical Analysis and Applications. Edited by Ravi P. Agarwal and Donal O Regan. 2005. pp. 768.
51. *Komura Y.* Nonlinear semi-groups in Hilbert space// J. Math. Soc. Japan, V. 19, N 4, 1967, pp. 493–507.
52. *Jeanjean L.* Variational methods and applications to some nonlinear problems// Memoir for Habilitation of Louis Jeanjean, 1999.
53. *Huang Y. X.* Eigenvalues of the p–Laplacian in $\mathbb{R}^N$ with indefinite weight// Comment. Math. Univ. Carolinae V. 36, N 3, 1995, pp. 519–527.
54. *Kato T.* Nonlinear semigroups and evolution equations//J. Math. Soc. Japan V. 19, N 4, 1967, pp. 509–520.
55. *Kuzin I., Pohozaev S.* Entire solutions of semilinear elliptic equations. — Nonlinear Differential Equations and their Applications, 33. Birkhauser Verlag, Basel, 1997. vi+250 pp.
56. *Lindqvist P.* On the equation $\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda|u|^{p-2}u = 0$ // Proc. Amer. Math. Soc., 1990. — V. 109. — P. 157–164.
57. *Lindqvist P.* Notes on the p-Laplace equation. http://www.math.ntnu.no/ lqvist/p-laplace.pdf
58. *Miyadera I.* Nonlinear semigroups. Translations of mathematical monographs. 109. (Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1991).
59. *Nirenberg L.* Variational and topological methods in nonlinear problems//Bulletine of the AMS, V. 4, N. 3, 1981, pp. 267–302.
60. *Rabinowitz P. H.* Variational methods for nonlinear elliptic eigenvalue problems// Indiana Univ. Math. J. V. 23, N 8, 1974 pp. 729–754.
61. *Michael Struwe* Variational methods. Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems. Fourth Edition. 2008 Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 320 pp.
62. *Schwartz, J.* Nonlinear Functional Analysis. Gordon and Breach Sciences Publishers, New York. 1969.

КОРПУСОВ Максим Олегович
ПАНИН Александр Анатольевич

Учебное издание

Лекции по линейному и нелинейному
функциональному анализу
Том III. Нелинейный анализ

Подписано к печати 30.12.2016 г.
Формат А5. Объем 16,25 п. л. Тираж 50 экз.
Заказ №

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

Отпечатано в типографии МГУ им. М.В. Ломоносова