Лекция 11

ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

§ 1. Определение гильбертова пространства и его свойства

Определение 1. *Предгильбертовым* (*или комплексным евклидовым*) *пространством называется линейное пространство* $\mathcal{H}$ (*над полем комплексных чисел*), *в котором введено скалярное произведение, т. е. числовая функция* (x, y), *удовлетворяющая следующим условиям*:

1) $(x, \alpha y) = \alpha\,(x, y)$;
2) $(z, x + y) = (z, x) + (z, y)$;
3) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
4) $(x, x) > 0$ *при* $x \neq 0$; $(x, x) = 0$ *при* $x = \vartheta$.

Справедливо неравенство Коши–Буняковского

$$|(x, y)|^2 \leqslant (x, x)\,(y, y)\,. \tag{1.1}$$

□ Для доказательства этого утверждения рассмотрим выражение

$$(x + \alpha y, x + \alpha y) = (x, x) + \overline{\alpha}\,(x, y) + \alpha\,(y, x) + |\alpha|^2\,(y, y)\,.$$

По условию 4) это выражение неотрицательно, каково бы ни было число α. Предполагая, что $(y, y) > 0$, положим

$$\alpha = -\frac{(x, y)}{(y, y)}.$$

На основе сказанного

$$(x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} + \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} \geqslant 0,$$

т. е.

$$(x, x)\,(y, y) - |(x, y)|^2 \geqslant 0. \quad \boxtimes$$

Проверим, что выражение

$$\|a\| \stackrel{\mathrm{def}}{=} (a, a)^{1/2}$$

— действительно норма в предгильбертовом пространстве.

□ Действительно, осталось проверить лишь то, что имеет место неравенство
$$\|a+b\| \leqslant \|a\| + \|b\|.$$

Имеет место следующая цепочка выражений:

$$\|a+b\|^2 = (a+b, a+b) = \|a\|^2 + \|b\|^2 + (a,b) + (b,a) \leqslant \\ \leqslant \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2|(a,b)| \leqslant \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\|a\|\|b\| = \\ = (\|a\| + \|b\|)^2. \quad \boxtimes$$

Это позволяет рассматривать предгильбертово пространство как метрическое. Естественно возникает вопрос о его полноте, и мы приходим к важнейшему понятию гильбертова пространства.

Определение 2. *Гильбертовым пространством* $\mathbb{H}$ *называется всякое полное по введённой выше норме предгильбертово пространство* $\mathcal{H}$.

Замечание 1. Из лекции 4 вам известно, что метрические пространства можно пополнить. Как можно показать, при пополнении предгильбертова пространства линейные операции и скалярное произведение распространяются на пополненное пространство, и мы получаем гильбертово пространство.

При изучении гильбертовых пространств важным оказывается понятие ортогональности элементов. Дадим серию определений.

Определение 3. *Элементы* x *и* y *гильбертова пространства* $\mathbb{H}$ *называются ортогональными, если* $(x, y) = 0$. *При этом пишут* $x \perp y$.

Определение 4. *Если* x *ортогонален каждому элементу множества* $\mathcal{A} \subset \mathbb{H}$, *то пишут, что* $x \perp \mathcal{A}$.

Определение 5. *Если каждый элемент множества* $\mathcal{A}_1 \subset \mathbb{H}$ *ортогонален каждому элементу множества* $\mathcal{A}_2 \subset \mathbb{H}$, *то пишут, что* $\mathcal{A}_1 \perp \mathcal{A}_2$.

Определение 6. *Совокупность всех элементов, ортогональных данному множеству* $\mathcal{E} \subset \mathbb{H}$, *называется ортогональным дополнением множества* $\mathcal{E}$ *и обозначается* $\mathcal{E}^{\perp}$.

Легко проверить (сделайте это самостоятельно), что ортогональное дополнение любого множества $\mathcal{E}$ есть замкнутое линейное подпространство.

Докажем *равенство параллелограмма*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right]. \tag{1.2}$$

□ Имеет место цепочка равенств

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 + (x,y) + (y,x) - (x,y) - (y,x). \quad \boxtimes$$

Также важна теорема Пифагора.

Теорема Пифагора. Пусть $x \perp y$. Тогда $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Доказательство. Имеем

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Иногда рассматривают вещественные предгильбертово и гильбертово пространства. Они получаются, если исходное линейное пространство было над полем вещественных чисел и скалярное произведение принимает только вещественные значения. Основные результаты, полученные в данной лекции для комплексного гильбертова пространства, верны и для вещественного. Однако всюду далее, если не указано иное, под гильбертовым пространством понимается именно комплексное.

§ 2. Теорема Беппо Леви

Теорема Беппо Леви. *Пусть $\mathbb{H}_1$ — замкнутое подпространство гильбертова пространства $\mathbb{H}$ и $\mathbb{H}_2$ — его ортогональное дополнение. Каков бы ни был элемент $x \in \mathbb{H}$, его можно единственным образом представить в форме*

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in \mathbb{H}_1, \quad x_2 \in \mathbb{H}_2.$$

При этом элемент x_1 реализует расстояние от x до $\mathbb{H}_1$, т. е.

$$\|x - x_1\| = d(x, \mathbb{H}_1).$$

Доказательство.

Шаг 1. Обозначим

$$d = d(x, \mathbb{H}_1) := \inf_{y \in \mathbb{H}_1} \|x - y\|. \tag{2.1}$$

В силу определения infimum найдутся такие элементы $x_n \in \mathbb{H}_1$, что

$$\|x - x_n\|^2 < d^2 + \frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Из равенства параллелограмма

$$\|X+Y\|^2 + \|X-Y\|^2 = 2\left[\|X\|^2 + \|Y\|^2\right], \tag{2.3}$$

положив в нём

$$X = x - x_n, \quad Y = x - x_m,$$

получим

$$\|x_n - x_m\|^2 + \|(x-x_n) + (x-x_m)\|^2 = 2\left[\|x-x_n\|^2 + \|x-x_m\|^2\right]. \tag{2.4}$$

А так как
$$\frac{x_m + x_n}{2} \in \mathbb{H},$$
то в силу (2.1)
$$\|(x - x_n) + (x - x_m)\|^2 = 4\left\|x - \frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2 \geqslant 4d^2.$$
Следовательно, из (2.4) с помощью (2.2) и этой оценки получаем
$$\|x_n - x_m\|^2 \leqslant 2\left[d^2 + \frac{1}{n^2} + d^2 + \frac{1}{m^2}\right] - 4d^2 = \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2}.$$
Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна в $\mathbb{H}$ и, значит, сходится в $\mathbb{H}$:
$$x_n \to x^* \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{H}.$$
При этом $x^* \in \mathbb{H}_1$ в силу замкнутости этого подпространства в $\mathbb{H}$.

Шаг 2. Переходя с учётом непрерывности нормы к пределу в неравенстве (2.2), получим
$$\|x - x^*\| \leqslant d,$$
а так как для любого элемента из $\mathbb{H}_1$, в том числе и для x^*, должно быть $\|x - x^*\| \geqslant d$, то
$$\|x - x^*\| = d. \tag{2.5}$$

Шаг 3. Докажем теперь, что элемент $x^{**} = x - x^*$ ортогонален $\mathbb{H}_1$ и поэтому принадлежит $\mathbb{H}_2$.

Возьмем произвольный отличный от нулевого элемент $y \in \mathbb{H}_1$. При любом $\lambda \in \mathbb{C}^1$ имеем
$$x^* + \lambda y \in \mathbb{H}_1,$$
так что
$$\|x^{**} - \lambda y\|^2 = \|x - (x^* + \lambda y)\|^2 \geqslant d^2,$$
что можно переписать в форме
$$-\lambda(x^{**}, y) - \overline{\lambda}(y, x^{**}) + |\lambda|^2 (y, y)^2 + (x^{**}, x^{**}) \geqslant d^2.$$
Поскольку $\|x^{**}\| = \|x - x^*\| = d$, то приходим к неравенству
$$-\lambda(x^{**}, y) - \overline{\lambda}(y, x^{**}) + |\lambda|^2 (y, y)^2 \geqslant 0,$$
где положим
$$\lambda = \frac{\overline{(x^{**}, y)}}{(y, y)}$$
и получим неравенство
$$-\frac{|(x^{**}, y)|^2}{(y, y)} - \frac{|(x^{**}, y)|^2}{(y, y)} + \frac{|(x^{**}, y)|^2}{(y, y)} \geqslant 0,$$
т. е.
$$|(x^{**}, y)|^2 \leqslant 0,$$

что может быть лишь в случае

$$(x^{**}, y) = 0 \Rightarrow x^{**} \perp y.$$

Итак, возможность представления x в форме $x = x_1 + x_2$ и соотношение $\|x - x_1\| = d(x, \mathbb{H}_1)$ установлены.

Шаг 4. Докажем теперь единственность этого представления. В самом деле, если

$$x = x_1^* + x_2^*, \quad x_1^* \in \mathbb{H}_1, \quad x_2^* \in \mathbb{H}_2,$$

то, сопоставляя это с представлением $x = x_1 + x_2$, получим

$$x_1 - x_1^* = x_2^* - x_2. \tag{2.6}$$

Элемент, стоящий в левой части равенства (2.6), принадлежит $\mathbb{H}_1$, а стоящий в правой части — $\mathbb{H}_2$, поэтому

$$x_1 - x_1^* \perp x_2^* - x_2 = x_1 - x_1^* \Rightarrow x_1 - x_1^* = \vartheta.$$

Теорема доказана.

Следствие. Если $\overline{\mathbb{H}}_1 = \mathbb{H}_1 \neq \mathbb{H}$, то найдется элемент $y \in \mathbb{H}_1^{\perp}$, $\|y\| = 1$.

□ Поскольку $\mathbb{H}_1 \neq \mathbb{H}$, существует $x \notin \mathbb{H}_1$. Построим для него разложение, о котором говорится в теореме. Имеем $x = x_1 + x_2$, $x_2 \neq \vartheta$ (иначе $x = x_1 \in \mathbb{H}_1$). Тогда $y = x_2/\|x_2\|$ — требуемый элемент. ⊠

§ 3. Разложение по базису

Рассмотрим вопрос о разложении элемента произвольного гильбертова пространства по его ортонормированному базису и о свойствах коэффициентов этого разложения.

Определение 7. *Система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов гильбертова пространства $\mathbb{H}$ называется полной в $\mathbb{H}$, если произвольный элемент $\mathbb{H}$ может быть сколь угодно точно (по норме) приближен линейными комбинациями элементов данной системы.*

Замечание 3. Особо отметим, что в данном определении, как и всюду, под линейными комбинациями понимаются конечные линейные комбинации, а не ряды.

Справедлива следующая важная теорема:

Теорема 1. *В гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ всякая полная ортонормированная система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом, т. е. для любого $f \in \mathbb{H}$ имеет место разложение*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n, f)\, \varphi_n, \tag{3.1}$$

причём

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(\varphi_n, f)|^2 .$$

Доказательство.
Шаг 1. Обозначим: $\xi_n = (\varphi_n, f)$, $n \in \mathbb{N}$,

$$s_p = \sum_{n=1}^{p} (\varphi_n, f)\varphi_n \equiv \sum_{n=1}^{p} \xi_n \varphi_n.$$

Докажем, что при каждом фиксированном $p \in \mathbb{N}$

$$\|f - s_p\| = \min_{\alpha_1,\dots,\alpha_p \in \mathbb{C}} \left\| f - \sum_{n=1}^{p} \alpha_n \varphi_n \right\|.$$

□ Имеем

$$\left(f - \sum_{n=1}^{p} \alpha_n \varphi_n, f - \sum_{n=1}^{p} \alpha_n \varphi_n\right) =$$
$$= \|f\|^2 + \sum_{n=1}^{p} |\alpha_n|^2 \|\varphi_n\|^2 - \sum_{n=1}^{p} \overline{\alpha}_n (\varphi_n, f) - \sum_{n=1}^{p} \alpha_n (f, \varphi_n) =$$
$$= \|f\|^2 + \sum_{n=1}^{p} |\alpha_n|^2 - \sum_{n=1}^{p} \overline{\alpha}_n \xi_n - \sum_{n=1}^{p} \alpha_n \overline{\xi}_n =$$
$$= \|f\|^2 + \sum_{n=1}^{p} |\alpha_n|^2 - \sum_{n=1}^{p} \overline{\alpha}_n \xi_n - \sum_{n=1}^{p} \alpha_n \overline{\xi}_n + \sum_{n=1}^{p} |\xi_n|^2 - \sum_{n=1}^{p} |\xi_n|^2 =$$
$$= \{(\alpha_n - \xi_n)\overline{(\alpha_n - \xi_n)} = |\alpha_n|^2 + |\xi_n|^2 - \alpha_n \overline{\xi}_n - \overline{\alpha}_n \xi_n\} =$$
$$= \|f\|^2 + \sum_{n=1}^{p} |\alpha_n - \xi_n|^2 - \sum_{n=1}^{p} |\xi_n|^2. \quad (3.2)$$

Очевидно, что выражение в правой части минимально при

$$\alpha_n = \xi_n, \quad n = 1, \dots, p. \quad \boxtimes$$

Шаг 2. Поскольку ортонормированная система $\{\varphi_n\}$ полна, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists p_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \ \exists \widetilde{\alpha}_1, \dots, \widetilde{\alpha}_{p_0} : \quad \left\| f - \sum_{n=1}^{p_0(\varepsilon)} \widetilde{\alpha}_n \varphi_n \right\| < \varepsilon.$$

По доказанному выше имеем в этом случае

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{p_0(\varepsilon)} \xi_n \varphi_n \right\| \leqslant \left\| f - \sum_{n=1}^{p_0(\varepsilon)} \widetilde{\alpha}_n \varphi_n \right\| < \varepsilon. \quad (3.3)$$

Более того, из (3.2) имеем

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{p} \xi_n \varphi_n \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{p} |\xi_n|^2, \tag{3.4}$$

откуда мы получаем два важных следствия:
1) величина $\|f - \sum_{n=1}^{p} \xi_n \varphi_n\|$ не возрастает при увеличении p;
2) верно неравенство $\sum_{n=1}^{p} |\xi_n|^2 \leqslant \|f\|^2$, а значит, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2$$

сходится.

В силу п. 1) и неравенств (3.3) при произвольно выбранном $\varepsilon > 0$ имеем

$$\forall p \geqslant p_0(\varepsilon) \quad \|f - s_p\| < \varepsilon,$$

что и означает: $s_p \to f$ в $\mathbb{H}$ при $p \to +\infty$. Но тогда из (3.4) имеем

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{p} \xi_n \varphi_n \right\| \to 0 \Longrightarrow \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{p} |\xi_n|^2 \to 0,$$

то есть (равенство Парсеваля)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 = \|f\|^2. \tag{3.5}$$

Теорема доказана.

Замечание 4. В доказательстве теоремы мы не пользовались полнотой пространства $\mathbb{H}$, однако предполагали полноту системы $\{\varphi_n\}$. Следовательно, данная теорема применима и к предгильбертову пространству. Примером предгильбертова пространства с полной ортонормированной системой является пространство $h[0, 2\pi]$ непрерывных на отрезке $[0, 2\pi]$ функций, скалярное произведение в котором задано формулой

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(t) g(t) \, dt, \tag{3.6}$$

причём полная ортонормированная система образована функциями

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos t, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin t, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2t, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2t, \ldots \tag{3.7}$$

Замечание 5. Если система $\{\varphi_n\}$ не является полной, то тождество (3.2) выполняется, однако нельзя гарантировать, что $\|f - s_p\| \to$

$\to 0$ при $p \to +\infty$, и вместо равенства Парсеваля (3.5) мы получаем неравенство Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 \leqslant \|f\|^2.$$

Иногда вместо понятия полноты ортонормированной системы удобно пользоваться понятием её замкнутости. Дадим соответствующее определение.

О п р е д е л е н и е 8. *Ортонормированная система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов гильбертова пространства $\mathbb{H}$ называется замкнутой, если единственным элементом пространства $\mathbb{H}$, ортогональным всем элементам системы $\{\varphi_n\}$, является нулевой, т. е.*

$$\forall f \in \mathbb{H} \ \ (\forall n \in \mathbb{N}\, (f, \varphi_n) = 0 \ \ \Rightarrow \ \ f = \vartheta)\,.$$

Нетрудно показать, что в гильбертовом пространстве всякая полная ортонормированная система является замкнутой. В самом деле, если элемент f ортогонален всем элементам φ_n, $n \in \mathbb{N}$, то из (3.1) сразу получаем: $f = \vartheta$. В силу замечания 3 аналогичный факт верен и для предгильбертова пространства. В частности, единственной непрерывной функцией на отрезке $[0, 2\pi]$, ортогональной (в смысле скалярного произведения (3.6)) всем функциям тригонометрической системы (3.7), является функция, тождественно равная нулю.

Докажем, что в гильбертовом пространстве всякая замкнутая ортонормированная система является полной. Для этого нам потребуется лемма о замыкании подпространства.

Л е м м а о з а м ы к а н и и п о д п р о с т р а н с т в а. Пусть L — линейное подпространство банахова пространства $\mathbb{B}$ (не обязательно замкнутое). Тогда его замыкание $\overline{L}$ есть замкнутое линейное подпространство в $\mathbb{B}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что $\overline{L}$ замкнуто. Остаётся доказать, что

1) для любого $x \in \overline{L}$ и для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ верно $\lambda x \in \overline{L}$,
2) для любых $x, y \in \overline{L}$ верно $x + y \in \overline{L}$.

В самом деле, если $x \in \overline{L}$, то существует последовательность $\{x_n\} \subset L$, $x_n \to x$. Но тогда и

$$\lambda x_n \to \lambda x, \ \ \lambda x_n \in L \ \ \Rightarrow \ \ \lambda x \in \overline{L}.$$

Аналогично имеем последовательность $\{y_n\} \subset L$, $y_n \to y$, и тогда

$$x_n + y_n \to x + y, \ x_n + y_n \in L \ \ \Rightarrow \ \ x + y \in \overline{L}.$$

Л е м м а д о к а з а н а.

У т в е р ж д е н и е. В гильбертовом пространстве всякая замкнутая ортонормированная система является полной.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — замкнутая ортонормированная система в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$. Очевидно, что множество L всевозможных (конечных) линейных комбинаций элементов этой системы образует в $\mathbb{H}$ линейное подпространство. В силу леммы о замыкании подпространства $\mathbb{H}_1 \equiv \overline{L}$ есть замкнутое подпространство в $\mathbb{H}$.

Пусть $f \in \mathbb{H}$ — произвольный элемент. Применим к нему и замкнутому подпространству $\mathbb{H}_1$ теорему Беппо Леви. Получим:

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1 \in \mathbb{H}_1, \quad f_2 \in \mathbb{H}^{\perp}.$$

Поскольку $f_2 \in \mathbb{H}^{\perp}$, то, в частности,

$$f_2 \perp \varphi_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.8}$$

Поскольку система $\{\varphi_n\}$ замкнутая, то из (3.8) следует, что $f_2 = \vartheta$, т. е. $f = f_1 \in \mathbb{H}_1 = \overline{L}$, что и означает, что элемент f может быть с любой наперёд заданной точностью приближен конечными линейными комбинациями элементов системы $\{\varphi_n\}$. В силу произвольности элемента f можно утверждать, что $\{\varphi_n\}$ — полная ортонормированная система.

Утверждение доказано.

Замечание 6. Можно показать, что в предгильбертовом пространстве из замкнутости ортонормированной системы уже не следует её полнота и, таким образом, в отличие от случая гильбертова пространства, понятия полноты и замкнутости ортономированной системы не эквивалентны. (См., например, замечание в конце § 3 гл. 11 книги [**?**].)

Вернёмся к понятию сепарабельного метрического пространства. Дадим определение.

Определение 9. *Гильбертово пространство $\mathbb{H}$ называется сепарабельным, если в нём существует счётное всюду плотное множество, т. е. такое множество, замыкание которого по метрике $\mathbb{H}$ совпадает со всем пространством $\mathbb{H}$.*

Нетрудно заметить, что если в гильбертовом пространстве имеется счётная полная (или замкнутая) ортонормированная система, то такое пространство сепарабельно. В самом деле, счётной всюду плотной системой в сепарабельном гильбертовом пространстве является множество всех конечных линейных комбинаций этой системы с рациональными коэффициентами. (Доказать самостоятельно.)

Можно доказать ещё более сильное утверждение: всякое бесконечномерно сепарабельное гильбертово пространство изоморфно пространству l^2.

§ 4. Теорема Рисса–Фреше

Пусть $\mathbb{H}$ — гильбертово пространство с сопряжённым $\mathbb{H}^*$. Справедлива следующая важная теорема.

Теорема Рисса–Фреше. *Для всякого $t \in \mathbb{H}^*$ существует единственный элемент $y_t \in \mathbb{H}$ такой, что*

$$\langle t, x\rangle = (y_t, x)$$

для всех $x \in \mathbb{H}$, где символом $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначены скобки двойственности между $\mathbb{H}$ и $\mathbb{H}^*$. Кроме того, $\|y_t\|_{\mathbb{H}} = \|t\|_{\mathbb{H}^*}$.

Доказательство.

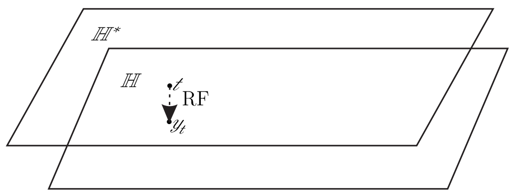

Рис. 1. Оператор Рисса–Фреше.

Шаг 0. Прежде всего докажем единственность. Действительно, пусть существуют два таких элемента $y_{1t}, y_{2t} \in \mathbb{H}$, что имеет место равенства

$$\langle t, x\rangle = (y_{1t}, x) = (y_{2t}, x) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{H} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (y_{1t} - y_{2t}, x) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{H} \Rightarrow y_{1t} = y_{2t}.$$

Шаг 1. Пусть

$$\mathcal{N} = \{x \in \mathbb{H} : \ \langle t, x\rangle = 0\}.$$

В силу непрерывности t множество $\mathcal{N}$ есть замкнутое подпространство. Если $\mathcal{N} = \mathcal{H}$, то

$$\langle t, x\rangle = 0 = (\vartheta, x)$$

для всех x и доказательство закончено.

Поэтому допустим, что

$$\mathcal{N} \neq \mathbb{H}.$$

Тогда в силу теоремы Беппо Леви существует $x_0 \neq \vartheta$:

$$x_0 \in \mathcal{N}^\perp.$$

Шаг 2. Положим

$$y_t = \overline{\langle t, x_0\rangle}\frac{x_0}{\|x_0\|^2}.$$

Покажем, что y_t обладает нужными свойствами. Заметим, что

$$(y_t, x) = \langle t, x_0\rangle\frac{(x_0, x)}{\|x_0\|^2}. \tag{4.1}$$

Пусть $x \in \mathbb{H}$ произвольно. Введём вектор

$$z = \langle t, x\rangle x_0 - \langle t, x_0\rangle x.$$

Докажем, что $z \in \mathcal{N}$. Имеем

$$\langle t, z\rangle = \langle t, x\rangle\langle t, x_0\rangle - \langle t, x_0\rangle\langle t, x\rangle = 0.$$

Поэтому

$$0 = (x_0, z) = \langle t, x\rangle(x_0, x_0) - \langle t, x_0\rangle(x_0, x),$$

или

$$\langle t, x\rangle = \frac{\langle t, x_0\rangle(x_0, x)}{\|x_0\|^2} = (y_t, x),$$

где в последнем равенстве мы использовали (4.1).

Шаг 3. Для доказательства равенства $\|y_t\|_{\mathbb{H}} = \|t\|_{\mathbb{H}^*}$ заметим, что

$$\|t\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\langle t, x\rangle| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |(y_t, x)| \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|y_t\|\|x\| = \|y_t\|$$

и

$$\|t\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\langle t, x\rangle| \geqslant \left|\left\langle t, \frac{y_t}{\|y_t\|}\right\rangle\right| = \left(y_t, \frac{y_t}{\|y_t\|}\right) = \|y_t\|.$$

Теорема доказана.

Замечание 7. Рассмотрим отображение Рисса–Фреше

$$RF : t \in \mathbb{H}^* \mapsto y_t \in \mathbb{H},$$

определенное явной формулой

$$y_t = \overline{\langle t, x_0\rangle}\frac{x_0}{\|x_0\|^2}.$$

Из его вида ясно, что оно обладает свойством полулинейности

$$\begin{aligned} y_{\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2} &= \overline{\langle \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2, x_0\rangle}\frac{x_0}{\|x_0\|^2} = \\ &= \overline{\lambda_1}\overline{\langle t_1, x_0\rangle}\frac{x_0}{\|x_0\|^2} + \overline{\lambda_2}\overline{\langle t_2, x_0\rangle}\frac{x_0}{\|x_0\|^2} = \overline{\lambda_1} y_{t_1} + \overline{\lambda_2} y_{t_2}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Внимание! Оператор RF является не линейным, а полулинейным (сопряжённо-линейным) оператором.

Замечание 8. Оператор Рисса–Фреше обратим. В самом деле, $\operatorname{Im} RF = \mathbb{H}$, поскольку любой элемент $y \in \mathbb{H}$ определяет по формуле

$$\langle t_y, x\rangle = (y, x)$$

непрерывный линейный функционал на $\mathbb{H}$ и отображение RF взаимно однозначно в силу оценки

$$\|y_t - y_s\|_{\mathbb{H}} = \{(4.2)\} = \|y_{t-s}\|_{\mathbb{H}} = \|t - s\|_{\mathbb{H}^*}.$$

Значит, существует обратный оператор $RF^{-1} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}^*$ и он также является изометричным.

§ 5. Полуторалинейные формы

Определение 10. *Полуторалинейной формой* $B(x,y)$ *называется функция двух переменных*

$$B(x,y) : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{C}^1,$$

линейная по второму аргументу и полулинейная по первому аргументу:

$$B(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 B(x, y_1) + \lambda_2 B(x, y_2),$$
$$B(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \overline{\lambda_1} B(x_1, y) + \overline{\lambda_2} B(x_2, y).$$

Справедлива следующая лемма о представлении полуторалинейной формы.

Лемма 1. *Пусть полуторалинейная форма* $B(x,y)$ *является ограниченной, т. е. удовлетворяет неравенству*

$$|B(x,y)| \leqslant c\|x\|\|y\| \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathbb{H}.$$

Тогда существует такой оператор $A \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$, *что имеет место представление*

$$B(x,y) = (Ax, y).$$

Доказательство.

Шаг 1. В силу условия в лемме для всякого фиксированного $x \in \mathbb{H}$ отображение

$$y \to B(x,y)$$

является линейным и непрерывным функционалом. Значит, в силу леммы Рисса–Фреше найдется такой вектор $A(x)$, что

$$(A(x), y) = B(x,y),$$

причём отображение

$$A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$

является линейным в силу полулинейности формы $B(x,y)$ по x и полулинейности скалярного произведения (x,y) по x.

Шаг 2. Теперь имеет место следующая цепочка выражений:

$$\|A(x)\| = \sup_{\|y\|=1} |(A(x), y)| = \sup_{\|y\|=1} |B(x,y)| \leqslant c \sup_{\|y\|=1} \|x\|\|y\| \leqslant c\|x\|,$$

из которой вытекает ограниченность оператора A. Следовательно, в силу его линейности вытекает его непрерывность.

Значит, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{B}, \mathbb{B})$.

Лемма доказана.

Справедлива следующая лемма Лакса–Мильграма об обратимости оператора в представлении формы.

Лемма Лакса–Мильграма. *Пусть полуторалинейная форма $B(x, y)$ удовлетворяет неравенству*

$$|B(x, y)| \leqslant c\|x\|\|y\| \quad \textit{для всех} \quad x, y \in \mathbb{H}.$$

Пусть, кроме того, она коэрцитивна, т. е.

$$B(x, x) \geqslant m\|x\|^2 \quad \textit{для всех} \quad x \in \mathbb{H}. \tag{5.1}$$

Тогда оператор $A \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ из предыдущей леммы обладает обратным A^{-1}, причём

$$\|A^{-1}\| \leqslant \frac{1}{m}. \tag{5.2}$$

Доказательство.

Шаг 1. Воспользуемся теоремой Банаха об обратном отображении. Для этого требуется доказать, что $A \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ (уже доказано в предыдущей лемме), что $\ker A = \{\vartheta\}$ и что $\operatorname{Im} A = \mathbb{H}$.

Шаг 2. Равенство $\ker A = \{\vartheta\}$ вытекает из оценки снизу (5.1).

Шаг 3. Перейдём к доказательству того факта, что $\operatorname{Im} A = \mathbb{H}$. Заметим, что в силу свойств полуторалинейных форм и оценки снизу (5.1) полуторалинейная форма $B(x, y)$ удовлетворяет всем условиям 1)–4) из определения предгильбертова пространства. Следовательно, она определяет новое скалярное произведение на гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$

$$(x, y)_1 \stackrel{\text{def}}{=} B(x, y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathbb{H}.$$

Множество всех элементов пространства $\mathbb{H}$, на котором введено скалярное произведение $(x, y)_1$, образует новое предгильбертово пространство, которое мы обозначим $\mathcal{H}_1$. При этом из неравенств

$$m\|x\|^2 \leqslant B(x, x) \leqslant c\|x\|^2 \tag{5.3}$$

следует, что классы фундаментальных и сходящихся последовательностей и их пределы не меняются при переходе из $\mathbb{H}$ в $\mathcal{H}_1$, т. е.

$$\{x_n\} \text{ фундаментальна в } \mathbb{H} \iff \{x_n\} \text{ фундаментальна в } \mathcal{H}_1,$$
$$x_n \to x \text{ в } \mathbb{H} \iff x_n \to x \text{ в } \mathcal{H}_1.$$

Это позволяет сделать вывод о том, что пространство $\mathcal{H}_1$ также гильбертово, и обозначить его $\mathbb{H}_1$.

Шаг 4. Старое скалярное произведение (x, y) можно рассматривать как полуторалинейную форму $B_1(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} (x, y)$ в $\mathbb{H}_1$, причём в силу неравенств (5.3) она является ограниченной:

$$|B_1(x, y)| = |(x, y)| \leqslant \|x\|\|y\| \leqslant \frac{1}{m}\|x\|_1\|y\|_1,$$

где мы обозначили $\|x\|_1 = \sqrt{B(x, x)}$ — норма на $\mathbb{H}_1$.

В силу предыдущей леммы существует линейный оператор $\widehat{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_1)$ такой, что

$$B_1(x,y) = (\widehat{A}x, y)_1 \quad \text{для всех } x, y \in \mathbb{H}_1.$$

Следовательно, для любого $x \in \mathbb{H}$ с учётом того факта, что $\mathbb{H}$ и $\mathbb{H}_1$ совпадают как множества, имеем

$$(x,y) = B_1(x,y) = (\widehat{A}x, y)_1 = B(\widehat{A}x, y) = (A(\widehat{A}x), y) \quad \text{при всех } y \in \mathbb{H}, \tag{5.4}$$

т. е. для любого элемента $x \in \mathbb{H}$ найдётся такой элемент $z = \widehat{A}x \in \mathbb{H}$, что $x = Az$.

Итак, мы показали, что $\operatorname{Im} A = \mathbb{H}$, и можем применить теорему Банаха.

Шаг 5. Осталось лишь доказать неравенство (5.2). Пусть $x = A^{-1}y$. Тогда справедлива следующая цепочка:

$$m\|A^{-1}y\|^2 \leqslant B(A^{-1}y, A^{-1}y) = (AA^{-1}y, A^{-1}y) = (y, A^{-1}y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m\|A^{-1}y\|^2 \leqslant \|y\|\|A^{-1}y\| \Rightarrow \|A^{-1}\| = \sup_{\|y\|=1} \|A^{-1}y\| \leqslant \frac{1}{m}.$$

Лемма доказана.

§ 6. Транспонированный и сопряжённый операторы

Пусть $\mathbb{H}_1$ и $\mathbb{H}_2$ — два гильбертовых пространства с сопряжёнными $\mathbb{H}_1^*$ и $\mathbb{H}_2^*$, со скобками двойственности и со скалярными произведениями

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_1, \quad \langle\cdot,\cdot\rangle_2 \quad \text{и} \quad (\cdot,\cdot)_1, \quad (\cdot,\cdot)_2.$$

Пусть задан оператор $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$. Напомним определение транспонированного оператора $T^t \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_2^*, \mathbb{H}_1^*)$:

$$\langle T^t f, u\rangle_1 \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, Tu\rangle_2 \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{H}_1, \quad f \in \mathbb{H}_2^*.$$

Теперь введём сопряжённый оператор $T^* \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_2, \mathbb{H}_1)$:

$$(T^* f, u)_1 \stackrel{\text{def}}{=} (f, Tu)_2 \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{H}_1, \quad f \in \mathbb{H}_2.$$

Докажите самостоятельно существование такого оператора T^* и его линейность, а также соотношение $(T_1T_2)^* = T_2^*T_1^*$, указав, в каких пространствах действуют операторы T_1^* и T_2^*.

ПРИМЕР 1. Пространство $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Скалярное произведение в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}^2(\Omega)$ имеет вид

$$(f,g) = \int_\Omega \overline{f(x)} g(x)\, dx,$$

а скобки двойственности имеют вид

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x) g(x)\, dx.$$

Поэтому оператор Рисса–Фреше имеет вид

$$RF(f) = \overline{f}.$$

Ясно, что это полулинейное отображение.

Если ввести в соответствии с леммой Рисса–Фреше соответствующие операторы Рисса–Фреше:

$$RF_1 : \mathbb{H}_1^* \to \mathbb{H}_1, \quad RF_2 : \mathbb{H}_2^* \to \mathbb{H}_2,$$

то связь между транспонированным оператором T^t и сопряжённым оператором T^* будет следующая:

$$T^* = RF_1 T^t RF_2^{-1}.$$

Поскольку по доказанному в § 4 операторы Рисса–Фреше являются изометрическими, то согласно доказанному в § 2 лекции 9 равенству норм

$$\|T^t\| = \|T\|$$

получим, что

$$\|T^*\| = \|T\|,$$

где символом $\|\cdot\|$ мы обозначаем <u>различные</u> операторные нормы!!!

□ Итак, имеют место два равенства

$$T^* = RF_1 T^t RF_2^{-1}, \quad RF_1^{-1} T^* RF_2 = T^t.$$

Из первого равенства получим, что

$$\|T^*\| \leqslant \|T^t\| = \|T\|.$$

Из второго получим следующее неравенство:

$$\|T\| = \|T^t\| \leqslant \|T^*\|. \quad \boxtimes$$

Равенство нормы исходного оператора и сопряжённого оператора нами уже доказано. Кроме того, имеет место свойства полулинейности операции сопряжения

$$(\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2)^* = \overline{\alpha_1} T_1^* + \overline{\alpha_2} T_2^*.$$

Наконец, докажем, что $T^{**} = T$. Действительно,

$$(f, Tu)_2 = (T^* f, u)_1 = \overline{(u, T^* f)_1} = \overline{(T^{**} u, f)_2} = (f, T^{**} u)_2$$

при всех $u \in \mathbb{H}_1$, $f \in \mathbb{H}_2$.

§ 7. Самосопряжённый оператор

Определение 11. *Оператор $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ называется самосопряжённым, если имеет место равенство*

$$T^* = T.$$

Справедлива следующая лемма:

Лемма 2. *Пусть $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ — это самосопряжённый и неотрицательный оператор, т. е. обладающий следующим свойством:*

$$(x, Tx) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{H}.$$

Тогда имеет место неравенство типа Коши–Буняковского

$$|(x, Ty)| \leqslant (x, Tx)^{1/2} (y, Ty)^{1/2}. \tag{7.1}$$

Доказательство.

Имеет место следующая цепочка выражений:

$$(x - \lambda y, T(x - \lambda y)) = (x, Tx) + |\lambda|^2 (y, Ty) - \lambda (x, Ty) - \overline{\lambda} (y, Tx).$$

Пусть

$$\lambda = \frac{\overline{(x, Ty)}}{(y, Ty)}.$$

После подстановки получим неравенство

$$(x, Tx) + \frac{|(x, Ty)|^2}{(y, Ty)} - \frac{|(x, Ty)|^2}{(y, Ty)} - \frac{(x, Ty)(y, Tx)}{(y, Ty)} \geqslant 0,$$

из которого с учётом самосопряжённости оператора T получим

$$(x, Tx) - \frac{|(x, Ty)|^2}{(y, Ty)} \geqslant 0.$$

Отсюда и вытекает неравенство.

Лемма доказана.

§ 8. Спектр самосопряжённого оператора

Справедлива следующая теорема о спектре самосопряжённого ограниченного оператора (на протяжении всей лекции мы рассматриваем только ограниченные операторы и иногда опускаем упоминание условия ограниченности).

Теорема 2. *Спектр самосопряжённого ограниченного оператора лежит на действительной оси.*

Доказательство.

Шаг 1. Для всех $x \in \mathbb{H}$ и $\beta \in \mathbb{R}^1$ имеет место цепочка выражений

$$\|(A+i\beta\cdot\mathrm{id})x\|^2 = \|Ax\|^2+\beta^2\|x\|^2+ \\ + i\beta(Ax,x)-i\beta(x,Ax) = \|Ax\|^2+\beta^2\|x\|^2 \geqslant \beta^2\|x\|^2,$$

поскольку

$$(x,Ax)=(Ax,x)$$

в силу самосопряжённости оператора A. Отметим сразу, что по свойству скалярного произведения имеем

$$(x,Ax)=\overline{(Ax,x)},$$

откуда следует, что

$$(Ax,x)\in\mathbb{R}\quad \forall x\in\mathbb{H}. \tag{8.1}$$

Шаг 2. Пусть [1]

$$\mathbb{H}_0=\mathrm{Im}(A+i\beta\cdot\mathrm{id}),\quad \mathbb{H}_0\subset\mathbb{H}.$$

Докажем, что $\mathbb{H}_0$ замкнуто.

☐ Пусть $\{y_n\}\subset\mathbb{H}_0$ и

$$y_n\to y_0\quad \text{сильно в } \mathbb{H}.$$

Докажем, что $y_0\in\mathbb{H}_0$. Действительно, имеем

$$y_n=(A+i\beta\cdot\mathrm{id})x_n,\quad \|y_{n+m}-y_n\|\geqslant\beta\|x_{n+m}-x_n\|.$$

Значит,

$$x_n\to x_0\quad \text{сильно в } \mathbb{H}$$

и поэтому

$$y_0=(A+i\beta\cdot\mathrm{id})x_0\Rightarrow y_0\in\mathbb{H}_0.\quad \boxtimes$$

Шаг 3. Докажем от противного, что если $\beta\in\mathbb{R}^1$, $\beta\neq0$, то $\mathbb{H}_0=\mathbb{H}$. Пусть $\mathbb{H}_0\subsetneq\mathbb{H}$. Тогда в силу следствия из теоремы Беппо Леви найдётся

$$z\in\mathbb{H}_0^{\perp},\quad \|z\|=1.$$

Итак, имеет место цепочка равенств

$$0=(z,(A+i\beta\cdot\mathrm{id})z)=(z,Az)+i\beta\|z\|^2.$$

Тогда с учётом (8.1) имеем

$$0=\mathrm{Im}(z,(A+i\beta\cdot\mathrm{id})z)=\beta\|z\|^2=\beta.$$

Противоречие. Значит, $\mathbb{H}_0=\mathbb{H}$.

Шаг 4. Итак, имеем

$$\mathrm{Im}(A+i\beta\cdot\mathrm{id})=\mathbb{H},\quad \mathrm{Ker}(A+i\beta\cdot\mathrm{id})=\{\vartheta\}.$$

---

[1] Символ Im у нас используется для обозначения образа оператора и для обозначения мнимой части.

Значит, для оператора $A + i\beta \cdot \mathrm{id}$ при $\beta \in \mathbb{R}^1$, $\beta \neq 0$ в силу теоремы Банаха определён обратный. Заменой

$$A \to A + \lambda_0 \cdot \mathrm{id} \quad \text{при} \quad \lambda_0 \in \mathbb{R}^1$$

получим, что любой оператор вида

$$A + (\lambda_0 + i\beta) \cdot \mathrm{id}$$

обратим при $\beta \neq 0$ для всех $\lambda_0 \in \mathbb{R}^1$. Следовательно,

$$\sigma(A) \subset \mathbb{R}^1.$$

Теорема доказана.

§ 9. Теорема о спектре

Введём обозначения.

$$m_- \stackrel{\mathrm{def}}{=} \inf\left\{(x, Ax) : \ \|x\| = 1\right\}, \quad m_+ \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup\left\{(x, Ax) : \ \|x\| = 1\right\}.$$

Пусть оператор A является самосопряжённым.

Теорема 3. *Имеют место следующие свойства*: $\sigma(A) \subset \subset [m_-, m_+]$, $m_-, m_+ \in \sigma(A)$.

Доказательство.

Шаг 1. Итак, пусть $\lambda > m_+$. Тогда

$$(x, (\lambda \cdot \mathrm{id} - A)x) \geqslant (\lambda - m_+)\|x\|^2. \tag{9.1}$$

Значит, форма

$$(y, (\lambda \cdot \mathrm{id} - A)x)$$

коэрцитивна и поэтому оператор

$$\lambda \cdot \mathrm{id} - A$$

обратим. Аналогично при $\lambda < m_-$ имеем

$$-(x, (\lambda \cdot \mathrm{id} - A)x) \geqslant (m_- - \lambda)\|x\|^2.$$

И, стало быть, оператор

$$\lambda \cdot \mathrm{id} - A$$

обратим при $\lambda < m_-$.

Шаг 2. Докажем, что $m_\pm \in \sigma(A)$. Пусть $\{x_n\}$ — такая последовательность, что

$$\|x_n\| = 1, \quad (x_n, Ax_n) \to m_-.$$

Положим

$$B = A - m_- \cdot \mathrm{id}, \quad y_n = Bx_n.$$

Оператор B самосопряжён (очевидно) и неотрицателен.

□ Действительно,

$$(x, Bx) = (x, Ax) - m_-(x, x).$$

Но
$$(x, Ax) \geqslant m_- \quad \text{при} \quad \|x\| = 1. \quad \boxtimes$$

Справедливо неравенство типа Коши–Буняковского (лемма 2 § 7).
$$|(x_n, By_n)|^2 \leqslant (x_n, Bx_n)(y_n, By_n). \tag{9.2}$$

С учётом тождества
$$(x_n, By_n) = (x_n, (A - m_- \cdot \mathrm{id})^2 x_n) = \\ = ((A - m_- \cdot \mathrm{id})x_n, (A - m_- \cdot \mathrm{id})x_n) = \|(A - m_- \cdot \mathrm{id})x_n\|^2,$$
справедливого в случае самосопряжённого оператора A, получим неравенство [1]
$$\|(A - m_- \cdot \mathrm{id})x_n\|^4 \leqslant \\ \leqslant \big(x_n, (A - m_- \cdot \mathrm{id})x_n\big)\big((A - m_- \cdot \mathrm{id})x_n, (A - m_- \cdot \mathrm{id})^2 x_n\big) \leqslant \\ \leqslant \big(x_n, (A - m_- \cdot \mathrm{id})x_n\big)\|A - m_- \cdot \mathrm{id}\|^3 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$
при $n \to +\infty$.

Шаг 3. Итак, мы нашли такую последовательность $\{x_n\}$, что
$$\|x_n\| = 1, \quad y_n = (A - m_- \cdot \mathrm{id})x_n \to 0$$
при $n \to +\infty$. Пусть при этом
$$m_- \notin \sigma(A) \Rightarrow m_- \in \mathrm{res}(A)$$
$$x_n = R(m_-, A)y_n \Rightarrow 1 = \|x_n\| \leqslant \|R(m_-, A)\|\|y_n\| \to 0.$$
Противоречие. Значит, $m_- \in \sigma(A)$. Аналогичным образом рассмотрим
$$\|x_n\| = 1, \quad (x_n, Ax_n) \to m_+, \quad B = m_+ \cdot \mathrm{id} - A.$$

Теорема доказана.

§ 10. О норме самосопряжённого оператора

Справедлива следующая важная лемма:

Лемма 3. *Пусть оператор A является самосопряжённым, тогда*
$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(x, Ax)|.$$

Доказательство.

Шаг 1. Пусть
$$M = \sup_{\|x\|=1} |(x, Ax)|.$$

[1] Здесь мы воспользовались обобщенным неравенством Коши–Буняковского (9.2).

Справедлива цепочка неравенств

$$|(x, Ax)| \leqslant \|x\|\|Ax\| \leqslant \|x\|^2\|A\| \leqslant \|A\|, \quad \|x\| = 1.$$

Значит,

$$M \leqslant \|A\|.$$

Шаг 2. Установим теперь обратное неравенство. Заметим, что

$$((x+y), A(x+y)) - ((x-y), A(x-y)) =$$
$$= 2(x, Ay) + 2(y, Ax) = 2[(x, Ay) + \overline{(x, Ay)}] = 4\operatorname{Re}(x, Ay).$$

Поэтому

$$\operatorname{Re}(x, Ay) = \frac{1}{4}\left[((x+y), A(x+y)) - ((x-y), A(x-y))\right] \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M}{4}\left[\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2\right] = \frac{M}{2}\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right].$$

Положим в этом неравенстве

$$x = \frac{Ay}{\|Ay\|}$$

и получим неравенство

$$\|Ay\| \leqslant \frac{M}{2}\left[1 + \|y\|^2\right] \leqslant M \quad \text{при} \quad \|y\| = 1.$$

Итак,

$$\|A\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| \leqslant M.$$

Поскольку обратное неравенство было установлено выше, получаем

$$\|A\| = M.$$

Лемма доказана.

Справедлива следующая важная лемма о норме квадрата самосопряжённого оператора:

Лемма 4. *Пусть A — самосопряжённый ограниченный оператор, тогда*

$$\|A^2\| = \|A\|^2.$$

Доказательство.

$$\|A^2\| = \sup_{\|x\|=1} |(x, A^2x)| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, Ax)| =$$
$$= \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 = (\sup_{\|x\|=1} \|Ax\|)^2 = \|A\|^2.$$

Лемма доказана.

Теперь получим формулу вычисления спектрального радиуса самосопряжённого оператора.

Лемма 5. *Пусть A — самосопряжённый ограниченный оператор. Тогда*

$$r(A) = \|A\|.$$

Доказательство.

$$r(A) = \lim_{n\to+\infty} \|A^n\|^{1/n} = \lim_{2^n\to+\infty} \|A^{2^n}\|^{1/(2^n)} = \lim_{2^n\to+\infty} \|A\| = \|A\|,$$

где мы пользовались предыдущей леммой и тем фактом, что любая степень самосопряжённого оператора — самосопряжённый оператор.

Лемма доказана.