

Лекция 8

ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА $W^{1,p}(\Omega)$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ И $W^{-1,p'}(\Omega)$

В этой лекции мы рассмотрим пространства С. Л. Соболева $W^{1,p}(\Omega)$, $W_0^{1,p}(\Omega)$, $W^{-1,p'}(\Omega)$ и их частный случай при $p = 2$.

§ 1. Пространства $H^1(D)$ и $H_0^1(D)$

В этом параграфе мы рассмотрим следующие вещественные пространства С. Л. Соболева:

$$\begin{aligned} H_0^1(D) &\stackrel{\text{def}}{=} W_0^{1,2}(D), & H^1(D) &\stackrel{\text{def}}{=} W^{1,2}(D), \\ H^{-1}(D) &\stackrel{\text{def}}{=} W^{-1,2}(D) = (W_0^{1,2}(D))^*. \end{aligned}$$

Напомним определение слабой частной производной функции.

Определение 1. Слабой частной производной функции $u(x) \in L_{loc}^1(D)$ по переменной x_i называется функция $v_i(x) \in L_{loc}^1(D)$, если для любой пробной функции $\varphi(x) \in C^{(1)}(\bar{D}) \cap C_0(D)$ выполнено равенство

$$\int_D \left[v_i(x) \varphi(x) + u(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} \right] dx = 0 \quad (1.1)$$

Отметим, что равенство (1.1) есть следствие формулы интегрирования по частям.

Дадим определение пространства Соболева $H^1(D)$.

Определение 2. Функция $u(x) \in H^1(D)$, если $u(x) \in L^2(D)$, а ее слабые частные производные $v_i(x) \in L^2(D)$ при всех $i = \overline{1, N}$, причем это пространство банахово относительно нормы ¹⁾

$$\|u\| \equiv \left(\int_D \left[|u(x)|^2 + \sum_{i=1}^N |v_i(x)|^2 \right] dx \right)^{1/2}.$$

Дадим определение пространства Соболева $H_0^1(D)$.

¹⁾ Это согласуется с определением слабой производной, поскольку $L^2(D) \subset L_{loc}^1(D)$.

Определение 3. Пополнение векторного пространства $\mathbb{C}_0^\infty(D)$ по норме банахового пространства $H^1(D)$ называется банаховым пространством $H_0^1(D)$.

Замечание 1. Отметим, что нормой на векторном пространстве $\mathbb{C}_0^\infty(D)$ является также величина

$$\|D_x u\|_2, \quad D_x = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_N}),$$

где ∂_{x_k} — это соответствующие слабые частные производные по переменной x_k . И если рассмотреть пополнение \mathbb{C}_0^∞ мы получим банахово пространство $\mathcal{D}^{1,2}(D)$ относительно указанной нормы. В силу неравенства Фридрикса

$$\|u\|_2 \leq c_1 \|D_x u\|_2 \quad \text{для всех } u(x) \in H_0^1(D)$$

это пространство совпадает с банаховым пространством $H_0^1(D)$.

Далее мы изучим свойства пространства $H^{-1}(D)$ сопряженного к банаховому пространству $H_0^1(D)$. Введем следующие обозначения:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H^{-1}(D) \otimes H_0^1(D) \rightarrow \mathbb{R}^1$$

— это скобки двойственности между $H_0^1(D)$ и

$$H^{-1}(D) \stackrel{\text{def}}{=} (H_0^1(D))^*;$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_1 : (H^1(D))^* \otimes H^1(D) \rightarrow \mathbb{R}^1$$

— это скобки двойственности между $H^1(D)$ и $(H^1(D))^*$. Величина

$$\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle : \mathcal{D}'(D) \otimes \mathcal{D}(D) \rightarrow \mathbb{R}^1$$

— это скобки двойственности между пространством основных функций $\mathcal{D}(D)$ и пространством обобщенных функций $\mathcal{D}'(D)$.

Рассмотрим формальный вид эллиптического оператора \mathcal{L} , определенного следующей формулой:

$$\mathcal{L}u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)u(x). \quad (1.2)$$

Пусть $a_{ij}(x), b_i(x), c(x) \in L^\infty(D)$. Причем частные производные

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{при } j = \overline{1, N}$$

в слагаемом

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right)$$

понимается в слабом смысле (точнее из $L^2(D) \subset L_{loc}^1(D)$). Тогда для функций $u(x) \in H_0^1(D)$ имеем

$$a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2(D). \quad (1.3)$$

Теперь введем функционал, порождаемый функцией $f(x) \in L^2(D)$, обозначаемый также как и частная производная

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad 1)$$

причем это не слабая производная, а производная регулярной обобщенной функции, порожденной функцией $f(x) \in L^2(D) \subset \mathcal{D}'(D)$, стандартной формулой

$$\left\langle \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle \right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} - \left\langle \left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \right\rangle = - \int_D f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx, \quad (1.4)$$

где $\varphi(x) \in H_0^1(D)$ и, в частности,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^2(D)$$

— это слабая производная функции $\varphi(x) \in H_0^1(D)$.

Лемма 1. Функционал (1.4) является линейным и непрерывным в сильной топологии пространства $H_0^1(D)$. Иначе говоря,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \in H^{-1}(D). \quad (1.5)$$

Доказательство.

Действительно, для любой последовательности $\{\varphi_m\} \subset H_0^1(D)$ такой, что

$$\varphi_m \rightarrow \varphi \quad \text{сильно в } H_0^1(D)$$

имеем, в частности,

$$\|D_x \varphi_m - D_x \varphi\|_2 \rightarrow +0 \quad \text{при } m \rightarrow +\infty.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi_m - \varphi \right\rangle \right\rangle \right| &\leq \int_D |D_x \varphi_m - D_x \varphi| |f(x)| dx \leq \\ &\leq \left(\int_D |D_x \varphi_m - D_x \varphi|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_D |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \rightarrow +0 \quad \text{при } m \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Стало быть, по формуле

$$\left\langle \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle \right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle \right\rangle = - \int_D f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$$

¹⁾ Недоразумений это не должно вызвать, потому что в каждом конкретном случае понятно какая производная имеется в виду слабая производная или производная обобщенных функций.

определен линейный и непрерывный функционал

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ над пространством } H_0^1(D) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} \in (H_0^1(D))^* = H^{-1}(D).$$

Лемма доказана.

Справедливо следующее важное утверждение:

Лемма 2. *Всякий функционал над гильбертовым пространством $H^1(D)$ порождается функциями $f_j(x) \in L^2(D)$ при $j = \overline{0, N}$ по формуле*

$$\langle f^*, \varphi \rangle_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^N \int_D f_j(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} dx + \int_D f_0(x) \varphi(x) dx, \quad (1.6)$$

причем для некоторого однозначно определенного элемента $g(x) \in H^1(D)$ имеет место равенство в слабом смысле

$$f_j(x) = \frac{\partial g(x)}{\partial x_j}, \quad f_0(x) = g(x).$$

Доказательство.

Шаг 1. Действительно, пространство $H^1(D)$ является гильбертовым относительно скалярного произведения

$$(g(x), \varphi(x))_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^N \int_D \frac{\partial g(x)}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} dx + \int_D g(x) \varphi(x) dx$$

для всех $\varphi(x), g(x) \in H^1(D)$. С другой стороны, для всякого элемента $f^*(x) \in (H^1(D))^*$ согласно теореме Рисса–Фреше найдется такой единственный элемент $g(x) \in H^1(D)$, что имеет место равенство

$$\langle f^*, \varphi \rangle_1 = (g(x), \varphi(x))_1 = \sum_{j=1}^N \int_D f_j(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} dx + \int_D g(x) \varphi(x) dx,$$

где

$$f_j(x) = \frac{\partial g}{\partial x_j} \in L^2(D), \quad j = \overline{1, N}.$$

Шаг 2. Наконец, для всякой последовательности $\{\varphi_m\} \subset H^1(D)$ такой, что

$$\varphi_m(x) \rightarrow \varphi(x) \text{ сильно в } H^1(D) \text{ при } m \rightarrow +\infty$$

имеем

$$\|\varphi_m - \varphi\|_2 \rightarrow +0, \quad \|D_x \varphi_m - D_x \varphi\|_2 \rightarrow +0 \text{ при } m \rightarrow +\infty$$

Поэтому

$$\left| \int_D f_j(x) \left[\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial \varphi_m(x)}{\partial x_j} \right] dx \right| \leq \left(\int_D \left| \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial \varphi_m(x)}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_D f_j^2(x) dx \right)^{1/2} \rightarrow +0,$$

$$\left| \int_D g(x) [\varphi_m(x) - \varphi(x)] dx \right| \leq \left(\int_D |\varphi_m(x) - \varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_D |g(x)|^2 dx \right)^{1/2} \rightarrow +0$$

при $m \rightarrow +\infty$. Следовательно, формулой (1.6) задается линейный и непрерывный функционал над пространством $H^1(D)$.

Лемма доказана.

Следствие 1. Для всякого элемента $f^* \in H^{-1}(D)$ найдется такой единственный элемент $g(x) \in H_0^1(D)$, что имеет место явное представление

$$\langle f^*, \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^N \int_D f_j(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} dx, \quad f_j(x) = \frac{\partial g(x)}{\partial x_j}, \quad g(x) \in H_0^1(D) \quad (1.7)$$

для всех $\varphi(x) \in H_0^1(D)$.

Дадим эквивалентное определение банахова пространства $(H^1(D))^*$.

Определение 4. Множество всех линейных и непрерывных функционалов над банаховым пространством $H^1(D)$ обозначим символом $(H^1(D))^*$, причем это пространство является банаховым относительно нормы ¹⁾

$$\|f^*\|_{1*} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{(\|\varphi\|_2^2 + \|D_x \varphi\|_2^2)^{1/2} = 1} \left| \sum_{j=1}^N \int_D f_j^*(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} dx + \int_D f_0(x) \varphi(x) dx \right|,$$

где

$$f_j^*(x) = \frac{\partial g(x)}{\partial x_j}, \quad f_0(x) = g(x), \quad g(x) \in H^1(D), \quad j = \overline{0, N}$$

— это функции порождающие функционал.

Справедлива следующая лемма:

¹⁾ Стандартная $*$ -норма.

Л е м м а 3. *Имеет место следующие равенства:*

$$\|f^*\|_{1*} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{(\|\varphi\|_2^2 + \|D_x \varphi\|_2^2)^{1/2} = 1} |\langle f^*, \varphi \rangle_1| = \left(\|g\|_2^2 + \|D_x g\|_2^2 \right)^{1/2}, \quad g(x) \in H^1(D) \quad (1.8)$$

для любого $f^*(x) \in (H^1(D))^*$ и для всех $\varphi(x) \in H^1(D)$;

$$\|f^*\|_* \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|D_x \varphi\|_2 = 1} |\langle f^*, \varphi \rangle| = \|D_x g\|_2, \quad g(x) \in H_0^1(D) \quad (1.9)$$

для любого $f^*(x) \in H^{-1}(D)$ и для всех $\varphi(x) \in H_0^1(D)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о .

Докажем, например, равенство (1.8). Действительно, во-первых, имеет место следующее неравенство:

$$\|f^*\|_{1*} \leq \sup_{(\|\varphi\|_2^2 + \|D_x \varphi\|_2^2)^{1/2} = 1} \left[\sum_{j=1}^N \|\partial_{x_j} g\|_2 \|\partial_{x_j} \varphi\|_2 + \|g\|_2 \|\varphi\|_2 \right]. \quad (1.10)$$

Заметим, что имеет место следующее числовое неравенство:

$$\left(\sum_{j=1}^N a_j^{1/2} b_j^{1/2} + a_0^{1/2} b_0^{1/2} \right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^N a_j + a_0 \right) \left(\sum_{j=1}^N b_j + b_0 \right)$$

для всех $a_j \geq 0, b_j \geq 0$ при $j = \overline{0, N}$. Поэтому мы из (1.10) мы получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \|f^*\|_{1*} &\leq \sup_{(\|\varphi\|_2^2 + \|D_x \varphi\|_2^2)^{1/2} = 1} \left(\|D_x g\|_2^2 + \|g\|_2^2 \right)^{1/2} \left(\|D_x \varphi\|_2^2 + \|\varphi\|_2^2 \right)^{1/2} = \\ &= \left(\|D_x g\|_2^2 + \|g\|_2^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

С другой стороны, заметим, что имеет место неравенство снизу

$$\|f^*\|_{1*} \geq \left| \sum_{j=1}^N \int_D \frac{\partial g(x)}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} dx + \int_D g(x) \varphi(x) dx \right|$$

для всех $(\|\varphi\|_2^2 + \|D_x \varphi\|_2^2)^{1/2} = 1$. Возьмем в этом неравенстве

$$\varphi(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{\|D_x g\|_2^2 + \|g\|_2^2}}$$

и получим оценку снизу

$$\|f^*\|_{1*} \geq \sqrt{\|D_x g\|_2^2 + \|g\|_2^2}.$$

Равенство (1.8) доказано.

Лемма доказана.

Продолжим рассмотрение оператора \mathcal{L} , определенного формулой (1.2). Причем в слагаемом

$$b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

производная понимается в слабом смысле, а вот производная

$$\frac{\partial}{\partial x_i},$$

примененная к выражению

$$a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad u(x) \in H_0^1(D),$$

понимается уже как производная обобщенной функции из $L^2(D) \subset \mathcal{D}'(D)$, т.е. как функционал из $H^{-1}(D)$. Таким образом, мы приходим к выводу о том, что

$$a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} : H_0^1(D) \rightarrow L^2(D), \quad (1.11)$$

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) : H_0^1(D) \rightarrow H^{-1}(D), \quad (1.12)$$

$$b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} : H_0^1(D) \rightarrow L^2(D), \quad c(x)I : H_0^1(D) \rightarrow L^2(D). \quad (1.13)$$

Теперь заметим, что имеют место плотное вложение

$$H_0^1(D) \stackrel{ds}{\subset} L^2(D) \Rightarrow L^2(D) = \left(L^2(D) \right)^* \stackrel{ds}{\subset} \left(H_0^1(D) \right)^* = H^{-1}(D).$$

Таким образом, такое обобщение оператора \mathcal{L} , формально записанного как и ранее, действует следующим образом:

$$\mathcal{L} \equiv \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)I : H_0^1(D) \rightarrow H^{-1}(D). \quad (1.14)$$

Наконец, мы можем определить так называемое слабое решение следующей однородной краевой задачи Дирихле:

$$\mathcal{L}u(x) = f(x) \quad \text{при } x \in D, \quad u(x) = 0 \quad \text{на } \partial D. \quad (1.15)$$

Определение 5. Слабым решением однородной краевой задачи Дирихле (1.15) называется функция $u(x) \in H_0^1(D)$, удовлетворяющая равенству

$$\langle \mathcal{L}u, \varphi \rangle = 0 \quad \text{для всех } \varphi(x) \in H_0^1(D), \quad (1.16)$$

причем это равенство эквивалентно равенству

$$\int_D \left[\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \varphi(x) - c(x)u(x)\varphi(x) \right] dx = 0 \quad (1.17)$$

для всех $\varphi(x) \in H_0^1(D)$.

Рассмотренные пространства $H^1(D)$, $H_0^1(D)$ и соответствующие сопряженные используются при рассмотрении нелинейных краевых задач с главным линейным оператором эллиптического типа второго порядка. Однако, при рассмотрении нелинейных в главном дифференциальных уравнений используются банаховы пространства $W^{1,p}(D)$ и $W_0^{1,p}(D)$ при $p > 2$. Рассмотрением этих пространств мы займемся в 3 параграфе. А сейчас мы изучим вопрос о явном виде оператора Рисса–Фреше для пары сопряженных гильбертовых пространств С. Л. Соболева $H_0^1(D)$ и $H^{-1}(D) = (H_0^1(D))^*$.

§ 2. Оператор Рисса–Фреше для гильбертовых пространств $H_0^1(D)$ и $H^{-1}(D)$

1. Для построения явного вида оператора Рисса–Фреше нам нужно рассмотреть вопрос о существовании и единственности слабого решения следующей краевой задачи, в классическом смысле имеющей вид:

$$-\Delta u(x) = f^*(x) \quad \text{при } x \in D, \quad u(x)|_{\partial D} = 0. \quad (2.1)$$

В слабом смысле задача ставится так:

$$\langle -\Delta u, \varphi \rangle = \langle f^*, \varphi(x) \rangle \quad \text{для всех } \varphi(x) \in H_0^1(D), \quad (2.2)$$

где $f^*(x) \in H^{-1}(D)$. Эта задача эквивалентна следующей:

$$B(u, \varphi) = \langle f^*, \varphi \rangle \quad \text{для всех } \varphi(x) \in H_0^1(D), \quad (2.3)$$

где билинейная форма $B(u, \varphi)$ определена равенством

$$B(u, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_D \sum_{i=1}^N \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} dx. \quad (2.4)$$

Для билинейной формы справедливы оценки

$$B(u, \varphi) \leq \|D_x u\|_2 \|D_x \varphi\|_2, \quad B(u, u) = \|D_x u\|_2^2. \quad (2.5)$$

2. Оператор Рисса-Фреше для гильбертовых пространств $H_0^1(D)$ и $H^{-1}(D)$ ⁹

2. Согласно лемме Лакса-Мильграма существует единственный оператор $\mathbb{A} \in \mathcal{L}(H, H)$, $\mathbb{A}^{-1} \in \mathcal{L}(H, H)$ ¹⁾ такой, что

$$B(u, \varphi) = (\mathbb{A}u, \varphi) \quad \text{для всех } u(x), \varphi(x) \in H_0^1(D), \quad (2.6)$$

где (\cdot, \cdot) скалярное произведение в $H_0^1(D)$ вида

$$(v_1, v_2) \stackrel{\text{def}}{=} \int_D \sum_{i=1}^N \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v_2(x)}{\partial x_i} dx.$$

Поэтому этот оператор \mathbb{A} — это единичный оператор.

3. Кроме того, в силу теоремы Рисса-Фреше для всякого $f^*(x) \in H^{-1}(D)$ найдется такая функция $w(x) \in H_0^1(D)$, что имеет место равенство

$$\langle f^*, \varphi(x) \rangle := (w, \varphi). \quad (2.7)$$

Поскольку $\text{Im } \mathbb{A} = H_0^1(D)$, то для этого $w(x)$ найдется такая функция $u(x) \in H_0^1(D)$, что для этой функции $u(x)$ и для всех $\varphi(x) \in H_0^1(D)$ выполнена цепочка равенств

$$\mathbb{A}u(x) = w(x) \Rightarrow B(u, \varphi) = (\mathbb{A}u, \varphi) = (w, \varphi) = \langle f^*, \varphi \rangle,$$

из которой следует, что $u(x)$ слабое решение исходной задачи.

4. Единственность слабого решения следует из следующих соображений. Пусть слабых решений два: $u_1(x), u_2(x) \in H_0^1(D)$, тогда имеем

$$\begin{aligned} B(u_1, \varphi) &= \langle f^*, \varphi \rangle, \quad B(u_2, \varphi) = \langle f^*, \varphi \rangle \Rightarrow \\ \Rightarrow B(u_1 - u_2, \varphi) &= 0 \Rightarrow B(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0 \Rightarrow \|D_x(u_1 - u_2)\|_2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow H_0^1(D) \ni u_1 - u_2 = \text{constant} \Rightarrow \text{constant} = 0 \Rightarrow u_1 = u_2. \end{aligned}$$

5. Таким образом, для всякого $f^*(x) \in H^{-1}(D)$ существует единственное слабое решение $u(x) \in H_0^1(D)$ уравнения (2.2). Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\langle f^*, \varphi \rangle = \langle -\Delta u, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^N \int_D \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} dx = (u, \varphi).$$

6. Докажем, что оператор $J = (-\Delta)^{-1}$ является изометрическим. Действительно,

$$\begin{aligned} \|f^*\|_* &\stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|D_x \varphi\|_2=1} | \langle -\Delta u, \varphi \rangle | \leq \\ &\leq \sup_{\|D_x \varphi\|_2=1} \|D_x u\|_2 \|D_x \varphi\|_2 = \|D_x u\|_2 = \|u\|_{H_0^1} = \|Jf^*\|_{H_0^1}, \end{aligned}$$

¹⁾ Лекция 11. Том I. Линейный и нелинейный функциональный анализ. М. О. Корпусов и А. А. Панин.

$$\|f^*\|_* \geq |\langle -\Delta u, \varphi \rangle| \geq \left| \left\langle -\Delta u, \frac{u}{\|D_x u\|_2} \right\rangle \right| = \|D_x u\|_2 = \|u\|_{H_0^1} = \|Jf^*\|_{H_0^1},$$

$$\|f^*\|_* = \|Jf^*\|_{H_0^1} \quad \text{для всех } f^*(x) \in H^{-1}(D).$$

Отсюда вытекает, что оператор Рисса–Фреше имеет следующий явный вид:

$$J = (-\Delta)^{-1} : H^{-1}(D) \rightarrow H_0^1(D), \quad u(x) = Jf^*(x).$$

§ 3. Пространства С. Л. Соболева $W^{1,p}(D)$ и $W_0^{1,p}(D)$ при $p > 2$

Дадим определение пространства Соболева $W^{1,p}(D)$ при $p > 2$.

Определение 6. Функция $u(x) \in W^{1,p}(D)$, если $u(x) \in L^p(D)$ и ее слабые частные производные $\partial_{x_i} u(x) \in L^p(D)$ при всех $i = \overline{1, N}$, причем это пространство банахово относительно нормы

$$\|u\|_{1,p} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_D \left[|u(x)|^p + \sum_{i=1}^N |\partial_{x_i} u(x)|^p \right] dx \right)^{1/p}.$$

Дадим определение пространства Соболева $W_0^{1,p}(D)$.

Определение 7. Пополнение векторного пространства $C_0^\infty(D)$ по норме банахова пространства $W^{1,p}(D)$ называется банаховым пространством $W_0^{1,p}(D)$.

Замечание 2. Отметим¹⁾, что норма на пространстве $W_0^{1,p}(D)$ эквивалентна следующей

$$\|D_x u\|_p \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_D |D_x u|^p dx \right)^{1/p}, \quad D_x = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_N}).$$

Введем обозначения.

$$W^{-1,p'}(D) \stackrel{\text{def}}{=} (W_0^{1,p}(D))^*, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad p > 1,$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_* : W^{-1,p'}(D) \otimes W_0^{1,p}(D) \rightarrow \mathbb{R}^1.$$

Кроме того, мы используем обозначение $(W^{1,p}(D))^*$ для линейных и непрерывных функционалов над $W^{1,p}(D)$ со скобками двойственности

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{1*} : (W^{1,p}(D))^* \otimes W^{1,p}(D) \rightarrow \mathbb{R}^1.$$

Справедлива следующая важная лемма:

¹⁾ В силу обобщения неравенства Фридрикса.

Лемма 4. Всякая функция $f^*(x) \in (W^{1,p}(D))^*$ представима в следующем виде:

$$\langle f^*, u \rangle_{1*} = \sum_{j=1}^N \int_D g_j(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} dx + \int_D g_0(x) u(x) dx \quad (3.1)$$

для всех $u(x) \in W^{1,p}(D)$, где $g_j(x) \in L^p(D)$ при $j = \overline{0, N}$.

Доказательство.

Шаг 1. Банахово пространство $W^{1,p}(D)$ можно отождествить с подпространством

$$W \stackrel{\text{def}}{=} w = (u, D_1 u, \dots, D_N u) \subset \underbrace{L^p(D) \otimes L^p(D) \otimes \dots \otimes L^p(D)}_{N+1}, \quad D_k = \partial_{x_k}.$$

Причем это банахово пространство относительно нормы

$$\|w\|_W \stackrel{\text{def}}{=} \|u\|_p + \sum_{j=1}^N \|D_j u\|_p = \|u\|_{W^{1,p}}.$$

Шаг 2. Введем оператор

$$P : u \in W^{1,p}(D) \rightarrow w = (u, D_1 u, \dots, D_N u) \in W.$$

Очевидно, что этот оператор является изометрией между банаховыми пространствами $W^{1,p}(D)$ и W при снабжении пространства $W^{1,p}(D)$ такой же нормой:

$$\|Pu\|_W := \|u\|_{W^{1,p}} \quad \text{для всех } u \in W^{1,p}(D).$$

Шаг 3. Поэтому любой элемент $f^* \in (W^{1,p}(D))^*$ представим в виде

$$f^* = L^* P, \quad L^* \in (W)^*.$$

Заметим, что имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \langle f^*, u \rangle_{1*} &= ((L^*, Pu))^{1)}, \\ \|f^*\|_{1*} &= \sup_{\|u\|_{W^{1,p}}=1} |\langle f^*, u \rangle_{1*}| = \sup_{\|Pu\|_W=1} |((L^*, Pu))| = \|L^*\|_{W^*} \end{aligned}$$

где $((\cdot, \cdot))$ — скобки двойственности между W и W^* . Согласно теореме Хана–Банаха существует продолжение \tilde{L}^* функционала L^* с подпространства W на все банахово пространство

$$(L^p(D))^{N+1} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{L^p(D) \otimes L^p(D) \otimes \dots \otimes L^p(D)}_{N+1},$$

¹⁾ Здесь мы записали последовательное действие операторов L^*P .

таким образом, что

$$\langle f^*, u \rangle_{1*} = ((L^*, Pu)) = \langle \widehat{L^*}, w \rangle_p, \quad w \in W \subset (L^p(D))^{N+1},$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ — скобки двойственности между банаховым пространством $(L^p(D))^{N+1}$ и банаховым пространством $((L^p(D))^{N+1})^*$

$$((L^p(D))^{N+1})^* \stackrel{\text{def}}{=} (L^{p'}(D))^{N+1} = \underbrace{L^{p'}(D) \otimes L^{p'}(D) \otimes \cdots \otimes L^{p'}(D)}_{N+1}.$$

Стало быть, найдутся такие функции $g_j(x) \in L^{p'}(D)$ при $j = \overline{0, N}$, что имеет место равенство

$$\langle \widehat{L^*}, w \rangle_p := \sum_{j=1}^N \int_D \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} g_j(x) dx + \int_D u(x) g_0(x) dx.$$

Таким образом,

$$\langle f^*, u \rangle_{1*} = \sum_{j=1}^N \int_D \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} g_j(x) dx + \int_D u(x) g_0(x) dx, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Лемма доказана.

Следствие 1. *Всякий элемент $f^* \in W^{-1, p'}(D)$ представим, возможно, неединственным образом в следующем виде:*

$$\langle f^*, u \rangle_* := \sum_{j=1}^N \int_D g_j(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} dx, \quad \forall u(x) \in W_0^{1, p}(D), \quad (3.2)$$

где $g_j(x) \in L^{p'}(D)$ при $j = \overline{1, N}$.

Теперь рассмотрим вопрос об инъективном операторе, который действует из пространства $W_0^{1, p}(D)$ при $p > 2$ на все пространство $W^{-1, p'}(D)$. В отличие от случая $p = 2$ этот оператор является **нелинейным оператором p -лапласиана**.

□ Действительно, рассмотрим оператор p -лапласиана:

$$\Delta_p u \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{div}(|D_x u|^{p-2} D_x u), \quad D_x = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_N}). \quad (3.3)$$

При этом мы будем рассматривать этот оператор в расширенном смысле. Оператор D понимается в слабом смысле.

1. В качестве области определения возьмем

$$\operatorname{dom} \Delta_p \stackrel{\text{def}}{=} W_0^{1, p}(D),$$

тогда

$$D_x : W_0^{1, p}(D) \rightarrow \underbrace{L^p(D) \otimes \cdots \otimes L^p(D)}_N.$$

Рассмотрим векторную нелинейную функцию

$$\eta(x) = (\eta_1(x), \dots, \eta_N(x)) = |\xi(x)|^{p-2} \xi(x) : \underbrace{L^p(D) \otimes \dots \otimes L^p(D)}_N \rightarrow \underbrace{L^{p'}(D) \otimes \dots \otimes L^{p'}(D)}_N,$$

где $\xi(x) = (\xi_1(x), \dots, \xi_N(x))$. Теперь определим функционал $\operatorname{div}(\eta(x)) \in W^{-1,p'}(D)$ над пространством $W_0^{1,p}(D)$ следующим образом:

$$\langle \operatorname{div}(\eta(x)), \varphi(x) \rangle_* \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{j=1}^N \int_D \eta_j(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} dx$$

для всех $\varphi(x) \in W_0^{1,p}(D)$ и заданной функции

$$\eta(x) = (\eta_1(x), \dots, \eta_N(x)) \in \underbrace{L^{p'}(D) \otimes \dots \otimes L^{p'}(D)}_N.$$

Тогда, оператор Δ_p представим в следующем виде

$$\Delta_p u \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{div}(\eta(x)), \quad \eta(x) = |\xi(x)|^{p-2} \xi(x), \quad \xi(x) = D_x u(x)$$

при $u(x) \in W_0^{1,p}(D)$ и получим, что этот оператор действует

$$\Delta_p : W_0^{1,p}(D) \rightarrow W^{-1,p'}(D).$$

2. В дальнейшем будет доказано, что слабое решение $u(x) \in W_0^{1,p}(D)$ задачи

$$\langle -\Delta_p u(x), \varphi(x) \rangle_* = \langle f^*(x), \varphi(x) \rangle_* \quad \text{для всех } \varphi(x) \in W_0^{1,p}(D)$$

при любом $f^*(x) \in W^{-1,p'}(D)$ существует и единственно ¹⁾.

3. Докажем теперь, что для Δ_p выполнено следующее равенство:

$$\|\Delta_p u\|_* = \|D_x u\|_p^{p-1} \quad \text{для всех } u(x) \in W_0^{1,p}(D).$$

Действительно, имеет место следующая цепочка выражений:

$$\begin{aligned} \|\Delta_p u\|_* &= \sup_{\|D_x \varphi\|_p=1} |\langle \Delta_p u, \varphi \rangle| = \\ &= \sup_{\|D_x \varphi\|_p=1} \left| \sum_{j=1}^N \int_D |D_x u(x)|^{p-2} D_{x_j} u(x) D_{x_j} \varphi(x) dx \right| \leq \end{aligned}$$

¹⁾ Что может быть доказано при помощи теоремы Браудера–Минти. Том III. Нелинейный анализ. Линейный и нелинейный функциональный анализ. М. О. Корпусова и А. А. Панина.

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{\|D_x \varphi\|_p=1} \int_D |D_x u(x)|^{p-2} \sum_{j=1}^N |D_{x_j} u(x)| |D_{x_j} \varphi(x)| dx \leq \\
&\leq \sup_{\|D_x \varphi\|_p=1} \int_D |D_x u(x)|^{p-2} \left(\sum_{j=1}^N |D_{x_j} u(x)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^N |D_{x_j} \varphi(x)|^2 \right)^{1/2} dx \leq \\
&\leq \sup_{\|D_x \varphi\|_p=1} \int_D |D_x u(x)|^{p-1} |D_x \varphi(x)| dx \leq \\
&\leq \sup_{\|D_x \varphi\|_p=1} \|D_x u\|_p^{p-1} \|D_x \varphi\|_p = \|D_x u\|_p^{p-1}.
\end{aligned}$$

Теперь заметим, что справедливы следующие неравенства:

$$\|\Delta_p u\|_* \geq \left| \sum_{j=1}^N \int_D |D_x u(x)|^{p-2} D_{x_j} u(x) D_{x_j} \varphi(x) dx \right| \quad \text{при} \quad \|D_x \varphi\|_p = 1,$$

в котором возьмем

$$\varphi(x) = \frac{u(x)}{\|D_x u\|_p}$$

и получим следующее неравенство:

$$\|\Delta_p u\|_* \geq \|D_x u\|_p^{p-1}. \quad \square$$