

1. (Эта задача является частным случаем задачи 3. Вы можете пропустить ее, а затем просто извлечь ответы из задачи 3).

Рассмотрим следующий набор измерений неизвестных переменных x_1 и x_2 :

$$y_1 = x_1 + x_2 + \nu_1,$$

$$y_2 = x_1 - x_2 + \nu_2,$$

$$y_3 = -x_1 + x_2 + \nu_3,$$

где y_i - результаты измерений, а ν_i - независимые одинаково распределенные случайные ошибки измерений с нулевым средним и дисперсией σ^2 :

$$E\nu_i = 0, \quad E\varepsilon_i^2 = \sigma^2, \quad i = 1, 2, 3.$$

- (a) Записать этот набор измерений в матричной форме $y = Ax + \nu$ и указать матрицы A и $S = D\nu$.
- (b) Найти матрицы вариаций $D\hat{x}$ для оптимальной линейной оценки x и дисперсии \hat{x}_1 и \hat{x}_2 .
2. Рассмотрим два измерения одной неизвестной переменной x с коррелированным шумом:

$$y_1 = x + \nu_1,$$

$$y_2 = x + \nu_2,$$

где

$$\nu_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_0,$$

$$\nu_2 = \varepsilon_2 + \varepsilon_0,$$

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \sim (0, \sigma_1^2), \quad \varepsilon_0 \sim (0, \sigma_0^2),$$

$$\sigma_0^2 + \sigma_1^2 = \sigma^2, \quad r = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}.$$

- (a) Как и в задаче 1.
- (b) Как и в задаче 1.
- (c) Проанализируйте, как дисперсия $D\hat{x}$ зависит от параметра корреляции r при $0 \leq r \leq 1$ и $\sigma^2 = const$. Хороша или плоха высокая корреляция для точности оценки в данном примере? Можно нарисовать график. Как можно объяснить такое поведение?
3. Рассмотрим ту же схему измерения, как и в задаче 1, но с коррелированным шумом:

$$\nu_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_0,$$

$$\nu_2 = \varepsilon_2 + \varepsilon_0,$$

$$\nu_3 = \varepsilon_3 + \varepsilon_0,$$

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \sim (0, \sigma_1^2), \quad \varepsilon_0 \sim (0, \sigma_0^2),$$

$$\sigma_0^2 + \sigma_1^2 = \sigma^2, \quad r = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}.$$

- (a) Как и в задаче 1.
- (b) Как и в задаче 1.
- (c) Проанализируйте, как дисперсии $D\hat{x}_1$ and $D\hat{x}_2$ зависят от параметра корреляции r при $0 \leq r \leq 1$ и $\sigma^2 = const$. Хороша или плоха высокая корреляция для точности оценки в данном примере? Можно нарисовать график. Как можно объяснить такое поведение?

Рекомендуется использовать символические пакеты (например, Maple, Symbolic Toolbox в MatLab, ...).