МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. Ломоносова

Ф И З И Ч Е С К И Й   Ф А К У Л Ь Т Е Т

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

Н.Т. Левашова, Н.Е. Шапкина.

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Пособие для студентов II курса

Москва

2016

Н.Т. Левашова, Н.Е. Шапкина.

Несобственные интегралы. Решение задач

Пособие предназначено для студентов 2 курса физического факультета МГУ, изучающих курс математического анализа в III семестре. Пособие опирается на курс лекций и иллюстрирует его большим количеством разобранных примеров и задач. Настоящее пособие может быть использовано как студентами для выполнения домашних заданий и подготовки к контрольным работам и зачетам, так и преподавателями, ведущими семинарские занятия по теме «Несобственные интегралы». Авторы приносят глубочайшую благодарность профессору В.Ф. Бутузову за целый ряд ценных указаний и замечаний в ходе подготовки пособия.

Рекомендовано Советом отделения прикладной математики в качестве пособия для студентов физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, обучающихся по направлениям «физика» и «астрономия».

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

При введении понятия определенного интеграла предполагается, что промежуток интегрирования – сегмент, а подынтегральная функция ограничена на промежутке интегрирования. Различные задачи в математике и её приложениях приводят к необходимости обобщить понятие определенного интеграла на случаи, когда либо промежуток интегрирования неограниченный, либо подынтегральная функция является неограниченной. В каждом из этих случаев интеграл называется несобственным. В зависимости от того, является ли неограниченной область интегрирования или подынтегральная функция, несобственные интегралы относят либо к первому, либо ко второму роду.

Определения.

Дадим определение несобственного интеграла первого рода.

Пусть функция $f(x)$ определена на полупрямой $a \le x < +\infty$ и интегрируема на любом сегменте $a \le x \le A$, то есть существует определенный интеграл $\int\limits_a^A f(x)\,dx$.

Рассмотрим предел

$$\lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)\,dx. \tag{1}$$

Этот предел может существовать, а может и не существовать. В любом случае будем обозначать его $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и называть ***несобственным интегралом первого рода от функции*** $f(x)$ ***по полупрямой*** $[a;+\infty)$.

Если предел (1) существует, то несобственный интеграл первого рода называется ***сходящимся***. Если указанный предел не существует, то несобственный интеграл первого рода называют ***расходящимся.***

Аналогично определяются несобственный интеграл по полупрямой $(-\infty;a]$:

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{B\to-\infty}\int\limits_B^a f(x)dx$$

и несобственный интеграл по всей числовой прямой:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A\to+\infty\\ B\to-\infty}}\int\limits_B^A f(x)dx\,.$$

Дадим теперь определение несобственного интеграла второго рода. Рассмотрим функцию $f(x)$, заданную на полусегменте $(a;b]$, где $a < b$, неограниченную на этом полусегменте, но ограниченную и интегрируемую на любом сегменте $[a+\delta;b]$, где $0 < \delta < b-a$. Точку *a* назовем в этом случае ***особой точкой*** функции $f(x)$.

Рассмотрим предел

$$\lim_{\delta\to+0}\int_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx\,. \tag{2}$$

Этот предел может существовать, а может и не существовать. В любом случае будем называть этот предел ***несобственным интегралом второго рода от функции*** $f\left(x\right)$ ***по полусегменту*** $\left(a;b\right]$ и обозначать его так: $\int_{a}^{b} f(x)\,dx\,.$

Если предел (2) существует, то несобственный интеграл второго рода называется ***сходящимся***. Если указанный предел не существует, то несобственный интеграл второго рода называют ***расходящимся.***

Аналогично определяется несобственный интеграл второго рода от функции $f\left(x\right)$ по полусегменту $\left[a;b\right)$, где *b* – особая точка функции $f\left(x\right)$:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\delta\to+0}\int_{a}^{b-\delta} f\left(x\right)dx$$

и несобственный интеграл второго рода от функции $f\left(x\right)$ по интервалу $\left(a;b\right)$, где *a* и *b* – особые точки функции $f\left(x\right)$, а других особых точек у функции на интервале $\left(a;b\right)$ нет:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\substack{\delta_1\to+0\\ \delta_2\to+0}}\int_{a+\delta_1}^{b-\delta_2} f\left(x\right)dx\,.$$

Если особой точкой функции $f\left(x\right)$ является внутренняя точка c сегмента $\left[a;b\right]$, то несобственный интеграл определяется следующим образом:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\delta_1\to+0}\int_{a}^{c-\delta_1} f\left(x\right)dx + \lim_{\delta_2\to+0}\int_{c+\delta_2}^{b} f\left(x\right)dx.$$

Если оба предела существуют, то интеграл называют сходящимся, если хотя бы один из пределов не существует, то его называют расходящимся.

Пример 1. Пусть интеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а интеграл $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ расходится. Доказать, что интеграл $\int_{a}^{+\infty}\left(f(x)+g(x)\right)dx$ расходится.

Используем метод доказательства от противного. Предположим, что $\int_{a}^{+\infty}\left(f(x)+g(x)\right)dx$ сходится. Для любого $A>a$ справедливо равенство:

$$\int_a^A \Big(f(x)+g(x)\Big)dx = \int_a^A f(x)dx + \int_a^A g(x)dx,$$

из которого следует, что

$$\int_a^A g(x)dx = \int_a^A \Big(f(x)+g(x)\Big)dx - \int_a^A f(x)dx.$$

В последнем равенстве перейдем к пределу при $A \to +\infty$. Согласно условию задачи и сделанному предположению предел каждого слагаемого в правой части существует, поэтому по теореме о пределе разности существует предел в правой части равенства. Следовательно, должен существовать и предел левой части, что противоречит условию.

Задача. а) Если $\int\limits_a^{+\infty} \Big(f(x)+g(x)\Big)dx$ сходится, можно ли утверждать, что сходятся оба интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$? б) Если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится, что можно сказать о сходимости $\int\limits_a^{+\infty} \Big(f(x)+g(x)\Big)dx$?

Формулы для вычисления несобственных интегралов

Для вычисления несобственных интегралов можно применять обобщение на эти интегралы формулы Ньютона-Лейбница.

Если существует первообразная $F(x)$ функции $f(x)$ при $a \le x < \infty$ и существует $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$, то справедливо равенство (***формула Ньютона-Лейбница для несобственных интегралов первого рода***):

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a), \text{ где } F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x).$$

Если у функции $f(x)$ с особой точкой $x = a$ существует первообразная $F(x)$ при $a < x \le b$ и существует $\lim\limits_{\delta \to +0} F(a+\delta)$, то справедливо равенство (***формула Ньютона-Лейбница для несобственных интегралов второго рода***):

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \text{ где } F(a) = \lim_{\delta \to +0} F(a+\delta).$$

Пример 2. Доказать по определению, что несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ сходится, и вычислить его.

По определению $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{A \to +\infty} \int\limits_0^A \frac{dx}{1+x^2}$, а так как $\int\limits_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} A$ и

$\lim\limits_{A\to+\infty} \operatorname{arctg} A = \dfrac{\pi}{2}$, то интеграл сходится и равен $\dfrac{\pi}{2}$.

Задача. Докажите по определению, что интегралы сходятся, и вычислите их:

а) $\int\limits_{2}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2-1}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \dfrac{dx}{1+x^2}$.

Пример 3. Доказать, что несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится и вычислить его.

Искомый интеграл является несобственным интегралом второго рода от функции $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ по полусегменту $\left(0;1\right]$. Особой точкой подынтегральной функции является точка $x=0$. Согласно определению, $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{\delta\to+0} \int\limits_{\delta}^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$, а так как $\int\limits_{\delta}^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2-2\sqrt{\delta}$ и $\lim\limits_{\delta\to+0}\left(2-2\sqrt{\delta}\right)=2$, то интеграл сходится и равен 2.

Задача. Докажите (по определению), что интегралы сходятся, и вычислите их:

а) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int\limits_0^1 \dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ в); $\int\limits_{-1}^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Пример 4. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bxdx$, где $a>0$, $b\neq 0$.

Искомый интеграл является несобственным интегралом первого рода. Согласно определению, требуется вычислить $\lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_0^A e^{-ax}\sin bxdx$.

Рассмотрим определенный интеграл $\int\limits_0^A e^{-ax}\sin bxdx$. Воспользуемся представлением $\sin bx = \operatorname{Im} e^{ibx}$ и перепишем последний интеграл следующим образом:

$$\int\limits_0^A e^{-ax}\sin bxdx = \operatorname{Im}\int\limits_0^A e^{-ax}e^{ibx}dx = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{-a+ib}e^{\left(-a+ib\right)x}\right)\Bigg|_0^A =$$

$$= \operatorname{Im}\left(\frac{-a-ib}{a^2+b^2}e^{\left(-a+ib\right)A} + \frac{a+ib}{a^2+b^2}\right) = \frac{b}{a^2+b^2} - \frac{e^{-aA}}{a^2+b^2}\Big(a\sin\left(bA\right)+b\cos\left(bA\right)\Big).$$

Предел этого выражения при $A\to+\infty$ равен $\dfrac{b}{a^2+b^2}$, поэтому

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bxdx = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Задача. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\cos xdx$.

Для несобственных интегралов первого и второго рода можно применять формулы замены переменной и интегрирования по частям.

Формула интегрирования по частям

Формула интегрирования по частям для несобственного интеграла первого рода имеет вид

$$\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx,$$

где $f(x)g(x)\Big|_a^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) - f(a)g(a)$. При этом предполагается, что функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны вместе со своими производными на всей области интегрирования.

Другими словами, верна следующая теорема.

Теорема 1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют непрерывные производные на полупрямой $a \le x < +\infty$ и существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x)$. Тогда из сходимости одного из интегралов $\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx$ следует сходимость другого, и справедливо равенство

$$\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx.$$

Аналогичное утверждение формулируется и для несобственных интегралов второго рода.

Теорема 2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на полусегменте $\left(a;b\right]$, где $a < b$ и имеют на этом полусегменте непрерывные производные. Пусть точка $x = a$ является особой точкой произведения $f(x)g'(x)$ и существует $\lim\limits_{\delta\to+0} f(a+\delta)g(a+\delta)$. Тогда из сходимости одного из интегралов $\int_a^b f(x)g'(x)dx$ и $\int_a^b f'(x)g(x)dx$ следует сходимость другого и справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx,$$

где $f(x)g(x)\Big|_a^b = f(b)g(b) - \lim\limits_{\delta\to+0} f(a+\delta)g(a+\delta)$.

Пример 5. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \left(2x+1\right)e^{-x}dx$.

Применим формулу интегрирования по частям, положив $f(x) = 2x+1,\ g'(x) = e^{-x}$:

$$\int_0^{+\infty} \left(2x+1\right)e^{-x}dx = -\left(2x+1\right)e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2e^{-x}dx = 1 - 2e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 3.$$

Задача. Вычислите интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} x^2 e^{-2x} dx$.

Пример 6. Доказать, что интеграл $\int_0^1 \ln x dx$ сходится, и вычислить его.

Искомый интеграл является несобственным интегралом второго рода. Подынтегральная функция неограниченно возрастает по абсолютной величине при $x \to +0$. Воспользуемся формулой интегрирования по частям.

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\delta \to +0} \left(x \ln x \right)\Big|_{\delta}^{1} - \int\limits_0^1 dx = -1.$$

Согласно определению, интеграл является сходящимся и равен -1.

Задача. Вычислите интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Замена переменной в несобственных интегралах.

Теорема 3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на полупрямой $a \le x < +\infty$, а функция $x = g(t)$ строго монотонна и имеет непрерывную производную на полупрямой $\alpha \le t < +\infty$, где $a = g(\alpha)$ и $g(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Тогда из сходимости одного из интегралов $\int\limits_a^{+\infty} f\left(x\right)dx$ и $\int\limits_{\alpha}^{+\infty} f\Big(g\left(t\right)\Big)g'\left(t\right)dt$ следует сходимость другого, и справедливо равенство

$$\int\limits_a^{+\infty} f\left(x\right)dx = \int\limits_{\alpha}^{+\infty} f\Big(g\left(t\right)\Big)g'\left(t\right)dt.$$

Теорема 4. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на полусегменте $\left(a;b\right]$, точка $x = a$ – особая точка этой функции. Пусть функция $x = g(t)$ строго монотонна и имеет непрерывную производную на полусегменте $\left(\alpha;\beta\right]$, где $b = g(\beta)$, и $g\left(t\right) \to a$ при $t \to \alpha$. Тогда из сходимости одного из интегралов $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$ и $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\Big(g\left(t\right)\Big)g'\left(t\right)dt$ следует сходимость другого, и справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f\left(x\right)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\Big(g\left(t\right)\Big)g'\left(t\right)dt.$$

Замечание. Иногда при замене переменной удобнее использовать не функцию $x = g(t)$, а обратную к ней функцию $t = g^{-1}(x)$. В этом случае выполнение условий теорем 3 или 4 можно проверить, опираясь на теорему о производной обратной функции.

Пример 7. Вычислить с помощью замены переменной несобственный интеграл первого рода $\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^x dx}{1 - e^{2x}}$.

Знаменатель в подынтегральном выражении не обращается в нуль на полупрямой $1 \le x < +\infty$, и, следовательно, подынтегральная функция непрерывна на этой полупрямой.

В рассматриваемом примере удобно сделать замену пременной при помощи равенства $t = e^x$ (см. замечание к теоремам 3 и 4). Функция $t = e^x$ непрерывно дифференцируема и строго возрастает на полупрямой $1 \le x < +\infty$; $t(1) = e$, $t \to +\infty$ при $x \to +\infty$ и выполнены равенства $e^{2x} = t^2$, $e^x dx = dt$. Исходный интеграл преобразуется следующим образом:

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^x dx}{1 - e^{2x}} = \int_e^{+\infty} \frac{dt}{1 - t^2}.$$

Последний интеграл вычислим при помощи формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int_e^{+\infty} \frac{dt}{1 - t^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + t}{1 - t} \right| \Bigg|_e^{+\infty} = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + e}{1 - e} \right|.$$

Задача. Вычислите с помощью замены переменной несобственные интегралы первого рода: а) $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$; б) $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$.

Пример 8. Вычислить с помощью замены переменной несобственный интеграл второго рода $\int_1^2 \frac{(2x + 1)dx}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$.

Подынтегральная функция определена и непрерывна на полусегменте $(1;2]$, точка $x = 1$ – её особая точка, поскольку в этой точке знаменатель дроби обращается в нуль. Сделаем замену переменной $t = x^2 + x - 2$. Функция $t(x) = x^2 + x - 2$ непрерывно дифференцируема, строго монотонна на полусегменте $(1;2]$; $(2x + 1)dx = dt$, $t(1) = 0$, $t(2) = 4$. Преобразуем исходный интеграл и вычислим его по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_1^2 \frac{(2x + 1)dx}{\sqrt{x^2 + x - 2}} = \int_0^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\Big|_0^4 = 4.$$

Задача. Вычислите с помощью замены переменной несобственный интеграл второго рода $\int_0^1 \frac{dx}{(2 - x)\sqrt{1 - x}}$.

Пример 9. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_0^{0.5} \frac{dx}{x \ln x}$.

Это несобственный интеграл второго рода. Особой точкой подынтегральной функции является $x = 0$. По определению $\int_0^{0.5} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{\delta \to +0} \int_\delta^{0.5} \frac{dx}{x \ln x}$. Нетрудно заметить, что первообразной функции $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ является $F(x) = \ln|\ln x|$. Так как $\int\limits_{\delta}^{0.5} \dfrac{dx}{x\ln x} = \ln\ln 2 - \ln\left|\ln\delta\right|$ и предел $\ln\left|\ln\delta\right|$ при $\delta \to +0$ не существует, то интеграл расходится.

Задача. Вычислите интегралы а) $\int_0^{0,5} \dfrac{dx}{x\ln^2 x}$; б) $\int\limits_0^1 \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$.

Вопросы и задачи для самостоятельного решения.

1. Сформулируйте определение несобственного интеграла первого рода $\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$.

2. Сформулируйте определение несобственного интеграла второго рода $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ с особой точкой $x = a$.
3. Сформулируйте теорему о замене переменной для несобственного интеграла второго рода.
4. Сформулируйте теорему о фомуле интегрирования по частям для несобственного интеграла второго рода.
5. Сформулируйте теорему о замене переменной для несобственного интеграла первого рода $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$.
6. Сформулируйте теорему о замене переменной для несобственного интеграла второго рода $\int\limits_a^b f(x)dx$, где точка $x = b$ является единственной особой точкой функции $f(x)$ на сегменте $\left[a;b\right]$.
7. Сформулируйте теорему об интегрировании по частям для несобственного интеграла первого рода $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)g'(x)dx$.
8. Сформулируйте теорему об интегрировании по частям для несобственного интеграла второго рода $\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx$, где точка $x = b$ является единственной особой точкой произведения $f(x)g'(x)$ на сегменте $\left[a;b\right]$.

9. Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \Big(f(x) - g(x)\Big)dx$ сходится, то можно ли утверждать, что сходятся оба интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$? Ответ обоснуйте.

10. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на полусегменте $\left[a;b\right)$, точка

$x=b$ – особая точка каждой из этих функций. Пусть $\int\limits_a^b f(x)dx$ расходится и $\int\limits_a^b g(x)dx$ расходится. Что можно сказать о сходимости интеграла $\int\limits_a^b \Big(f(x)-g(x)\Big)dx$? Ответ обоснуйте.

11. Исследуйте несобственные интегралы на сходимость с помощью определения сходимости.

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-x+1}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x+2}{x^2+4}dx$; г) $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x^2\ln^2 x}$;

д) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx,\ a>0$; е) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln(\cos x)dx$; ж) $\int\limits_{-0,5}^{-0,25} \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$; з) $\int\limits_0^{\pi} \operatorname{tg} x dx$;

и) $\int\limits_0^1 \frac{x^3\arcsin dx}{\sqrt{1-x^2}}$; к) $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x-1}$; л) $\int\limits_{-\infty}^{0} x^2e^{3x}dx$; м) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos xdx}{\sqrt{\sin x}}$.

Исследование сходимости несобственных интегралов от знакопостоянных функций.

Для исследования сходимости интегралов можно воспользоваться признаками сравнения, которые дают возможность свести исследование интеграла на сходимость к анализу сходимости более простых несобственных интегралов.

Теорема 5. (признак сравнения для несобственных интегралов первого рода). Пусть $0\le f(x)\le g(x)$ при $x\ge a$ и функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на любом сегменте $\Big[a;\ A\Big]$.

Тогда из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, а из расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

Замечание. Если неравенство $0\le f(x)\le g(x)$ выполняется не на всей области интегрирования $a\le x<+\infty$, а только при $x>A>a$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ можно представить в виде суммы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_a^{A} f(x)dx+\int\limits_A^{+\infty} f(x)dx$, где первый интеграл является собственным и, таким образом, вопрос о сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сводится к исследованию на сходимость несобственного интеграла $\int\limits_A^{+\infty} f(x)dx$, к которому применима теорема 5.

<u>Следствие из теоремы 5.</u>

Если функция $g(x)$ принимает только положительные значения при $x \geq A$, где $A > a$ и существует предел $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{|f(x)|}{g(x)} = k > 0$, то интегралы $\int\limits_A^{+\infty} f(x)dx$ $\int\limits_A^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Если $\int\limits_A^{+\infty} g(x)dx$ сходится и $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, то интеграл $\int\limits_A^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

Теорема 6. (признак сравнения для несобственных интегралов второго рода).

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на полусегменте $\left(a;b\right]$, где *a* – особая точка этих функций, интегрируемы на любом сегменте $\left[a+\delta;b\right]$, где $0 < \delta < b-a$, и удовлетворяют неравенствам $0 \leq f(x) \leq g(x)$ при $a < x \leq b$.

Тогда из сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ следует сходимость несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, а из расходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Замечание. Если неравенство $0 \leq f(x) \leq g(x)$ выполняется не на всем полусегменте $\left(a;b\right]$, где *a* – особая точка функций $f(x)$ и $g(x)$, а только на его части $\left(a;c\right]$, $c < b$, то связь между сходимостью (расходимостью) интегралов $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ такая же, как и у интегралов $\int\limits_a^c f(x)dx$ и $\int\limits_a^c g(x)dx$, к которым применима теорема 6.

<u>Следствие из теоремы 6.</u>

Если функция $g(x)$ принимает только положительные значения при $x \in \left(a;c\right]$, где $a < c \le b$ и существует предел $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{\left|f(x)\right|}{g(x)} = k > 0$, то несобственные интегралы второго рода $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ и $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Если сходится несобственный интеграл второго рода $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ и $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, то несобственный интеграл второго рода $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится.

Теоремы 5 и 6 и их следствия наиболее удобно применять для $g(x) = x^\alpha$ (α – какое-либо вещественное число).

Рассмотрим два ***эталонных интеграла*** а) $\int\limits_b^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha}$ и б) $\int\limits_0^b \dfrac{dx}{x^\alpha}$, где $b > 0$.

$$a)\ \int\limits_b^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_b^{A} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A \to +\infty} \begin{cases} \left(\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)_b^A, & \alpha \ne 1, \\ \left(\ln x\right)_b^A, & \alpha = 1, \end{cases} = \lim_{A \to +\infty} \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(A^{1-\alpha} - b^{1-\alpha}\right), & \alpha \ne 1, \\ \ln A - \ln b, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Если $\alpha > 1$, то предел существует и равен $\dfrac{b^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$. При $\alpha \le 1$ предела не существует. Таким образом, интеграл $\int\limits_b^{\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

$$б)\int\limits_0^{b} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\delta \to +0} \int\limits_\delta^{b} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\delta \to +0} \begin{cases} \left(\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)_\delta^b, & \alpha \ne 1; \\ \left(\ln x\right)_\delta^b, & \alpha = 1; \end{cases} = \lim_{\delta \to +0} \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(b^{1-\alpha} - \delta^{1-\alpha}\right), & \alpha \ne 1, \\ \ln b - \ln \delta, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Если $\alpha < 1$, то предел существует и равен $\dfrac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. При $\alpha \ge 1$ предела не существует. Таким образом, интеграл $\int\limits_0^{b} \dfrac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \ge 1$.

Пример 10. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$.

Обозначим $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+1}{x^4+1}$. Положим $g\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2}$.

Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x^4+x^2}{x^4+1}=1$ и $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2}$ сходится (эталонный интеграл), то, согласно следствию теоремы 5, интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{x^2+1}{x^4+1}dx$ тоже сходится.

Задача. Исследуйте на сходимость несобственные интегралы:

а) $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{x^3+1}{x^4+1}dx$; б) $\int\limits_0^{+\infty}\left(x-\dfrac{5x\sqrt{x}+x^4}{x^3+1}\right)dx$; в) $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Пример 11. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{\sin x+\sqrt[3]{x}}$.

Обозначим $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sin x+\sqrt[3]{x}}$. Особой точкой подынтегральной функции является $x=0$. Положим $g\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Заметим, что интеграл $\int\limits_0^1 g\left(x\right)dx$ сходится (эталонный).

$$\lim_{x\to+0}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sin x+\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x+o(x)+\sqrt[3]{x}}=1.$$

Согласно следствию теоремы 6 исходный интеграл сходится.

Задача. Исследуйте на сходимость несобственные интегралы

а) $\int\limits_0^{0,5}\dfrac{1}{x^2\ln\dfrac{1}{x}}dx$; б) $\int\limits_0^2\dfrac{dx}{x+\sqrt{x}}$; в) $\int\limits_0^2\dfrac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$.

Пример 12. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_0^9\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}dx}{x^{5/3}}$.

Преобразуем подынтегральную функцию: $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}{x^{5/3}}=\dfrac{1}{x^{7/6}}+\dfrac{1}{x^{1/6}}$. Функция $f(x)$ положительна всюду на промежутке интегрирования и выполнено неравенство $f(x)>\dfrac{1}{x^{7/6}}>0$. Поскольку интеграл $\int\limits_0^9\dfrac{dx}{x^{7/6}}$ расходится (эталонный), то, согласно следствию теоремы 6, исходный интеграл также расходится.

Задача. Исследуйте на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^4+8x^9}}$.

Пример 13. Исследовать на сходимость несобственный интеграл второго рода

$$\int_0^{0,5} \frac{1}{\left(x\ln x\right)^2}dx$$

Как известно из курса математического анализа 1семестра, $\lim\limits_{x\to 0} x\left|\ln x\right| = 0$, поэтому точка $x = 0$ является особой точкой подынтегральной функции. Заметим, что на полусегменте $x \in \left(0; 0,5\right]$ выполнены неравенства $x\left|\ln x\right| > \left(x\ln x\right)^2 > 0$ и $0 < \dfrac{1}{x\left|\ln x\right|} < \dfrac{1}{\left(x\ln x\right)^2}$. Как было показано в примере 8, интеграл $\displaystyle\int_0^{0,5}\frac{dx}{x\left|\ln x\right|} = -\int_0^{0,5}\frac{dx}{x\ln x}$ расходится, поэтому, согласно теореме 6, исходный интеграл также расходится.

Задача. Исследуйте на сходимость несобственный интеграл второго рода $\displaystyle\int_0^{0,3}\frac{dx}{x^{1,3}\ln 3x}$.

Пример 14. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\left|\ln x\right|}$.

Особой точкой подынтегральной функции является $x = 1$. В точке $x = 0$ подынтегральная функция имеет предел: $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1}{\left|\ln x\right|} = 0$, поэтому эта точка не является особой. Как известно из курса математического анализа, $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1-x}{\left|\ln x\right|} = 1$. Обозначим $f\left(x\right) = \dfrac{1}{\left|\ln x\right|}$, $g\left(x\right) = \dfrac{1}{1-x}$. Так как $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)} = 1$, и интеграл $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1-x}$ расходится, то, согласно следствию теоремы 6, исходный интеграл также расходится.

Задача. Исследуйте на сходимость несобственные интегралы

а) $\displaystyle\int_1^2\frac{\left(x^2+x-2\right)dx}{(x-1)^{\frac{3}{2}}\sin(x-2)}$; б) $\displaystyle\int_{-1}^0\frac{\sqrt{x+1}}{(-x)^{3/2}}dx$; в) $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}$.

Для сравнения исследуемого интеграла с одним из эталонных интегралов подынтегральную функцию можно приблизить многочленом с помощью формулы Тейлора.

Приведем некоторые соотношения, которые будут использоваться далее.

а) Разложения некоторых функций по формуле Маклорена.

$$e^x = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right);$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right);$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + o\left(x^n\right);$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o\left(x^n\right);$$

$$\operatorname{tg} x = x + o(x);\ \operatorname{th} x = x + o(x);\ \arcsin x = x + o(x);\ \operatorname{arc\,tg} x = x + o(x).$$

б) Оценки логарифмической и показательной функции

Как известно при $\alpha > 0$ и $a > 1$ выполняются предельные равенства

$$\lim_{x\to+0} x^\alpha \ln x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha \ln\frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} x^\alpha a^{-x} = 0,$$

из которых следуют оценки

$$|\ln x| < \frac{1}{x^\alpha} \text{ при } \alpha > 0 \text{ и достаточно малых } x;$$

$$0 < \ln x < x^\alpha \text{ при } \alpha > 0 \text{ и достаточно больших } x.$$

$a^{-x} = o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$ при $x \to +\infty$, где $\alpha > 0$ и $a > 1$.

Пример 15. Исследовать на сходимость интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3-1}\right)dx$.

Подынтегральная функция $f(x) = \sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3-1}$ интегрируема на любом отрезке $[1;A]$, $A > 1$ и положительна на полупрямой $x \in [1;+\infty)$. Для того, чтобы оценить её поведение на бесконечности, воспользуемся разложением по формуле Маклорена:

$$f(x) = \sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3-1} = x^{3/2}\sqrt{1+\frac{1}{x^3}} - x^{3/2}\sqrt{1-\frac{1}{x^3}} =$$

$$= x^{3/2}\left(1+\frac{1}{2x^3}\right) - x^{3/2}\left(1-\frac{1}{2x^3}\right) + o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) = \frac{1}{x^{3/2}} + o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right),\ x \to +\infty.$$

Положим $g\left(x\right)=\dfrac{1}{x^{3/2}}$. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ и $\int\limits_1^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то согласно следствию из теоремы 5, исходный интеграл является сходящимся.

Задача. Исследуйте на сходимость несобственные интегралы:

а) $\int\limits_1^{+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)dx$; б) $\int\limits_1^{+\infty}\left(\sqrt{x^5+9x}-\sqrt{x^5+5x}\right)dx$.

Пример 16. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} x^p\ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right)dx$ в зависимости от параметра *p*.

Разложим $f\left(x\right)$ по формуле Тейлора при $\dfrac{1}{x}\to 0$:

$$f\left(x\right)=x^p\ln\left(\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=x^p\ln\left(1-\frac{1}{2x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)=x^p\left(-\frac{1}{2x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right),$$

поэтому $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left|f(x)\right|}{\dfrac{1}{x^{4-p}}}=\dfrac{1}{2}$. Согласно следствию теоремы 6, $\int\limits_1^{+\infty} f\left(x\right)dx$ сходится или расходится вместе с $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^{4-p}}$. Последний интеграл сходится при $p<3$ и расходится при $p\geq 3$, то же верно для исходного интеграла.

Задача. Исследуйте на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\sin\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^p}dx$ в зависимости от параметра *p*.

Пример 17. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_e^{\infty}\sin\left(\dfrac{1}{x^3}\right)\dfrac{1}{\ln^p x}dx$.

Подынтегральная функция строго положительна на полупрямой $e\leq x<+\infty$. Обозначим её $f\left(x\right)$.

Воспользуемся следствием теоремы 5. Пусть $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$. Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left(\dfrac{1}{x^3}\right)\dfrac{x^2}{\ln^p x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\ln x\right)^{-p}\left(\dfrac{1}{x^3}+o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)\right)=0$ и $\int\limits_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2}$ сходится, то исходный интеграл также сходится.

Итак, интеграл $\int\limits_e^{\infty}\sin\left(\dfrac{1}{x^3}\right)\dfrac{1}{\ln^p x}dx$ сходится при любом значении *p*.

Задача. Исследуйте на сходимость несобственные интегралы в зависимости от параметра *p*: а) $\int\limits_{\frac{9}{\pi^2}}^{\infty} x^p \left(\cos\frac{1}{\sqrt{x}} - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} \right) dx$; б) $\int\limits_{1}^{\infty} \ln^p x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$.

Пример 18. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x}} dx$.

Подынтегральная функция является положительной на полусегменте $x \in [0;1)$ и неограниченно возрастает при $x \to 1-0$. При $x \in [0;1)$ справедлива оценка $\frac{e^x}{\sqrt{1-x}} \le \frac{e}{\sqrt{1-x}}$. Согласно теореме 6, сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x}} dx$ следует из сходимости интеграла $\int\limits_0^1 \frac{e}{\sqrt{1-x}} dx = 2e$. Таким образом, исходный интеграл сходится.

Задача. Исследуйте на сходимость несобственные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sin x} dx$; б) $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)} dx$; в) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{\sqrt[3]{x^8}} dx$.

Иногда исследовать на сходимость несобственный интеграл первого рода проще, чем несобственный интеграл второго рода, который можно свести к интегралу первого рода при помощи замены переменной на основании следующей теоремы.

Теорема 7. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на полусегменте $[a;b)$, *b* – единственная особая точка $f(x)$ на этом полусегменте. Пусть $x = g(t)$ - непрерывно дифференцируемая монотонно возрастающая функция, определенная при $t \in [\alpha;+\infty)$, причем $g(\alpha) = a$, и $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = b$. Пусть сходится несобственный интеграл первого рода $\int\limits_{\alpha}^{+\infty} f(g(t))\, g'(t) dt$. Тогда несобственный интеграл второго рода $\int\limits_a^b f(x) dx$ сходится и справедливо равенство $\int\limits_a^b f(x) dx = \int\limits_{\alpha}^{+\infty} f(g(t))\, g'(t) dt$.

Доказательство. Рассмотрим определенный интеграл $\int\limits_a^{g(A)} f(x) dx$, где $A > \alpha$, а значит $a < g(A) < b$. Сделаем замену переменной $x = g(t)$, $\alpha \le t \le g^{-1}(A)$. Получим

$$\int\limits_a^{g(A)} f(x) dx = \int\limits_{\alpha}^{A} f(g(t))\, g'(t) dt. \tag{3}$$

В этом равенстве перейдем к пределу при $A \to +\infty$, при этом $\lim\limits_{A\to+\infty} g(A) = b$. Поскольку предел правой части равенства (3) существует по условию и равен

$\int\limits_{\alpha}^{+\infty} f\left(g(t)\right) g'(t)dt$, то существует предел левой части, и справедливо равенство $\int\limits_{a}^{b} f\left(x\right) dx = \int\limits_{\alpha}^{+\infty} f\left(g(t)\right) g'(t)dt$, что и требовалось доказать.

Пример 19. Исследовать на сходимость несобственные интегралы: а) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-px} x^q dx$ при $p > 0,\ \ q > 0$; б) $\int\limits_{0}^{1} x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x} dx$ при $0 < p \le 1,\ \ q > 0$.

а) Интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-px} x^q dx$ является несобственным интегралом первого рода, поскольку $x = 0$ не является особой точкой подынтегральной функции при $q > 0$. Воспользуемся следствием теоремы 5. Обозначим $f(x) = e^{-px} x^q$. Положим $g(x) = e^{-\frac{p}{2}x}$. Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{p}{2}x} x^q = 0$ (при любых значениях q и $p > 0$), а $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{px}{2}} dx = \frac{2}{p}$ – сходится при $p > 0$, то интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-px} x^q dx$ также сходится при $p > 0,\ \ q > 0$.

В случае б) сделаем замену переменной $\ln\frac{1}{x} = t$. Тогда $dt = -\frac{dx}{x}$ и $\int\limits_{0}^{1} x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x} dx = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-pt} t^q dt$. Сходимость несобственного интеграла второго рода в левой части равенства следует из сходимости несобственного интеграла в правой части и теоремы 7.

Задача. Исследуйте на сходимость несобственные интегралы: а) $\int\limits_{1}^{+\infty} e^{-px} x^q dx$ при $p > 0,\ \ q \le 0$; б) $\int\limits_{0}^{1/e} x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x} dx$ при $0 < p \le 1,\ \ q \le 0$.

Каждый из рассмотренных выше несобственных интегралов представляет собой интеграл либо первого рода, либо второго рода. Пусть теперь требуется исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$, где точка a является особой точкой функции $f(x)$, и других особых точек у функции $f(x)$ на полупрямой $\left[a;+\infty\right)$ нет. Тогда можно разбить его на сумму двух несобственных интегралов:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_a^{c} f(x)dx + \int\limits_c^{+\infty} f(x)dx, \tag{4}$$

где первое слагаемое представляет собой интеграл второго рода, второе слагаемое − интеграл первого рода. Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, если сходятся оба интеграла в правой части равенства (4). Аналогично суммой двух несобственных интегралов представляется несобственный интеграл второго рода $\int\limits_a^{b} f(x)dx$, если a и b −особые точки функции $f(x)$: $\int\limits_a^{b} f(x)dx = \int\limits_a^{c} f(x)dx + \int\limits_c^{b} f(x)dx$, и также несобственный интеграл первого рода по всей прямой: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx \int\limits_c^{+\infty} f(x)dx$. Точку c в каждом случае можно выбрать произвольно.

Пример 20. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^n} dx$ в зависимости от параметра n.

При $x \to +0$ справедливо равенство $\operatorname{arctg} x = x + o(x)$, поэтому

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x^n} = \frac{x + o(x)}{x^n} = \frac{1 + o(1)}{x^{n-1}} \tag{5}$$

Выражение в правой части равенства (5) имеет предел при $x \to 0$ в случае $n \le 1$, а при $n > 1$ точка $x = 0$ является особой точкой подынтегральной функции. В случае $n > 1$ разобьем исходный интеграл на сумму двух несобственных интегралов первого и второго рода: $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^n} dx = \int\limits_0^{1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^n} dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^n} dx$. (Вместо предела интегрирования $x = 1$ можно было бы взять любое положительное число).

Согласно следствию теоремы 6, несобственный интеграл второго рода $\int\limits_0^{1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^n} dx$ сходится или расходится одновременно с интегралом $\int\limits_0^{1} \frac{1}{x^{n-1}} dx$, (см. (5)) то есть сходится при $1 < n < 2$ и расходится при $n \ge 2$.

Рассмотрим несобственный интеграл первого рода $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^n} dx$. Функция $\operatorname{arctg} x$ монотонно возрастает и $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, поэтому на полупрямой $x \ge 1$ справедливы оценки $\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{x^n} \le \frac{\operatorname{arctg} x}{x^n} \le \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^n}$, следовательно, по теореме 5 интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^n} dx$

сходится или расходится одновременно с интегралом $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^n} dx$, то есть сходится при $n > 1$ и расходится при $n \le 1$.

В итоге получаем, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^n} dx$ сходится при $1 < n < 2$, а при остальных значениях параметра n интеграл расходится.

Задача. Исследуйте на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th} x}{x^n} dx$ в зависимости от параметра n.

Пример 21. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{x^3\sqrt{x}} dx$.

Представим исходный интеграл как сумму двух интегралов

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{x^3\sqrt{x}} dx = \int\limits_0^{1} \frac{\ln(1+x^3)}{x^3\sqrt{x}} dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{x^3\sqrt{x}} dx$$

и исследуем их на сходимость по отдельности. Начнем с несобственного интеграла первого рода $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{x^3\sqrt{x}} dx$. Воспользуемся следствием из теоремы 5. Пусть $f(x) = \frac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^3\sqrt{x}}$, $g(x) = \frac{1}{x^3}$. Так как интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ сходится как эталонный, и верна цепочка равенств

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+x^3\right)x^3}{x^3\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+x^3\right)}{\sqrt{x}} = 0,$$

то несобственный интеграл первого рода $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{x^3\sqrt{x}} dx$ сходится.

Рассмотрим теперь интеграл $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1+x^3)}{x^3\sqrt{x}} dx$. Это несобственный интеграл второго рода, поскольку подынтегральная функция неограниченно возрастает при $x \to +0$, так как $\lim\limits_{x\to+0} \frac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^3\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+0} \frac{x^3 + o(x^3)}{x^{3,5}} = \lim\limits_{x\to+0} \frac{1+o(1)}{x^{0,5}} = +\infty$. Воспользуемся следствием из теоремы 6. Пусть $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Поскольку $\lim\limits_{x\to+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+0} \frac{\ln\left(1+x^3\right)\sqrt{x}}{x^3\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+0} \frac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^3} = 1,$

а интеграл $\int\limits_0^{1} g(x)dx = \int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится, то интеграл $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1+x^3)}{x^3\sqrt{x}} dx$ тоже сходится.

Окончательно получаем, что исходный интеграл сходится.

Задача. Исследуйте на сходимость несобственные интегралы

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{x^4\sqrt{x}}dx$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(x+1\right)^{3/2}\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}$.

Пример 22. Найти, при каких значениях параметра p сходится интеграл

$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2-\ln\left(1+x^2\right)}{x^p}dx$.

Представим исходный интеграл как сумму двух интегралов:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2-\ln\left(1+x^2\right)}{x^p}dx = \int\limits_0^{1} \frac{x^2-\ln\left(1+x^2\right)}{x^p}dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2-\ln\left(1+x^2\right)}{x^p}dx.$$

Сначала рассмотрим первый интеграл. При $x \to +0$ для подынтегральной функции справедливо представление $f\left(x\right) = \frac{x^2-\ln\left(1+x^2\right)}{x^p} = \frac{1}{x^p}\left(\frac{x^4}{2}+o\left(x^4\right)\right)$.

Функция $f\left(x\right)$ имеет предел при $x \to +0$ для $p \le 4$, и в этом случае интеграл является собственным. При $p > 4$ точка $x = 0$ является особой точкой подынтегральной функции $f\left(x\right)$.

В случае $p > 4$, согласно следствию из теоремы 6, интеграл $\int\limits_0^{1} \frac{x^2-\ln\left(1+x^2\right)}{x^p}dx$ сходится при $p-4<1$ (см. выше представление функции $f(x)$ при $x \to +0$), то есть при $4 < p < 5$.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2-\ln\left(1+x^2\right)}{x^p}dx$. Перепишем подынтегральную функцию в следующем виде: $f(x) = \frac{1-\frac{1}{x^2}\ln\left(1+x^2\right)}{x^{p-2}}$. Обозначим $g(x) = \frac{1}{x^{p-2}}$. Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$, то, согласно следствию из теоремы 5, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится или расходится вместе с интегралом $\int\limits_1^{+\infty} g(x)dx$. Последний интеграл сходится при $p-2>1$, то есть при $p > 3$ и расходится при $p \le 3$.

Окончательно, исходный интеграл сходится при $3 < p < 5$.

Задача. Найдите, при каких значениях параметра p сходится интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^p}{e^{x^2}-1}dx$.

Пример 23. Найти, при каких значениях параметров p и q сходится несобственный интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$.

Заметим, что подынтегральная функция $f\left(x\right) = \frac{1}{\sin^p x \cos^q x}$ принимает положительные значения при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ и любых значениях *p* и *q*. При $p \le 0,\ q \le 0$ функция $f\left(x\right)$ непрерывна на сегменте $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, следовательно, интеграл является собственным.

При $p > 0$ функция $f\left(x\right)$ неограниченно возрастает при $x \to +0$, поскольку $\sin^p x \to 0$ при $x \to +0$, а $\cos^q x$ – ограниченная функция. При $q > 0$ подынтегральная функция неограниченно возрастает при $x \to \frac{\pi}{2} - 0$, поскольку $\cos^q x \to 0$ при $x \to \frac{\pi}{2} - 0$.

Разобьем отрезок $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, на две части: $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$, и представим исходный интеграл как сумму двух несобственных интегралов второго рода:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}.$$

Единственной особой точкой подынтегральной функции в первом слагаемом является точка $x = 0$. В окрестности этой точки верны равенства $\sin x = x + o\left(x\right)$, $\cos x = 1 + o\left(x\right)$ и, следовательно, $\frac{1}{\sin^p x \cos^q x} = \frac{1}{x^p + o(x^p)}$, поэтому первый интеграл сходится при $p < 1$ согласно следствию из теоремы 6.

Во втором интеграле сделаем замену переменной $y = \frac{\pi}{2} - x$: $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{dy}{\cos^p y \sin^q y}$. Последний интеграл совпадает с уже рассмотренным интегралом $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$, если p и q поменять местами, поэтому он сходится при $q < 1$.

Окончательно, исходный интеграл сходится при $0 < p < 1$, $0 < q < 1$, при $p \le 0,\ q \le 0$ интеграл является собственным, при остальных значениях параметров он расходится.

Задача. Найдите, при каких значениях параметров p и q сходится несобственный интеграл $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^{p+1}(2-x)^{q-1}}$.

Пример 24. Найти, при каких значениях параметров p и q сходится интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$.

Запишем исходный интеграл как сумму интегралов:
$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x^p \ln^q x} + \int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$. В первом слагаемом сделаем замену переменной $x = 1+t$. Тогда $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^p \ln^q x} = \int\limits_0^1 \frac{dt}{\left(1+t\right)^p \ln^q \left(1+t\right)}$. При $q \le 0$ интеграл является собственным.

Оценим подынтегральную функцию при $t \to +0$ с помощью разложения по формуле Тейлора:

$$\frac{1}{\left(1+t\right)^p \ln^q \left(1+t\right)} = \frac{1}{\left(1+o(1)\right)\left(t^q + o\left(t^q\right)\right)} = \frac{1}{t^q + o\left(t^q\right)}.$$

Согласно следствию из теоремы 6, интеграл сходится при $0 < q < 1$ и расходится при $q \ge 1$ для любых значений p. Теперь будем исследовать второй интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ на сходимость при $q < 1$ и $p \in \mathbb{R}$.

Если $p = 1$, то $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^q x} = \begin{cases} \lim\limits_{A\to+\infty} \left.\frac{\ln^{-q+1} x}{-q+1}\right|_2^A, & q \ne 0; \\ \lim\limits_{A\to+\infty} \left.\ln x\right|_2^A, & q = 0. \end{cases}$

В обоих случаях предел не существует, и интеграл расходится при $p = 1,\ q < 1$.

В случае $p < 1,\ q < 1$ для всех $x \in \left[2;+\infty\right)$ справедлива оценка

$\frac{1}{x^p \ln^q x} \ge \frac{1}{x \ln^q x}$. Поскольку, как показано выше, интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^q x}$ расходится, то по теореме 5 интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ также расходится.

Осталось исследовать интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ на сходимость при $p > 1,\ q < 1$.

При $0 \le q < 1$ интеграл сходится согласно следствию теоремы 5. Действительно, обозначим, $f(x) = \frac{1}{x^p \ln^q x}$, $g(x) = \frac{1}{x^p}$ тогда $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\ln^q x} = \begin{cases} 0, & q > 0; \\ 1, & q = 0, \end{cases}$ и

$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p > 1$. При $q < 0$ положим $p = 1 + 2\alpha$, где $\alpha > 0$. Для достаточно больших положительных x выполнено неравенство $\ln x < x^{-\frac{\alpha}{q}}$, откуда $\ln^{-q} x < x^{\alpha}$, или $\frac{1}{\ln^q x} < x^{\alpha}$. Следовательно, $\frac{1}{x^p \ln^q x} < \frac{x^{\alpha}}{x^{1+2\alpha}} = \frac{1}{x^{1+\alpha}}$, и, согласно следствию теоремы 5, интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ сходится.

Окончательно, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$, сходится при $q < 1,\ p > 1$.

Задача. Найдите, при каких значениях параметров p и q сходятся интегралы

а) $\int\limits_1^2 x^p \ln^q x\, dx$; б) $\int\limits_0^1 x^p \ln^q x\, dx$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Исследуйте несобственные интегралы на сходимость с помощью признаков сходимости.

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^4 + x^2 - 1}{2x^6 - x^3 + 5} dx$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2 + x^6}}$; в) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^5 + x^{10}}}$; г) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\left(1 + x^2\right)^{2/3}} dx$;

д) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} \ln\left(x + 1\right)}$; е) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln\left(1 + 2x\right)}{x} dx$; ж) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\cos x \cdot \sin x}}$;

з) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$; и) $\int\limits_1^{2} \frac{\ln x}{\sqrt{x - 1}} dx$; к) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos x}}$; л) $\int\limits_{0,5}^{1} \frac{dx}{x \ln x}$; м) $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

2. Исследуйте несобственные интегралы на сходимость в зависимости от значений параметров.

а) $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x \left(\ln\ln x\right)^r}$; б) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$; в) $\int\limits_1^{+\infty} x^p \ln\left(\cos\frac{1}{x^2}\right) dx$; г) $\int\limits_0^{1} \frac{\ln\left(\sin x^2\right)}{x^p} dx$;

д) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$; е) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m}{1 + x^n} dx,\ n \geq 0$; ж) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{2 + x^n} dx, \quad n \geq 0$; з) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln\left(1 + x\right)}{x^n} dx$;

и) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-px} x^q dx$ при $p > 0,\ q \leq 0$.

Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов.

Определение. Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется ***сходящимся абсолютно***, если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \left|f(x)\right| dx$. Если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, а интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \left|f(x)\right| dx$ расходится, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется ***сходящимся условно***.

Теорема 8. Если сходится $\int\limits_a^{+\infty} \left|f(x)\right| dx$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ также сходится.

Так же формулируются определения абсолютно и условно сходящихся несобственных интегралов $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ и теоремы, аналогичные теореме 8, для этих интегралов.

Определение. Несобственный интеграл второго рода $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется ***сходящимся абсолютно***, если сходится интеграл $\int\limits_a^b \left|f(x)\right| dx$. Если сходится интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, а интеграл $\int\limits_a^b \left|f(x)\right| dx$ расходится, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется ***сходящимся условно.***

Теорема 9. Если сходится несобственный интеграл второго рода $\int\limits_a^b \left|f(x)\right| dx$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ также сходится.

Теорема 10. (Признак абсолютной сходимости интеграла I рода).

Пусть $\left|f(x)\right| \le F(x)$ при $x \ge a$. Тогда если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} F(x)\,dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится абсолютно.

Теорема 11. Признак Дирихле. Пусть выполнены условия:

1) функция $f(x)$ непрерывна на полупрямой $\left[a;+\infty\right)$ и имеет на этой полупрямой ограниченную первообразную $F(x)$, то есть $F'(x)=f(x)$;

2) функция $g(x)$ не возрастает на полупрямой $\left[a;+\infty\right)$, стремится к нулю при $x\to+\infty$ и имеет непрерывную производную $g'(x)$.

Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Замечание. Требования теоремы можно ослабить, не требуя непрерывности производной $g'(x)$.

Замечание. Сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ имеет место и в том случае, если условие 2 теоремы 11 выполняется не на всей полупрямой $\left[a;+\infty\right)$, а на её части $\left[\mathrm{A};+\infty\right)$, где $A>a$.

Пример 25. Исследовать интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$ на сходимость (абсолютную или условную).

Рассмотрим $\int\limits_1^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x^2}\right|dx$. Так как $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right|\le\frac{1}{x^2}$, а интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$ сходится, то исходный интеграл сходится абсолютно.

Задача. Исследуйте интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{\cos 3x}{x\sqrt{x}}dx$ на сходимость (абсолютную или условную).

Пример 26. Исследовать интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ на сходимость (абсолютную или условную).

Интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ сходится по признаку Дирихле, так как функция $\frac{1}{\sqrt{x}}$ монотонно стремится к нулю при $x\to+\infty$, имеет непрерывную производную $-\frac{1}{2}x^{-3/2}$ на полупрямой $\left[1;+\infty\right)$, а $\sin x$ имеет ограниченную первообразную $F(x)=-\cos x$.

Теперь докажем, что интеграл не сходится абсолютно. Оценим модуль подынтегральной функции: $\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right|\ge\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}=\frac{1-\cos 2x}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{\cos 2x}{2\sqrt{x}}$.

Рассмотрим несобственный интеграл первого рода $\int\limits_1^{+\infty}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{\cos 2x}{2\sqrt{x}}\right)dx$.

Интеграл от функции $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ расходится, а интеграл от функции $\frac{\cos 2x}{2\sqrt{x}}$ сходится по признаку Дирихле (это доказывается аналогично доказательству сходимости $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$), поэтому интеграл от разности функций расходится (см. пример 1), а вместе с ним расходится и интеграл $\int\limits_1^{\infty}\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right|dx$ (по признаку сравнения).

Таким образом, интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ сходится условно.

Задача. Исследуйте интеграл $\int\limits_3^{\infty}\frac{\cos x}{\ln x}dx$ на сходимость (абсолютную или условную).

Пример 27. Исследовать интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{x\sin x}{20+x^2\ln x}dx$ на сходимость (абсолютную или условную).

Исследуем интеграл на сходимость по признаку Дирихле. Функция $\sin x$ имеет ограниченную первообразную, а функция $g\left(x\right)=\frac{x}{20+x^2\ln x}$ стремится к нулю при $x\to+\infty$. Найдем производную функции $g(x)$:

$$g'(x)=\frac{20+x^2\ln x-x(2x\cdot\ln x+x)}{\left(20+x^2\ln x\right)^2}=\frac{20-(x^2\cdot\ln x+x^2)}{\left(20+x^2\ln x\right)^2}.$$

Функция $g'(x)$ непрерывна и принимает отрицательные значения при достаточно больших значениях x, например, при $x>5$. Следовательно, функция $\frac{x}{20+x^2\ln x}$ монотонно убывает, по крайней мере, на полупрямой $x\in\left[5;+\infty\right)$.

Таким образом, интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{x\sin x}{20+x^2\ln x}dx$ сходится по признаку Дирихле (см. замечание после теоремы 11).

Докажем теперь отсутствие абсолютной сходимости. Оценим модуль подынтегральной функции.

$$\left|\frac{x\sin x}{20+x^2\ln x}\right| = \frac{x\left|\sin x\right|}{20+x^2\ln x} \geq \frac{x\sin^2 x}{20+x^2\ln x} = \frac{1}{2}\frac{x}{20+x^2\ln x} - \frac{x}{20+x^2\ln x}\frac{\cos 2x}{2}.$$

Рассмотрим несобственный интеграл первого рода

$$\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{x}{20+x^2\ln x} - \frac{x}{20+x^2\ln x}\frac{\cos 2x}{2}\right)dx.$$

Несобственный интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{x}{20+x^2\ln x}dx$ расходится вместе с интегралом $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$, а интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{x}{20+x^2\ln x}\frac{\cos 2x}{2}dx$ сходится по признаку Дирихле, поэтому интеграл от разности функций расходится (см. пример 1), а вместе с ним расходится и интеграл $\int_1^{+\infty}\left|\frac{x\sin x}{20+x^2\ln x}\right|dx$. Итак, исходный интеграл сходится условно.

Задача. Исследуйте интеграл $\int_1^{+\infty}\sin x\frac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ на сходимость (абсолютную или условную).

Пример 28. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^{+\infty}x^p\sin(x^2)dx$ в зависимости от значения параметра $p\in\left(-\infty;1\right)$.

Представим интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\int_0^{+\infty}x^p\sin(x^2)dx = \int_0^1 x^p\sin(x^2)dx + \int_1^{+\infty}x^p\sin(x^2)dx.$$

Рассмотрим первый интеграл. При $x\to 0$ для подынтегральной функции справедливо представление $x^p\sin(x^2) = x^p\left(x^2+o(x^2)\right)$, причем при $p\geq -2$ интеграл $\int_0^1 x^p\sin(x^2)dx$ является собственным. При $p<-2$ точка $x=0$ является особой точкой подынтегральной функции. В этом случае интеграл $\int_0^1 x^p\sin(x^2)dx$ сходится одновременно с интегралом $\int_0^1 x^{p+2}dx$ по следствию из теоремы 6, то есть при $-3<p<-2$.

Исследуем интеграл $\int_1^{+\infty}x^p\sin(x^2)dx$ на сходимость по признаку Дирихле.

Сделаем замену переменной $x = \sqrt{t}$. Тогда $\int\limits_1^{+\infty} x^p \sin(x^2)dx = \dfrac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} t^{\frac{p-1}{2}} \sin t dt$.

Функция $f(t) = \sin t$ имеет ограниченную первообразную, а функция $g(t) = t^{\frac{p-1}{2}}$ монотонно убывает и стремится к нулю при $t \to +\infty$, и, кроме того, имеет непрерывную производную на полупрямой $\left[1;+\infty\right)$, если $p < 1$.

Таким образом, исходный интеграл сходится при $-3 < p < 1$.

Задача. Найдите, при каких значениях параметра p интеграл $\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos x}{x^p}\, dx$ сходится (абсолютно или условно).

Пример 29. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{x\sin x - \cos x}{x^2}\cos x\, dx$.

Первообразная функции $\cos x$ ограничена на полупрямой $x \geq 1$. Казалось бы, что следует разбить подынтегральную функцию на сомножители $f\left(x\right) = \cos x$ и $g\left(x\right) = \dfrac{x\sin x - \cos x}{x^2}$ и применить признак Дирихле. Для функции $g\left(x\right)$ верно соотношение $\left|g\left(x\right)\right| = \left|\dfrac{x\sin x - \cos x}{x^2}\right| \leq \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$, и, следовательно, $g(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Однако это стремление не монотонно, так как

$$g'\left(x\right) = \frac{\left(\sin x + x\cos x + \sin x\right)x^2 - 2x(x\sin x - \cos x)}{x^4} = \frac{\left(x^2+2\right)\cos x}{x^3}$$

является знакопеременной на полупрямой $\left[1;+\infty\right)$. Следовательно, определенная таким образом функция $g(x)$ не удовлетворяет условию теоремы о признаке Дирихле.

Для исследования интеграла на сходимость представим подынтегральную функцию в виде

$$\frac{x\cos x\sin x - \cos^2 x}{x^2} = \frac{\sin 2x}{2x} - \frac{\cos^2 x}{x^2}.$$

Интеграл от первого слагаемого сходится по признаку Дирихле, а интеграл от второго слагаемого сходится абсолютно. Следовательно, исходный интеграл сходится.

Задача. Докажите, что интеграл $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{\sin x - x\cos x}{x^2}\cos x\, dx$ расходится.

Пример 30. Найти, при каких значениях параметра p из интервала $p \in \left(-1;2\right)$ несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin(x+x^2)}{x^p}dx$ сходится абсолютно и при каких – условно.

Представим интеграл в виде суммы:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^p}dx = \int\limits_0^{1} \frac{\sin(x+x^2)}{x^p}dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^p}dx.$$

В окрестности точки $x = 0$ для подынтегральной функции справедливо представление $\dfrac{\sin(x+x^2)}{x^p} = \dfrac{x+o(x)}{x^p} = \dfrac{1+o(1)}{x^{p-1}}$, поэтому точка $x = 0$ является особой точкой подынтегральной функции при $p > 1$.

Первый интеграл сходится одновременно с интегралом $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{x^{p-1}} dx$ согласно следствию из теоремы 6, то есть при $1 < p < 2$. Отметим, что на отрезке $x \in \left[0;1\right]$ подынтегральная функция не меняет знак, поэтому сходимость несобственного интеграла второго рода $\int\limits_0^1 \dfrac{\sin(x+x^2)}{x^p} dx$ является абсолютной при $p \in \left(1;2\right)$. При $p \le 1$ интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{x^{p-1}} dx$ является определенным интегралом.

Исследуем теперь на сходимость несобственный интеграл первого рода $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin(x+x^2)}{x^p} dx$.

Сначала исследуем его на абсолютную сходимость при помощи признака сравнения (теорема 5). Для модуля подынтегральной функции справедлива оценка $\left|\dfrac{\sin(x+x^2)}{x^p}\right| < \dfrac{1}{x^p}$, поэтому, согласно теореме 5, при $p > 1$ несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin(x+x^2)}{x^p} dx$ абсолютно сходится.

Теперь исследуем этот интеграл на сходимость с помощью признака Дирихле. Для этого преобразуем его следующим образом:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^p} dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{(1+2x)\sin(x+x^2)}{(1+2x)x^p} dx.$$

Положим $f(x) = (1+2x)\sin(x+x^2)$, $g(x) = \dfrac{1}{(1+2x)x^p}$.

Функция $f(x) = (1+2x)\sin(x+x^2)$ имеет ограниченную первообразную $F(x) = -\cos(x+x^2)$. Функция $g(x) = \dfrac{1}{(1+2x)x^p}$ убывает, если $p > -1$, и стремится к нулю при $x \to +\infty$. Так как $g'\left(x\right) = -\dfrac{p+2x\left(p+1\right)}{(1+2x)^2 x^{p+1}}$, то при достаточно больших *x* и $p > -1$ функция $g(x)$ убывает монотонно, причем $g'\left(x\right)$ непрерывна на полупрямой $\left[1;+\infty\right)$. Согласно признаку Дирихле, интеграл сходится при $p > -1$.

На полусегменте $p \in \left(-1;1\right]$ несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^p}dx$ не сходится абсолютно. Это можно доказать так же, как в примере 25.

Итак, исходный интеграл сходится абсолютно при $p \in \left(1;2\right)$ и условно при $p \in \left(-1;1\right]$.

Задача. Исследуйте на сходимость в зависимости от параметров несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} x^p \sin\left(x^q\right)dx$ в случае $q > 0$.

Вопросы и задачи для самосотоятельного решения.

1. Сформулируйте определения абсолютно и условно сходящихся несобственных интегралов первого рода $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.
2. Сформулируйте определения абсолютно и условно сходящихся несобственных интегралов второго рода $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.
3. Сформулируйте признак Дирихле для несобственного интеграла первого рода $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$.
4. Можно ли утверждать, что из сходимости несобственного интеграла следует его абсолютная сходимость? Верно ли обратное утверждение? Ответы обоснуйте.
5. Пусть сходятся интегралы $\int\limits_0^{+\infty} f\left(x\right)dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{0} \left|f\left(x\right)\right|dx$. Что можно сказать о сходимости интегралов $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|f\left(x\right)\right|dx$?
6. Можно ли применять признак Дирихле для исследования сходимости интегралов от знакопостоянных функций?
7. Исследуйте интегралы на сходимость (абсолютную или условную):

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}dx$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\cos x}{40+x^2}dx$; в) $\int_0^{+\infty} x\sin(x^3)dx$; г) $\int\limits_2^{\infty} \frac{\sin x^3}{\ln x}dx$;

д) $\int\limits_0^{+\infty} x^2\cos\left(e^x\right)dx$.

8. Найдите, при каких значениях параметров интеграл сходится абсолютно и при каких – условно:

а) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx$; б) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(x^q\right)}{x^p}\,dx,\ q > 0$; в) $\int\limits_0^{+\infty} x^p \sin\left(x^q\right)dx,\quad q < 0$;

г) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q}dx, \quad q \geq 0$; д) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n}, \ \ n \geq 0$.

9. Докажите, что несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} x^p \sin(x^2)dx$ расходится при $p \in \left[1;+\infty\right)$.

10. Пусть интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f\left(x\right)dx$ сходится. Следует ли отсюда, что $f\left(x\right) \to 0$ при $x \to +\infty$? Рассмотрите примеры а) $\int\limits_0^{+\infty} \sin\left(x^2\right)dx$, б) $\int\limits_0^{+\infty} \left(-1\right)^{\left[x^2\right]}dx$, где $\left[x^2\right]$ − целая часть числа x^2.

11. Пусть $f\left(x\right)$ − монотонная функция при $x \in \left(a;+\infty\right)$, интеграл $\int\limits_a^{\infty} f\left(x\right)dx$ сходится. Докажите, что $f\left(x\right) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \to +\infty$.

12. Пусть интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f\left(x\right)dx$ сходится и функция $\varphi\left(x\right)$ ограничена на полупрямой $\left[a;+\infty\right)$. Приведите пример, показывающий, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f\left(x\right)\varphi\left(x\right)dx$ может быть расходящимся.

13. Пусть интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f\left(x\right)dx$ сходится абсолютно и функция $\varphi\left(x\right)$ ограничена на полупрямой $\left[a;+\infty\right)$. Докажите, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f\left(x\right)\varphi\left(x\right)dx$ сходится абсолютно.

Главное значение несобственного интеграла.

Определение. Если существует предел

$$\lim_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)dx,$$

то он называется ***главным значением несобственного интеграла*** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ и обозначается следующим образом: $V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Если несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то его значение равно главному значению этого интеграла. Но может быть так, что несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ расходится, но имеет конечное главное значение.

Например, интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^3 dx$ расходится, поскольку не существует предел

$$\lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \int\limits_{-B}^{+A} x^3 dx = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \left(\frac{A^4}{4} - \frac{B^4}{4} \right), \quad \text{но } V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^3 dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{+A} x^3 dx = 0 .$$

Пример 31. Найти $V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{ch} x} dx$.

Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{ch} x} dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{e^x + e^{-x}} dx$ сходится.

По определению $V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{ch} x} dx = \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{+A} \frac{x}{\operatorname{ch} x} dx$, а так как $\int\limits_{-A}^{+A} \frac{x}{\operatorname{ch} x} dx = 0$ (интеграл от нечетной функции в симметричных пределах), то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{ch} x} dx = 0$.

Задача. Найдите $V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$.

Пример 32. Найти $V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{x^2+1} dx$.

Заметим, что несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{x^2+1} dx$ расходится, поскольку следующий предел не существует:

$$\lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \int\limits_{B}^{A} \frac{1+x}{x^2+1} dx = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \left(\operatorname{arctg} A - \operatorname{arctg} B + \frac{1}{2} \ln \frac{A^2+1}{B^2+1} \right).$$

Согласно определению, $V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{x^2+1} dx = \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{+A} \frac{1+x}{x^2+1} dx$, а так как

$\int\limits_{-A}^{+A} \frac{1+x}{x^2+1} dx = \left(\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln\left(x^2+1\right) \right)\Bigg|_{-A}^{+A} = 2\operatorname{arctg} A$, и $\lim\limits_{A\to+\infty} 2\operatorname{arctg} A = \pi$, то

$V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{x^2+1} dx = \pi$.

Задача. Найдите $V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^3+1} dx$

Рассмотрим теперь несобственный интеграл второго рода $\int_a^b f(x)dx$, причем особой точкой функции $f(x)$ является внутренняя точка $x = \xi$ сегмента $\left[a;b\right]$.

Определение. Если существует

$$\lim_{\delta\to+0}\left(\int_a^{\xi-\delta} f(x)dx + \int_{\xi+\delta}^b f(x)dx\right),$$

то он называется главным значением несобственного интеграла второго рода $\int_a^b f(x)dx$ и обозначается так: $V.p.\int_a^b f(x)dx$.

Если несобственный интеграл второго рода $\int_a^b f(x)dx$ сходится, то его значение равно главному значению этого интеграла. Но может быть так, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ расходится, но имеет конечное главное значение.

Пример 33. Найти $V.p.\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^3}$.

Особой точкой подынтегральной функции является $x = 0$. По определению $V.p.\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^3} = \lim_{\delta\to+0}\left(\int_{-1}^{-\delta}\frac{dx}{x^3} + \int_{\delta}^2\frac{dx}{x^3}\right)$, а так как

$\int_{-1}^{-\delta}\frac{dx}{x^3} + \int_{\delta}^2\frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\Big|_{-1}^{-\delta} - \frac{1}{2x^2}\Big|_{\delta}^{2} = -\frac{1}{2\delta^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2\delta^2} = \frac{3}{8}$, то $V.p.\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^3} = \frac{3}{8}$.

Пример 34. Показать, что не существует $V.p.\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2}$.

Особой точкой подынтегральной функции является $x = 0$. По определению $V.p.\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\delta\to+0}\left(\int_{-1}^{-\delta}\frac{dx}{x^2} + \int_{\delta}^2\frac{dx}{x^2}\right)$, а так как

$\int_{-1}^{-\delta}\frac{dx}{x^2} + \int_{\delta}^2\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{-\delta} - \frac{1}{x}\Big|_{\delta}^{2} = \frac{1}{\delta} - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{\delta} = -\frac{3}{2} + \frac{2}{\delta}$ и $\lim_{\delta\to+0}\left(-\frac{3}{2} + \frac{2}{\delta}\right)$ не существует, то $V.p.\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2}$ не существует.

Задача. Найдите главные значения несобственных интегралов, если они существуют:

а) $\int\limits_{-1}^{3} \frac{x^2-4x+5}{x^2-4x+4}dx$; б) $\int\limits_{0,5}^{e} \frac{dx}{x\ln x}$.

Если на промежутке интегрирования имеется конечное число особых точек подынтегральной функции, то промежуток интегрирования разбивают неособыми точками на части, таким образом, чтобы каждая из них содержала одну особую точку. Главное значение интеграла вычисляется как сумма главных значений интегралов по каждому из полученных промежутков.

Пример 35. Найти $V.p.\int\limits_{0}^{5} \frac{dx}{x^2-3x+2}$.

Особыми точками подынтегральной функции являются $x=1$ и $x=2$. Разложим знаменатель на множители и представим интеграл как сумму двух слагаемых:

$$\int\limits_{0}^{5} \frac{dx}{x^2-3x+2} = \int\limits_{0}^{1,5} \frac{dx}{(x-1)(x-2)} + \int\limits_{1,5}^{5} \frac{dx}{(x-1)(x-2)}.$$

Найдем главные значения каждого из интегралов.

$$V.p.\int\limits_{0}^{1,5} \frac{dx}{(x-1)(x-2)} = \lim_{\delta\to+0}\left(\int\limits_{0}^{1-\delta} \frac{dx}{(x-1)(x-2)} + \int\limits_{1+\delta}^{1,5} \frac{dx}{(x-1)(x-2)}\right) =$$

$$= \lim_{\delta\to+0}\left(\left(\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\right)\Bigg|_{0}^{1-\delta} + \left(\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\right)\Bigg|_{1+\delta}^{1,5}\right) = -\ln 2;$$

$$V.p.\int\limits_{1,5}^{5} \frac{dx}{(x-1)(x-2)} = \lim_{\delta\to+0}\left(\int\limits_{1,5}^{2-\delta} \frac{dx}{(x-1)(x-2)} + \int\limits_{2+\delta}^{5} \frac{dx}{(x-1)(x-2)}\right) =$$

$$= \lim_{\delta\to+0}\left(\left(\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\right)\Bigg|_{1,5}^{2-\delta} + \left(\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\right)\Bigg|_{2+\delta}^{5}\right) = -\ln 2.$$

Окончательно получаем $V.p.\int\limits_{0}^{5} \frac{dx}{x^2-3x+2} = -2\ln 2$.

Задача. Найдите а) $V.p.\int\limits_{-4}^{0} \frac{dx}{x^2+5x+6}$; б) $V.p.\int\limits_{-1}^{1,5} \frac{dx}{x^2-3x+2}$.

Задачи для самостоятельного решения.

Исследуйте несобственные интегралы на сходимость и найдите их главные значения, если они существуют:

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^3+1}dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x dx$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$; г) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^2}$; д) $\int\limits_{-3}^{2} \frac{dx}{x^5}$;

е) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x}$; ж) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-6}$; з) $\int\limits_{0}^{7} \frac{dx}{x^2-6x+8}$; и) $\int\limits_{3}^{5} \frac{dx}{x^2-6x+8}$.

Несобственные интегралы, зависящие от параметра.

Несобственный интеграл первого рода, зависящий от параметра.

Определение. Пусть функция $f\left(x,\, y\right)$ определена при $\forall x > a$ и $\forall y$ из заданного промежутка *Y*, и пусть для каждого значения $y \in Y$ сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f\left(x,\, y\right)dx$. Тогда на промежутке *Y* определена функция $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f\left(x,\, y\right)dx$, называемая ***несобственным интегралом первого рода, зависящим от параметра y***.

При каждом фиксированном значении y_0 параметра y интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f\left(x,\, y_0\right)dx$ является несобственным интегралом первого рода без параметра. Интерес вызывает поведение функции $I(y)$ сразу на всем промежутке *Y*.

Определение. Будем говорить, что несобственный интеграл первого рода $\int\limits_a^{+\infty} f\left(x,\, y\right)dx$ ***сходится равномерно*** на промежутке *Y* к функции $I(y)$, если выполняются условия:

1) для любого фиксированного значения $y \in Y$ интеграл

$I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f\left(x,\, y\right)dx$ сходится;

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists A = A\left(\varepsilon\right)\ \ (A \ge a) : \forall R > A$ и $\forall y \in Y$ справедливо

$$\left| I\left(y\right) - \int\limits_a^R f\left(x,y\right)dx \right| = \left| \int\limits_R^{+\infty} f\left(x,y\right)dx \right| < \varepsilon .$$

Исходя из этого определения, сформулируем критерий равномерной сходимости (так называемый ***практический критерий***).

Если несобственный интеграл $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f\left(x,\, y\right)dx$ сходится для любого $y \in Y$, и $\lim\limits_{R\to\infty}\left\{ \sup\limits_{y\in Y}\left| \int\limits_R^{+\infty} f\left(x,y\right)dx \right| \right\} = 0$, то этот интеграл сходится равномерно по параметру y на множестве Y, а если $\lim\limits_{R\to\infty}\left\{ \sup\limits_{y\in Y}\left| \int\limits_R^{+\infty} f\left(x,y\right)dx \right| \right\} \ne 0$ или не существует (в частности, если имеются сколь угодно большие *R*, для которых $\sup\limits_{y\in Y}\left| \int\limits_R^{+\infty} f\left(x,y\right)dx \right| = +\infty$), то интеграл сходится неравномерно на множестве *Y*.

Доказательство практического критерия.

Выполнение равенства $\lim\limits_{R\to\infty}\left\{\sup\limits_{y\in Y}\left|\int\limits_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\right|\right\} = 0$ означает, что

$\forall\varepsilon > 0\ \exists A(\varepsilon)\ (A \ge a) : \forall R > A$ верно неравенство $\sup\limits_{y\in Y}\left|\int\limits_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$, кроме того, $\forall y \in Y$ выполнено неравенство $\left|\int\limits_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| \le \sup\limits_{y\in Y}\left|\int\limits_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\right|$, поэтому интеграл сходится равномерно по определению.

Пусть теперь $\lim\limits_{R\to\infty}\left\{\sup\limits_{y\in Y}\left|\int\limits_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\right|\right\} \ne 0$ или этот предел не существует. Это означает, что существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $A > a$ найдется число $R > A$, что выполняется неравенство $\sup\limits_{y\in Y}\left|\int\limits_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| > \varepsilon_0$.

По определению точной верхней грани для числа $\delta = \dfrac{\varepsilon_0}{2}$ существует такое $y_\delta \in Y$, что $\left|\int\limits_R^{+\infty} f(x,y_\delta)\,dx\right| > \varepsilon_0 - \delta = \dfrac{\varepsilon_0}{2}$, что по определению означает отсутствие равномерной сходимости.

Пример 36. Исследовать интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^p}$ на равномерную сходимость на полупрямой $p \in [a,+\infty),\ \ a > 1$.

1. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^p}$ сходится для любого фиксированного значения параметра p из указанного промежутка.

2. Воспользуемся практическим критерием. Рассмотрим $\sup\limits_{p\in[a,+\infty)}\left|\int\limits_R^{+\infty}\dfrac{dx}{x^p}\right| = \sup\limits_{p\in[a,+\infty)}\dfrac{R^{-p+1}}{p-1} = \dfrac{R^{-a+1}}{a-1}$. Поскольку $\dfrac{R^{-a+1}}{a-1} \to 0$ при $R \to +\infty$, если $a > 1$, то интеграл сходится равномерно на полупрямой $[a;+\infty)$, $a > 1$.

Задача. Исследуйте интеграл $\int\limits_2^{+\infty}\dfrac{dx}{x^{p-1}}$ на равномерную сходимость на полупрямой $p \in [4;+\infty)$.

Пример 37. Исследовать интеграл $\int\limits_3^{+\infty}\dfrac{\ln^p x}{x^m}dx$ на равномерную сходимость на отрезке $p \in [0;2]$ при $m > 1$.

В примере 24 было показано, что при $m>1$ интеграл сходится для любых p. Подынтегральная функция положительна при $x \in \left[3;+\infty\right)$, причем $\ln x > 1$. Применим практический критерий: $\lim\limits_{R\to\infty} \sup\limits_{p\in\left[0;2\right]} \int\limits_R^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x^m} dx = \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_R^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^m} dx = 0$.

Итак, исходный интеграл сходится равномерно на отрезке $p \in \left[0;2\right]$ при $m > 1$.

Задача. Исследуйте интеграл на равномерную сходимость на заданном множестве значений параметра p:

а) $\int\limits_3^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x^{3/2}} dx$, $p \in [-1;0]$; б) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{1}{x^p \ln^2 x} dx$, $p \in \left[1;3\right]$.

Пример 38. Исследовать интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-px} dx$ на равномерную сходимость на указанном промежутке изменения параметра p: а) $p \in (0;+\infty)$; б) $p \in [a;+\infty)$, $a > 0$.

Для любого фиксированного значения $p > 0$ интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-px} dx$ сходится и равен $\frac{1}{p}$.

Для исследования на равномерную сходимость воспользуемся практическим критерием: сначала вычислим интеграл $\int\limits_R^{+\infty} e^{-px} dx$ для фиксированного значения $p > 0$: $\int\limits_R^{+\infty} e^{-px} dx = \frac{1}{p} e^{-pR}$. Далее найдем $\sup\limits_p \left(\frac{1}{p} e^{-pR} \right)$.

В случае а) функция $F\left(p\right) = \frac{1}{p} e^{-pR}$ неограниченно возрастает при $p \to 0$ для каждого фиксированного значения R, поэтому $\sup\limits_{p\in\left(0;+\infty\right)} \frac{1}{p} e^{-pR} = +\infty$, следовательно, сходимость интеграла неравномерная.

Докажем, что интеграл сходится равномерно в случае б).

Поскольку $\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{p} e^{-pR} \right) = -\left(\frac{1}{p^2} + \frac{R}{p} \right) e^{-pR} < 0$ при $p \in [a;+\infty)$, то функция $\frac{1}{p} e^{-pR}$ – убывающая на промежутке $p \in [a;+\infty)$ для любого $R > 0$, поэтому $\sup\limits_{p\in\left[0;+\infty\right)} \frac{1}{p} e^{-pR} = \frac{1}{a} e^{-aR}$ и $\lim\limits_{R\to+\infty} \frac{1}{a} e^{-aR} = 0$. Отсюда следует, что сходимость исходного интеграла на промежутке $p \in [a;+\infty)$, где $a > 0$, равномерная.

Задача. Исследуйте интеграл $\int\limits_0^{+\infty} p e^{-px} dx$ на равномерную сходимость на указанном промежутке изменения параметра p: а) $p \in [a;b]$, $0 < a < b$, б) $p \in [0;b]$, $b > 0$.

Задача. Исследуйте интеграл $\int\limits_0^{+\infty} p^2 x e^{-p^2x^2}dx$ на равномерную сходимость на указанном промежутке изменения параметра *p*: а) $p\in\left(-\infty;+\infty\right)$, б) $p>\varepsilon>0$, ε – заданное число.

Пример 39. Исследовать интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+(x-p)^2}$ на равномерную сходимость на указанном промежутке изменения параметра *p*: а) $p>0$; б) $p\le 0$.

Для любого фиксированного значения *p* интеграл сходится:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+(x-p)^2}=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}p.$$

Для исследования интеграла на равномерную сходимость воспользуемся практическим критерием. Рассмотрим

$$f(R,p)=\int\limits_R^{+\infty}\frac{dx}{1+(x-p)^2}=\operatorname{arctg}(x-p)\Big|_R^{\infty}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(R-p).$$

В области $p>0$ справедлива цепочка равенств: $\sup\limits_{p>0}\left|f(R,p)\right|=\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})=\pi$, откуда следует, что функция $\sup\limits_{p>0}\left|f(R,p)\right|$ не стремится к нулю при $R\to+\infty$, то есть интеграл сходится неравномерно.

В области $p\le 0$ справедливы равенства $\sup\limits_{p\le 0}\left|f(R,p)\right|=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}R$ и $\lim\limits_{R\to\infty}\sup\limits_{p\le 0}\left|f(R,p)\right|=0$, откуда следует, что интеграл сходится равномерно.

Задача. Исследуйте интеграл $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{1+(x+p)^2}$ на равномерную сходимость на указанном промежутке изменения параметра *p*: а) $p>0$; б) $p\le 0$.

Пример 40. Исследовать интеграл $\int\limits_0^{+\infty}e^{-px}\sin x dx$, на равномерную сходимость на указанном промежутке изменения параметра *p*: а) $p\in(0;+\infty)$, б) $p\in[a;+\infty)$, $a>0$.

Сходимость интеграла при любом значени p>0 была установлена в ходе решения примера 4. Вычислим $\int\limits_R^{+\infty}e^{-px}\sin x dx$, где $R>0$. Первообразную функции $e^{-px}\sin x$ можно найти либо двукратным интегрированием по частям, либо, преобразовав функцию как $e^{-px}\sin x = \mathrm{Im}\left(e^{-px}\cdot e^{ix}\right)$, а затем взяв интеграл от экспоненты. Любым способом получаем $\int\limits_{R}^{+\infty} e^{-px}\sin x dx = \dfrac{e^{-pR}}{1+p^2}\left(\cos R + p\sin R\right)$.

Введем обозначения: $f\left(p,R\right) = \dfrac{e^{-pR}}{1+p^2}\left(\cos R + p\sin R\right)$, $\quad s\left(R\right) = \sup\limits_{p\in\left(0;+\infty\right)}\left|f\left(p,R\right)\right|$.

Покажем, что в случае а) у функции $s\left(R\right)$ не существует равного нулю предела при $R\to+\infty$. Для этого используем определение предела функции по Гейне. Выберем последовательность $R_n = 2\pi n$ ($n\in\mathbb{N}$). Тогда $R_n\to+\infty$ при $n\to\infty$. Для любого номера n величина $s\left(R_n\right)$ принимает значение $s\left(R_n\right) = \sup\limits_{p\in\left(0;+\infty\right)}\left|\dfrac{e^{-p\cdot 2\pi n}}{1+p^2}\right| = 1$ и, значит, последовательность $s\left(R_n\right)$ не является бесконечно малой. Согласно практическому критерию, исходный интеграл сходится неравномерно на промежутке $p\in\left(0;+\infty\right)$.

В случае б) при каждом фиксированном R для функции $f\left(p,R\right)$ имеют место соотношения:

$$\left|f(p,R)\right| = \left|\frac{e^{-pR}}{1+p^2}\left(\cos R + p\sin R\right)\right| = \left|\frac{e^{-pR}}{\sqrt{1+p^2}}\sin\left(R+\alpha\right)\right| \le \frac{e^{-pR}}{\sqrt{1+p^2}} \le \frac{e^{-aR}}{\sqrt{1+a^2}},$$

где $\alpha = \mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{p}$.

Для функции $s\left(R\right) = \sup\limits_{p\in\left[a;+\infty\right)}\left|\dfrac{e^{-pR}}{1+p^2}\left(\cos R + p\sin R\right)\right|$ получаем оценки

$0\le s\left(R\right)\le \dfrac{e^{-aR}}{\sqrt{1+a^2}}$. Предел при $R\to+\infty$ функции в правой части последнего неравенства равен нулю. По теореме о двух полицейских получаем $\lim\limits_{R\to+\infty} s\left(R\right) = 0$. Значит, интеграл сходится равномерно.

Задача. Исследуйте интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-px}\cos x dx$, на равномерную сходимость в области: а) $p\in\left(0;+\infty\right)$, б) $p\in\left[a;+\infty\right)$, $a>0$.

Несобственный интеграл второго рода, зависящий от параметра. Определения и примеры.

Определение. Пусть функция $f\left(x,\, y\right)$ определена для всех $x\in\left[a,b\right)$ и $y\in Y$, где Y –заданный промежуток, b – особая точка этой функции при каждом $y\in Y$. Пусть

$f(x,\, y)$ интегрируема в несобственном смысле на промежутке $x \in [a, b)$ для любого $y \in Y$. Тогда на множестве $y \in Y$ определена функция $I(y) = \int\limits_a^b f(x,\, y)dx$, называемая ***несобственным интегралом второго рода, зависящим от параметра y***.

Определение. Будем говорить, что несобственный интеграл второго рода $\int\limits_a^b f(x,\, y)dx$ сходится равномерно на множестве $y \in Y$ к функции $I(y)$, если

1) интеграл $I(y) = \int\limits_a^b f(x,\, y)dx$ сходится при каждом значении $y \in Y$;

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta$ такое, что $\forall \alpha \in (0; \delta)$ и $\forall y \in Y$ выполняется неравенство

$$\left| I(y) - \int\limits_a^{b-\alpha} f(x, y)dx \right| = \left| \int\limits_{b-\alpha}^{b} f(x, y)dx \right| < \varepsilon .$$

Аналогично формулируется определение равномерной сходимости для несобственного интеграла второго рода в случае, если особой точкой подынтегральной функции является точка $x = a$ – нижняя граница области интегрирования.

Исходя из этого определения, сформулируем критерий равномерной сходимости несобственного интеграла второго рода (практический критерий).

Пусть функция $f(x, y)$ определена при $x \in [a; b), y \in Y$, $x = b$ – особая точка функции $f(x, y)$ при каждом $y \in Y$. Тогда, если $\lim\limits_{\alpha \to +0} \left\{ \sup\limits_{y \in Y} \left| \int\limits_{b-\alpha}^{b} f(x, y)dx \right| \right\} = 0$, то несобственный интеграл второго рода сходится равномерно по параметру y, а если $\lim\limits_{\alpha \to +0} \left\{ \sup\limits_{y \in Y} \left| \int\limits_{b-\alpha}^{b} f(x, y)dx \right| \right\} \neq 0$ или не существует, то равномерная сходимость несобственного интеграла второго рода не имеет места.

Аналогично формулируется практический критерий равномерной сходимости для несобственного интеграла второго рода в случае, если особой точкой подынтегральной функции является точка $x = a$ – нижняя граница области интегрирования.

Доказательство практического критерия для несобственных интегралов второго рода с небольшими изменениями повторяет доказательство практического критерия для несобственных интегралов первого рода.

Пример 41. Исследовать на равномерную сходимость несобственный интеграл второго рода $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}$ на множестве $p \in (0; 0,5]$.

Особой точкой подынтегральной функции является $x = 0$. Интеграл является сходящимся (эталонный интеграл). Для того, чтобы выяснить, будет ли сходимость равномерной на множестве $p \in \left(0;0,5\right]$, воспользуемся практическим критерием. При $0 < \alpha < 1$ выполняются равенства $\sup\limits_{p\in\left(0;0,5\right]}\left|\int\limits_0^{\alpha}\frac{dx}{x^p}\right| = \sup\limits_{p\in\left(0;0,5\right]}\frac{\alpha^{-p+1}}{1-p} = 2\sqrt{\alpha}$. Поскольку $\lim\limits_{\alpha\to+0} 2\sqrt{\alpha} = 0$, то интеграл сходится равномерно.

Пример 42. Доказать, что интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}$ не сходится равномерно при $p \in (0;1)$.

Для каждого $p \in (0;1)$ интеграл сходится как эталонный. Для того, чтобы показать, что сходимость не является равномерной на интервале $p \in (0;1)$ воспользуемся практическим критерием.

При $0 < \alpha < 1$ получаем $\sup\limits_{p\in\left(0;1\right)}\left|\int\limits_0^{\alpha}\frac{dx}{x^p}\right| = \sup\limits_{p\in\left(0;1\right)}\frac{\alpha^{-p+1}}{1-p} = +\infty$, потому интеграл сходится неравномерно.

Пример 43. Доказать, что интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\sin\left(x^p\right)}{x}dx$ сходится неравномерно при $0 < p < 1$.

Сделаем замену переменной $x^p = t$. Тогда $x = t^{\frac{1}{p}}$, $dx = \frac{1}{p}t^{\frac{1}{p}-1}dt$ и $\int\limits_0^1 \frac{\sin\left(x^p\right)}{x}dx = \frac{1}{p}\int\limits_0^1\frac{\sin t}{t}dt$. Интеграл $\int\limits_0^1\frac{\sin t}{t}dt$ не является несобственным (напомним, что $\lim\limits_{t\to+0}\frac{\sin t}{t} = 1$), а выражение $\frac{1}{p}\int\limits_0^1\frac{\sin t}{t}dt$ имеет смысл при $p \neq 0$. Отсюда следует, что интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\sin\left(x^p\right)}{x}dx$ сходится при $0 < p < 1$. Для исследования на равномерную сходимость воспользуемся практическим критерием. При $0 < \alpha < 1$ получаем $\sup\limits_{0<p<1}\left|\int\limits_0^{\alpha}\frac{\sin\left(x^p\right)}{x}dx\right| = \sup\limits_{0<p<1}\left|\frac{1}{p}\cdot\int\limits_0^{\alpha^p}\frac{\sin t}{t}dt\right| = +\infty$, так как при $p \to +0$ и $0 < \alpha < 1$ первый сомножитель стремится к бесконечности, а второй отличен от нуля.

Следовательно, исходный интеграл сходится неравномерно.

Задача. Исследуйте интеграл $\int\limits_1^2\frac{dx}{x\ln^p x}$ на равномерную сходимость а) при $p \in (0,5;1)$; б) при $p \in (0;0,5)$.

Достаточные признаки равномерной сходимости несобственных интегралов.

Теорема 12. (Признак Вейерштрасса для несобственных интегралов первого рода). Пусть функция $f(x,y)$ определена в области $G=\{(x,y):\, x\geq a,\ y\in Y\}$, где Y – некоторый промежуток; для любого $y\in Y$ функция $f(x,y)$ интегрируема по x на любом сегменте $[a;A]$, $(A>a)$; в области G выполняется неравенство $|f(x,y)|\leq g(x)$, где $g(x)$ такая функция, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится. Тогда несобственные интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x,\ y)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} |f(x,\ y)|dx$ сходятся равномерно по параметру y на промежутке Y.

Замечание. Если неравенство $|f(x,y)|\leq g(x)$ выполняется не на всей области интегрирования $a\leq x<+\infty$, а только при $x>A>a$, то вопрос о равномерной сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ сводится к исследованию на равномерную сходимость несобственного интеграла $\int\limits_A^{+\infty} f(x,y)dx$, к которому применима теорема 12 о признаке Вейерштрасса.

Теорема 13. (Признак Вейерштрасса для несобственных интегралов второго рода) Пусть функция $f(x,y)$ определена в области $G=\{(x,y):\, x\in(a;b],\ y\in Y\}$, где Y – некоторый промежуток, $x=a$ – особая точка функции $f(x,y)$ при каждом $y\in Y$. Пусть $\forall y\in Y$ функция $f(x,y)$ интегрируема по x на любом сегменте вида $[a+\varepsilon;b]$, где $0<\varepsilon<b-a$; в области G выполняется неравенство $|f(x,y)|\leq g(x)$, где $g(x)$ – функция, определенная при $x\in(a;b]$, $x=a$ – особая точка функции $g(x)$. Пусть несобственный интеграл $\int\limits_a^{b} g(x)dx$ сходится. Тогда несобственные интегралы $\int\limits_a^{b} f(x,\ y)dx$ и $\int\limits_a^{b} |f(x,\ y)|dx$ сходятся равномерно по параметру y на промежутке Y.

Пример 44. Исследовать на равномерную сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin(xp)}{\sqrt{x^3}+2}dx$ для $p\in(-\infty;+\infty)$.

Воспользуемся признаком Вейерштрасса.

Неравенство $\left|\frac{\sin(xp)}{\sqrt{x^3}+2}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x^3}+2}$ справедливо для любого значения параметра p,

а интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}+2}dx$ сходится (по признаку сравнения). Значит, по признаку Вейерштрасса интеграл сходится равномерно при $p \in \left(-\infty;+\infty\right)$.

Задача. Исследуйте на равномерную сходимость интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos px}{1+x^2}dx$ при $p \in \left(-\infty;+\infty\right)$.

Прежде чем сформулировать ещё один достаточный признак равномерной сходимости несобственного интеграла первого рода, определим понятие равномерного относительно параметра *y* стремления функции $g\left(x,y\right)$ к нулю при $x \to +\infty$.

Пусть функция $g\left(x,y\right)$ определена при $x \ge a$ и $y \in Y$.

Определение. Говорят, что функция $g\left(x,y\right)$ равномерно относительно переменной $y \in Y$ стремится к нулю при $x \to +\infty$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists A > a$, такое, что $\forall x > A$ и $\forall y \in Y$ выполняется неравенство: $\left|g\left(x,y\right)\right| < \varepsilon$.

Теорема 14. <u>(Признак Дирихле-Абеля)</u>**.**

1) Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в области $G = \left\{\left(x,y\right) : x \ge a,\ \ y \in Y\right\}$, где *Y* – некоторый промежуток, и имеет в этой области ограниченную первообразную $F\left(x,y\right)$ по переменной *x*.

2) Функция $g(x,y)$ при каждом значении *y* из промежутка *Y* является невозрастающей функцией аргумента *x* на полупрямой $\left[a;+\infty\right)$; $g(x,y) \to 0$ при $x \to +\infty$ равномерно относительно переменной $y \in Y$; $g(x,y)$ имеет непрерывную в области *G* частную производную $\frac{\partial g}{\partial x}$. Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx$ сходится равномерно по параметру *y* на промежутке *Y*.

Замечание 1. Требования теоремы можно ослабить, не требуя непрерывности частной производной $\frac{\partial g}{\partial x}$.

Замечание 2. Если условие 2) теоремы 14 выполняется не на всей области интегрирования $a \le x < +\infty$, а только при $x > A > a$, то вопрос о равномерной сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ сводится к исследованию на равномерную сходимость несобственного интеграла $\int\limits_A^{+\infty} f(x,y)dx$, к которому применима теорема 14 о признаке Дирихле-Абеля.

Пример 45. Исследовать на равномерную сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\cos(xp)}{\sqrt{x^3}+1}dx$ в области $0,01 < p < 100$.

Попробуем применить признак Вейерштрасса. Учитывая, что $\left|\cos(xp)\right| \le 1$, получаем $\left|\frac{x\cos(xp)}{\sqrt{x^3}+1}\right| \le \frac{\left|x\cos(xp)\right|}{\sqrt{x^3}+1} \le \frac{x}{\sqrt{x^3}+1}$. При $x \to +\infty$ подынтегральная функция убывает как $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$, и, согласно признаку сравнения, последний интеграл расходится. Следовательно, признак Вейерштрасса применить не удается.

Попробуем воспользоваться признаком Дирихле-Абеля.

Первообразная по переменной *x* функции $f(x,p) = \cos(xp)$, равная $\frac{1}{p}\sin\left(xp\right)$, ограничена в области $\left\{\left(x,p\right) : x \ge 0;\ 0,01 < p < 100\right\}$.

Функция $g(x,p) = g\left(x\right) = \frac{x}{\sqrt{x^3}+1}$ монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$, начиная с некоторого x. Это легко проверить, найдя производную и исследовав ее знак: $g'(x) = \frac{\sqrt{x^3}+1-\frac{3}{2}x\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x^3}+1\right)^2} < 0$ при $\frac{\sqrt{x^3}}{2} > 1$, то есть, при $x > \sqrt[3]{4}$. Требование равномерного относительно параметра *p* стремления функции *g* к нулю выполнено автоматически, поскольку эта функция не зависит от параметра.

Интеграл сходится равномерно в рассматриваемой области изменения параметра по признаку Дирихле - Абеля.

Задача. Исследуйте интеграл на равномерную сходимость в указанном промежутке изменения параметра *p*:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}dx,\ p \in [a;+\infty),\ a > 0.$$

Пример 46. Исследовать интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}e^{-px}dx$ на равномерную сходимость при $p \in [0;+\infty)$.

Воспользуемся признаком Дирихле-Абеля. Положим $f(x,p)=\cos x$, $g\left(x,p\right)=\dfrac{e^{-px}}{\sqrt{x}}$.

Функция $f(x,p)$ имеет ограниченную первообразную по переменной x, равную $\sin x$, а функция $g\left(x,p\right)=e^{-px}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ при $p\geq 0$ монотонно и равномерно относительно $p\in\left(0;+\infty\right)$ стремится к нулю при $x\to+\infty$. Действительно, $\dfrac{\partial g}{\partial x}=e^{-px}\left(-\dfrac{1}{2x^{3/2}}-\dfrac{p}{x^{1/2}}\right)<0$, и для любого $\varepsilon>0$ возьмем $A\left(\varepsilon\right)=\dfrac{1}{\varepsilon^2}$, тогда для всех $x>A$ и каждого $p\in[0;+\infty)$ справедлива оценка $e^{-px}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}<e^{-pA}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{A}}\leq\dfrac{1}{\sqrt{A}}=\varepsilon$. Отсюда следует, что стремление к нулю функции $g\left(x,p\right)$ при $x\to+\infty$ является равномерным относительно $p\in\left[0;+\infty\right)$. Следовательно, интеграл сходится равномерно относительно $p\in\left[0;+\infty\right)$по признаку Дирихле-Абеля.

Несобственные интегралы второго рода, которые рассматриваются ниже, часто удобно исследовать, сводя их к несобственным интегралам первого рода.

Пример 47. Исследовать интеграл $\int\limits_0^1 x^{p-1}\ln^{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{x}dx$ на равномерную сходимость: а) при $p\in\left(p_0;1\right)$, $0<p_0<1$; б) при $p\in\left(0;1\right)$.

Интеграл сходится при $p\in\left(0;1\right]$ (см. пример 19).

В случае а) выполнены неравенства $0\leq x^{p-1}\ln^{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{x}\leq x^{p_0-1}\ln^{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{x}$ и, следовательно, несобственный интеграл $\int\limits_0^1 x^{p-1}\ln^{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{x}dx$ сходится равномерно при $p\in\left(p_0;1\right)$ согласно признаку Вейерштрасса.

В случае б) воспользуемся практическим критерием. $\sup\limits_{p\in\left(0;1\right)}\left|\int\limits_0^\alpha x^{p-1}\ln^{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{x}dx\right|=\left|\int\limits_0^\alpha x^{-1}\ln^{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{x}dx\right|=\left|\dfrac{3}{4}\ln^{\frac{4}{3}}x\Big|_0^\alpha\right|=+\infty$. Интеграл сходится неравномерно.

Задача. Исследуйте интеграл $\int\limits_0^1\dfrac{x^p}{\sqrt{1-x}}dx$ на равномерную сходимость при $p\in[0;+\infty)$.

Теорема 15. Критерий Коши для несобственных интегралов первого рода). Пусть функция $f\left(x,y\right)$ определена при $x\in\left[a;+\infty\right)$, $y\in Y$, и интеграл $\int\limits_a^{\infty} f\left(x,y\right)dx$ сходится для каждого значения $y\in Y$. Тогда интеграл $\int\limits_a^{\infty} f\left(x,y\right)dx$ сходится равномерно по параметру y на множестве Y в том и только том случае, если $\forall\varepsilon>0\ \exists A\geq a$, такое, что $\forall R_1>A,\ \ \forall R_2>A$ и $\forall y\in Y$ выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_{R_1}^{R_2} f\left(x,y\right)dx\right|<\varepsilon.$$

Критерий Коши имеет смысл применять в случае, когда невозможно обосновать равномерную сходимость с помощью достаточных признаков, или для обоснования неравномерной сходимости.

Пример 48. С помощью критерия Коши доказать, что интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ на промежутке $p\in\left(0;+\infty\right)$ сходится неравномерно.

Для начала заметим, что интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ сходится при каждом значении $p\in\left(0;+\infty\right)$ по признаку Дирихле. Действительно функция $\sin x$ имеет ограниченную первообразную, а функция $\frac{1}{x^p}$ имеет непрерывную производную $-\frac{p}{x^{p+1}}$ на полупрямой $x\in\left[1;+\infty\right)$ и монотонно стремится к нулю при $x\to+\infty$ при любом фиксированном положительном *p*. Однако это стремление не равномерно по *p*. Покажем это.

Напомним определение равномерного относительно параметра $p\in P$ стремления функции $f\left(x,p\right)$ к нулю при $x\to+\infty$: $\forall\varepsilon>0\ \exists A>0$, такое, что $\forall x>A$ и $\forall p\in P$ выполняется неравенство: $\left|f\left(x,p\right)\right|<\varepsilon$.

В данном примере *P* – это полупрямая $\left(0;+\infty\right)$. Составим отрицание к этому определению для функции $f\left(x,p\right)=\frac{1}{x^p}$: $\exists\varepsilon_0>0$, такое, что $\forall A>0\ \ \exists x_0>A$ и $\exists p_0>0$, для которых верно неравенство: $\frac{1}{{x_0}^{p_0}}\geq\varepsilon_0$.

Возьмем $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$ и $\forall A > 0$ положим $p_0 = \frac{\ln 2}{\ln\left(A+1\right)}$,

$x_0 = 2^{\frac{1}{p_0}} = 2^{\frac{\ln(A+1)}{\ln 2}} = 2^{\log_2\left(A+1\right)} = A + 1 > A$. Тогда $\frac{1}{x_0^{\ p_0}} = \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{p_0}}}\right)^{p_0} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \varepsilon_0$ и,

следовательно, при $x \to +\infty$ функция $\frac{1}{x^p}$ стремится к нулю неравномерно относительно $p \in \left(0;+\infty\right)$. Поэтому в рассматриваемом примере не выполнены условия признака Дирихле-Абеля.

Воспользуемся критерием Коши, согласно которому интеграл сходится неравномерно, если

$\exists \varepsilon > 0$,такое, что $\forall A > 1 \quad \exists R_1 > A$, $\exists R_2 > A$ и $\exists p \in \left(0;+\infty\right)$, для которых $\left|\int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{\sin x}{x^p} dx\right| \geq \varepsilon$.

Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и для любого $A > 1$ выберем натуральное число *k*, удовлетворяющее неравенству $k > A$, и положим $R_1 = 2\pi\,\mathrm{k} - \frac{\pi}{2}, R_2 = 2\pi\,\mathrm{k}; p = \frac{1}{k}$.

Тогда $\int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{\sin x}{x^p} dx = -\frac{\cos x}{x^p}\Bigg|_{R_1}^{R_2} - p\int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{\cos x}{x^{p+1}} dx = -\frac{1}{\left(2\pi k\right)^{\frac{1}{k}}} - p\int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{\cos x}{x^{p+1}} dx$.

Поскольку $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(2\pi k\right)^{\frac{1}{k}} = 1$, то при достаточно большом значении k справедлива оценка $\left(2\pi k\right)^{\frac{1}{k}} < 2$, откуда $\frac{1}{\left(2\pi k\right)^{\frac{1}{k}}} > \frac{1}{2}$.

Далее, при $x \in \left[2\pi k - \frac{\pi}{2};\ 2\pi k\right]$ и $p > 0$ выполняется неравенство $p\int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{\cos x}{x^{p+1}} dx > 0$. Поэтому для выбранных значений R_1, R_2 и p справедлива следующая оценка:

$$\left|\int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{\sin x}{x^p} dx\right| = \left|-\frac{\cos x}{x^p}\Bigg|_{R_1}^{R_2} - p\int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{\cos x}{x^{p+1}} dx\right| = \left|\frac{1}{\left(2\pi k\right)^{\frac{1}{k}}} + p\int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{\cos x}{x^{p+1}} dx\right| > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Согласно критерию Коши интеграл сходится неравномерно на промежутке $p \in \left(0;+\infty\right)$.

Задача. Докажите, что интеграл $\int\limits_0^1 \sin\frac{1}{x}\frac{dx}{x^p}$ при $0 < p \le 2-\varepsilon,\ \ \varepsilon > 0$ сходится равномерно, сведя несобственный интеграл второго рода к несобственному интегралу первого рода. Докажите отсутствие равномерной сходимости на интервале $0 < p < 2$.

Вопросы и задачи для самостоятельного решения.

1. Докажите практический критерий равномерной сходимости для несобственного интеграла второго рода в случае, если особой точкой подынтегральной функции является верхняя граница области интегрирования.
2. Сформулируйте и докажите практический критерий равномерной сходимости для несобственного интеграла второго рода в случае, если особой точкой подынтегральной функции является нижняя граница области интегрирования.
3. Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости несобственных интегралов первого рода.
4. Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости несобственных интегралов второго рода.
5. Сформулируйте признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла второго рода $\int\limits_a^b f\left(x,y\right)dx$ в случае, когда особой точкой подынтегральной функции является точка b.
6. Докажите признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла второго рода $\int\limits_a^b f\left(x,y\right)dx$, используя критерий Коши.
7. Сформулируйте признак Дирихле-Абеля равномерной сходимости несобственных интегралов первого рода.
8. Исследуйте интеграл $\int\limits_0^{1/e} \frac{dx}{x\left(p-\ln x\right)^2}$ на равномерную сходимость при $p \in \left[0;+\infty\right)$.
9. Исследуйте интегралы на равномерную сходимость в указанных промежутках

а) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-px}\operatorname{ch} x dx,\ \ p \in \left(1;+\infty\right);\ p \in \left(2;+\infty\right)$;

б) $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-px}\operatorname{sh} x dx,\ \ p \in \left(-\infty;-1\right);\ p \in \left(-\infty;-2\right)$;

в) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-px}x^{2016}dx,\ \ p \in \left(1;+\infty\right);\ p \in \left(0;+\infty\right)$;

г) $\int\limits_0^1 \frac{x^p}{\sqrt{1-x^2}}dx,\quad p \in \left[0;+\infty\right)$; д) $\int\limits_0^2 \frac{x^\alpha dx}{\sqrt[3]{\left(x-1\right)\left(x-2\right)^2}},\quad \alpha \in \left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$;

е) $\int\limits_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x}dx,\quad \alpha\in\left[a;b\right]\ \left(a,b\in\mathbb{R}\right)$; ж) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}dx,\quad \alpha\in\left[0;+\infty\right)$;

з) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}}dx,\quad p\in\left[0;10\right]$; и) $\int\limits_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}dx,\quad \alpha\in\left[0;+\infty\right)$;

к) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(x-\alpha\right)^2}dx,\quad \alpha\in\left(a;b\right)\left(a,b\in\mathbb{R}\right);\quad \alpha\in\left(-\infty;+\infty\right)$.

Непрерывность, интегрирование по параметру интеграла, зависящего от параметра.

Теорема 16. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в полуполосе $a\le x<+\infty, c\le y\le d$, а интеграл $I(y)=\int\limits_a^{+\infty}f\left(x,\ y\right)dx$ сходится равномерно по параметру *y* на сегменте $\left[c,d\right]$. Тогда функция $I\left(y\right)$ непрерывна на этом сегменте.

Пример 49. Найти, при каких значениях параметра p определена функция $F(p)=\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^p}dx$, и исследовать ее на непрерывность.

Во-первых, надо найти, при каких значениях параметра p интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^p}dx$ сходится. Так как $\ln x<x^\varepsilon,\ \forall\varepsilon>0$ при достаточно больших положительных значениях x, то $\frac{\ln x}{x^p}<\frac{1}{x^{p-\varepsilon}}$, и, в силу произвольности ε, интеграл сходится при $p>1$. Следовательно, функция $F(p)$ определена при $p>1$. При $p\le 1$ интеграл расходится (по признаку сравнения), поскольку в этой области при всех $x>e$ справедливы неравенства: $\frac{\ln x}{x^p}\ge\frac{1}{x^p}\ge\frac{1}{x}$, интеграл от функции $\frac{1}{x}$ расходится, следовательно, $F(p)$ не определена.

Для исследования функции $F(p)$ на непрерывность заметим, что подынтегральная функция непрерывна на множестве $\left\{\left(x,p\right):\ x\ge 1,\ p>1\right\}$. Для того, чтобы воспользоваться теоремой 16, покажем, что исходный интеграл сходится равномерно относительно p на отрезке $p\in\left[1+2\varepsilon;A\right]$, где ε – любое положительное число, *A* – любое число, большее $1+2\varepsilon$.

При достаточно больших *x* верны соотношения $\dfrac{\ln x}{x^p} \le \dfrac{\ln x}{x^{1+2\varepsilon}} < \dfrac{x^{\varepsilon}}{x^{1+2\varepsilon}} = \dfrac{1}{x^{1+\varepsilon}}$, и, поскольку $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^{1+\varepsilon}}$ сходится, то $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\ln x}{x^p} dx$ сходится равномерно на отрезке $p \in \left[1+2\varepsilon; A\right]$ согласно признаку Вейерштрасса. Значит, по теореме 15 функция $F\left(p\right)$ непрерывна на этом отрезке. В силу произвольности величин ε и *A* отсюда следует непрерывность $F\left(p\right)$ на интервале $p \in \left(1;+\infty\right)$.

Задача. Найдите, при каких значениях параметра *y* определена функция $F\left(y\right) = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\cos x}{x^y} dx$, и исследуйте ее на непрерывность.

Пример 50. Доказать, что функция $f(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(x-p)^2} dx$ непрерывна для всех значений параметра $p \in (0;+\infty)$.

Рассмотрим отрезок $p \in \left[0; p_0\right]$ и используем практический критерий равномерной сходимости интеграла:

$$\lim_{R\to+\infty} \sup_{p\in\left[0;p_0\right]} \int\limits_R^{+\infty} e^{-(x-p)^2} dx = \lim_{R\to+\infty} \sup_{p\in\left[0;p_0\right]} \int\limits_{R-p}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{R-p_0}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 0.$$

Значит, интеграл сходится равномерно при $p \in \left[0; p_0\right]$, а функция $f\left(p\right)$ непрерывна при этих значениях *p*. В силу произвольности p_0 функция $f\left(p\right)$ непрерывна на полупрямой $p \in (0;+\infty)$.

Задача. Докажите, что функция $f(p) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x}{1+x^p} dx$ непрерывна для всех значений параметра $p \in (2;+\infty)$.

Интегрирование несобственного интеграла по параметру.

Теорема 17. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в полуполосе $a \le x < +\infty, c \le y \le d$, а интеграл $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f\left(x, \ y\right) dx$ сходится равномерно по параметру y на сегменте $\left[c,d\right]$. Тогда функция $I\left(y\right)$ интегрируема на сегменте $\left[c;d\right]$, и справедливо равенство

$$\int\limits_c^d I(y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^{\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{\infty} dx \int\limits_c^d f(x,y)dy.$$

Иными словами, при выполнении условий теоремы можно изменять порядок интегрирования.

Пример 51. Исходя из равенства $\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\int\limits_a^b e^{-xy}dy$, вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx,\;\; 0<a<b.$

Запишем искомый интеграл в следующем виде: $\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_a^b e^{-xy}dy\right)dx$.

Подынтегральная функция e^{-xy} непрерывна в полуполосе $\{0\le x<+\infty,\; a\le y\le b\}$, а интеграл $\int\limits_0^{+\infty}e^{-xy}dx$ сходится равномерно на отрезке $y\in[a;b]$ в силу признака Вейерштрасса. По теореме 17 верно равенство $\int\limits_a^b\left(\int\limits_0^{+\infty}e^{-xy}dx\right)dy=\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_a^b e^{-xy}dy\right)dx$. Поэтому

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\int\limits_a^b\left(\int\limits_0^{+\infty}e^{-xy}dx\right)dy=\int\limits_a^b\left(-\frac{1}{y}e^{-xy}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=+\infty}dy=\int\limits_a^b\frac{dy}{y}=\ln\frac{b}{a}.$$

Задача. Используя формулу $\int\limits_a^b\frac{\sin xy}{x}dy=\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$, вычислите интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos 7x-\cos 3x}{x^2}dx$, если известно, что $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}dx=\frac{\pi}{2}$ при $y>0$.

Интеграл Пуассона.

Несобственный интеграл первого рода $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$ называется интегралом Пуассона:

$$\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2};\qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.$$

Алгоритм его вычисления приведен, например, в [5].

Пример 52. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(ax^2+bx+c\right)}dx$, $a>0$.

Преобразуем показатель экспоненты, выделив полный квадрат:

$$ax^2+bx+c=\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}.$$

Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(ax^2+bx+c\right)}dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2-\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2} e^{-\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)} \frac{d\left(\sqrt{a}x\right)}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Задача. Вычислите интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2+5x+1}dx$.

Пример 53. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos\left(qx\right)dx$, где $q \in (-\infty;+\infty)$.

Рассмотрим функцию $F\left(q\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+iqx}dx$, где i – мнимая единица. Вычисляя интеграл, получаем: $F(q) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{iq}{2}\right)^2+\left(\frac{iq}{2}\right)^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{q^2}{4}}$ (справедливость последнего равенства обоснована в курсе теории функции комплексной переменной). С другой стороны,

$$F\left(q\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\left(\cos qx + i\sin qx\right)dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos\left(qx\right)dx + i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\sin\left(qx\right)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{q^2}{4}}.$$

Приравнивая вещественные части в левой и правой частях последнего равенства, получаем $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos\left(qx\right)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{q^2}{4}}$.

Задача. Вычислите интегралы:

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\cos\left(qx\right)dx$, $q \in (-\infty;+\infty)$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\sin\left(px\right)dx$, $p \in (-\infty;+\infty)$;

в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2x}\sin 2x dx$.

Дифференцирование интеграла по параметру

Теорема 18. Пусть функция $f(x,y)$ и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в полуполосе $a \le x < +\infty,\ \ c \le y \le d$. Пусть интеграл $I(y) = \int\limits_{a}^{+\infty} f\left(x,\ \ y\right)dx$ сходится для каждого $y \in \left[c,d\right]$, а несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right)dx$ сходится равномерно по параметру y на сегменте $\left[c,d\right]$. Тогда функция $I(y)$ дифференцируема на сегменте $\left[c,d\right]$ и справедливо равенство $I'(y) = \int\limits_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right)dx$.

Иными словами, при этих условиях несобственный интеграл можно дифференцировать по параметру под знаком интеграла.

Пример 54. Исследовать функцию $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} px}{x(x^{3/2}+1)}dx$ на дифференцируемость при $p \in \left(-\infty;+\infty\right)$.

Заметим, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} px}{x(x^{3/2}+1)}dx$ сходится при любых значениях *p* по признаку сравнения для несобственных интегралов первого рода (при $x \to +0$ подынтегральная функция имеет конечный предел, поэтому точка $x = 0$ не является особой). Функции $f(x,p) = \frac{\operatorname{arctg} px}{x(x^{3/2}+1)}$ и $\frac{\partial f(x,p)}{\partial p} = \frac{1}{(1+x^2p^2)(x^{3/2}+1)}$ непрерывны при $x \in \left[0;+\infty\right)$, $p \in \left(-\infty;+\infty\right)$. Интеграл

$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial f(x,p)}{\partial p} dx$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса, так как $\left|\frac{\partial f(x,p)}{\partial p}\right| \le \frac{1}{x^{3/2}+1}$. Следовательно, согласно теореме 18 функция $F(p)$ является дифференцируемой для любого значения p из промежутка $\left[p_1; p_2\right]$, где p_1, p_2 – произвольные числа.

В силу произвольности $p_1,\ p_2$ функция дифференцируема при всех $p \in (-\infty;+\infty)$, причем $\dfrac{dF}{dp} = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{1}{(1+x^2p^2)(x^{3/2}+1)}dx$.

Задача. Исследуйте функцию $F(p) = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\cos(px)}{x(x^{1/2}+1)}dx$ на дифференцируемость при $p \in (0{,}1;+\infty)$.

Замечание. Для несобственных интегралов второго рода справедливы теоремы, аналогичные теоремам 16–18.

Пример 55. Вычислить $\int\limits_0^1 x^p \ln x\, dx$ при $p \in \left(-1;0\right]$, дифференцируя по параметру интеграл $\int\limits_0^1 x^p dx$. Обосновать возможность применения этого метода.

Вычислим интеграл от производной подынтегральной функции $F\left(p\right) = \int\limits_0^1 x^p dx$, дифференцируя подынтегральную функцию по параметру:

$\int\limits_0^1 \dfrac{\partial}{\partial p}\left(x^p\right)dx = \int\limits_0^1 x^p \ln x dx$. Последний интеграл является искомым.

Интеграл $F\left(p\right) = \int\limits_0^1 x^p dx$ сходится при каждом $p \in \left(-1;0\right)$, при $p = 0$ интеграл является собственным. Интеграл $\dfrac{dF}{dp} = \int\limits_0^1 x^p \ln x dx$ в силу признака Вейерштрасса сходится равномерно на отрезке $p \in \left[-1+\varepsilon;0\right]$, где $0 < \varepsilon < 1$, поскольку для $p \in \left[-1+\varepsilon;0\right]$ выполнено неравенство $x^p \ln x \le x^{-1+\varepsilon} \ln x$, а несобственный интеграл $\int\limits_0^1 x^{-1+\varepsilon} \ln x dx$ сходится при $\varepsilon \in \left(0;1\right]$ (см. пример 19).

Так как $F\left(p\right) = \int\limits_0^1 x^p dx = \dfrac{1}{p+1}$, то выполняются условия теоремы 17, и верна цепочка равенств: $\int\limits_0^1 x^p \ln x\, dx = \int\limits_0^1 \dfrac{\partial\left(x^p\right)}{\partial p}dx = \dfrac{dF}{dp} = -\dfrac{1}{\left(p+1\right)^2}$ при $p \in \left[-1+2\varepsilon;1\right]$.

В силу произвольности ε можно сделать вывод, что $\int\limits_0^1 x^p \ln x\, dx = -\dfrac{1}{\left(p+1\right)^2}$ на полусегменте $p \in \left(-1;0\right]$.

Задача. Вычислите интеграл $\int\limits_0^1 x^p \left(\ln x\right)^2 dx$, $p \in \left(-1;0\right]$, дифференцируя по параметру интеграл $\int\limits_0^1 x^p dx$. Обоснуйте возможность применения этого метода.

Пример 56. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x} e^{-px} dx$ с помощью дифференцирования по параметру при $p \in (0;+\infty)$.

Пусть $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x} e^{-px} dx$. Интеграл сходится при каждом значении $p > 0$ согласно признаку Дирихле, так как функция $\sin x$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную, а функция $\dfrac{e^{-px}}{x}$, монотонно убывая, стремится к нулю при $x \to +\infty$ и имеет непрерывную производную на любой полупрямой $x \in \left[a;+\infty\right)$ при $a > 0$. (Заметим, что подынтегральная функция имеет конечный предел при $x \to 0$).

Вычислим интеграл от производной подынтегральной функции $F(p)$ по параметру: $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\partial}{\partial p}\left(\dfrac{\sin x}{x} e^{-px}\right) dx = -\int\limits_0^{+\infty} \sin x e^{-px} dx$. Выше (см. пример 40) была доказана равномерная сходимость последнего интеграла при $p \in \left[a;+\infty\right)$, $\forall a > 0$, поэтому условия теоремы 18 о дифференцировании несобственного интеграла по параметру выполнены на каждом отрезке $p \in \left[a;A\right]$, $0 < a < A$, и тогда $\dfrac{\partial F}{\partial p} = -\int\limits_0^{+\infty} \sin x\, e^{-px} dx$. А так как $\int\limits_0^{+\infty} \sin x\, e^{-px} dx = \dfrac{1}{1+p^2}$ (см. пример 4), то $\dfrac{dF}{dp} = -\dfrac{1}{1+p^2}$. В силу произвольности чисел a и A это равенство верно при $p \in \left(0;+\infty\right)$.

Интегрируя полученное равенство по p, получаем $F\left(p\right) = -\operatorname{arctg} p + C$. Для определения неизвестной постоянной С найдем $\lim\limits_{p\to+\infty} F\left(p\right)$. Воспользуемся оценкой $\left|f\left(x,p\right)\right| = \left|\dfrac{\sin x}{x}\right| e^{-px} \le e^{-px}$, в силу которой

$$0 \le \left|F\left(p\right)\right| \le \int_0^{+\infty} \left|f\left(x,p\right)\right| dx \le \int_0^{+\infty} e^{-px} dx = \frac{1}{p}.$$

Переходя к пределу при $p \to +\infty$, получаем $\lim\limits_{p\to+\infty} F\left(p\right) = 0$, тогда $0 = -\dfrac{\pi}{2} + C$ и $C = \dfrac{\pi}{2}$. Значит, $F(p) = -\operatorname{arctg} p + \dfrac{\pi}{2}$.

Задача. Вычислите интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x^2}}{x^2} dx$, дифференцируя по параметру интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-\alpha x^2}}{x^2} dx$.

Пример 57. Вычислить с помощью дифференцирования по параметру b интеграл

$$F\left(b\right) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos bx dx, \quad b \in (-\infty;+\infty).$$

Во-первых, искомый интеграл сходится для любого $b \in \left(-\infty;+\infty\right)$ согласно признаку Вейерштрасса, поскольку $\left|e^{-x^2} \cos bx\right| \le e^{-x^2}$. Во-вторых, функции $f = e^{-x^2} \cos bx$ и $\dfrac{\partial f}{\partial b} = -xe^{-x^2} \sin bx$ непрерывны, а в-третьих, интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial b} dx = -\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} \sin bx dx$ сходится равномерно по параметру *b* на любом отрезке $b \in \left[-B;B\right]$ по признаку Вейерштрасса. Итак, на любом отрезке $b \in \left[-B;B\right]$ условия теоремы 18 выполнены, следовательно, можно найти производную интеграла по параметру *b*, дифференцируя функцию под знаком интеграла, то есть $\displaystyle\frac{dF}{db} = -\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} \sin bx dx$. Проведя интегрирование по частям, получаем $\displaystyle\frac{dF}{db} = \frac{1}{2} e^{-x^2} \sin bx \Big|_0^{+\infty} - \frac{b}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos bx dx = -\frac{b}{2} F$. Значит, функция $F\left(b\right)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению $\dfrac{dF}{db} + \dfrac{b}{2} F = 0$. Решением уравнения является функция $F(b) = Ce^{-\frac{b^2}{4}}$ (можно проверить подстановкой). Константу C можно найти из условия $\displaystyle F\left(0\right) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Окончательно, $F\left(b\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{b^2}{4}}$, $b \in \left[-B;B\right]$. В силу произвольности величины *B*, можно утверждать, что это равенство имеет место при $b \in \left(-\infty;+\infty\right)$.

Задача. Вычислите с помощью дифференцирования по параметру интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-3x^2} \sin pxdx, \quad p \in (-\infty; +\infty)$.

Пример 58. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2} \sin qxdx$, дифференцируя по параметру интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos qxdx$.

Интеграл $F(q) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos qxdx$ сходится для любого q. Вычислим интеграл от производной подынтегральной функции по параметру:

$$I(q) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial q}\left(e^{-x^2} \cos qx\right) dx = -\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2} \sin qxdx.$$

Интеграл $I(q)$ сходится равномерно при $q \in \mathbb{R}$ в силу признака Вейерштрасса, поскольку $\left|xe^{-x^2} \sin qx\right| \le xe^{-x^2}$, а $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2}$. Значит, по теореме 18 о дифференцировании несобственного интеграла по параметру исходный интеграл равен производной функции $F(q) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos qxdx$, взятой с обратным знаком: $I(q) = -\frac{dF}{dq}$.

$I(q) = -\frac{dF}{dq} = q\frac{\sqrt{\pi}}{4} e^{-\frac{q^2}{4}}$ (см. пример 57).

Задача. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-3x^2} \cos(px)dx, \quad p \in (-\infty; +\infty)$, дифференцируя по параметру интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-3x^2} \sin pxdx$.

Формулы Фруллани

Теорема 19. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на полупрямой $[0; +\infty)$ и интеграл $\int\limits_\delta^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ сходится для любого $\delta > 0$. Тогда интеграл $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$, где $a > 0, \quad b > 0$, сходится, при этом $I = f(0) \ln \frac{b}{a}$.

Во-первых, интеграл $I(\delta) = \int\limits_\delta^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$ для любого $\delta > 0$ сходится как разность сходящихся интегралов.

Во-вторых, $I(\delta)=\int\limits_{a\delta}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt-\int\limits_{b\delta}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt=\int\limits_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)}{t}dt$. В силу непрерывности функции $f(x)$ к последнему интегралу можно применить теорему о среднем значении:

$$\int\limits_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)}{t}dt=f(c)\int\limits_{a\delta}^{b\delta}\frac{1}{t}dt=f(c)\ln\frac{b}{a},\text{ где } a\delta\le c\le b\delta.$$

Отсюда $I=\lim\limits_{\delta\to 0}I(\delta)=f(0)\ln\frac{b}{a}$.

Теорема 20. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на полупрямой $\left[0;+\infty\right)$ и существует $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(+\infty)$. Тогда интеграл $I=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$, где $a>0,\ b>0$, сходится, при этом $I=\left(f(0)-f(+\infty)\right)\ln\frac{b}{a}$.

По определению $I=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\lim\limits_{\substack{A\to+\infty\\ \delta\to+0}}\int\limits_{\delta}^{A}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$. Рассмотрим

$$\int\limits_{\delta}^{A}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int\limits_{a\delta}^{aA}\frac{f(t)}{t}dt-\int\limits_{b\delta}^{bA}\frac{f(t)}{t}dt=$$
$$=\int\limits_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)}{t}dt+\int\limits_{b\delta}^{aA}\frac{f(t)}{t}dt-\int\limits_{b\delta}^{aA}\frac{f(t)}{t}dt-\int\limits_{aA}^{bA}\frac{f(t)}{t}dt=\int\limits_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)}{t}dt-\int\limits_{aA}^{bA}\frac{f(t)}{t}dt.$$

В силу непрерывности функции $f(x)$ к интегралам $\int\limits_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)}{t}dt$ и $\int\limits_{aA}^{bA}\frac{f(t)}{t}dt$ можно применить теорему о среднем значении:

$$\int\limits_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)}{t}dt=f(c_1)\int\limits_{a\delta}^{b\delta}\frac{1}{t}dt=f(c_1)\ln\frac{b}{a},\text{ где } a\delta\le c_1\le b\delta.$$

$$\int\limits_{aA}^{bA}\frac{f(t)}{t}dt=f(c_2)\int\limits_{aA}^{bA}\frac{1}{t}dt=f(c_2)\ln\frac{b}{a},\text{ где } aA\le c_2\le bA.$$

Переходя к пределу при $\delta\to+0$ и $A\to+\infty$, получаем $I=\left(f(0)-f(+\infty)\right)\ln\frac{b}{a}$.

Формулы, полученные в теоремах 19 и 20, называются формулами Фруллани.

Пример 59. Вычислить $I=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos\left(7x\right)-\cos\left(21x\right)}{x}dx$.

Применим формулу Фруллани. Это можно сделать, так как функция $f\left(x\right) = \cos x$ непрерывна на полупрямой $\left[0;+\infty\right)$ и интеграл $\int\limits_{\delta}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ сходится для любого $\delta > 0$ по признаку Дирихле. Тогда

$$I = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos\left(7x\right) - \cos\left(21x\right)}{x} dx = \cos 0 \cdot \ln \frac{21}{7} = \ln 3.$$

Задача. Вычислите: а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin\left(ax\right) - \sin\left(bx\right)}{x} dx,\ a > 0, b > 0;$

б) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin\left(e^{ax}\right) - \sin\left(e^{bx}\right)}{x} dx,\ a > 0, b > 0.$

Пример 60. Вычислить $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx, \quad \alpha > 0, \ \beta > 0.$

1) Вычисление интеграла с помощью формулы Фруллани.

Заметим, что $\int\limits_{\delta}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} dx$ сходится для любого числа $\delta > 0$, а функция $f(x) = e^{-x^2}$ непрерывна на полупрямой $\left[0;+\infty\right)$. Используя формулу Фруллани, получаем

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{f\left(\sqrt{\alpha} x\right) - f\left(\sqrt{\beta} x\right)}{x} dx = f\left(0\right) \ln \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} = \ln \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

2) Вычисление интеграла при помощи дифференцирования по параметру.

Обозначим $F\left(\alpha, \beta\right) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx$. Дифференцируя подынтегральную функцию по параметру α для каждого значения $\beta > 0$, получаем $\int\limits_{0}^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} dx$. Последний интеграл сходится равномерно по параметру α на каждом отрезке $\alpha \in \left[\varepsilon; A\right]$, где $0 < \varepsilon < A$.

Это можно доказать при помощи признака Вейерштрасса: $\left| -x e^{-\alpha x^2} \right| \le x e^{-\varepsilon x^2}$, а интеграл от функции в правой части неравенства сходится: $\int\limits_{0}^{+\infty} x e^{-\varepsilon x^2} dx = \frac{1}{2\varepsilon}$. Так как условия теоремы 17 о дифференцированиии несобственного интеграла по параметру α для каждого значения $\beta > 0$ выполнены, справедливы равенства

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}\left(\alpha,\beta\right) = -\int_0^{+\infty} xe^{-\alpha x^2}dx = -\frac{1}{2\alpha} \text{ и } F\left(\alpha,\beta\right) = -\ln\sqrt{\alpha} + C.$$

Поскольку $F\left(\beta,\beta\right) = 0$, то $C = \ln\sqrt{\beta}$. Окончательно, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}dx = \ln\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$.

В силу произвольности величин ε и A, это равенство справедливо при всех $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Задача. Вычислите интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\left(ax\right) - \operatorname{arctg}\left(bx\right)}{x}dx,\ a > 0, b > 0$ двумя способами: а) по формуле Фруллани, б) при помощи дифференцирования по параметру.

Интеграл Дирихле.

Интеграл Дирихле назван в честь немецкого математика Дирихле (хотя этот интеграл встречался и ранее в работах Лежандра и Пуассона):

$$D\left(\beta\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x}dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\beta.$$

В [5] показано, как можно вычислить интеграл Дирихле с помощью дифференцирования по параметру (см. также пример 56).

Зная значение интеграла Дирихле, можно вычислить другие интегралы, которые сводятся к нему в результате дифференцирования или интегрирования по параметру.

Пример 61. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \sin 2x}{x^2}dx$, дифференцируя по параметру

α интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \sin \alpha x}{x^2}dx$.

Заметим, что точка $x = 0$ не является особой точкой подынтегральной функции $\frac{\sin x \sin ax}{x^2}$, поскольку в нуле подынтегральная функция имеет конечный предел, равный α. Интеграл является несобственным интегралом первого рода и сходится при любом значении α по признаку сравнения.

Рассмотрим интеграл от производной подынтегральной функции по параметру:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\sin x \sin \alpha x}{x^2}dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos \alpha x}{x}dx.$$

Поскольку нам нужно вычислить значение $I\left(\alpha\right)$ при $\alpha = 2$, то для обоснования возможности дифференцирования по параметру под знаком интеграла достаточно исследовать интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos \alpha x}{x}dx$ на равномерную сходимость на отрезке $\alpha \in \left[2-\varepsilon; 2+\varepsilon\right]$, где $0 < \varepsilon < 0,5$. Заметим, что в последнем интеграле в точке $x = 0$ подынтегральная функция имеет предел, равный единице, отсюда интеграл

$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos \alpha x}{x} dx$ является несобственным интегралом первого рода. На отрезке $\alpha \in \left[2-\varepsilon; 2+\varepsilon\right]$, где $0 < \varepsilon < 0,5$ интеграл сходится равномерно по признаку Дирихле-Абеля. Действительно, функция $\sin x \cos \alpha x$ имеет ограниченную первообразную по переменной x на любом промежутке $0 < x < B$, где $0 < B < +\infty$,:

$$\int\limits_0^B \sin x \cos(\alpha x)\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^B \Big(\sin(1+\alpha)x + \sin(1-\alpha)x\Big) dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos(1+\alpha)x}{1+\alpha} + \frac{\cos(1-\alpha)x}{1-\alpha}\right)\Bigg|_0^B$$

при $\alpha \in \left[2-\varepsilon; 2+\varepsilon\right]$, а функция $\dfrac{1}{x}$ стремится к нулю при $x \to +\infty$ и непрерывна вместе с производной на любой полупрямой $\left[A; +\infty\right)$, где $A > 0$. Согласно теореме 18 о дифференцировании несобственного интеграла по параметру

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\sin x \sin \alpha x}{x^2} dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos \alpha x}{x} dx.$$

Последний интеграл можно вычислить, сведя его к сумме двух интегралов Дирихле:

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos \alpha x}{x} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(1+\alpha)x}{x} + \frac{\sin(1-\alpha)x}{x}\right) dx =$$

$$= \frac{\pi}{4}\Big(\operatorname{sgn}(1+\alpha) + \operatorname{sgn}(1-\alpha)\Big).$$

Интегрируя последнее выражение по α, получаем

$I\left(\alpha\right) = \dfrac{\pi}{4}\Big(\left|1+\alpha\right| - \left|1-\alpha\right|\Big) + C$. Используя условие $I\left(0\right) = 0$, найдем константу интегрирования: $C = 0$. Окончательно, $I\left(2\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Задача. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x^2} dx$.

Вопросы и задачи для самостоятельного решения.

1. Сформулируйте теорему о непрерывности несобственного интеграла первого рода, зависящего от параметра.
2. Сформулируйте теорему об интегрировании несобственного интеграла первого рода, зависящего от параметра.
3. Сформулируйте теорему о дифференцировании несобственного интеграла первого рода, зависящего от параметра.
4. Пусть интеграл $I\left(y\right) = \int\limits_a^{+\infty} f\left(x, y\right) dx$ сходится равномерно при $y \in \left(0; +\infty\right)$. Можно ли утверждать, что $I\left(y\right)$ – дифференцируемая функция? Ответ обоснуйте.

5. Пусть $I(y)=\int\limits_a^{+\infty} f\left(x,\ \ y\right)dx$ удовлетворяет условиям теоремы о непрерывности несобственного интеграла первого рода, зависящего от параметра, на любом отрезке $Y_1 \le y \le Y_2$, где $0 < Y_1 < Y_2$. Можно ли утверждать, что функция $I\left(y\right)$ непрерывна на полупрямой $y \in \left(0;+\infty\right)$? Ответ обоснуйте.

6. Пусть интеграл $I\left(y\right)=\int\limits_a^{+\infty} f\left(x,y\right)dx$ сходится равномерно при $y \in \left[c;d\right]$, и в области $Q=\left\{\left(x,y\right):\ a \le x < +\infty;\ c \le y \le d\right\}$ существует производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Верно ли утверждение, что функция $I\left(y\right)$ дифференцируема на интервале $\left(c;d\right)$? Ответ обоснуйте.

7. Докажите тождество: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\alpha x^2+2\beta x\right)}dx=\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}e^{\dfrac{\beta^2}{\alpha}}$ для $\alpha>0,\ \beta>0$.

8. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-a^2x^4}dx,\ a \ne 0$.

9. Вычислите интеграл $F(p)=\int\limits_0^1 x^{p-1}\ln^m x dx$, где $m-$заданное натуральное число, а $p \in \left(0;1\right]$, дифференцируя по параметру интеграл $\int\limits_0^1 x^{p-1}dx$. Обоснуйте возможность применения этого метода.

10. Докажите тождество $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx=2\sqrt{\pi}e\left(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}\right)$ для $\alpha>0,\beta>0$.

11. Используя формулу $\int\limits_0^1 e^{-x}\cos\left(xy\right)dy=\dfrac{e^{-x}\sin x}{x}$, вычислите интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{e^{-x}\sin x}{x}dx$.

12. Вычислите интеграл $\int\limits_0^1\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}dx$, пользуясь формулой $\dfrac{\mathrm{arctgx}}{x}=\int\limits_0^1\dfrac{dt}{1+x^2t^2},\ x>0$.

13. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}\left(px\right)dx}{x\left(1+x^2\right)}$ методом дифференцирования по параметру.

14. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-2\sqrt{3}x}\sin 2x}{x}dx$, дифференцируя по параметру интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}\sin 2x}{x}dx$.

Совет. Для определения константы интегрирования используйте интеграл Дирихле.

15. Вычислите интеграл $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$, дважды дифференцируя по параметру интеграл $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-px^2}dx$.

16. Вычислите интегралы

а) $D(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \sin\lambda\cos\lambda x\frac{d\lambda}{\lambda}$; б) $\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2 dx$; в) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin^3\alpha x}{x}dx$;

г) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x\cdot\cos^2 x}{x}dx$; д) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\operatorname{tg} x}dx$; е) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}dx$; ж) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin^2\beta x}{x^2\left(1+x^2\right)}dx$.

Интегралы Эйлера

Интегралами Эйлера называются две функции:

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx, \text{ – «гамма-функция» и}$$

$$\mathrm{B}(p,q) = \int\limits_0^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \text{ – «бета-функция».}$$

Гамма-функция

1. Несобственный интеграл $\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ сходится при $p > 0$, равномерно сходится на любом промежутке $p \in [\alpha, +\infty)$, $\alpha > 0$.

2. $\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-x}dx = \sqrt{\pi}$.

3. $\Gamma'(p) = \int\limits_0^{\infty} x^{p-1}\cdot\ln x\cdot e^{-x}dx$, $p > 0$.

4. Формулу понижения $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ получим интегрированием по частям (при $p > 0$): $\Gamma(p+1) = \int\limits_0^{+\infty} x^p e^{-x}dx = -x^p e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + p\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx = p\Gamma(p)$,

(если $n \in \mathbb{N}$, то $\Gamma(n+1) = n!$).

5. $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi},\ n \in Z$.

6. Формула дополнения: $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}$, $0 < p < 1$. (См. курс ТФКП)

Пример 62. Выразить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ через гамма-функцию.

Сделаем замену переменной $t = x^2$. Тогда получим

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Задача. Вычислите и укажите область сходимости интеграла:

а). $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^p}dx$; б) $\int\limits_0^1 (-\ln x)^p\,dx$.

Пример 63. Представить интеграл $I = \int\limits_0^{+\infty} x^p e^{-ax}\ln x dx$, $a > 0$ с помощью гамма-функции, используя формулу $\frac{d}{dp}\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}\cdot \ln x \cdot e^{-x}dx$. Запишем $\Gamma(p)$ следующим образом: $\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} (ax)^{p-1} e^{-ax}d(ax) = a^p\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-ax}dx$. Тогда

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{\Gamma(p)}{a^p}\right) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}\cdot \ln x\cdot e^{-ax}dx.$$ Отсюда $$I = \int\limits_0^{+\infty} x^p e^{-ax}\ln x dx = \frac{d}{dp}\frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}}.$$

Задача. Укажите область сходимости интеграла $\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x^2}dx$ и выразите его через гамма-функцию.

Бета-функция

1. Интеграл $\mathrm{B}(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ сходится при $p > 0$, $q > 0$, равномерно сходится при $p \in [p_0,\infty)$, $q \in [q_0,\infty)$, $p_0 > 0$, $q_0 > 0$.

2. $\mathrm{B}(p,q) = \mathrm{B}(q,p)$.

3. Бета-функцию можно представить как несобственный интеграл I рода:

$$B(p,q) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx.$$

Для того, чтобы доказать справедливость последних равенств, сделаем замену переменной $x = \dfrac{t}{1+t}$ в интеграле $\int\limits_0^1 x^{p-1}\left(1-x\right)^{q-1} dx$. Тогда $1-x = \dfrac{1}{1+t}, dx = \dfrac{dt}{\left(1+t\right)^2}$,

где $0 < t < \infty$, и $\mathrm{B}\left(p,q\right) = \int\limits_0^1 x^{p-1}\left(1-x\right)^{q-1} dx =$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p-1}(1+t)^{q-1}} \frac{dt}{\left(1+t\right)^2} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}dt}{(1+t)^{p+q}} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{q-1}dt}{(1+t)^{p+q}}.$$

4. $\mathrm{B}\left(p,q\right) = \dfrac{\Gamma\left(p\right)\Gamma\left(q\right)}{\Gamma\left(p+q\right)}$.

Пример 64. Исследовать интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^{p-1}}{1+x^q} dx$ на сходимость в зависимости от параметра *p*, считая что $q > 0$.

Воспользуемся представлением бета-функции через интеграл 1 рода. Сделаем замену переменных $x^q = t$, $x = t^{\frac{1}{q}}$ $dx = \dfrac{1}{q} t^{\frac{1}{q}-1} dt$:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx = \frac{1}{q}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{p-1}{q}}}{1+t} \cdot t^{\frac{1}{q}-1} dt = \frac{1}{q}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{p}{q}-1}}{1+t} \cdot dt = \frac{1}{q}\mathrm{B}\left(\frac{p}{q}, 1-\frac{p}{q}\right).$$

Следовательно, интеграл сходится при $0 < \dfrac{p}{q} < 1$.

Задача. Укажите область сходимости интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^{p-1}}{(1+x)^q} dx$ и выразите его через интегралы Эйлера.

Пример 65. Укажите область сходимости интеграла $\int\limits_0^1 (1-x^p)^{\left(\frac{-1}{p}\right)} dx$, при $p > 0$ и выразите его через интегралы Эйлера.

Для того чтобы представить интеграл в виде бета-функции, сделаем замену переменной $1 - x^p = t$, $x = \left(1-t\right)^{\frac{1}{p}}$, $dx = -\dfrac{1}{p}\left(1-t\right)^{\frac{1}{p}-1} dt$. Тогда

$$\int\limits_0^1 (1-x^p)^{\frac{-1}{p}} dx = \frac{1}{p}\int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{p}}\left(1-t\right)^{\frac{1}{p}-1} dt = \frac{1}{p}\mathrm{B}\left(1-\frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right).$$

Следовательно, интеграл сходится при $0 < \dfrac{1}{p} < 1$.

Задача. Выразите интеграл $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{\left(1+x^n\right)^p} dx,\ n > 0$ через Эйлеровы интегралы и определите его область существования.

Совет: Сделайте замену $t = \frac{1}{1+x^n}$.

Пример 66. Вычислите интеграл $I = \int\limits_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx,\ a > 0$

Сделаем замену переменной $\left(\frac{x}{a}\right)^2 = t$, $x = at^{1/2}$, $dx = \frac{a}{2} t^{-1/2} dt$:

$$I = \int\limits_0^1 a^3 t \left(1-t\right)^{1/2} \frac{a}{2} t^{-1/2} dt = \frac{a^4}{2} \int\limits_0^1 t^{1/2} \left(1-t\right)^{1/2} dt = \frac{a^4}{2} \mathrm{B}\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) =$$

$$= \frac{a^4}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(3\right)} = \frac{a^4}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{2!} = \frac{\pi a^4}{16}.$$

Задача. Вычислите интеграл $I = \int\limits_0^1 x^{\frac{5}{2}} \sqrt{1 - x^3} dx.$

Пример 67. Выразите интеграл $I = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^\alpha x \cos^\beta x dx$ через интегралы Эйлера и определите его область существования.

Сделаем замену переменной $\sin^2 x = t$, $dt = 2\sin x \cos x dx$,

$dx = \frac{dt}{2t^{1/2}\left(1-t\right)^{1/2}}$. Тогда

$$I = \int\limits_0^1 t^{\frac{\alpha}{2}} \left(1-t\right)^{\frac{\beta}{2}} \frac{dt}{2t^{1/2}\left(1-t\right)^{1/2}} = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}} \left(1-t\right)^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 t^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}-1} \left(1-t\right)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2}-1} dt =$$

$= \frac{1}{2} \mathrm{B}\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right)$. Интеграл существует при $\alpha > -1,\ \beta > -1$.

Задача. Выразите интеграл $I = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^\alpha x \cos^\beta x dx$ через интегралы Эйлера и определите его область существования.

Задача. Выразите интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \mathrm{tg}^n x dx$ через интегралы Эйлера и определите его область существования.

Пример 68. Вычислите интеграл $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}dx$.

Заметим, что $I = \frac{\partial}{\partial p}\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}dx$. Согласно представлению бета - функции через интеграл I рода, выполняется соотношение

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \mathrm{B}\left(p,1-p\right) = \Gamma\left(p\right)\Gamma\left(1-p\right) = \frac{\pi}{\sin \pi p},$$

причем интеграл сходится при $0 < p < 1$. Тогда $I = \frac{\partial}{\partial p}\frac{\pi}{\sin \pi p} = -\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi p}\cos \pi p$.

Задача. Вычислите $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln^2 x}{1+x}dx$ и определите область существования.

Вопросы и задачи для самостоятельного решения.

1. Докажите, что гамма-функция $\Gamma\left(p\right)$ непрерывна в области $p > 0$.
2. Докажите, что гамма-функция $\Gamma\left(p\right)$ имеет непрерывные поизводные всех порядков в области $p > 0$.
3. Докажите, что бета-функция $B\left(p,q\right)$ непрерывна в области $p > 0,\ q > 0$.
4. Докажите, что бета-функция $B\left(p,q\right)$ имеет непрерывные поизводные всех порядков в области $p > 0,\ q > 0$.
5. Вычислите $\Gamma\left(3\right),\ \Gamma\left(\frac{7}{2}\right),\ \Gamma\left(p+n\right),\ n \in N, p > 0$.
6. Вычислите $B\left(1,1\right),\ B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\ B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$.
7. Вычислите с помощью интегралов Эйлера:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx$; в) $\int\limits_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}dx,\ n \in N$.

8. Определите область существования и выразите через интегралы Эйлера следующие интегралы:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}},\ m > 0$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m dx}{\left(a+bx^n\right)^p},\ a > 0,\ b > 0,\ n > 0$;

в) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}dx$; г) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\left(1+x\right)\ln x}dx$; д) $\int\limits_0^{+\infty} x^m e^{-x^n}dx$.

Литература.

1. Бутузов В.Ф. Лекции по математическому анализу. Часть 1. М.: Физический факультет МГУ, 2012.
2. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Основы математического анализа. Часть II. М. ФИЗМАТЛИТ, 2002.
3. В.А. Зорич. Математический анализ. Часть I. М. МЦНМО, 2002.
4. В.А. Зорич. Математический анализ. Часть II. М. МЦНМО, 2002.
5. Бутузов В.Ф. Лекции по математическому анализу. Часть III. М.: Физический факультет МГУ, 2015.
6. М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. М. «Наука», 1965.