

**ABSTRACTS  
OF THE INTERNATIONAL WORKSHOP  
ON INVERSE AND ILL-POSED PROBLEMS**

*Moscow, November 19–21, 2015*

**ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ  
МЕЖДУНАРОДНОГО НАУЧНОГО  
СЕМИНАРА  
ПО ОБРАТНЫМ И НЕКОРРЕКТНО  
ПОСТАВЛЕННЫМ ЗАДАЧАМ**

**Москва, 19–21 ноября 2015 г.**

**Москва  
2015**

УДК 51(063)  
ББК 22.1  
Т29

Т29      **Тезисы докладов Международного научного семинара по обратным и некорректно поставленным задачам = Abstracts of the International Workshop on Inverse and Ill-Posed Problems.** Москва, 19–21 ноября 2015 г. – Москва : РУДН, 2015. – 207 с.

УДК 51(063)  
ББК 22.1

ISBN 978-5-209-06803-7

© Коллектив авторов, 2015  
© Российский университет дружбы народов,  
Издательство, 2015

ПОЧЕТНЫЙ ПРЕДСЕДАТЕЛЬ академик РАН В.А.Садовничий

## МЕЖДУНАРОДНЫЙ ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ

### Сопредседатели

1. В.В. Васин, член-корреспондент РАН (Екатеринбург)
2. С.И. Кабанихин, член-корреспондент РАН (Новосибирск)
3. В.Г. Романов, член-корреспондент РАН (Новосибирск)

### Члены

1. Ш.А. Алимов, академик НАН Узбекистана (Узбекистан)
2. О.М. Алифанов, член-корреспондент РАН (Россия)
3. Л. Бейлина, профессор (Швеция)
4. Я. Ван, профессор (Китай)
5. А.Ф. Верлань, профессор (Украина)
6. А.О. Глико, академик РАН (Россия)
7. А.М. Денисов, профессор (Россия)
8. А. Искендеров, профессор (Азербайджан)
9. Т. Кальменов, академик НАН Казахстана (Казахстан)
10. М.В. Клибанов, профессор (США)
11. Д. Лесник, профессор (Великобритания)
12. Н.Д. Морозкин, профессор (Россия)
13. Т. Наир, профессор (Индия)
14. А.И. Прилепко, профессор (Россия)
15. Т. Регинска, профессор (Польша)
16. В.С. Серов, профессор (Финляндия)
17. А.С. Сигов, академик РАН (Россия)
18. М. Слodicчка, профессор (Бельгия)
19. Н.Н. Сысоев, профессор (Россия)
20. А.В. Тихонравов, профессор (Россия)
21. А. Хасанов (Хасаноглу), профессор (Турция)
22. Д. Хао, профессор (Вьетнам)
23. Б. Хофманн, профессор (Германия)
24. А.М. Черепашук, академик РАН (Россия)
25. Х. Энгл, профессор (Австрия)
26. М. Ямамото, профессор (Япония)

## ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ

### Председатель

1. А.Г. Ягола, профессор (Москва)

### Заместители председателя

1. Н.Н. Нефедов, профессор (Москва)
2. С.А. Розанова, профессор (Москва)

3. В.М. Савчин, профессор (Москва)

Ученый секретарь

1. Д.В. Лукьяненко, кандидат физ.-мат. наук (Москва)

Члены

1. П.С. Геворкян, профессор (Москва)
2. А.В. Гончарский, профессор (Москва)
3. З. Каденова, доцент (Бишкек)
4. А.И. Кириллов, профессор (Москва)
5. И.В. Кочиков, доктор физ.-мат. наук (Москва)
6. Э.И. Кэбин, доцент (Москва)
7. Т.А. Кузнецова, доцент (Москва)
8. Г.М. Курамшина, доктор хим. наук (Москва)
9. В.А. Лазарев, доктор пед. наук (Москва)
10. А.С. Леонов, профессор (Москва)
11. А.В. Ненарокомов, профессор (Москва)
12. М.М. Потапов, профессор (Москва)
13. Н.А. Сидоров, профессор (Иркутск)
14. Я.Т. Султанаев, профессор (Уфа)
15. С.М. Усманов, профессор (Бирск)

**В программе семинара запланированы лекции для молодых ученых, круглые столы и доклады по следующим темам:**

**Секция 1. Теория и методы решения некорректно поставленных задач**  
(руководители В.В. Васин, А.С. Леонов)

**Секция 2. Обратные задачи для дифференциальных уравнений**  
(руководители А.М. Денисов, В.Г. Романов)

**Секция 3. Прикладные обратные и некорректно поставленные задачи**  
(руководители С.И. Кабанихин, А.Г. Ягола)

Рабочие языки семинара – русский и английский.

Представленные в этом сборнике тезисы докладов печатаются в авторской редакции.

*Оргкомитет*

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ДОКЛАДЫ .....</b>	<b>14</b>
A.A. Aitbaeva // А.А. Аитбаева - On well posedness of problem of parameters identification for elastic fixation and a point inertia element to one of the ends of the Euler-Bernoulli beam // О корректности задачи идентификации параметров закрепленности и нагруженности одного из концов балки Эйлера-Бернулли .....	14
A.M. Akhtyamov, A.A. Aitbaeva // А.М. Ахтямов, А.А. Аитбаева - On well posedness of the problem of determination of type of boundary condition at one of end of rod // О корректности задачи определения вида краевых условий на одном из концов стержня .....	15
N.A. Aitkaliyeva, R.I. Kucherov, A.Y. Shcheglov // Н.А. Айткалиева, Р.И. Кучеров, А.Ю. Щеглов - Inverse problem for a linear population dynamics model with an additional measurement at a point // Обратная задача для линейной модели популяционной динамики с дополнительным измерением в точке .....	17
G.V. Alekseev, A.V. Lobanov, J.E. Spivak // Г.В. Алексеев, А.В. Лобанов, Ю.Э. Спивак - Theoretical and numerical analysis of 2D inverse cloaking problems // Теоретический и численный анализ двумерных обратных задач маскировки материальных тел .....	19
R.A. Aliev // Р.А. Алиев - About the determination of unknown coefficients in the linear elliptic equation // Об определении неизвестных коэффициентов при старших производных в линейном эллиптическом уравнении .....	21
O.M. Alifanov // О.М. Алифанов - Inverse problems of thermo-physics with applications to aerospace technology // Обратные задачи теплофизики с приложениями в аэрокосмической технике .....	23
Erdem Altuntac - Variational regularization for an atmospheric tomography .....	27
A.O. Antonova, T.I. Savyolova // А.О. Антонова, Т.И. Савёлова - Некорректное вычисление индекса текстуры по набору ориентаций зёрен поликристалла .....	29
A.S. Apartsyn // А.С. Апарцин - The Volterra equations of the first kind in integral models that consider the age structure of developing systems // Уравнения Вольтерра I рода в интегральных моделях, учитывающих возрастную структуру развивающихся систем .....	30
A.V. Bayev // А. В. Баев - Application of optimal recovery: the description of classes of the solved linear inverse problems // Применение оптимального восстановления: описание классов решённых линейных обратных задач .....	32
I.I. Bavrín // И. И. Баврин - Обратные задачи в интегральных формулах .....	34
O. Baysal - Numerical reconstruction of unknown temporal load distributions in a vibrating Euler-Bernoulli beam from measured momentum .....	36
M.N. Botoroeva, M.V. Bulatov // М.Н. Ботороева, М.В. Булатов - Multistep methods for numerical solution of integro-algebraic equations with variable limits of integrations //	

Многошаговые методы для численного решения интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования .....	37
O.S. Budnikova, M.V. Bulatov // О.С. Будникова, М.В. Булатов - Implicit multistep methods for numerical solution of integro-algebraic equations // Неявные многошаговые методы для численного решения интегро-алгебраических уравнений.....	39
S.A. Budochkina, M.V. Savchin // С.А. Будочкина, В.М. Савчин - An inverse problem of the calculus of variations for an operator equation with the second time derivative // Обратная задача вариационного исчисления для операторного уравнения со второй производной по времени .....	41
A.M. Cherepashchuk // А.М. Черепашук - Черные дыры в двойных звездных системах и ядрах галактик .....	43
Michał Ciałkowski, Andrzej Frąckowiak - Influence of the Tikhonov-Philips regularization on the stability of solving inverse problems .....	44
M.A. Davydova, N.T. Levashova, S.A. Zakharova // М.А. Давыдова, Н.Т. Левашова, С.А. Захарова - On a model for the reaction-diffusion-advection equation // Об одной модельной задаче для уравнения реакция-диффузия-адвекция.....	47
Amar Debbouche - Stability estimates for fractional nonlinear ill-posed problems.....	48
A.M. Denisov // А.М. Денисов - Inverse problems arising in the heart electrophysiology // Обратные задачи, возникающие в электрофизиологии сердца .....	49
S.A. Dolenko, I.V. Isaev, E.A. Osborne, I.E. Osborne, I.G. Persiantsev, M.I. Shimelevich // С.А. Доленко, И.В.Исаев, Е.А. Оборнев, И.Е. Оборнев, И.Г. Персианцев, М.И. Шимелевич - A complex neural network approach to solution of the inverse problem of magnetotelluric sounding // Комплексный нейросетевой подход при решении обратной задачи магнитотеллурического зондирования .....	50
A.A. Dryazhenkov, M.M. Potapov // А.А. Дряженков, М.М. Потапов - A modification of generalized residual method for initial data with error levels known in weakened norms // Модификация обобщенного метода невязки для исходных данных с уровнями погрешностей, известными в ослабленных нормах .....	52
A.O. Efitorov, S.A. Dolenko, S.A. Burikov, T.A. Dolenko // А.О. Ефиторов, С.А. Доленко, С.А. Буриков, Т.А. Доленко - Comparison of the quality of solving the inverse problem of spectroscopy of multi-component solutions with multilayer perceptron and with the method of partial least squares // Сравнение качества решения обратной задачи спектроскопии многокомпонентных растворов многослойным перцептроном и методом частичных наименьших квадратов.....	54
I.A. Gajnova // И.А. Гайнова - Mathematical immunology: problems and methods // Математическая иммунология: задачи и методы.....	56
Y.V. Glasko // Ю.В. Гласко - Problems concentration and sweeping masses in geophysics // Задачи концентрации и выметания масс в геофизике .....	58

N.L. Goldman // Н.Л. Гольдман - On application of the duality principle in control problems and inverse problems for parabolic equations // О применении принципа двойственности в задачах управления и обратных задачах для параболических уравнений.....	60
N.L. Goldman // Н.Л. Гольдман - A mathematical model of one-phase Stefan problem with an unknown distributed convection coefficient // Математическая модель однофазной задачи Стефана с неизвестным распределенным конвективным коэффициентом.....	63
A.A. Golubkov // А.А. Голубков - Finding of full family of generalized Sturm – Liouville equation with sign-constant piecewise analytic coefficients having given monodromy matrix // Нахождение всех обобщенных уравнений Штурма – Лиувилля со знакопостоянными кусочно-аналитическими коэффициентами, имеющих данную матрицу монодромии ..	65
E.Y. Grazhdantseva // Е.Ю. Гражданцева - The building the solution of the degeneration task in the terminology of the Jordan set // Построение решения вырожденной задачи в терминологии Жордановых цепочек.....	67
A. Hasanoglu (Hasanov), O. Baysal - Identification of unknown temporal and spatial load distributions in a vibrating Euler-Bernoulli beam from boundary measurements.....	69
A. Hasanoglu (Hasanov) - Inverse source problems for a vibrating Euler-Bernoulli beam based on boundary measured data.....	70
B. Hofmann - On smoothness concepts in Tikhonov regularization for nonlinear ill-posed problems in banach spaces.....	71
R.D. Ikramov, S.A. Mustafina // Р.Д. Икрамов, С.А. Мустафина - Solving inverse problem of chemical kinetics for Oregonator model // Решение обратных задач химической кинетики на примере модели орегонатора.....	73
I.V. Isaev, S.A. Dolenko // И.В. Исаев, С.А. Доленко - Test on model data for the effect of precision improvement in a multi-parameter inverse problem solution with group and stepwise determination of parameters // Проверка на модельных данных эффекта повышения точности нейросетевого решения многопараметрической обратной задачи при групповом и поэтапном определении параметров.....	75
T.D. Ivanova, V.E. Fyodorov // Н.Д. Иванова, В.Е. Федоров - Inverse problem for equations system describing dynamics of Kelvin-Voigt fluid // Обратная задача для системы уравнений, описывающей динамику жидкости Кельвина-Фойгта.....	77
D.A. Ivanov, M.M. Potapov // Д.А. Иванов, М.М. Потапов - Optimal time boundary controls for the wave equation in class of strong generalized solutions // Оптимальные по быстрдействию граничные управления для волнового уравнения в классе сильных обобщенных решений.....	79
S.I. Kabanikhin, O.I. Krivorotko // С.И. Кабанихин, О.И. Криворотко - Variational approach for solving combined inverse problem of wave propagation described by the shallow water theory: modeling and visualization // Вариационный подход к решению совмещенной обратной задачи распространения волн в мелкой воде: моделирование и визуализация.....	81

S.I. Kabanikhin, M.A. Shishlenin // С.И. Кабанихин, М.А. Шишленин - Regularization of the continuation problems of physical fields from the part of the boundary: theory and applications // Регуляризация задач продолжения физических полей с части границы: теория и приложения.....	83
Z.A. Kadenova // З.А. Каденова - Stability of the systems linear integral equations of the first kind with two variables in unlimited areas // Устойчивость решений систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными.....	85
V.L. Kamynin // В.Л. Камынин - On correct solvability of the inverse problem for degenerate parabolic equations with the condition of integral observation // О корректной разрешимости обратной задачи для вырождающихся параболических уравнений при условии интегрального наблюдения.....	90
V.V. Karachik, B.T. Turebek // В.В. Карачик, Б.Т. Торебек - Correct formulation of the third boundary value problem for the biharmonic equation // Корректные постановки третьей краевой задачи для бигармонического уравнения.....	92
I.G. Kazantsev // И. Г. Казанцев - Комптоновское рассеяние в позитронной эмиссионной томографии.....	94
Michael V. Klivanov - Reconstruction in phaseless inverse scattering problems .....	96
M.Y. Kokurin // М.Ю. Кокурин - Stable gradient projection method for nonlinear conditionally well-posed problems // Устойчивый градиентно--проекционный метод для нелинейных условно-корректных задач.....	97
M.M. Kokurin // М.М. Кокурин - Polynomial estimates for the convergence rate of difference schemes for ill-posed Cauchy problems // Полиномиальные оценки скорости сходимости разностных схем для некорректных задач Коши .....	99
A.I. Korotkiy, D.A. Kovtunov, A.T. Ismail-Zade, O.E. Melnik, I.A. Tsepelev // А.И. Короткий, Д.А. Ковтунов, А.Т. Исмаил-Заде, О.Э. Мельник, И.А. Цепелев - Reconstruction of volcanic lava properties based on measurements of some physical parameters on daily surface of lava flow // Реконструкция характеристик лавового потока по измерениям физических параметров потока на его дневной поверхности .....	101
Nikolay Koshev - Fast processing of the tomographic data .....	103
A.B. Kostin // А.Б. Костин - Recovery of the coefficient of $U_t$ in the heat equation from a condition of nonlocal observation // Восстановление коэффициента при $U_t$ в уравнении теплопроводности по условию нелокального наблюдения .....	105
V.N. Kozlov, A.A. Efremov // В.Н. Козлов, А.А. Ефремов - Convergence of systems with regularized operations of locally valid control impacts // Сходимость систем с регуляризованными операторами локально допустимых управлений .....	107
V.N. Krizsky, M.B. Belyaeva, S.V. Viktorov, A.R. Nafikova, L.Z. Sultanov // В.Н. Кризский, М.Б. Беляева, С.В. Викторов, А.Р. Нафикова, Л.З. Султанов - Mathematical modelling of geophysical fields in piecewise constant anisotropic media // Математическое моделирование геофизических полей в кусочно-постоянных анизотропных средах ...	109



A.V. Kryanev, G.V. Lukin, D.K. Udumyan // А.В. Крянев, Г.В. Лукин, Д.К. Удумян - Ill-posed problems in metric analysis // Некорректно поставленные задачи в метрическом анализе .....	111
G.M. Kuramshina, I.V. Kochikov // Г.М. Курамшина, И.В. Кочкиков - Cluster models in regularizing algorithms of molecular force field calculations // Кластерные модели в регуляризирующих алгоритмах расчета молекулярных силовых полей .....	113
A.S. Leonov // А.С. Леонов - Локально экстреооптимальные методы решения многомерных некорректно поставленных задач с разрывными решениями .....	114
R.Y. Leontyev // Р.Ю. Леонтьев - Iteration methods for constructing of solutions of non-linear equations in sectorial domains // Итерационные методы поиска решений нелинейных уравнений в секториальных областях .....	116
D. Lesnic, M.S. Hussein - Time-dependent coefficient identification problems for the heat equation.....	117
N.T. Levashova, A.A. Melnikova, A.E. Sidorova, A.E. Semina // Н.Т. Левашова, А.А. Мельникова, А.Э. Сидорова, А.Е. Семина - The mathematical modelling of urboecosystem on the example of the towns near moscow // Математическое моделирование урбоэкоисотемы на примере городов ближнего подмосковья .....	119
D.V. Lukyanenko // Д.В. Лукьяненко - New variation of the generalized discrepancy principle with due account taken of round-off errors for solving multidimensional ill-posed problems // Новая вариация обобщенного принципа невязки, учитывающая ошибки машинного округления, накапливающиеся при решении многомерных некорректно поставленных обратных задач .....	121
L.D. Menikhes, V.V. Karachik // Л.Д. Менихес, В.В. Карачик - About equivalence of some regularizability conditions of integral equations // Об эквивалентности некоторых условий регуляризуемости интегральных уравнений.....	122
Y.L. Menshikov // Ю.Л. Меньшиков - The algorithm for an evaluation of solution of measurement's inverse problems // Алгоритм оценки решения обратной задачи измерения .....	124
T.A. Mikhaylova, E.N. Miftakhov, S.A. Mustafina // Т.А. Михайлова, Э.Н. Мифтахов, С.А. Мустафина - Research of butadiene-styrene copolymerization process on the basis of the Monte-Carlo method taking into account the residence-time distribution // Исследование процесса сополимеризации бутадиена со стиролом методом Монте-Карло с учетом распределения по времени пребывания .....	126
V.A. Morozov, A.B. Nazimov // В.А. Морозов, А.Б. Назимов - The decision of the Hilbert singular equation method of regularization // О решении сингулярного уравнения Гильберта методом регуляризации .....	128
N.S. Novikov // Н.С. Новиков - Numerical solution of the two-dimensional acoustic inverse problem // Численное решение двумерной обратной задачи акустики.....	130
S.V. Parshina // С.В. Паршина - Особенности обратных и некорректных задач в аспекте информационных случайных процессов .....	132

M.V. Plekhanova // М.В. Плеханова - Optimal control problem for quasilinear degenerate higher order equations in banach spaces // Задача оптимального управления для квазилинейных вырожденных уравнений высокого порядка в банаховых пространствах .....	134
A.I. Prilepko // А.И. Прилепко - Problems of optimal control and inverse problem for evolution equation in banach space // Задачи оптимального управления и обратная задача для эволюционного уравнения в банаховом пространстве .....	136
S.G. Pyatkov // С.Г. Пятков - Inverse problems for parabolic equations and systems with overdetermination conditions on spatial manifolds // Обратные задачи для параболических уравнений и систем с данными переопределения на пространственных многообразиях .....	138
D.N. Raevsky, I.E. Stepanova // Д.Н. Раевский, И.Э. Степанова - Application of parallel algorithms of solving of the simultaneous linear equations within modified s-approximation method at the solving of gravimetry inverse problems // Применение параллельных алгоритмов решения систем линейных алгебраических уравнений в рамках модифицированного метода s-аппроксимаций при решении обратных задач гравиметрии.....	140
A.V. Razgulin, T.E. Romanenko, A.S. Starostin, N.G. Iroshnikov, A.V. Larichev // А.В. Разгулин, Т.Е. Романенко, А.С. Старостин, Н.Г. Ирошников, А.В. Ларичев - Inverse problem of optical sectioning in ophthalmology // Обратная задача оптического секционирования в офтальмологии .....	143
T. Reginska - Regularization of ill-posed problems via regularization of their discretization .....	145
E.A. Rodionov, M.I. Shimelevich, E.A. Osborne, I.E. Osborne // Е.А. Родионов, М.И. Шимелевич, Е.А. Оборнев, И.Е. Оборнев - Numerical solution of 3D inverse problems of geoelectrics using neural networks // Численное решение обратной 3D задачи геоэлектрики с использованием нейронных сетей.....	146
V.A. Sadovnichy, Y.T. Sultanaev, A.M. Akhtymov // В.А. Садовничий, Я.Т. Султанаев, А.М. Ахтямов - On solvability of inverse nonself-adjoint Sturm-Liouville problem with common boundary conditions // Разрешимость обратной несамосопряженной задачи Штурма-Лиувилля с общими краевыми условиями .....	148
G.Y. Saritskaya // Ж.Ю. Сарицкая - Stability estimates of control problem's solutions for nonlinear convection-diffusion-reaction equation with inhomogeneous Dirichlet boundary condition // Оценки устойчивости решений задачи управления для нелинейного уравнения конвекции-диффузии-реакции с неоднородным граничным условием Дирихле.....	150
C. Sebu - A three-dimensional image reconstruction algorithm for electrical impedance tomography using planar electrode arrays.....	152
Valery S. Serov - Borg-Levinson theorem for elliptic operators.....	154

A.I. Sharamed, D.V. Lukyanenko // А.И. Шарамед, Д.В. Лукьяненко - Some features of solving of inverse problem for the Black-Scholes equation // Некоторые особенности решения обратной задачи для уравнения Блэка-Шоулза.....	156
A.N. Sharov // А.Н. Шаров - Numerical solutions of inverse elastography problem to parametric classes of solutions // Численное решение обратной задачи эластографии на параметрических классах решений .....	157
E.V. Shimanovskaya, V.L. Oknyanskiy, E.A. Bruevich // Е.В. Шимановская, В.Л. Окнянский, Е.А. Бруевич - New approach to reconstruction of the response function for astronomical unevenly spaced time series // Новый подход к восстановлению функции отклика в приложении к астрономическим неравномерным временным рядам .....	160
M.I. Shimelevich // М.И. Шимелевич - Ambiguity degree estimation of approximate solutions of the inverse problems of geophysics // Оценка степени неоднозначности приближенных решений нелинейных обратных задач геофизики.....	162
D.N. Sidorov, A.N. Tynda, I.R. Muftahov // Д.Н. Сидоров, А.Н. Тында, И.Р. Муфтахов - On numerical methods for the solution of Volterra equations of the first kind with discontinuous kernels // О численных методах решения уравнений Вольтерра первого рода с разрывными ядрами .....	164
N.A. Sidorov, D.N. Sidorov // Н.А. Сидоров, Д.Н. Сидоров - Existence theory and regularization of irregular equations .....	165
S.V. Solodusha // С.В. Солодуша - Numerical modeling energy systems based on Volterra polynomials // Численное моделирование энергетических систем на основе полиномов Вольтерра.....	167
L.S. Solovarova, M.V. Bulatov // Л.С. Соловарова, М.В. Булатов - Collocation-variation difference schemes for differential-algebraic equations // Коллокационно-вариационные разностные схемы для дифференциально-алгебраических уравнений .....	169
J.E. Spivak // Ю.Э. Спивак - Numerical analysis of 2D inverse cloaking problem using multi-layered materials // Численный анализ двумерной обратной задачи маскировки с использованием многослойных материалов.....	171
A.V. Sulimov, D.V. Lukyanenko, A.N. Sharov, M.Y. Kozmin, A.A. Gorokh, S.A. Sharapova // А.В. Сулимов, Д.В. Лукьяненко, А.Н. Шаров, М.Ю. Козьмин, А.А. Горох, С.А. Шарапова - Using of LAMMPS and GROMACS software packages for high-performance deposition simulation of nanostructured thin film // Использование программных пакетов LAMMPS и GROMACS для высокопроизводительного моделирования напыления наноструктурированных тонких плёнок .....	173
Ya.T. Sultanaev, A.M. Akhtyamov, Kh.R. Mamedov, F.A. Cetinkaya - An inverse nonselfadjoint Sturm-Liouville problem with spectral parameter nonlinearly contained in boundary conditions // Обратная несамосопряженная задача Штурма-Лиувилля со спектральным параметром, нелинейно входящим в краевые условия .....	175
V.P. Tanana // В.П. Танана - Finite-dimensional approximation for integral equations // О конечномерной аппроксимации интегральных уравнений первого рода .....	177

E.E. Tyrtysnikov // Е.Е. Тыртышников - Матричные и тензорные разложения малого ранга в математике и приложениях .....	179
S.M. Usmanov, E.D. Shakiryaynov // С.М. Усманов, Э.Д. Шакирьянов - Numerical solution of inverse problems spin-lattice relaxation // Численное решение обратной задачи спин-решеточной релаксации .....	180
P.N. Vabishchevich, V.I. Vasiliev // П.Н. Вабищевич, В.И. Васильев - Numerical solution of the inverse problems for parabolic equations // Численное решение обратных задач для параболических уравнений .....	182
N.F. Valeev // Н.Ф. Валеев - The inverse spectral problem for the biharmonic operator with of point fixings // Обратная спектральная задача для бигармонического оператора с точечными креплениями .....	184
N.F. Valeev, Y.V. Martynova // Н.Ф. Валеев, Ю.В. Мартынова - Inverse spectral problem for Shturm-Liouville operator on graph // Обратная спектральная задачи для оператора Штурма-Лиувилля на графе .....	186
V.V. Vasin, A.F. Skurydina // В.В. Васин, А.Ф. Скурыдина - Регуляризованные модифицированные процессы градиентного типа для нелинейных обратных задач ...	188
P.A. Velmisov, A.V. Ankilov // П.А. Вельмисов, А.В. Анкилов - Stability of elastic aileron of wing profile in the flowing channel // Устойчивость упругого элерона крылового профиля в проточном канале .....	190
V.T. Volkov, D.V. Lukyanenko, N.N. Nefedov // В.Т. Волков, Д.В. Лукьяненко, Н.Н. Нефедов - Asymptotic-numerical methods for location and dynamics of internal layers in singular perturbed parabolic problems // Асимптотико-численный метод определения локализации и динамики внутренних слоев в сингулярно возмущенных параболических задачах .....	192
T.A. Voronina // Т.А. Воронина - Application of the r-solution method to tsunami initial waveform recovery // Применение метода r-решений для обратной задачи цунами .....	193
D.A. Voronov, S.I. Kabanikhin, O.I. Krivorotko - Numerical methods of solving inverse problems of physiology. Identifiability concepts. Software development. ....	195
Yanfei Wang - Synchrotron-based regularizing micro-CT imaging in shale structure analysis .....	196
A.G. Yagola // А.Г. Ягола - Multidimensional ill-posed problems // Многомерные некорректно поставленные задачи .....	197
N.M. Yaparova // Н.М. Япарова - Numerical method for solving an inverse multidimensional problem with unknown initial conditions // Численный метод решения многомерной обратной граничной задачи теплопроводности с неизвестными начальными условиями .....	198
V.A. Yurko // В.А. Юрко - Inverse problem for differential systems with regular singularities // Обратная задача для дифференциальных систем с регулярными особенностями .....	200

V.I. Zalyarin, E.V. Haritonova // В.И. Заляпин, Е.В. Харитоновна - An inverse boundary value problem with distributed data // Обратная краевая задача с распределенными данными.....	202
Y. Zhang, Z. Yao, M. Gulliksson - Mathematical Models and Regularizing Algorithms for Inverse Magnetoencephalography Problems .....	204
G.K. Zheentaeva // Ж.К. Жээнтаева - Special solutions of systems of difference equations with variable coefficients // Специальные решения систем линейных разностных уравнений с переменными коэффициентами.....	206

О КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ  
ЗАКРЕПЛЕННОСТИ И НАГРУЖЕННОСТИ ОДНОГО ИЗ КОНЦОВ БАЛКИ  
ЭЙЛЕРА-БЕРНУЛЛИ

Аитбаева А.А.

*Институт механики им.Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, г.Уфа, Россия.*

*e-mail: phunakoshi@mail.ru*

**Аннотация.** Рассматривается задача идентификации параметров упругого закрепления (жесткости пружинок) одного из концов балки Эйлера-Бернулли, а также параметров нагруженности этого конца (масса и момент инерции сосредоточенного концевого груза). Показано, что для однозначного определения этих параметров достаточно использовать пять собственных частот изгибных колебаний балки.

*Ключевые слова: корректность задачи, обратная задача, балка, собственные частоты, сосредоточенный инерционный элемент*

ON WELL POSEDNESS OF PROBLEM OF PARAMETERS  
IDENTIFICATION FOR ELASTIC FIXATION AND A POINT INERTIA ELEMENT TO  
ONE OF THE ENDS OF THE EULER-BERNOULLI BEAM

**Abstract.** The paper considers the problem of identification of two relative stiffness coefficient of spring attached to one of the ends of the Euler-Bernoulli beam and the mass and moment of inertia of load concentrated at this end is studied. It is shown that five natural frequencies sufficient for unique identification of parameters of elastic fixing and loading at the beam end.

*Key words: well posedness of the problem, inverse problem, the natural frequencies, the boundary conditions, beam, point inertia element.*

Рассматривается однородная балка Эйлера-Бернулли [1], левый конец которой заделан, а на правом ее конце сосредоточен груз, который упруго закреплен на двух пружинках. Цель работы: 1) найти параметры упругого закрепления балки (коэффициенты жесткостей пружинок), а также параметры концевого груза (масса и момент инерции) по собственным частотам ее изгибных колебаний; 2) определить какое минимальное число собственных частот понадобится для однозначной идентификации этих неизвестных параметров. В отличие от работы [2], здесь было уменьшено число собственных значений, используемых для однозначной идентификации, с 7 до 5. Доказана теорема о корректности по Адамару [3] задачи об идентификации четырех параметров (двух коэффициентов жесткостей пружинок, массы и момента инерции концевого груза) по пяти собственным частотам. В данной работе также приведены контрпримеры, показывающие, что при использовании меньшего числа собственных частот, однозначность идентификации параметров нарушается.

**Литература**

1. Вибрации в технике: Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
2. Ахтямов А.М., Ахтямова А.А. Об однозначности идентификации параметров упругого закрепления и сосредоточенного инерционного элемента // Вычислительная механика сплошных сред, том 6, №1 – Пермь, 2013, с.62-70.
3. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 232 с.

## О КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВИДА КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ НА ОДНОМ ИЗ КОНЦОВ СТЕРЖНЯ

Ахтямов А.М.<sup>1,2</sup>, Аитбаева А.А.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Башкирский государственный университет, <sup>2</sup> Институт механики им.Р.Р.  
Мавлютова УНЦ РАН, г.Уфа, Россия.

e-mail: akhtyamovam@mail.ru, phunakoshi@mail.ru

**Аннотация.** Рассматривается задача идентификации вида и коэффициентов краевых условий одного из концов однородного стержня. Показано, что по трем собственным частотам его свободных колебаний можно однозначно идентифицировать не только коэффициенты краевого условия определенного вида, но и то, какой из видов краевого условия реализован. Доказана корректность поставленной задачи по Адамару. Предложен метод решения этой обратной задачи, а также приведены соответствующие примеры и контрпримеры.

*Ключевые слова:* корректность задачи, обратная задача, условия Плюккера, собственные частоты, краевые условия.

## ON WELL POSEDNESS OF THE PROBLEM OF DETERMINATION OF TYPE OF BOUNDARY CONDITION AT ONE OF END OF ROD

**Abstract.** The paper considers the problem of identification of the type and the coefficients of the boundary conditions at one end of the rod. We can uniquely identify the coefficients of specific type of the boundary condition and determine what type of boundary condition is implemented by three natural frequencies of vibrations of the beam. We prove Hadamard well posedness of the problem. We offer a method for solving of this inverse problem, and appropriate examples and counterexamples.

*Key words:* well posedness of the problem, inverse problem, Pluckers conditions, the natural frequencies, the boundary conditions

Рассматривается задача идентификации вида и коэффициентов краевых условий одного из концов однородного стержня. Для определенности предполагается, что левый конец стержня заделан, а на правом его конце может реализовываться один из десяти видов закрепления стержня, описанных в [1, с. 153-154]. Это – заделка, свободное опирание, свободный конец, плавающая заделка, 5 видов упругого закрепления, инерционный элемент на конце. Доказывается теорема, утверждающая, что по трем собственным частотам изгибных колебаний стержня можно однозначно идентифицировать все десять видов закреплений, а также параметры этих закреплений (коэффициенты жесткостей пружин или момент инерции и массу груза на конце). Эта теорема усиливает результат работы [2], где было показано, что для того, чтобы однозначно идентифицировать вид краевого условия одного из концов стержня (заделка, свободное опирание, свободный конец, плавающая заделка, упругое закрепление, инерционный элемент на конце) достаточно шести собственных частот его изгибных свободных колебаний.

Помимо теоремы об однозначности восстановления вида и параметров закрепления на правом конце стержня, в настоящей работе доказываются еще две теоремы. Это теорема о непрерывной зависимости видов и параметров закрепления от собственных частот, а также теорема о существовании решения. Эти три доказанные теоремы обеспечивают корректность задачи по Адамару [3]. Метод решения задачи идентификации вида и параметров закрепления стержня существенно отличается от методов работ [2,4-6]. Он основан на выборе, с помощью так называемых соотношений

Плюккера [4,7], единственного решения из двух его альтернативных представлений. Приводится также контрпример, показывающий, что двух собственных частот для однозначности восстановления не достаточно.

#### Литература

1. Вибрации в технике: Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
2. Ахтямов А.М., Муфтахов А.В., Аитбаева А.А. Об однозначности определения краевого условия на одном из концов стержня по собственным частотам его колебаний // *Материалы Всероссийской научной конференции «Обратные краевые задачи и их приложения» посвященной 100-летию профессора М.Т. Нужина (г. Казань, 20-24 октября 2014 г.) [Электронный ресурс]: (тексто-графические материалы)*. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014. С. 1-14.
3. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 232 с.
4. Ахтямов А. М. Теория идентификации краевых условий и ее приложения. М.: Физматлит, 2009. 272 с.
5. Ахтямов А. М., Муфтахов А. В. Корректность по Тихонову задачи идентификации закреплений механических систем // *Сибирский журнал индустриальной математики*. 2012. Том XV, № 4(52). С. 24--37.
6. Ахтямов А.М., Муфтахов А.В., Ахтямова А.А. Об определении закрепления и нагруженности одного из концов стержня по собственным частотам его колебаний // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2013. Вып. 3. С. 114-129.
7. Постников М. М. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1979. 312 с.



# ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ПОПУЛЯЦИОННОЙ ДИНАМИКИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ИЗМЕРЕНИЕМ В ТОЧКЕ

Н. А. Айткалиева, Р. И. Кучеров, А. Ю. Щеглов

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет  
вычислительной математики и кибернетики, Москва, Россия*

*e-mail: nazgul\_uralisk.90@mail.ru, kr.vip.93@mail.ru, shcheg@cs.msu.su*

**Аннотация.** В статье представлена линейная модель популяционной динамики с неоднородным уравнением переноса, правая часть которого зависит от разделенных переменных. Исследованы обратные задачи отдельного восстановления функций, составляющих правую часть уравнения переноса. Представлены алгоритмы для численного решения обратных задач с выделением условий разрешимости.

*Ключевые слова:* обратная задача, модель популяционной динамики, уравнение переноса.

## INVERSE PROBLEM FOR A LINEAR POPULATION DYNAMICS MODEL WITH AN ADDITIONAL MEASUREMENT AT A POINT

**Abstract.** The article presents a linear model of population dynamics with heterogeneous transfer equation, the right hand side which depends on split variables. Investigated the inverse problem of separate recovery functions that comprise the right side of the equation. The presented algorithms for the numerical solution of inverse problems with the allocation of solvability conditions.

*Key words:* inverse problem, model of population dynamics, transfer equation.

Модели популяций различной структуры применяются для описания как простых однородных групп объектов так и сложных сообществ. При этом часто возникает интерес к постановкам и решению обратных задач [1–2]. Сама модель, состоящая, как правило, даже в простейшем варианте из уравнения в частных производных с краевым условием специфического интегрального вида, требует отдельного внимания при исследовании условий разрешимости и численного решения. Основное уравнение модели и краевое условие интегрального вида часто рассматриваются в виде системы. Эта особенность, связанная с присутствием в системе нескольких разнотипных уравнений, учитывается и при анализе обратных задач как при популяционном моделировании, так и в постановках обратных задач для других моделей [3–7].

Линейная модель популяционной динамики имеет следующий вид:

$$u_t(x, t) + u_x(x, t) = -f(x)g(t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 1, \quad (1)$$

$$u(0, t) = \int_0^1 \rho(x)u(x, t)dx, \quad 0 < t < 1, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (3)$$

где  $u(x, t)$  - плотность распределения особей популяции с возрастом  $x$  по времени  $t$ ,  $f(x)$ ,  $g(t)$  - коэффициенты, определяющие смертность в популяции,  $\rho(x)$  - коэффициент, определяющий рождаемость,  $\varphi(x)$  - начальное распределение особей.

Пусть функции  $f(x)$ ,  $g(t)$ ,  $\rho(x)$  и  $\varphi(x)$  непрерывны и неотрицательны, а также само решение  $u(x, t)$  и начальное распределение  $\varphi(x)$  непрерывно дифференцируемы на областях определения. Пусть также выполняется условие согласования начальных данных в точке  $(x, t) = (0, 0)$ , которое имеет следующий вид:

$$\varphi(0) = \int_0^1 \rho(x)\varphi(x) dx.$$

В рамках прямой задачи необходимо по известным  $f(x)$ ,  $g(t)$ ,  $\rho(x)$  и  $\varphi(x)$  найти плотность распределения особей популяции  $u(x, t)$  на всей заданной области.

Целью решения обратной задачи является восстановление одного из коэффициентов правой части уравнения по известным значениям других коэффициентов, а также дополнительно заданной функции

$$c(t) = u(x_0, t), \quad 0 < t < 1,$$

где  $x_0$  - некоторая внутренняя точка отрезка  $[0, 1]$ , то есть области изменения аргумента  $x$ . Предполагается, что дополнительная информация  $c(t)$  дана с некоторой погрешностью, регламентировано заданной в одном из функциональных пространств.

Интерес представляют выделение условий на внутреннюю точку  $x_0$ , информация в которой будет достаточной для однозначного решения обратной задачи, и предложение для численного определения искомого в рамках обратных задач функций таких алгоритмов, которые отличаются согласованием оценок погрешности.

### Литература

1. Denisov A.M., Makeev A.S. Numerical method for solving an inverse problem for a population model // Computational mathematics and mathematical physics. 2006. V. 46. N 3. P. 470–480.
2. Чурбанов Д.В. Единственность определения коэффициента при производной в нелинейном уравнении первого порядка // Вестн. Моск. ун-та. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. 2013. №1. С. 9–14.
3. Pavel'chak I.A., Tuikina S.R. Numerical solution of an inverse problem for the modified alievЦpanfilov model // Computational Mathematics and Modeling. 2013. V. 24, N 1, P. 14–21.
4. Denisov A.M., Zakharov E.V., Kalinin A.V. Numerical solution of the localized inverse problem of electrocardiography // Computational Mathematics and Modeling. 2015. V. 26. N 2. P. 168–174.
5. Baev A.V. On t-Local Solvability of Inverse Scattering Problems in Two Dimensional Layered Media // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2015. V. 55. N 6. P. 1033–1050.
6. Golovina S.G., Razborov A.G. Reconstruction of the Discontinuity Line of a Piecewise-Constant Coefficient in the Two-Dimensional Internal InitialЦBoundary Value Problem for the Homogeneous Heat Equation // Computational Mathematics and Modeling. 2014. V. 25. N 1. P. 49–56.
7. Dmitriev V.I., Barashkov I.S. Mathematical Modeling of Mobile Marine Electromagnetic Soundings // Computational Mathematics and Modeling. 2014. V. 25. N 3. P. 342–350.

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ДВУМЕРНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ МАСКИРОВКИ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТЕЛ

Г.В. Алексеев<sup>1,2</sup>, А.В. Лобанов<sup>1</sup>, Ю.Э. Спивак<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия*  
*e-mails: alekseev@iam.dvo.ru, alekslobanov1@mail.ru*

<sup>2</sup> *Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия*  
*e-mail: u3l3i3y3a3@mail.ru*

**Аннотация.** Рассматриваются задачи оптимального управления для 2D модели электромагнитного поля, описывающей рассеяние ТМ-поляризованных электромагнитных волн на неоднородном проницаемом препятствии с частично покрытой границей. Указанные задачи связаны с решением задач маскировки для соответствующей модели рассеяния с использованием метода оптимизации. Обсуждаются теоретические и численные аспекты данного подхода.

*Ключевые слова: задача рассеяния, уравнение Гельмгольца, маскировка материальных тел, метод сингулярного разложения, эффективная площадь рассеяния*

## Theoretical and numerical analysis of 2D inverse cloaking problems

G.V. Alekseev<sup>1,2</sup>, A.V. Lobanov<sup>1</sup>, J.E. Spivak<sup>2</sup>,

<sup>1</sup> *Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Vladivostok, Russia*  
*e-mails: alekseev@iam.dvo.ru, alekslobanov1@mail.ru*

<sup>2</sup> *Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia*  
*e-mail: u3l3i3y3a3@mail.ru*

**Abstract.** The optimal control problems for the 2D electromagnetic field model describing scattering TM-polarized electromagnetic waves by an inhomogeneous penetrable obstacle with the partially coated boundary are considered. These problems are associated with solving cloaking problems for respective scattering model using optimization method. Theoretical and numerical aspects of this approach are discussed.

*Key words: scattering problem, Helmholtz equation, invisibility cloaking, singular value decomposition, scattering width*

In recent years significant research has focused on design of invisibility devices cloaking material bodies from detection of radar system. Beginning with pioneering papers [1-3] the large number of publications was devoted to developing different schemes of cloaking material bodies. Transformation optics (TO) is the most popular method of designing cloaking devices (hereafter, cloaks). In fact, this is the mathematical method that enables us to design suitable material structures (metamaterials) that when placed around the object may drastically suppress its scattering and therefore to hide the object from detection of radar system. The methodology of cloaking based on this method obtained the name of direct design because it is based in fact on solving direct problems of electromagnetic scattering.

It should be noted that this design possesses several drawbacks. The main drawback is the difficulty of technical realization of cloaks designing using the TO approach. In particular some components of spatially dependent parameter tensors of ideal cloak are required to have infinite or zero values at the inner boundary of the cloak [3,4] which are very difficult to implement. One of the approaches of overcoming such kind difficulties consists of replacing “exact” cloaking problem by approximate cloaking (or near-cloak)

problem whose solutions admit relatively simple technical realization. This idea has been exploited in a number of papers (see, e.g., [5] and references therein) devoted to development of different mathematical methods of study of approximate cloaking problems.

Alternative approach consists of using optimization method for finding solutions of approximate cloaking problems. This approach is based on introducing a suitable tracking-type cost functional which adequately corresponds to inverse problem of constructing respective cloaking device. As a result initial cloaking problem is reduced to solving certain control problem posed for the scattering model under study. Based on optimization method the new cloaking design methodology became develop recently. It obtained the name of inverse design since it is related with solving inverse electromagnetic (or acoustic) problems [4]. Using this methodology enables us to take into account different constraints for designing cloaks and in particular to solve some limitations connected with technical realization of solutions of cloaking problems. A growing number of papers is devoted to applying the inverse design methodology in various cloaking problems (see, e.g., [7, 8]).

In this paper we formulate and study control problems for 2D electromagnetic field model describing scattering TM-polarized electromagnetic waves by an penetrable inhomogeneous obstacle  $D$  with boundary partially coated for masking. These problems arise when optimization method is applied for solving cloaking problems for the scattering model. The refraction index of the inhomogeneous obstacle and boundary conductivity of the coated part of the boundary play the role of controls. Quadratic tracking-type functionals play the role of cost functionals. Based on methods of [8,9] we prove the solvability of control problems, derive the optimality system describing the necessary conditions of extremum and establish the sufficient conditions on the data which provide the uniqueness and stability of optimal solutions. We also develop an efficient numerical method of solving cloaking problems and discuss some results of numerical experiments.

This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 14-11-00079).

## Bibliography

1. L.S. Dolin, On a possibility of comparison of three-dimensional electromagnetic systems with nonuniform anisotropic filling, *Izv. Vuz. Radiofiz.*, **4** (1961), 964-967.
2. U. Leonhardt, Optical conformal mapping, *Science*, **312** (2006), 1777-1780..
3. J.B. Pendry, D. Shurig and D.R. Smith, Controlling electromagnetic fields, *Science*, **312** (2006), 1780-1782.
4. S. Xu, Y. Wang , B. Zhang and H. Chen, Invisibility cloaks from forward design to inverse design, *Science China*, **56** (2013), 120408.
5. G. Bao, H.Y. Liu, J. Zhou, Nearly cloaking the full Maxwell equations: cloaking active contents with general conducting layers, *J. Math. Pures Appl.*, **101** (2014), 716-733.
6. B.I. Popa and S.A. Cummer, Cloaking with optimized homogeneous anisotropic layers, *Phys. Rev. A*, **79** (2009), 023806.
7. X. Sheng , H. Chen , B. Zhang, B.-I. Wu and J. A. Kong, Route to low-scattering cylindrical cloaks with finite permittivity and permeability, *Phys. Rev. B*, **79** (2009), 155122.
8. G.V. Alekseev, Optimization in problems of material-body cloaking using the wave-flow method, *Dokl. Physics*, **58**, pp. 147–151, 2013.
9. G.V. Alekseev, Cloaking via impedance boundary condition for 2-D Helmholtz equation, *Appl. Anal.* **93**, pp. 254–268, 2014.

# ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НЕИЗВЕСТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ В ЛИНЕЙНОМ ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

Р.А. Алиев

*Азербайджанский Университет Кооперации, Баку*

*E-mail:ramizaliyev3@rambler.ru*

**Аннотация.** Исследуется обратная задача нахождения коэффициентов и решения линейного эллиптического уравнения при разных граничных условиях в заданном прямоугольнике. С помощью метода последовательных приближений построен регуляризирующий алгоритм для определения нескольких коэффициентов.

Ключевые слова: Обратная задача, эллиптическое уравнение

## ABOUT THE DETERMINATION OF UNKNOWN COEFFICIENTS IN THE LINEAR ELLIPTIC EQUATION

**Abstract.** Inversion problems on restoration of coefficients to the differential equations with private derivatives are of interest in many applied reseaches. Using a metod consecutive the algorithm for definition of several factors is constructed.

**Key words:** Inversion problem, eliptic equation

Большое значение имеют коэффициентные задачи для эллиптических уравнений, в которых неизвестные коэффициенты не зависят от одной переменной [1-4]. Такие модели характерны для задач теории фильтрации. В частности, определение теплофизических характеристик сред в стационарном случае приводит к обратным задачам для эллиптических уравнений.

Пусть  $I = \{1,2\}$ ,  $i_0, e \in I$ ,  $i_1 = \frac{i_0 + 1}{2i_0 - 1}$ ,  $k, q \in \{0,1\}$ ,  $b_{qkt} = t + (-1)^t(k + q - 2kq)$ ,

$d_{qkt} = [1 - k(k-1)][t + (-1)^t q]$ ,  $t = 0,1$ . Через  $b_t, d_t$ ,  $t = 0,1$  обозначим константы, которые определяются следующим образом: при  $k = 0, q = 0$ :  $b_t = b_{00t}, d_t = d_{00t}$ , при  $k = 0, q = 1$ :  $b_t = b_{10t}, d_t = d_{10t}$ , при  $k = 1, q = 0$ :  $b_t = b_{01t}, d_t = d_{01t}$ , при  $k = 1, q = 1$ :  $b_t = b_{11t}, d_t = d_{11t}$ ,  $t = 0,1$ .

Рассмотрим задачу об определении  $\{a_{i_0}(x_2), u(x_1, x_2)\}$  из следующих условий

$$-a_1(x_2)u_{x_1x_1} - a_2(x_2)u_{x_2x_2} + c(x_2)u = h(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in D, \quad (1)$$

$$u(0, x_2) = \phi_1(x_2), \quad (e-1)u_{x_1}(l_1, x_2) + (2-e)u(l_1, x_2) = \phi_2(x_2), \quad 0 \leq x_2 \leq l_2, \quad (2)$$

$$b_0u_{x_2}(x_1, 0) + b_1u(x_1, 0) = \varphi_1(x_1), \quad 0 \leq x_1 \leq l_1, \quad (3)$$

$$d_0u_{x_2}(x_1, l_2) + d_1u(x_1, l_2) = \varphi_2(x_1), \quad 0 \leq x_1 \leq l_1, \quad (4)$$

$$a_{i_0}(x_2)u_{x_1}(0, x_2) = g_{i_0}(x_2), \quad 0 \leq x_2 \leq l_2, \quad (5)$$

причем  $b_0\phi_{1x_2}(0) + b_1\phi_1(0) = \varphi_1(0)$ ,  $d_0\phi_{1x_2}(l_2) + d_1\phi_1(l_2) = \varphi_2(0)$ ,  $b_0\phi_{2x_2}(0) + b_1\phi_2(0) = \varphi_1^{(e-1)}(l_1)$ ,  $d_0\phi_{2x_2}(l_2) + d_1\phi_2(l_2) = \varphi_2^{(e-1)}(l_1)$ . Здесь  $D = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2\}$ ,  $h(x_1, x_2), \phi_i(x_2), \varphi_i(x_1), g_{i_0}(x_2), i = 1,2$  – заданные функции  $h(x_1, x_2), h_{x_1x_1}(x_1, x_2) \in C^\alpha(\bar{D})$ ,  $\phi_1(x_2) \in C^{2+\alpha}(0, l_2) \cap C[0, l_2]$ ,  $\phi_2(x_2) \in C^{3-e+\alpha}(0, l_2) \cap C[0, l_2]$ ,  $\varphi_1(x_1) \in C^{1+b_1+\alpha}(0, l_1) \cap C[0, l_1]$ ,  $\varphi_2(x_1) \in C^{1+d_1+\alpha}(0, l_1) \cap C[0, l_1]$ ,  $g_{i_0}(x_2) \in C^\alpha[0, l_2]$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

**Определение.** Функции  $\{a_{i_0}(x_2), u(x_1, x_2)\}$  назовем решением задачи (1)–(5), если  $0 < a_{i_0}(x_2) \in C[0, l_2], u(x_1, x_2) \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$  и удовлетворяются соотношения (1)–(5).

Метод последовательных приближений для решения задачи (1)–(6) применяется по схеме:

$$-\sum_{i_2=1}^{i_0-1} a_{i_1}(x_1)u_{x_2 x_{i_2}}^{(s+1)} - a_{i_0}^{(s)}(x_1)u_{x_{i_0} x_{i_0}}^{(s+1)} - \sum_{i_2=i_0+1}^2 a_{i_1}(x_1)u_{x_2 x_{i_2}}^{(s+1)} +$$

$$+ c^{(s)}(x_1)u^{(s+1)} = h(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in D, \quad (6)$$

$$u^{(s+1)}(0, x_2) = \phi_1(x_2), (2-e)u^{(s+1)}(l_1, x_2) + (e-1)u_{x_1}^{(s+1)}(l_1, x_2) = \phi_2(x_2), 0 \leq x_2 \leq l_2, \quad (7)$$

$$b_0 u_{x_2}^{(s+1)}(x_1, 0) + b_1 u^{(s+1)}(x_1, 0) = \varphi_1(x_1), \quad 0 \leq x_1 \leq l_1, \quad (8)$$

$$d_0 u_{x_2}^{(s+1)}(x_1, l_2) + d_1 u^{(s+1)}(x_1, l_2) = \varphi_1(x_1), \quad 0 \leq x_1 \leq l_1, \quad (9)$$

$$a_{i_0}^{(s+1)}(x_2)u_{x_1}^{(s+1)}(0, x_2) = g_{i_0}(x_2), \quad 0 \leq x_2 \leq l_2, \quad (10)$$

По схеме (6) – (10) последовательные итерации проводятся следующим образом: сперва выбираются некоторые  $a_{i_0}^{(0)}(x_2) > 0, i = 1, 2$  принадлежащие  $C^\alpha[0, l_2]$  и подставляются в уравнение (6). Далее решается задача (6) – (9) и находится  $u^{(1)}(x_1, x_2)$ . По функциям  $u_{x_1}^{(1)}(0, x_2)$ , из условий (10) находятся  $a_{i_0}^{(1)}(x_2)$  и эти функции используются для проведения следующего шага итерации.

*Теорема 2.* Пусть решение задачи (1)–(5) существует и при всех  $s = 0, 1, \dots$ ,  $u^{(s)}(x_1, x_2) \in C^2(D), a_{i_0}^{(s)}(x_2) \in C^\alpha[0, l_2], g_1(x_2)u_{x_1}^{(s)}(0, x_2) > 0, Nl_1l_2 < 1$  производные функции  $u^{(s)}(x_1, x_2)$  по  $x_1, x_2$  до второго порядка равномерно ограничены. Тогда функции  $\{a_{i_0}^{(s)}(x_2), u^{(s)}(x_1, x_2)\}$  полученные методом последовательных приближений (6) – (10) при  $s \rightarrow +\infty$  равномерно сходятся к решению задачи (1)–(5) со скоростью геометрической прогрессии.  $N$  – положительное постоянное, зависящее от данных задач.

#### Литература

1. *Искендеров А.Д.* Обратная задача об определении коэффициентов эллиптического уравнения // Диф. уравнения. 1979.- Т.20, №11.-С.858 -867.
2. *Хайдаров А.* Об одной обратной задаче для эллиптических уравнений //Некорректные задачи математической физики и анализа/ /Под ред.С.А.Алексева. Новосибирск,1984.- С.245-249.
3. *Вабищевич П.Н.* О единственности некоторых обратных задач для эллиптических уравнений // Диф. уравнения. 1988.- Т.24, №12.-С.2125-2129.
4. *Соловьев В.В.* Обратные задачи определения источника и коэффициента в эллиптическом уравнении в прямоугольнике//Журнал выч. мат. и мат.физики.2007.-Т.47,№8.- С.1365-1377.

## ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОФИЗИКИ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ В АЭРОКОСМИЧЕСКОЙ ТЕХНИКЕ

О.М. Алифанов

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),*

*Москва, Россия*

*e-mail: o.alifanov@yandex.ru*

**Аннотация.** В докладе рассматривается методология исследования тепловых процессов и свойств материалов, основанная на решении обратных задач. Обобщены основные теоретические и экспериментальные результаты, полученные в Московском авиационном институте в течение ряда лет. Представлены конкретные примеры применения данной методологии при проектировании и испытаниях аэрокосмических аппаратов.

*Ключевые слова:* обратные задачи теплообмена, итерационная регуляризация, тепловое проектирование, параметрическая идентификация, теплофизические свойства, прогнозирование свойств материалов.

### INVERSE PROBLEMS OF THERMO-PHYSICS WITH APPLICATIONS TO AEROSPACE TECHNOLOGY

(1 интервал)

**Abstract.** The paper discusses the methodology of the study of thermal processes and material properties, based on the solution of inverse problems. The main theoretical and experimental results obtained at the Moscow Aviation Institute for years are generalized. The concrete examples of the application of the methodology for design and testing of the thermal protection of aerospace vehicles are presented.

*Key words:* inverse heat transfer problems, iterative regularization, thermal design, parametric identification, thermal properties, material's properties prediction.

Потребность в решении обратных задач для математических моделей теплофизики и теплообмена возникает во многих приложениях, связанных с технической диагностикой, идентификацией различных теплофизических процессов, управлением тепловыми процессами, оптимизацией технических объектов, функционирующих в сложных тепловых условиях.

Авиационная, ракетная и космическая техника является ярким примером такой ситуации. С одной стороны, необходимо обеспечить требуемую надежность и безопасность, но с другой – сделать это при минимальных проектных запасах, таких как запасы прочности, запасы по толщинам теплозащитных и теплоизоляционных покрытий, по мощности систем терморегулирования и т.п. В значительной степени этому могут способствовать методы исследований, базирующиеся на решении обратных задач. Системное исследование разных подходов к получению устойчивых решений ОЗТО, основанных на тех или иных принципах регуляризации, было начато автором с коллегами в начале 70-х годов и изложено в книгах [1-6].

Особое значение в комплексе разработанных методов имеет итерационная регуляризация. Это универсальный метод, с помощью которого эффективно решаются как линейные, так и нелинейные обратные задачи, в одномерной и многомерной постановках, не переопределенные и переопределенные, в том числе для многофакторных процессов тепло- и массообмена, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными. В этом подходе управление мерой близости приближенного решения к искомому обеспечивается выбором количества итераций с выходом на уровень невязки, когда конечное приближение к искомой функции или вектор-функции будет соответствовать погрешности задания исходных данных.

В последнее время создаются основы нового направления в изучении физических систем с сильной пространственной неоднородностью, нерегулярностью и анизотропией. Предложенный и разработанный в [7-10] подход к исследованию свойств таких материалов представляет собой двухуровневую идентификацию математических моделей, описывающих физические процессы в материалах при их нагреве или охлаждении.

Первый уровень - это косвенное экспериментальное определение ряда ключевых эффективных теплофизических характеристик образцов материала на основе решения обратных задач теплообмена.

Второй уровень идентификации можно назвать настройкой более полной (расширенной) математической модели радиационно-кондуктивного теплообмена исследуемого материала на эффективные теплофизические характеристики, найденные на первом уровне исследований.

Сейчас накопился большой опыт в применении методологии обратных задач теплообмена при проектировании и испытаниях новой техники. Основные области этих исследований и разработок, в том числе представленные в публикациях [11-18], перечислены ниже в приложении к аэрокосмической технике:

1. Диагностика и моделирование теплообмена в сверхзвуковых и гиперзвуковых трубах.
2. Диагностика и идентификация теплопередачи и эрозионного разрушения материалов в сверхзвуковых гетерогенных потоках.
3. Управление процессами теплообмена и проектирование тепловой защиты.
4. Исследование теплофизических характеристик материалов, подвергающихся тепловой деструкции.
5. Моделирование переноса тепла в многоразовой тепловой защите аэрокосмических аппаратов.
6. Исследование ультрапористых и анизотропных материалов.
7. Идентификация радиационно-кондуктивного теплообмена в экранно-вакуумной теплоизоляции.
8. Летные испытания тепловых режимов и теплозащиты ЛА.
9. Исследование стабильности терморегулирующих покрытий космических аппаратов в условиях орбитального полета.



10. Экспериментально-вычислительный комплекс для исследования тепловых режимов материалов и элементов конструкций.
11. Разработка термозондов для космических пенетраторов.

### Литература

1. Алифанов О.М. Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов (введение в теорию обратных задач теплообмена). М.: Машиностроение, 1979. 216 с.
2. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988. 280 с.
3. Alifanov O.M. Inverse Heat Transfer Problems. Heidelberg-New York: Springer Verlag, 1994. 348 p.
4. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена. М.: Наука, 1988. -288 с.
5. Alifanov O.M., Artyukhin E.A. and Rumyantsev S.V. Extreme Methods for Solving Ill-Posed Problems with Applications to Inverse Problems. New York: Begell House 1995. 292 p.
6. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Ненарокомов А.В. Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена. М.: Янус-К, 2009. 299 с.
7. Алифанов О.М., Черепанов В.В. Прогноз физических свойств и идентификация моделей легких высокопористых теплозащитных материалов. // Вестник Московского авиационного института. 2010. Т. 16. № 4. С.48.
8. Алифанов О.М., Черепанов В.В. Идентификация моделей, определение и прогноз свойств высокопористых теплозащитных материалов. // Вестник Московского авиационного института. 2010. Т. 17. № 4. С. 7.
9. Алифанов О.М., Черепанов В.В. Идентификация моделей и прогноз физических свойств высокопористых теплозащитных материалов. // Инженерно-физический журнал. 2010. Т. 83. № 4. С. 720-732.
10. Алифанов О.М., Черепанов В.В. Методы исследования и прогнозирования свойств высокопористых теплозащитных материалов. М.: Изд. МАИ, 2014. 264 с.
11. Alifanov O.M., Budnik S.A., Nenarokomov A.V., Netelev A.V., Titov D.M. Destructive materials thermal characteristics determination with application for spacecraft structures testing. // Acta Astronautica. 2013. Т. 85. С. 113-119.
12. Nenarokomov A.V., Alifanov O.M., Titov D.M. Estimating thermal and radiative properties of insulating materials. // Inverse Problems in Science and Engineering. 2012. Т. 20. - № 5. С. 639-649.
13. Алифанов О.М., Будник С.А., Ненарокомов А.В., Нетелев А.В. Идентификация математических моделей теплопереноса в разлагающихся материалах. // Тепловые процессы в технике. 2011. № 8. С. 338-347.
14. Алифанов О.М., Черепанов В.В., Моржухина А.В. Математическое моделирование ультрапористых неметаллических сетчатых материалов. // Инженерно-физический журнал. 2015. Т. 88. № 1. С. 122-132.
15. Алифанов О.М., Черепанов В.В., Моржухина А.В. Комплексное исследование физических свойств сетчатого стеклоглуглерода. // Инженерно-физический журнал. 2015. Т. 88. № 1. С. 133-144.

16. Алифанов О.М., Черепанов В.В., Моржухина А.В. Высокоточный численный метод для верификации данных экспериментального исследования теплового состояния образцов. // Тепловые процессы в технике. 2014. № 12. С. 560-566.

17. Alifanov O.M., Cherepanov V.V., Zaytseva A.V. The modeling of radiation transfer in highly-porous composite materials with strong scattering. // Journal of Physics: Conference Series. 2012. Т. 369. № 1. С. 12-23.

18. Алифанов О.М., Будник С.А., Ненарокомов А.В., Черепанов В.В. Экспериментально-теоретическое исследование процессов теплообмена в высокопористых материалах. // Тепловые процессы в технике. 2011. № 2. С. 53-65.

# Variational Regularization for an Atmospheric Tomography

Erdem Altuntac

*Institute for Numerical and Applied Mathematics,  
University of Göttingen*

*e-mail: e.altuntac@math.uni-goettingen.de*

## Abstract

One important predictor in meteorology is the humidity of the atmosphere. This is estimated by fan-beam measurements between satellite transmitters and land-based receivers. The measurements are sparse and fluctuate randomly with receiver availability. The task is to reconstruct from these measurements the 3-dimensional, spatially varying index of refraction of the atmosphere, from which the relative humidity can be inferred.

Before determining our appropriate regularizer for the minimization problem, we first recognize the refractivity profile  $N$  as a function of refractive index  $n$  of the light as in scattering theory, *i.e.*  $N = 10^6(n - 1)$ . This leads to the correct characterization of the target function.

We then propose well-known smoothed total variation (smoothed-TV) regularization for solving this atmospheric tomography problem named as *GPS-tomography*. GPS-tomography involves the reconstruction of some quantity, pointwise within a volume (e.g. humidity) from measurements transmitted by nonuniformly distributed transducers (satellites). These measurements are collected by nonuniformly distributed receivers on the ground (ground stations). As with conventional tomography, the task here is the reconstruction of the density profile of a layer in the atmosphere from a set of line integrals.

We develop the necessary theory which contributes to convex variational regularization. Particular interpretation of this analysis will be for the smoothed-TV functional that we observe the necessity of the regularized solution for our variational minimization problem to be in the class of  $\mathcal{W}^{1,\infty}$ . We will also discuss about the characterization of the convergence of the regularized solution to the true solution.

We finally demonstrate our regularization on simulated data, employing a novel reverse-communication large-scale nonlinear optimization software.

## References

- [1] R. Acar, C. R. Vogel. *Analysis of bounded variation penalty methods for ill-posed problems*, Inverse Problems, Vol. 10, No. 6, 1217 - 1229, 1994.
- [2] S. Anzengruber and R. Ramlau. *Morozov's discrepancy principle for Tikhonov-type functionals with nonlinear operators*, Inverse Problems, 26, 025001 (17pp), 2010.
- [3] S. Anzengruber and R. Ramlau. *Convergence rates for Morozov's discrepancy principle using variational inequalities*, Inverse Problems, 27, 105007 (18pp), 2011.
- [4] M. Bender, G. Dick, M. Ge, Z. Deng, J. Wickert, H. G. Kahle, A. Raabe, G. Tetzlaff. *Development of a GNSS water vapour tomography system using algebraic reconstruction technique*, ADV SPACE RES, 47(10):1704-1720, 2011.

- [5] D. Colton and R. Kress. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, Springer Verlag Series in Applied Mathematics Vol. 93, Third Edition 2013.
- [6] L. C. Evans. *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [7] C. Hamaker, K. T. Smith, D. C. Solmon, S. L. Wagner. *The divergent beam x-ray transform*, Rocky Mountain J. Math., 10, No.1, 253 - 283, 1980.
- [8] B. Hofmann, P. Mathé. *Parameter choice in Banach space regularization under variational inequalities*, Inverse Problems 28, 104006 (17pp), 2012.
- [9] B. Hofmann, M. Yamamoto. *On the interplay of source conditions and variational inequalities for nonlinear ill-posed problems*. Appl. Anal. 89, 11, 1705 - 1727, 2010.
- [10] T. Hohage, F. Weidling. *Verification of a variational source condition for acoustic inverse medium scattering problems*, Inverse Problems, 31, 075006 (14pp), 2015.
- [11] R.Luke. *SAMSARA, a reverse communication optimization toolbox for MATLAB*, [http://num.math.uni-goettingen.de/~r.luke/publications/SAMSARA\\_MATLAB.tar.gz](http://num.math.uni-goettingen.de/~r.luke/publications/SAMSARA_MATLAB.tar.gz)
- [12] P. Miidla, K. Rannat P. Uba. *Tomographic approach for tropospheric water vapor detection*, Comput. Methods. Appl. Math., 8(3), 263-278, 2008.
- [13] F. Natterer. *The mathematics of computerized tomography*, SIAM, Classics Appl. Math., 32, 2001.
- [14] F. Natterer and F. Wübbeling. *Mathematical methods in image reconstruction*, SIAM Monogr. Math. Model. Comput., 05, 2001.
- [15] G. Ólafsson, E. T. Quinto. *The Radon transform, inverse problems and tomography*, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Volume 63, American Mathematical Society Short Course, January 3-4, 2005, Atlanta, Georgia, 2006.
- [16] J. Radon. *Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten*. Ber. Verh. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig-Math.-Natur. Kl., 69, 262 - 277, 1917.
- [17] L. I. Rudin, S. J. Osher, E. Fatemi. *Nonlinear total variation based noise removal algorithms*, Physica D, 60, 259-268, 1992.
- [18] K. T. Smith, D. C. Solmon, S. L. Wagner, C. Hamaker. *Mathematical aspects of divergent beam radiography*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 75, No. 5, 2055 - 2058, 1978.
- [19] C. R. Vogel. *Computational methods for inverse problems*, Frontiers Appl. Math. 23, 2002.
- [20] C. R. Vogel, M. E. Oman. *Iterative methods for total variation denoising*, SIAM J. SCI. COMPUT., Vol. 17, No. 1, 227-238, 1996.
- [21] F. Zus, M. Bender, Z. Deng, G. Dick, S. Heise, M. Shang-Guan, J. Wickert, *A methodology to compute GPS slant total delays in a numerical weather model*, Radio Science, 2012, vol. 47, RS2018.

## НЕКОРРЕКТНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНДЕКСА ТЕКСТУРЫ ПО НАБОРУ ОРИЕНТАЦИЙ ЗЁРЕН ПОЛИКРИСТАЛЛА

А. О. Антонова, Т. И. Савёлова

*Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»*

115409, Москва, Каширское шоссе, д. 31

Тел.: 89851773206, e-mail: aoantonova@mail.ru

Тел.: 84953934653, e-mail: TISavelova@mephi.ru

Одной из характеристик текстуры поликристаллического материала является индекс текстуры [1,2]. индекс текстуры дает представление о степени остроты функции распределения ориентаций (ФРО): если ФРО близка к равномерному распределению, то индекс текстуры близок к единице (относительно инвариантной меры на группе вращений  $SO(3)$ ), если текстура кристалла стремится к монокристаллу, то индекс текстуры неограниченно растет.

В данной работе производится вычисление индекса текстуры для нормальных распределений (НР) на группе вращений  $SO(3)$  [3]. Вычисляются оценки полного и усеченного индекса текстуры по набору отдельных ориентаций, моделируемых специализированным методом Монте-Карло для НР, и изучаются их основные статистические характеристики на основе подхода, развиваемого в [4–7]. Для полной и усеченной оценок индекса текстуры получены математическое ожидание и дисперсия, а также изучается вопрос смещенности и состоятельности оценок.

Сформулированы утверждения о поведении оценок индекса текстуры и их статистических характеристик в зависимости от изменений параметра остроты текстуры, объема выборки и величины параметра усечения ряда. Показано, что для неусеченной оценки индекса текстуры свойство состоятельности может не выполняться. Решается задача выбора параметра обрезания ряда и величины объема выборки от остроты текстуры для уменьшения погрешности вычисления оценки усеченного индекса.

1. *Boogaart K. G.* Statistical Errors of Texture Entities Based on EBSD Orientation Measurements. Material Science Forum. ICOTOM 14. 2005. P. 179 – 184.
2. *Hielscher R., Schaeben H. Chateigner D.* On the entropy to texture index relationship in quantitative texture analysis. J. of Appl. Cryst. 2007. V 40. P. 371–375.
3. *Borovkov M., Savelova T.* The computational approaches to calculate normal distributions on the rotation group // Mag. Appl. Cristallogr. 2007. V. 40. P. 449–455.
4. *Аганин К.П., Савелова Т.И.* Оценки точности ядерных и проекционных методов восстановления функции распределения ориентации на группе вращений  $SO(3)$  // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 6. С. 1087–1101.
5. *Савёлова Т.И., Сыпченко М.В.* Оценка точности для восстановления функции распределения зерен для зависимых ориентацией и с учетом размеров зерен // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49. № 5. С. 879–890.
6. *Савелова Т.И., Сыпченко М.В.* Исследование точности моделирования текстуры поликристалла по данным измерений отдельных ориентировок // Кристаллография. 2010. Т. 55. № 4. С. 744–748.
7. *Антонова А.О., Савёлова Т.И.* Оценка погрешностей вычисления характеристик текстуры поликристаллов путём изменения параметров измерений методами электронной микроскопии // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. №2. С. 322–334.

# УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА I РОДА В ИНТЕГРАЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ, УЧИТЫВАЮЩИХ ВОЗРАСТНУЮ СТРУКТУРУ РАЗВИВАЮЩИХСЯ СИСТЕМ

А.С. Апарсин

*Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск, Россия  
e-mail: apartsyn@isem.irk.ru*

**Аннотация.** Приводятся формулы обращения тестовых уравнений Вольтерра I рода, учитывающих возрастную структуру развивающихся систем.

*Ключевые слова:* развивающаяся система, возрастная структура, уравнения Вольтерра I рода, формулы обращения.

## THE VOLTERRA EQUATIONS OF THE FIRST KIND IN INTEGRAL MODELS THAT CONSIDER THE AGE STRUCTURE OF DEVELOPING SYSTEMS

**Abstract.** Inverse formulae of test Volterra equations of the first kind that consider the age structure of developing systems are given.

*Key words:* developing system, age structure, Volterra equations of the first kind, inverse formulae.

При построении интегральных моделей развивающихся систем, элементы которых принадлежат  $n$  возрастным группам, возникают балансовые уравнения Вольтерра I рода

$$\sum_{i=1}^n \int_{a_i(t)}^{a_{i-1}(t)} K_i(t, s)x(s)ds = y(t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

где

$$a_0(t) \equiv t > a_1(t) > \dots > a_n(t) \equiv 0; \quad a'_i(t) \geq 0, \quad a'_1(0) < 1, \quad a_i(0) = 0 \quad \forall i,$$

$K_i(t, s)$  — коэффициент эффективности элементов  $i$ -ой возрастной группы, в которую входят элементы  $x(s)$ , имеющие возраст  $t - s \in [t - a_{i-1}(t), t - a_i(t)]$ ,  $y(t)$  — некоторый интегральный показатель уровня развития системы (например, в [1] применительно к электроэнергетической системе России в качестве  $y(t)$  принималась суммарная располагаемая мощность электростанций). В случае  $n = 1$  теория и численные методы решения (1) детально исследованы в [2]. Случай  $n > 1$  пока малоисследован. Достаточные условия разрешимости (1) в  $C_{[0, T]}$  приведены в [3].

Для понимания специфики (1) важную роль играют тестовые уравнения, когда  $K_i = const$  ( $K_1 = 1$ ), а  $a_i(t) = \alpha_i t$ ,  $0 = \alpha_n < \dots < \alpha_0 = 1$ . При этом, если

$$\sum_{i=1}^{n-1} |K_i - K_{i+1}| \alpha_i < 1, \quad (2)$$

то в силу перестановочности операторов в (1) непрерывное решение (1) может быть получено в виде явной формулы обращения [4].

Ниже рассматриваются случаи нарушения условия (2).

**Теорема 1.** Пусть для некоторого натурального  $k^*$

$$\sum_{i=1}^{n-1} (K_i - K_{i+1}) \alpha_i^{k^*} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} (K_i - K_{i+1}) \alpha_i^{k^*} \ln \alpha_i \neq 0, \quad n \geq 2,$$

и  $y(t) = C_{[0,T]}^{(k^*)}$ ,  $y^{(i)}(0) = 0$ ,  $i = \overline{0, k^* - 1}$ ,  $y^{(k^*)}(t) = \lambda = \text{const.}$   
Тогда справедлива формула обращения (1)

$$x_c(t) = - \frac{\lambda t^{k^*+1} (\ln t - \sum_{i=1}^{k^*-1} \frac{1}{i})}{(k^* - 1)! \sum_{i=1}^{n-1} (K_i - K_{i+1}) \alpha_i^{k^*} \ln \alpha_i} + c t^{k^*-1},$$

$c$  — произвольная постоянная.

В случае  $n = 2$  справедлива

**Теорема 2.** Пусть

$$(1 - K_2) \alpha_1 > 1,$$

$$k^* = \left[ - \frac{\ln(1 - K_2)}{\ln \alpha_1} \right]$$

( $[\dots]$  — целая часть числа),

$$y(t) \in C_{[0,T]}^{(k^*+1)}, \quad y(t) = \mathcal{O}(t^{k^*+1}).$$

Тогда формула обращения (1) имеет вид

$$x_c(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (1 - K_2)^i \alpha_1^i y'(\alpha_1^i t) + c t^{-\frac{\ln(1-K_2)}{\ln \alpha_1} - 1},$$

$c$  — произвольная постоянная.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №15-01-01425-а.

## Литература

1. Апарцин А.С., Сидлер И.В. Применение неклассических уравнений Вольтерра I рода для моделирования развивающихся систем // Автоматика и телемеханика. 2013. № 6. С. 3-16.
2. Апарцин А.С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука, 1999. 193 с.
3. Apartsin A.S. On the theory of non-classical Volterra equations of the first kind // Book of abstract of the 4-th Inverse Problems, Design and Optimization Symposium (IPDO-2013). Albi, France, June 26-28, 2013. P. 181.
4. Апарцин А.С. О разрешимости тестовых неклассических уравнений Вольтерра I рода в пространстве  $C_{[0,T]}$  // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Материалы Двенадцатой международной Казанской летней научной школы-конференции. Казань, 2015. С. 30-32.

# ПРИМЕНЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ: ОПИСАНИЕ КЛАССОВ РЕШЁННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

А. В. Баев

ОАО «МКБ «Компас», Москва, Россия

e-mail: andrewbayev@mail.ru

**Аннотация.** В докладе рассказывается о применении теории оптимального восстановления к решению некоторых конкретных классов линейных обратных задач. Описаны классы обратных задач, для которых удалось построить оптимальные алгоритмы (для условно корректных задач) и оптимальные регуляризующие алгоритмы (для некорректных задач).

*Ключевые слова:* оптимальное восстановление, линейные обратные задачи, конечномерная аппроксимация.

## APPLICATION OF OPTIMAL RECOVERY: THE DESCRIPTION OF CLASSES OF THE SOLVED LINEAR INVERSE PROBLEMS

**Abstract.** The report tells about the application of optimal recovery theory to solving certain classes of linear inverse problems. Optimal algorithms have been constructed for some classes of conditionally well-posed problems. And optimal regularizing algorithms have been constructed for some classes of ill-posed problems. Here, these two classes of linear inverse problems are described.

*Keywords:* optimal recovery, linear inverse problems, finite-dimensional approximation.

Большинство обратных задач является некорректными, но если, помимо прочего, для решения известны априорные ограничения определённого вида (например, компактное множество априорных ограничений), то задачу можно свести к задаче оптимального восстановления [1,2]. Эта методика позволяет решать задачу именно тем методом, который точнее всех возможных, который обладает минимальной *априорной погрешностью*. Длительное время теория оптимального восстановления не имела алгоритмов решения достаточно широкого класса задач. Ситуация изменилась после исследований по конечномерной аппроксимации задач оптимального восстановления [2].

Допустим, задача может быть записана в виде

$$\bar{z} \in M, \quad \|F(\bar{z}) - v\| \leq \varepsilon. \quad (1)$$

Здесь  $\bar{z}$  — восстанавливаемое *точное решение*, являющееся элементом действительного нормированного пространства  $Z$ ,  $F : Z \rightarrow \mathbb{R}^m$  — известный линейный непрерывный оператор,  $M \subset Z$  — известное *множество априорных ограничений*,  $v \in \mathbb{R}^m$  — известный вектор, имеющий смысл приближённого значения для выражения  $F(\bar{z})$ ,  $\varepsilon > 0$  — *погрешность задачи*. В разных задачах норма в  $\mathbb{R}^m$  может быть различной, но в любом случае существует выпуклое уравновешенное множество  $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^m$ , такое что второе условие в (1) эквивалентно включению  $F(\bar{z}) - v \in \Omega_\varepsilon$ . Пусть  $\ell \in Z^*$  — некоторый фиксированный линейный непрерывный функционал. Вместо задачи (1) можно решать задачу минимизации *априорной погрешности восстановления функционала*  $\ell$  среди всех *методов восстановления*  $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\sup_{z \in M, y \in \mathbb{R}^m: F(z) - y \in \Omega_\varepsilon} |\ell(z) - \varphi(y)| \rightarrow \min_{\varphi} \varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2)$$



Пусть  $\hat{\varphi} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  — решение этой задачи. Его интерпретация такова: приближением для числа  $\ell(\bar{z})$  считаем число  $\hat{\varphi}(v)$ , а погрешностью этого приближения будет значение минимума в задаче (2). Для большинства прикладных задач это значение равно  $+\infty$ , т.е. все методы восстановления  $\varphi$  имеют бесконечную априорную погрешность. В этом случае можно искать оптимальный регуляризирующий алгоритм. Но если множество  $M$  достаточно узко, то минимум может быть конечным. В этом случае можно искать решение и значение задачи (2), т.е. можно построить наиболее точный метод решения задачи и найти его погрешность.

В [2] была предложена методика решения достаточно широких классов задач типа (2) для случая, когда множество  $M$  выпукло и уравновешенно. Методика основана на конечномерной аппроксимации исходной задачи. Здесь особенностью является то, что простой конечномерной аппроксимации не достаточно, поскольку при этом теряется свойство оптимальности. Была разработана методика, в которой задача (2) сводится к задаче того же вида, но в которой присутствуют только конечномерные объекты. Алгоритмы для конечномерных задач были предложены в [3]. Они применимы для множеств квадратичных (и как частный случай линейных) ограничений вида

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|G_\sigma x\|^2 \leq 1 \quad \forall \sigma \in \Sigma\}, \quad \Omega_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \|\hat{G}_\sigma y\|^2 \leq \varepsilon^2 \quad \forall \sigma \in \hat{\Sigma}\},$$

где  $\Sigma$  — конечное множество индексов, а для любого  $\sigma \in \Sigma$   $G_\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{p_\sigma}$  — линейный оператор,  $p_\sigma \in \mathbb{N}$ . Аналогичным определениям удовлетворяют объекты  $\hat{\Sigma}$  и  $\hat{G}_\sigma$ .

В [4] построен оптимальный регуляризирующий алгоритм для некорректной задачи с  $M = \text{Im } V$ , где  $V : W \rightarrow Z$  — известный линейный инъективный компактный оператор, действующий из действительного гильбертова пространства  $W$ , а множество  $\Omega_\varepsilon$  является эллипсоидом. Этот алгоритм имеет смысл применять, если минимум в задаче (2) равен  $+\infty$ . Если же это значение конечно, то предпочтительно решать задачу оптимального восстановления.

### Литература

1. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
2. Баев А. В. Оптимальное восстановление и конечномерная аппроксимация в линейных обратных задачах // Матем. Сборник. 2008. **199**. № 12. 3–18.
3. Баев А. В. Принцип Лагранжа в задаче оптимального обращения линейных операторов в конечномерных пространствах при наличии априорной информации о решении // Журнал Выч. Мат. и Мат. Физ. 2007. **47**. № 9. 1512–1523.
4. Баев А. В. Оптимальный регуляризирующий алгоритм восстановления функционала в линейных обратных задачах с истокорпредставимым решением // Журнал Выч. Мат. и Мат. Физ. 2008. **48**. № 11. 1933–1941.

## ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФОРМУЛАХ

И. И. Баврин (г. Москва) ivbavrin@yandex.ru

Одним из мощных средств исследования в комплексном анализе являются интегральные представления. Теория аналитических функций комплексного переменного построена в большей степени на основе интегральной формулы Коши [1]. Значительным классом некорректно поставленных задач, возникших в физике, технике и других областях знаний, являются так называемые обратные задачи [2] — [4]. Автором [5] — [6] для функции  $f(z)$ , голоморфной в круге  $KR : |z| < R$ , установлена интегральная формула

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \int_{Cr} e^{\frac{zt}{\varepsilon}} \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} d\varepsilon, \quad (1)$$

являющаяся решением обратной задачи для интегральной формулы Коши в круге  $KR$ . Формула (1), в отличие от формулы Коши, по значениям функции  $f(z)$  на любой окружности  $Cr : |z| = r$  ( $0 < r < R$ ), лежащей в круге  $KR$  или на произвольной замкнутой кусочно-гладкой линии, охватывающей начало координат и содержащейся внутри окружности  $CR$  — границы круга  $KR$ , выражает ее значения во всех остальных точках круга  $KR$ . В [5] получены и решения обратных задач для формул Пуассона [1] и Шварца [7], а в [5] — [6] — и для формул производных формулы Коши [1]. Обратная задача для интегральной формулы Пуассона использована [8] для обобщения формулы Пуассона — Иенсена [7], из которого формулы Пуассона — Иенсена и Иенсена вытекают как частные случаи. Аналогично использована [9] и обратная задача для обобщения формулы Шварца — Иенсена [7]. В случае кольца  $D : r < |z| < R$  установлено [10] интегральное представление (в [10] это формула (1)) для голоморфной в области  $D$  функции  $f(z)$ , которое, в отличие от формулы Коши для кольца, по значениям  $f(z)$  на произвольной замкнутой кусочно-гладкой линии, охватывающей начало координат и содержащейся внутри кольца  $D$ , выражает её значения во всех остальных точках этого кольца, т.е. в [10] решена обратная задача для формулы Коши и в случае кольца  $D$ . В статье [11] в случае круга  $KR$  найдено решение обратных задач для интегральных формул, приведённых в [12] (в [12] это формулы (3) и (4)), справедливые для функций, голоморфных в звёздной области относительно начала координат. Формула Коши имеет место и в случае многих комплексных переменных ( см., например, [13]). В сообщении [14] в случае поликруга  $E_R = E(R_1, \dots, R_n) = \{z = (z_1, \dots, z_n) : |z_1| < R_1, \dots, |z_n| < R_n\}$  решены обратные задачи как для формулы Коши, так и для вытекающих из неё формул (аналогичные формулам Шварца и Пуассона в случае одного комплексного переменного).

Решены обратные задачи [15] и в случае интегральных формул Темлякова (об этих формулах см., например, [16]). Наконец, в настоящем сообщении в случае выпуклой области и круга упомянуты два новых интегральных представления, из которых одно есть интегральное представление для функций, голоморфных в выпуклой области, а другое — решение его обратной задачи в круге  $KR$ .

### СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Высшая школа, 1999. 432 с.

2. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
3. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
4. Марчук Г. И. О постановке обратных задач // ДАН СССР. 1964. Т. 156, № 3. С. 503–506.
5. Баврин И. И. Интегральные представления аналитических и гармонических в круге функций // ДАН. 2008. Т. 421, № 3, С. 299–301.
6. Баврин И. И. Обратные задачи для интегральной формулы Коши и для формул для производных интеграла Коши // ДАН. 2008. Т. 422, № 2. С. 155–156.
7. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. М.: Наука, 1968. 624 с.
8. Баврин И. И. Обобщение формулы Пуассона-Иенсена // ДАН. 2010. Т. 431, № 2. С. 154–156.
9. Баврин И. И. Обобщение формулы Шварца—Иенсена // ДАН. 2010. Т. 433, № 4. С. 439–440.
10. Баврин И. И. Обратная задача для интегральной формулы Коши в кольце // ДАН. 2009. Т. 428, № 2. С. 151–152.
11. Баврин И. И. Обратные задачи в интегральных формулах // ДАН. 2013. Т. 450, №3. С. 257–259.
12. Баврин И. И. Интегральные представления в звездных областях // ДАН. 2012. Т. 447, №4. С. 359–360.
13. Владимиров В. С. Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964. 412 с.
14. Баврин И. И. Обратные задачи для интегральных формул Коши, Шварца и Пуассона в поликруге // ДАН. 2010. Т. 434, №6, С. 727–729.
15. Баврин И. И. Интегральные представления в кратно-круговых областях. Обратные задачи // ДАН. 2011. Т. 441, №5. С. 583–587.
16. Баврин И. И. Операторный метод в комплексном анализе. М.: Прометей, 1991. 200 с.

# Numerical reconstruction of unknown temporal load distributions in a vibrating Euler-Bernoulli beam from measured momentum

O. Baysal

*Izmir University, Gursel Aksel Blv. no:14 Izmir-Turkey*

*e-mail: onur.baysal@izmir.edu.tr*

**Abstract.** In this study, new numerical algorithms are proposed for numerical reconstruction of a temporal load  $H(t)$  in the identification problem related to Euler-Bernoulli beam equation  $m(x)u_{tt} + (EI(x)u_{xx})_{xx} = F(x)H(t)$ ,  $(x, t) \in (0, l) \times (0, T)$ , with clamped ends ( $u(x, t) = u_x(x, t) = 0$ ,  $x \in \{0, l\}$ ). The spatial load  $F(x)$  is assumed to be given and the momentum  $\mathcal{M}(t) := (EI(x)u_{xx}(x, t))_{x=0}$  at left boundary is assumed to be known by available boundary measurement. The formulation of this identification problem can be given by a proper input-output operator  $\Psi H : L^2(0, T) \mapsto L^2(0, T)$ ,  $(\Psi H)(t) := u_{xx}(0, t; H)$ ,  $t \in (0, T)$ , which is equivalent to the operator equation:  $\Psi H = \mathcal{M}$ . For the constant coefficients case, Fourier series or forward collocation algorithm gives efficient reconstruction of unknown source  $H(t)$  combined with some regularization techniques such as cut-off and Tikhonov regularization. This algorithm not only allows to reconstruct an unknown load with high accuracy, but also permits one to estimate the degree of ill-posedness of the considered inverse problems. On the other hand, for the variable coefficient equation, we perform the self-stabilized conjugate gradient algorithm based on adjoint problem approach. This approach allows for find an explicit formula for the Fréchet gradients of the cost functionals. Series of numerical experiments indicate effectiveness and bounds of applicability of considered algorithms.

*Key words:* Temporal load identification, Euler-Bernoulli beam, Inverse problems Fréchet gradient, Lipschitz continuity, ill-posedness

# Многошаговые методы для численного решения интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования

М.Н. Ботороева, М.В. Булатов

*Педагогический институт Иркутского государственного университета,  
Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН,  
Иркутск, Россия*

*e-mail: masha888888@mail.ru, mvbul@mail.ru*

**Аннотация.** В статье рассматриваются интегро-алгебраические уравнения с двумя переменными пределами интегрирования. Для их численного решения применяются многошаговые методы, основанные на явных квадратурных формулах типа Адамса и на экстраполяционных формулах.

*Ключевые слова:* Интегро-алгебраические уравнения, переменные пределы интегрирования, многошаговые методы.

## MULTISTEP METHODS FOR NUMERICAL SOLUTION OF INTEGRO-ALGEBRAIC EQUATIONS WITH VARIABLE LIMITS OF INTEGRATIONS

**Abstract.** In this paper we consider integro-algebraic equations with two variable limits of integrations. We employ multistep methods for numerical solution of these equations. These methods are based on Adams formulas and formulas of extrapolation.

*Key words:* Integro-algebraic equations, variable limits of integrations, multistep methods

Рассмотрим ИАУ с двумя переменными пределами интегрирования

$$A(t)x(t) + \int_{t-c}^t K(t,s)x(s)ds = f(t), \quad t \in [0, T], \quad s \in [0, t], \quad (1)$$

где  $A(t)$  и  $K(t, s)$  — квадратные матрицы размерности  $n$ ,  $f(t)$  и  $x(t)$  — известная и искомая  $n$ -мерные вектор-функции соответственно,  $c$  — известная положительная постоянная величина. Для данной системы задана стартовая вектор-функция

$$x(t) = x^0(t), \quad t \in [-c, 0]. \quad (2)$$

Здесь матрица  $A(t)$  — тождественно вырожденная

$$\det A(t) \equiv 0. \quad (3)$$

Предполагается, что входные данные  $A(t)$ ,  $K(t, s)$ ,  $f(t)$  обладают необходимой степенью гладкости. Под решением задачи понимаем любую непрерывную вектор-функцию  $x(t)$  обращающую (1) в тождество и непрерывно стыкующуюся со стартовой вектор-функцией (2) в начальной точке  $t = 0$ .

Условия существования единственного непрерывного решения для задачи (1) сформулированы в [1].

В докладе приводятся результаты численного решения представленных уравнений многошаговыми методами, основанными на квадратурной формуле Адамса и на экстраполяционных формулах.

$$A_{i+1} \sum_{j=0}^k \alpha_j x_{i-j} + h \sum_{l=i-N+1}^i \omega_{N-k+1,l} K_{i+1,l} x_l = f_{i+1}, \quad (4)$$

$i = 0, 1, \dots, \left[ \frac{T-h}{h} + 1 \right] + 1$ ,  $[\cdot]$  – целая часть числа.

Отметим, что такие методы были предложены для решения ИАУ в [2]. Там же приведены значения коэффициентов  $\omega_{N-k+1,l}$  и обоснована устойчивость таких методов при  $k \leq 5$ .

Работа поддержана грантами РФФИ №14-01-31224мол\_а, 15-01-03228\_А.

### Литература

1. Булатов М.В., Мачхина М.Н. Об одном классе интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования // Журнал Средневолжского математического общества. — 2010. — Т. 12. — с. 2. С. 40-45.
2. Будникова, О.С. Численное решение интегро-алгебраических уравнений многошаговыми методами / О. С. Будникова, М. В. Булатов // Журнал вычислительной математики и математической физики. - Москва: МАИК «Наука», 2012. - Т. 52. - №5. - С. 829–839

**Неявные многошаговые методы для численного решения  
интегро-алгебраических уравнений**

О.С. Будникова, М.В. Булатов

*Педагогический институт Иркутского государственного университета,  
Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН,  
Иркутск, Россия  
e-mail: osbud@mail.ru, mvbul@mail.ru*

**Аннотация.** В статье рассматриваются вырожденные системы интегральных уравнений Вольтерра. Для их численного решения строятся неявные многошаговые методы.

*Ключевые слова:* Интегро-алгебраические уравнения, многошаговые методы

**IMPLICIT MULTISTEP METHODS FOR NUMERICAL SOLUTION OF  
INTEGRO-ALGEBRAIC EQUATIONS**

**Abstract.** In this paper we consider singular systems of Volterra integral equations. We construct implicit multistep methods for numerical solution of these equations.

*Key words:* Integro-algebraic equations, multistep methods

Рассматриваются системы интегральных уравнений вида:

$$A(t)x(t) + \int_0^t K(t,s)x(s)ds = f(t), 0 \leq s \leq t \leq 1, \quad (1)$$

где  $A(t)$  и  $K(t,s)$  – заданные матрицы, размерности  $(n \times n)$ ,  $f(t)$  и  $x(t)$  –  $n$ -мерные известная и искомая вектор-функции и

$$\det A(t) \equiv 0. \quad (2)$$

Задачи (1) с условием (2) принято называть интегро-алгебраическими уравнениями (ИАУ). Первая статья, посвященная исследованию таких уравнений, вышла в 1987 году [1], в ней приведены достаточные условия существования единственного непрерывного решения, а также предложен численный метод решения.

В настоящее время, исследованием ИАУ занимается три небольших группы под руководством М.В. Булатова (Иркутск), Н. Brunner (Гонконг), М. Hadizadeh (Тигеран). Более подробный обзор можно найти в статьях [2], [3].

Для численного решения задачи (1) с условием (2) предложены неявные многошаговые методы:

$$A_{i+1}x_{i+1} + h \sum_{l=0}^{i+1} \omega_{i+1,l} K_{i+1,l} x_{i+1} = f_i. \quad (3)$$

Классические методы типа Адамса и многие другие многошаговые методы (3) для рассматриваемых задач, как правило, порождают неустойчивые процессы.

В докладе приведены условия на коэффициенты  $\omega_{i+1,l}$  при которых методы (3) устойчивы. Даны результаты численных расчетов модельных примеров.

Работа поддержана грантами РФФИ №14-01-31224мол\_а, 15-01-03228А.

**Литература**

1. Чистяков, В.Ф. О сингулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегральных аналогах //Функции Ляпунова и их применения. – Новосибирск: Наука, 1987. – с.231-239.
2. Будникова, О.С. Численное решение интегро-алгебраических уравнений многошаговыми методами / О. С. Будникова, М. В. Булатов//Журнал вычислительной математики и математической физики. - Москва: МАИК «Наука», 2012. – Т. 52. – №5. – С. 829–839
3. Hadizageh, M. The semi-explicit Volterra integral algebraic equations with weakly singular kernels: The numerical treatments// Journal of Computational and Applied Mathematics, 245 (2013) – pp. 121–132.



# ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ СО ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ

С.А. Будочкина, В.М. Савчин

*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*  
*e-mails: sbudotchkina@yandex.ru, vsavchin@yandex.ru*

**Аннотация.** Найдено решение обратной задачи вариационного исчисления для операторного уравнения со второй производной по времени.

*Ключевые слова:* обратная задача вариационного исчисления, вариационный принцип, потенциальный оператор.

## AN INVERSE PROBLEM OF THE CALCULUS OF VARIATIONS FOR AN OPERATOR EQUATION WITH THE SECOND TIME DERIVATIVE

**Abstract.** A solution of an inverse problem of the calculus of variations for the given operator equation with the second time derivative is found.

*Key words:* inverse problem of the calculus of variations, variational principle, potential operator.

В рамках современного вариационного исчисления классической обратной задачей вариационного исчисления (ОЗВИ) считается задача о построении функционала, уравнения экстремалей которого совпадают с заданными уравнениями.

Рассматриваемые в настоящей работе вопросы тесно связаны со следующей постановкой ОЗВИ, обобщающей ее классическую формулировку.

Дано операторное уравнение со второй производной по времени

$$N(u) \equiv P_{2u,t}u_{tt} + P_{1u,t}u_t + P_{3u,t}u_t^2 + Q(t, u) = 0, \quad (1)$$

$$u \in D(N) \subseteq U \subseteq V, \quad t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}, \quad u_t \equiv D_t u \equiv \frac{d}{dt}u, \quad u_{tt} \equiv \frac{d^2}{dt^2}u.$$

Здесь  $\forall t \in [t_0, t_1], \forall u \in U_1$  операторы  $P_{i,u,t} : U_1 \rightarrow V_1$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) являются линейными;  $Q : [t_0, t_1] \times U_1 \rightarrow V_1$  - произвольный оператор, вообще говоря, нелинейный;  $D(N)$  - область определения оператора  $N$ ,

$$D(N) = \{u \in U : u(t) \in W \forall t \in [t_0, t_1], u|_{t=t_0} = \varphi_1, u|_{t=t_1} = \varphi_2,$$

$$u_t|_{t=t_0} = \varphi_3, u_t|_{t=t_1} = \varphi_4, \varphi_i \in U_1 (i = \overline{1, 4})\}; \quad (2)$$

$U = C^2([t_0, t_1]; U_1)$ ,  $V = C([t_0, t_1]; V_1)$ ,  $U_1, V_1$  - действительные линейные нормированные пространства,  $U_1 \subseteq V_1$ . Множество  $W$  определяется внешними связями, наложенными на систему.

Требуется найти функционал, множество стационарных точек которого совпадает с множеством решений задачи (1), (2).

Эта постановка ОЗВИ обобщает известную в классической механике обратную задачу Гельмгольца. Последняя состоит в том, чтобы построить функцию Лагранжа (лагранжиан) по заданным уравнениям движения, являющимся обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка.

Отметим, что операторное уравнение (1) может быть обыкновенным дифференциальным, дифференциальным уравнением с частными производными, интегро -

дифференциальным уравнением, уравнением с отклоняющимися аргументами и др., а также системой таких уравнений.

В дальнейшем для упрощения обозначений будем записывать (1) также в виде

$$N(u) \equiv P_{2u}u_{tt} + P_{1u}u_t + P_{3u}u_t^2 + Q(u) = 0,$$

считая, что операторы  $P_{iu}$  ( $i = \overline{1,3}$ ) и  $Q$  зависят также и от  $t$ .

Данная статья является продолжением работ [1-4], поэтому будем использовать обозначения и терминологию этих работ.

Получены следующие результаты.

1. Получены необходимые и достаточные условия потенциальности оператора  $N$  (1) на множестве  $D(N)$  (2) относительно заданной билинейной формы.

2. В терминах необходимых и достаточных условий определена структура уравнения (1), допускающего прямую вариационную формулировку.

3. Построен функционал - вариационный принцип

$$F_N[u] = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left\langle \mathcal{R}_{3u}(u_t u) + \mathcal{R}_{2u}u_t + \mathcal{R}_1(u) - \frac{\partial \mathcal{R}_{2u}}{\partial t}u, u_t \right\rangle + \mathcal{B}[u] \right\} dt,$$

где

$$\Phi(\mathcal{R}_1(u), u_t) = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 \left\langle -P_{1\tilde{u}(\lambda)}(u - u_0), \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t} \right\rangle d\lambda dt,$$

$$\Phi(\mathcal{R}_{2u}u_t, u_t) = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 \left\langle -P_{2\tilde{u}(\lambda)}(u_t - u_{0t}), \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t} \right\rangle d\lambda dt,$$

$$\Phi(\mathcal{R}_{3u}(u_t u), u_t) = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 \left\langle -P_{3\tilde{u}(\lambda)} \left( \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t}(u - u_0) \right), \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t} \right\rangle d\lambda dt,$$

$$\mathcal{B}[u] = \int_0^1 \left[ \left\langle Q(\tilde{u}(\lambda)) + \lambda \frac{\partial P_{1\tilde{u}(\lambda)}}{\partial t}(u - u_0) - \lambda \frac{\partial^2 P_{2\tilde{u}(\lambda)}}{\partial t^2}(u - u_0), u - u_0 \right\rangle \right] d\lambda,$$

$\tilde{u}(\lambda) = u_0 + \lambda(u - u_0)$ ,  $u_0$  - фиксированный элемент из  $D(N)$ .

## Литература

1. Савчин В.М. Математические методы механики бесконечномерных неоператорных систем. М.: Изд-во УДН, 1991. 237 с.

2. Савчин В.М., Будочкина С.А. О структуре вариационного уравнения эволюционного типа со второй производной по  $t$  // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, N 1. С. 118—124.

3. Савчин В.М., Будочкина С.А. О существовании вариационного принципа для операторного уравнения со второй производной по "времени" // Математические заметки. 2006. Т. 80, вып. 1. С. 87—94.

4. Филиппов В.М., Савчин В.М., Будочкина С.А. О существовании вариационных принципов для эволюционных дифференциально-разностных уравнений // Труды МИАН. 2013. Т. 283. С. 25—39.

## **ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ В ДВОЙНЫХ ЗВЕЗДНЫХ СИСТЕМАХ И ЯДРАХ ГАЛАКТИК**

А.М.Черепашук

*Государственный астрономический институт имени П.К. Штернберга,*

*МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

*e-mail: cherepashchuk@gmail.com*

В 1964 году были опубликованы пионерские работы Я.Б.Зельдовича и Е.Е.Салпитера, в которых было предсказано гигантское выделение энергии при несферической аккреции вещества на черную дыру. За прошедшие полвека достигнут большой прогресс в исследовании черных дыр. Измерены массы около трех десятков звездных черных дыр и многих сотен сверхмассивных черных дыр. Измерены угловые моменты вращения ряда черных дыр. Даны наблюдательные ограничения на радиусы компактных объектов, ассоциируемых с черными дырами, которые не превышают нескольких гравитационных радиусов. Возникла новая область астрофизики – демография черных дыр, изучающая рождение, рост черных дыр и эволюционную связь этих экстремальных объектов с другими объектами Вселенной – звездами, галактиками, скоплениями галактик.

Планируются специальные наземные и космические эксперименты с очень высоким угловым разрешением для получения изображения темной «тени» от черной дыры на ярком фоне аккреционного диска вокруг сверхмассивных черных дыр, расположенных в центрах нашей Галактики и галактики М87.

Обнаружение такой «тени» позволит окончательно доказать, что многочисленные массивные и чрезвычайно компактные объекты, свойства которых очень похожи на свойства черных дыр, являются действительно черными дырами в смысле Общей теории относительности Эйнштейна.

# INFLUENCE OF THE TIKHONOV-PHILIPS REGULARIZATION ON THE STABILITY OF SOLVING INVERSE PROBLEMS

Michał Ciałkowski, Andrzej Frąckowiak  
Poznan University of Technology, Chair of Thermal Engineering,  
Poznan, Poland e-mail: [michal.cialkowski@put.poznan.pl](mailto:michal.cialkowski@put.poznan.pl)

## Introduction

In this paper, an one-dimensional heat conductivity equation is considered. Such an equation describes, for example, a wall which exhibits temperature changes across the thickness, whereas the temperature remains constant along the in-plane directions. The problem of recovering the unknown temperature at the left end point of the domain is studied. It is assumed that the temperature and the heat flux are measured at the right end point of the domain. Using the Laplace transform, the problem is reduced to an integral equation defining the unknown temperature at the left end point as a function of time. An approximation of the integral equation yields a linear system defining the values of the unknown function. Additionally, the graph of the unknown function is considered as a sequence of overlapping parabolas, and the condition of common tangents at common points of neighboring parabolas is imposed.

## Model Equation

For the region shown on the figure below, the governing equation and the initial and boundary conditions are the following:

- heat conduction equation

$$\rho c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad x \in (0, \delta), \quad t > 0 \quad (1)$$

- initial condition

$$T(x, 0) = T_0(x) \quad (2)$$

- boundary conditions,  $t > 0$

$$T(x = \delta, t) = H(t), \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\delta} = Q(t), \quad T(x = 0, t) = F(t) \quad (3)$$

when omitting the last of conditions (3), the problem formulated is a Cauchy problem. Further, the following dimensionless variables are introduced:

$$T_{\max} = \max_{\substack{x \in (0,1) \\ t \geq 0}} (T(x, t)), \quad \vartheta = \frac{T}{T_{\max}}, \quad \xi = \frac{x}{\delta}, \quad \tau = \frac{\lambda}{\rho c} \cdot \frac{t}{\delta^2} \quad (4)$$

Moreover, the case where  $q(\tau) = 0$  and  $\vartheta_0 = 0$  is considered. Under these assumptions, the solution can be written in the following form:

$$\vartheta(\xi, \tau) = \int_0^\tau \chi(p) \cdot \psi(\xi, \tau, p) dp, \quad \xi \in (0, 1), \quad (5)$$

where

$$\psi(\xi, \tau, p) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \cdot \sin \mu_n \cdot e^{-\mu_n^2(\tau-p)}$$

Conditions (3) and equation (5) yield the following Volterra equation of second kind for the determination of the function  $\chi(\tau)$ :

$$\mathfrak{G}(l, \tau) = \int_0^{\tau} \chi(p) \cdot \psi(l, \tau, p) \cdot dp = h(\tau) \quad (6)$$

### Regularization and solution of the inverse problem

Remember that the approximate solution is searched as a grid function assuming values  $\chi_j$  at grid points  $\tau_j, j = 0, \dots, M$ . The idea of the regularization is to introduce some rigidity to the graph of the approximation. This can be done via the approximation of the graph by overlapping three-points parabolas and penalizing the condition of equal derivatives in common points of them.

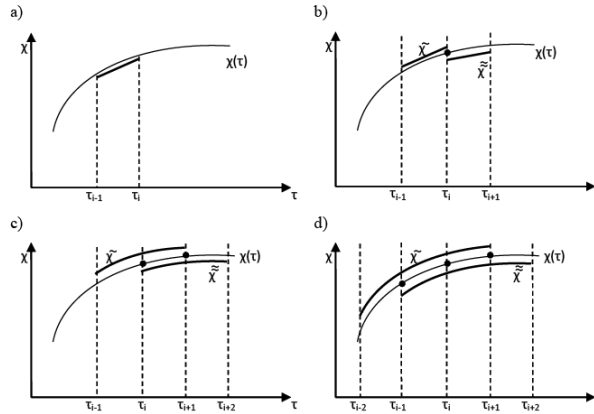


Fig.1. Idea of the regularization via overlapping parabolas ( b),c,d) and approximation of the derivation of function  $\chi(\tau)$ : a) in interval  $\langle \tau_{i-1}, \tau_i \rangle$ , b) in point  $\tau_i$ , c) in points  $\tau_i, \tau_{i+1}$ , d) in points  $\tau_{i-1}, \tau_i, \tau_{i+1}$

The following integral can be expressed as follows

$$\int_0^t (\chi^{(m)}(\tau))^2 d\tau \approx \|\{w_m\}\{\chi\}\|^2 = \sum_{i=0}^{M-m} (\Delta\tau)^{-m} \cdot \left( \binom{m}{0} \chi_i - \binom{m}{1} \chi_{i+1} + \binom{m}{2} \chi_{i+2} - \dots + \binom{m}{m} \chi_{i+m} \right)^2$$

$$J(\{\chi\}) = \|\{v\}\{\chi\} - \{h\}^\delta\|^2 + \alpha^2 \sum_{k=L_1}^{L_2} \int_0^t (\chi^{(m)}(\tau))^2 d\tau = \|\{v\}\{\chi\} - \{h\}^\delta\|^2 + \alpha^2 \sum_{k=L_1}^{L_2} \|\{w_m\}\{\chi\}\|^2 = \min$$

### Optimal choice of regularization parameter

Processes of heat flow are accompanied by entropy production and energy dissipation. The intensity of the source of entropy is given by formula

$$\sigma_s = \frac{1}{T} \left( \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div}(\lambda \nabla T) - q \right) + \frac{\lambda (\nabla T)^2}{T^2} = \frac{1}{T} L T + \frac{\lambda (\nabla T)^2}{T^2}$$

and the function of energy dissipation

$$\psi_s = T \sigma_s = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div}(\lambda \nabla T) - q + \frac{\lambda (\nabla T)^2}{T} = L T + \frac{\lambda (\nabla T)^2}{T}$$

Function of temperature satisfies the heat conduction equation  $L T = 0$ , thus total intensity of the source of entropy and, relatively, of energy dissipation in the time interval  $\langle 0, t \rangle$  and the region  $\Omega$  is equal to

$$\sigma_{\text{total}} = \int_0^t \int_{\Omega} \sigma_s \cdot d\Omega dt = \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\lambda (\nabla T)^2}{T^2} d\Omega dt, \quad \psi_{\text{total}} = \int_0^t \int_{\Omega} \psi_s \cdot d\Omega dt = \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\lambda (\nabla T)^2}{T} d\Omega dt$$

Physical processes proceed with minimal increment of entropy  $\sigma_{\text{total}}$  and minimal dissipation of energy  $\psi_{\text{total}}$ . Therefore, the regularization parameter will correspond to the minimal value

$\sigma_{total}$  or  $\psi_{total}$  and will also depend on the form of the regularization functional. Other way is to construct U – curve, Fig.2. Comparison of above criterion shows the Fig.3.

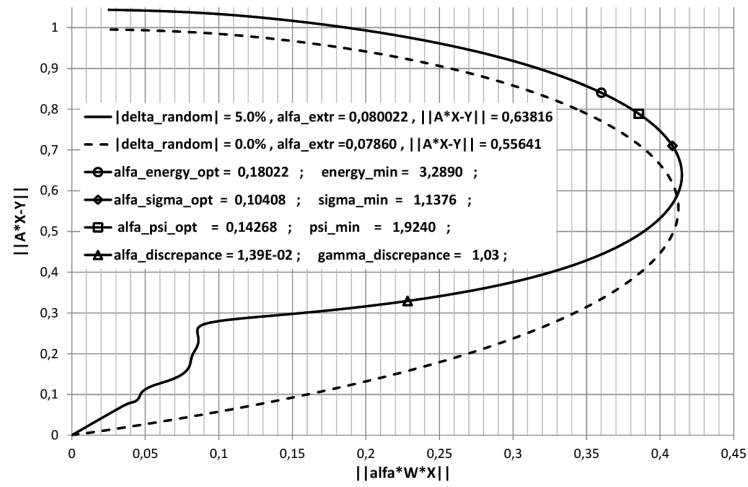


Fig.2. U - curve :  $\|A^*X-Y\| = f(\|alfa^*W^*X\|)$

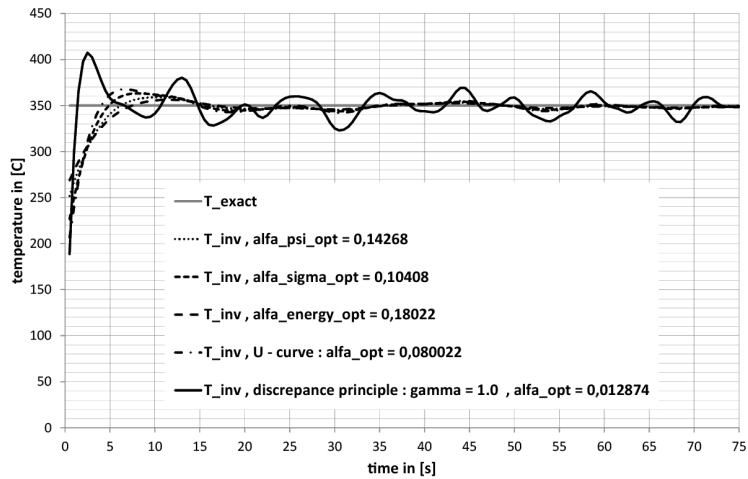


Fig.3. Solution of inverse problem. Temperature distribution at surface  $x=0.0$ ,  $|\delta_{random}| = 5.0\%$ ; Comparison for different choice of regularization parameter  $\alpha$ .

#### Literature

Ciałkowski M., Frąckowiak A., Regularization of inverse problem with U – curve. In printing in Scientific Journals of Technical University in Poznan, 2015.

## ОБ ОДНОЙ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ-АДВЕКЦИЯ

М.А. Давыдова, Н.Т. Левашова, С.А. Захарова

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия  
e-mail: [davydova@bk.ru](mailto:davydova@bk.ru), [natasha@npanalytica.ru](mailto:natasha@npanalytica.ru), [sa.zakharova@physics.msu.ru](mailto:sa.zakharova@physics.msu.ru)

**Аннотация.** Исследовано асимптотическое поведение решения с пограничными слоями в математической модели реакции-диффузии-адвекции, описывающей распределение концентрации углекислого газа.

*Ключевые слова:* асимптотические методы, модель реакции-диффузии-адвекции, погранслоное решение, контрастная структура.

## ON A MODEL FOR THE REACTION-DIFFUSION-ADVECTION EQUATION

**Abstract.** The asymptotic behavior of solution with boundary layers in mathematical reaction-diffusion-advection model, describing a distribution of the concentration of carbonate gas was investigated.

*Key words:* asymptotic methods, reaction-diffusion-advection model, boundary-layer solution, contrast structure.

Распределение концентрации углекислого газа в экосистеме “лес-болото” имеет вид контрастной структуры, причем положение внутреннего переходного слоя известно заранее и совпадает с положением границы между лесополосой и болотом. На этапе построения математической модели задачу можно считать обратной, поскольку параметры модели подбираются таким образом, чтобы реализовалась контрастная структура с фиксированным положением внутреннего слоя.

В работе рассматривается одна из модельных краевых задач для стационарного сингулярно возмущенного уравнения реакция-диффузия-адвекция, возникающая при описании процессов переноса газовой примеси в экосистеме “лес-болото”. Применение метода пограничных функций [1] и асимптотического метода дифференциальных неравенств [2] позволяет построить асимптотику решения погранслоного типа, доказать существование решения с построенной асимптотикой и его асимптотическую устойчивость по Ляпунову, как решения соответствующей параболической задачи. Одним из результатов работы является определение локальной области формирования решения погранслоного типа.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, пр. №13-01-00200, пр. №14-04-01568.

### Литература

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. школа, 1990.
2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н. Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями // Труды Математического Института имени В.А. Стеклова, 2010, т. 268, с. 268-283.

## Stability Estimates For Fractional Nonlinear Ill-posed Problems

Amar Debbouche\*

\* *Department of Mathematics, Guelma University, 24000 Guelma, Algeria*  
*e-mail: amar\_debbouche@yahoo.fr*

**Abstract.** In this talk, we investigate a final value problem for a class of nonlinear fractional differential equations with positive self-adjoint unbounded operator coefficients. The problem is ill-posed. The regularized equation is given by a modified quasi-reversibility method. For this regularization solution, the Hlder type stability estimate between the regularization solution and the exact solution is obtained.

*Key words:* Fractional Calculus, Inverse problems, ill-posed problems

### Bibliography

1. N. H. Tuan, Stability estimates for a class of semi-linear ill-posed problems// *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 14 (2013) 1203–1215
2. A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*// North-Holland Mathematics Studies, vol. 204, Elsevier, Amsterdam, 2006.



## ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ, ВОЗНИКАЮЩИЕ В ЭЛЕКТРОФИЗИОЛОГИИ СЕРДЦА

А.М. Денисов

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва,  
Россия*

*e-mail: den@cs.msu.ru*

**Аннотация.** Рассматриваются обратные задачи, возникающие в электрофизиологии сердца и численные методы их решения.

*Ключевые слова:* обратная задача электрокардиографии, обратные задачи для моделей возбуждения сердца, задачи электроимпедансной томографии

### INVERSE PROBLEMS ARISING IN THE HEART ELECTROPHYSIOLOGY

**Abstract.** Inverse problems arising in the heart electrophysiology and numerical methods for their solution are considered.

*Key words:* inverse electrocardiography problem, inverse problems for models of the heart excitation, electrical impedance tomography problems

Одной из наиболее актуальных обратных задач электрофизиологии сердца является обратная задача электрокардиографии. В традиционной постановке она состоит в определении потенциала электрического поля на внешней поверхности сердца по измерениям потенциала на части поверхности торса человека. С математической точки зрения эта задача является обобщением задачи Коши для уравнения Лапласа. Однако ее решение связано с существенными трудностями, обусловленными необходимостью решать задачу в реальной трехмерной геометрии и в неоднородной среде. Математические модели процессов возбуждения в сердце представляют собой начально-краевые задачи для систем квазилинейных уравнений в частных производных. Проблемы диагностики ряда кардиологических заболеваний связаны с задачами определения источника возбуждения в рамках этих математических моделей. Задачи электроимпедансной томографии в случае кусочно однородной среды возникают при диагностике различных заболеваний, в том числе и кардиологических. В них требуется определить внутреннюю границу неоднородности по измерениям характеристик электрического поля на внешней границе тела.

Доклад посвящен исследованию описанных выше обратных задач и разработке численных методов их решения. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 14-01-00244.

### Литература

1. Denisov A.M., Zakharov E.V., Kalinin A.V. Numerical solution of the localized inverse problem of electrocardiography // Computational Mathematics and Modeling. 2015. V.26, N 2. pp.168-174.
2. Denisov A.M., Pavel'chak I.A. A numerical method for determining a localized initial excitation for some mathematical models of the heart excitation // Mathematical Models and Computer Simulations. 2013. V.5, N 1. pp 75-80.
3. Гаврилов С.В., Денисов А.М. Численный метод решения двумерной задачи электроимпедансной томографии в случае измерений на части внешней границы // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т.54, N 11. С. 1756-1766.

## КОМПЛЕКСНЫЙ НЕЙРОСЕТЕВОЙ ПОДХОД ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

С.А. Доленко<sup>(1)</sup>, И.В.Исаев<sup>(1)</sup>, Е.А.Оборнев<sup>(2)</sup>,  
И.Е.Оборнев<sup>(2)</sup>, И.Г.Персианцев<sup>(1)</sup>, М.И.Шимелевич<sup>(2)</sup>  
<sup>(1)</sup>НИИ ядерной физики имени Д.В.Скобельцына,

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия

<sup>(2)</sup>Российский государственный геологоразведочный университет имени

С.Орджоникидзе, Москва, Россия

e-mail: [dolenko@srd.sinp.msu.ru](mailto:dolenko@srd.sinp.msu.ru)

**Аннотация.** Рассматривается двухэтапный комплексный подход к решению обратной задачи магнитотеллурического зондирования с помощью искусственных нейронных сетей. На первом этапе путём решения задачи классификации выбирается наиболее адекватная схема параметризации разреза. На втором этапе обратная задача решается с помощью нейронной сети, натренированной в рамках выбранной схемы.

*Ключевые слова:* обратные задачи, магнитотеллурическое зондирование, искусственные нейронные сети, классификация, схема параметризации

## A COMPLEX NEURAL NETWORK APPROACH TO SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM OF MAGNETOTELLURIC SOUNDING

**Abstract.** This study considers a two-stage complex approach to the solution of the inverse problem of magnetotelluric sounding with artificial neural networks. At the first stage, the most adequate section parameterization scheme is selected by solving the classification problem. At the second stage, the inverse problem is solved with the neural network trained within the selected scheme.

*Key words:* inverse problems, magnetotelluric sounding, artificial neural networks, classification, parameterization scheme

Решение обратной задачи магнитотеллурического зондирования (ОЗ МТЗ) представляет собой процесс построения обратного оператора, позволяющего восстановить распределение электрической проводимости (ЭП) в толще земли по значениям компонент индуцированного природными источниками электромагнитного поля, измеренного на ее поверхности. Метод МТЗ был предложен академиком А.Н.Тихоновым [1].

В настоящей работе рассматривается двумерная ОЗ МТЗ, представляющая собой коэффициентную ОЗ для уравнения Гельмгольца [2,3], которая в общем случае распределения ЭП является некорректной ввиду её неустойчивости. Одним из способов работы с подобными задачами является сведение общей задачи, некорректной по Адамару, к нескольким частным задачам, корректным по Тихонову. В данном контексте один из путей получения регуляризованного приближения состоит в сужении класса моделей – например, рассматриваются структуры с небольшим и заранее известным числом слоёв [4]. Однако заранее неизвестно, какая из подобных структур может оказаться наиболее адекватной в каждом конкретном случае. Дополнительные сложности вызывает высокая размерность рассматриваемой задачи как по входу (количество измеряемых значений для одного распределения составляет несколько тысяч), так и по выходу (адекватное описание распределения ЭП использует несколько сотен параметров).

Одним из эффективных методов решения некорректных ОЗ высокой размерности является применение аппроксимационных подходов, в частности – искусственных нейронных сетей (ИНС) [5,6]. В данной работе рассматривается использование комплексного нейросетевого подхода для решения двумерной ОЗ МТЗ.

Для реализации такого подхода необходимо задать способ описания распределения ЭП конечным числом определяемых параметров, т.е. задать т.н. схему параметризации (СП), и решить следующие подзадачи:

1. Разработка общей СП и нескольких частных схем, предполагающих наличие определенных геологически оправданных структур.
2. Разработка метода классификации, позволяющего в каждом конкретном случае выбрать наиболее подходящую СП.
3. Разработка оптимального алгоритма решения ОЗ в рамках общей СП.
4. Проверка применимости подходов к решению ОЗ, разработанных на общей СП, к частным СП.

В случае успешного решения всех этих подзадач можно говорить о реализации двухэтапного комплексного подхода. При этом на первом этапе будет применяться метод классификации для выбора наиболее адекватной СП, а затем будет производиться инверсия с помощью нейронной сети, натренированной в рамках выбранной СП.

Ранее авторами были предложены одна общая и шесть частных СП, предполагающих наличие от одного до трёх приповерхностных слоёв с разными типами проводимости (см.[7]). Для каждой из схем путём расчёта решения прямой задачи были получены данные для обучения соответствующих нейросетевых аппроксиматоров.

Было также показано [8], что с помощью ИНС задача классификации по определению наиболее адекватной СП по массиву значений полей решается успешно с 97.5% правильных распознаваний в среднем по классам и с более чем 95% правильных распознаваний в наихудшем классе.

В настоящей работе показано, что предложенный ранее авторами алгоритм нейросетевого решения ОЗ МТЗ на основе группового определения параметров [7] является эффективным и для всех других рассматриваемых схем параметризации разреза.

Таким образом, разработаны и проверены все составляющие, необходимые для реализации комплексного нейросетевого подхода при решении двумерной ОЗ МТЗ. Дальнейшая работа должна включать тестирование всего подхода в целом.

#### **Литература**

1. Тихонов А.Н. Об определении электрических характеристик глубоких слоев земной коры. // Доклады АН СССР. 1950. Т. 73, № 2. С. 295-297.
2. Дмитриев В.И. Обратные задачи геофизики. М.: МАКС Пресс, 2012. 340 с.
3. Бердичевский М.Н., Дмитриев В.М. Модели и методы магнитотеллурики. М.: Научный мир, 2009. 680 с.
4. Гласко В.Б., Кулик Н.И., Тихонов А.Н. Об определении геоэлектрического разреза на основе метода регуляризации. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1972. Т.12, №1. С. 139-149.
5. Raiche A. A pattern recognition approach to geophysical inversion using neural nets. // *Geophysics J. Int.* 1991. V. 105, No.3. P. 629-648.
6. Шимелевич М.И., Оборнев Е.А. Применение метода нейронных сетей для аппроксимации обратных операторов в задачах электромагнитных зондирований. // Изв. вузов, Геология и разведка. 1999. Т. 2. С. 102-106.
7. Dolenko S.A., Isaev I.V., Persiantsev I.G., Osborne I.E., Osborne E.A., Shimelevich M.I. Elaboration of a complex algorithm of neural network solution of the inverse problem of electrical prospecting based on data classification. Proc.10th Intl. Conf. "Problems of Geocosmos" (Oct.6-10, 2014, St.Petersburgh, Russia), pp.11-16.
8. Dolenko S.A., Osborne E.A., Persiantsev I.G., Shimelevich M.I. Use of adaptive neural network based algorithms of data classification in the solution of the inverse problem of electrical prospecting. // *9th International Conference "Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies" (PRIA-9-2008): Conference Proceedings*, Nizhni Novgorod, 2008, V. 1, P. 100-103.

# МОДИФИКАЦИЯ ОБОБЩЁННОГО МЕТОДА НЕВЯЗКИ ДЛЯ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ С УРОВНЯМИ ПОГРЕШНОСТЕЙ, ИЗВЕСТНЫМИ В ОСЛАБЛЕННЫХ НОРМАХ

А.А. Дряженков, М.М. Потапов

Факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

e-mail: andrja@yandex.ru, mpotapov@tochka.ru

**Аннотация.** Предложен алгоритм численного решения задачи условной квадратичной минимизации в гильбертовых пространствах. Алгоритм представляет собой модификацию обобщённого метода невязки, предназначенную для работы в условиях, когда погрешности в операторе, задающем функционал, известны не в исходной равномерной операторной норме, а в двух ослабленных по отношению к ней нормах.

*Ключевые слова:* некорректные задачи, квадратичная минимизация, обобщённый метод невязки.

## A MODIFICATION OF GENERALIZED RESIDUAL METHOD FOR INITIAL DATA WITH ERROR LEVELS KNOWN IN WEAKENED NORMS

**Abstract.** An algorithm for numerical solution of conditional quadratic minimization problem in Hilbert spaces is proposed. Algorithm actually represents a modification of generalized residual method for the case when error levels in operator defining cost functional are known not in standard uniform operator norm, but in two weakened norms.

*Key words:* ill-posed problems, quadratic minimization, generalized residual method.

Рассматривается следующая задача условной минимизации:

$$\|Au - f\|_F \rightarrow \min_{u \in U}, \quad (1)$$

где  $A : H \rightarrow F$  — линейный ограниченный оператор, действующий в гильбертовых пространствах  $H$  и  $F$ , а  $U \subset H$  — слабо замкнутое множество.

Предполагается, что вместо точных исходных данных  $A, f, U$  задачи (1) известны некоторые их приближения  $\tilde{A}, \tilde{f}, \tilde{U}$ . Уровни погрешностей  $\sigma_f$  и  $\sigma_U$  приближений к элементу  $f$  по норме пространства  $F$  и приближений к множеству  $U$  в хаусдорфовой метрике пространства  $H$  предполагаются известными:

$$\|\tilde{f} - f\|_F \leq \sigma_f, \quad h(\tilde{U}, U) \leq \sigma_U. \quad (2)$$

Основным отличием рассматриваемой в данной работе постановки задачи от классических постановок [1] задач вида (1) является отказ от знания уровня погрешности  $h$  приближений к оператору  $A$  в равномерной операторной норме исходных пространств  $H$  и  $F$ :

$$\|\tilde{A} - A\|_{\mathcal{L}(H \rightarrow F)} \leq h. \quad (3)$$

Вместо (3) считаются известными уровни погрешностей  $h^+$  и  $h^-$  в следующих более слабых по сравнению с (3) оценках:

$$\|\tilde{A} - A\|_{\mathcal{L}(H \rightarrow F^+)} \leq h^+, \quad \|\tilde{A} - A\|_{\mathcal{L}(H^- \rightarrow F)} \leq h^-. \quad (4)$$

Предполагается, что для гильбертовых пространств  $F^+$  и  $H^-$  из (4) имеют место непрерывные и всюду плотные вложения  $F \subset F^+$  и  $H^- \subset H$ . Пусть также наряду с (2) известен уровень погрешности  $\sigma_f^+$  в элементе  $f$  по норме пространства  $F^+$  :

$$\|\tilde{f} - f\|_{F^+} \leq \sigma_f^+. \quad (5)$$

При сделанных предположениях предлагается следующий двухэтапный алгоритм численного решения задачи (1), являющийся модификацией обобщённого метода невязки [2].

*Этап I.* Находится оптимальное значение  $\tilde{\mu}$  обобщенной невязки:

$$\tilde{\mu} = \inf_{u \in H^- \cap \tilde{U}} \left( \|\tilde{\mathcal{A}}u - \tilde{f}\|_F + h^- \|u\|_{H^-} \right) + \sigma_U \|\mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(H \rightarrow F)} + \sigma_f. \quad (6)$$

*Этап II.* Ищется решение  $(\tilde{u}, \tilde{\psi})$  следующей задачи:

$$\|\tilde{u}\|_H \leq \inf_{(u, \psi) \in \tilde{M}} \|u\|_H + \varepsilon, \quad (\tilde{u}, \tilde{\psi}) \in \tilde{M}, \quad (7)$$

$$\tilde{M} = \left\{ (u, \psi) \in \left( \tilde{U} + B_{\sigma_U} \right) \times F \mid \|\psi\|_F \leq \tilde{\mu}, \|\tilde{\mathcal{A}}u - \tilde{f} - \psi\|_{F^+} \leq h^+ \|u\|_H + \sigma_f^+ \right\},$$

где параметр  $\varepsilon > 0$  выбирает вычислитель, через  $B_{\sigma_U}$  обозначен шар в пространстве  $H$  с центром в нуле радиуса  $\sigma_U$ , а под суммой  $\tilde{U} + B_{\sigma_U}$  понимается объединение всевозможных попарных сумм элементов множеств  $\tilde{U}$  и  $B_{\sigma_U}$ . Первая компонента  $\tilde{u}$  решения задачи (7) объявляется итоговым приближением к точному нормальному решению  $u_*$  исходной задачи (1).

**Теорема.** Пусть задача (1) имеет нормальное решение  $u_*$ , выполнены требования (2), (4), (5), допустимые множества из (6), (7) непусты и замыкание в пространстве  $H$  внутренности  $\tilde{U}$  совпадает с самим  $\tilde{U}$ . Тогда при стремлении всех уровней погрешностей  $\sigma_f, \sigma_f^+, h^+, h^-, \sigma_U$  и параметра  $\varepsilon$  к нулю вырабатываемые алгоритмом приближения  $\tilde{u}$  обладают свойством сильной сходимости:

$$\|\tilde{u} - u_*\|_H \rightarrow 0.$$

**Замечание.** Требование  $\tilde{U} = \overline{\text{int } \tilde{U}}$  ко множеству  $\tilde{U}$  можно снять, заменив множество  $\tilde{U}$  его  $\varepsilon$ -расширением  $\tilde{U} + B_\varepsilon$  и увеличив на  $\varepsilon$  значение параметра  $\sigma_U$ .

## Литература

1. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. 199 с.
2. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995. 312 с.

# СРАВНЕНИЕ КАЧЕСТВА РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СПЕКТРОСКОПИИ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ РАСТВОРОВ МНОГОСЛОЙНЫМ ПЕРСЕПТРОНОМ И МЕТОДОМ ЧАСТИЧНЫХ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

А.О. Ефиторов<sup>1,2</sup>, С.А. Доленко<sup>1</sup>, С.А. Буриков<sup>1,2</sup>, Т.А. Доленко<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>МГУ им. М.В.Ломоносова, НИИ ядерной физики им. Д.В.Скобельцына, Москва, Россия

<sup>2</sup>МГУ имени М.В.Ломоносова, Физический факультет, Москва, Россия

*e-mail: sasha.efitorov@yandex.ru, dolenko@srd.sinp.msu.ru*

**Аннотация.** В работе представлены результаты сравнительного анализа применения многослойного перцептрона и метода частичных наименьших квадратов для решения задачи определения концентраций растворенных неорганических солей в многокомпонентных водных растворах по спектрам комбинационного рассеяния света.

*Ключевые слова: нейронные сети, метод частичных наименьших квадратов, обратные задачи, спектроскопия, идентификация.*

## COMPARISON OF THE QUALITY OF SOLVING THE INVERSE PROBLEM OF SPECTROSCOPY OF MULTI-COMPONENT SOLUTIONS WITH MULTILAYER PERCEPTRON AND WITH THE METHOD OF PARTIAL LEAST SQUARES

**Abstract:** This study provides comparative analysis of application of multilayer perceptron and of the method of partial least squares (PLS) for simultaneous determination of types and concentrations of inorganic salts dissolved in multicomponent water solutions by Raman spectra. It is shown that the PLS has several advantages, such as the quality of the solution and the time of creation of a regression model.

*Key words: neural networks, partial least squares, inverse problems, spectroscopy, identification.*

В работе представлены результаты сравнительного анализа применения искусственной нейронной сети (ИНС) - многослойного перцептрона [1] и метода частичных наименьших квадратов (partial least squares, PLS) [2] на примере решения обратной задачи по определению парциальных концентраций 5 неорганических солей, растворенных в воде, по спектрам комбинационного рассеяния (КР) [3]. Использовались спектры КР воды в диапазоне 200-4000 см<sup>-1</sup>, представленные в виде 2048 значений интенсивности в разных каналах спектра. Для работы адаптивных алгоритмов было проведено сокращение размерности данных, путем отбрасывания спектральных каналов, не обладающих значимостью из физических соображений, и равномерное усреднение (агрегация) заданного числа соседних каналов [4].

Произведено сравнение решения задачи в один и два этапа [5]. В первом случае производилось обучение ИНС на данных всех возможных комбинаций солей в растворе. На вход ИНС подавались восьмикратно агрегированные спектры, желаемые ответы сети – концентрации растворенных солей. Для обучения сети использовался

набор данных в 9144 спектра, разбитый на тренировочный, тестовый и экзаменационный наборы в соотношении 70:20:10. Тренировочный набор использовался для подстройки весов ИНС, тестовый – для остановки сети при возникновении эффекта переобучения, экзаменационный – для независимой оценки качества работы обученной сети.

При двухэтапном подходе также использовалась ИНС, обученная на всем наборе данных, но на этот раз желаемые выходы были бинарными: требовался лишь ответ на вопрос о наличии той или иной соли в растворе. Далее для определения концентраций использовалась регрессионная модель (ИНС или PLS), сформированная на примерах спектров растворов с тем же солевым составом. Стоит отметить, что формирование регрессионной модели методом PLS занимает меньше минуты, в то время как в случае ИНС счет идет на часы.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что метод частичных наименьших квадратов демонстрирует лучшие, чем ИНС, результаты при определении концентраций солей относительно простых (до 3-х компонент) растворов. При исследовании более сложных растворов, ввиду большого количества примеров обучающей выборки и возросшей нелинейности задачи, ИНС справляются лучше. Однако практически тех же результатов удается достичь и PLS методом при использовании нелинейной предобработки спектров (операция логарифмирования).

### Литература

1. G. Cybenko. Approximations by superpositions of sigmoidal functions. // *Mathematics of Control, Signals, and Systems*. 1989. Vol. 2, no. 4., P. 303-314.
2. S. Wold, A. Ruhe, H. Wold, W.J. Dunn. The collinearity problem in linear regression. the partial least squares (PLS) approach to generalized inverses. // *Journal on Scientific and Statistical Computing*. 1984. Vol. 5, no.3. P. 735–743.
3. S. Burikov, T. Dolenko, S. Dolenko, I. Persiantsev. Application of artificial neural networks to solve problems of identification and determination of concentration of salts in multi-component water solutions by raman spectra // *Optical Memory and Neural Networks (Information Optics)*. — 2010. — Vol. 19, no. 2. — P. 140–148.
4. S. Dolenko, S. Burikov, T. Dolenko, A. Efitov, K. Gushchin, I. Persiantsev. Neural network approaches to solution of the inverse problem of identification and determination of partial concentrations of salts in multi-component water solutions // *ICANN 2014*. — Springer International Publishing, 2014. — P. 805–812.
5. A. Efitov, S. Burikov, T. Dolenko, I. Persiantsev, S. Dolenko. Comparison of the quality of solving the inverse problems of spectroscopy of multi-component solutions with neural network methods and with the method of projection to latent structures // *Optical Memory and Neural Networks (Information Optics)*. — 2015. — Vol. 24, no. 2. — P. 93–101.

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИММУНОЛОГИЯ: ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ

И.А. Гайнова

*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия*

*e-mail: gajnova@math.nsc.ru*

**Аннотация.** В докладе представлены некоторые актуальные задачи математической иммунологии.

*Ключевые слова:* Математическое моделирование, иммунная система, математическая онкоиммунология, инфекционные болезни

## MATHEMATICAL IMMUNOLOGY: PROBLEMS AND METHODS

**Abstract.** A review of modern challenges in mathematical immunology.

*Key words:* Mathematical modeling, immune system, mathematical oncoimmunology, infectious diseases

Математическая иммунология является одной из наиболее молодых и интенсивно развивающихся наук в современном мире. Согласно [1], математическая иммунология — это область прикладной математики, связанная с применением математических методов и компьютерных технологий для моделирования, анализа и прогноза динамики иммунных процессов.

Начало применения математических методов в иммунологии относят к середине прошлого столетия, а в 70-х годах публикуются целые серии работ коллективов ученых из США, СССР, Восточной и Западной Европы [2]. В 1970 Джорджем Беллом была опубликована основополагающая статья [3], в которой предложено описание гуморальной иммунной реакции на основе математической модели клональной селекции и антителопродукции. В 1974 году Белл основал в Лос-Аламосе (США) группу теоретической биологии и биофизики, которая впоследствии превратилась в ведущий центр теоретической иммунологии и клеточной биологии. В СССР к основополагающим публикациям в области математической иммунологии относятся работы Г.И. Марчука по исследованию инфекционных процессов и иммунной реакции организма на патоген [4,5]. В 1974 году в ВЦ СО АН СССР (Новосибирск) академиком Г.И.Марчуком в тесном сотрудничестве с академиками АМН СССР Р.В.Петровым и Н.И.Нисевич были инициированы работы по математическому моделированию в иммунологии и медицине, которые были продолжены в Институте вычислительной математики РАН (Москва). В это же время такие работы были начаты на кафедре биофизики в МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва) [6].

Круг задач математической иммунологии чрезвычайно обширен - он охватывает большинство актуальных проблем теоретической иммунологии. Назовем только два важнейших направления исследований в этой области, стимулирующих огромное количество работ, — математическое моделирование патогенеза ВИЧ-инфекции и математическая онкоиммунология (см., например, [7],[8]).

## Литература

1. Бочаров Г.А. Вторжение математиков в "тайны"иммунитета. // Лекция в рамках межфакультетского учебного курса МГУ им. М.В. Ломоносова "Физиология и иммунология XXI века и здоровье человека". 2013.



2. Кузнецов С.Р., Шишкин В.И. Математическое моделирование как инструмент теоретических исследований в иммунологии — достижения и перспективы // Цитокины и воспаление. 2012. Т. 11, N 2. С. 5–13.
3. Bell G.I. Mathematical model of clonal selection and antibody production. *J. Theoret. Biol.* 1970. Vol. 29. P. 191–232.
4. Марчук Г.И. Простейшая математическая модель вирусного заболевания. Новосибирск, Препринт. 1975.
5. Марчук Г.И. Математические модели в иммунологии. М.: Наука, 1980. 264 с.
6. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическое моделирование в биофизике. М.: Наука, 1975. 344 с.
7. Vocharov G.A., Chereshnev V.I., Gainova I.A., Bazhan S.I., Bachmetyev B., Argilaguet J., Martinez J., and Meyerhans A. Human Immunodeficiency Virus Infection: from Biological Observations to Mechanistic Mathematical Modelling // *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*. 2012. Vol. 7, N 5 (Immunology). P. 78–104.
8. Кузнецов В.А. Динамика иммунных процессов при опухолевом росте. М.: Наука, 1992. 340 с.

## ЗАДАЧИ КОНЦЕНТРАЦИИ И ВЫМЕТАНИЯ МАСС В ГЕОФИЗИКЕ

Ю.В. Гласко

Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М.В. Ломоносова  
e-mail: glaskoyv@mail.ru

**Аннотация.** В статье рассмотрены задача интропродолжения потенциального поля, задача выметания масс и проблема концентрации масс. В комплексе они позволяют локализовать источник поля.

*Ключевые слова:* интропродолжение, концентрация, выметание.

## PROBLEMS CONCENTRATION AND SWEEPING MASSES IN GEOPHYSICS.

**Abstract.** In the article considered: problems introcontinuation potential field, problem sweeping of masses and problem concentration of mass. Corresponding algorithms are used for lacialization source of the field.

*Key words:* introcontinuation, concentration, sweeping.

В статье мы рассмотрим комплекс из 3-х алгоритмов имеющий целью интерпретацию потенциального поля измеренного на дневной поверхности с целью определения морфологических  $\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega^i$  и плотностных  $\delta(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$  характеристик источника  $\Omega$  поля  $U(X)$  в рамках априорной информации.

Первый алгоритм предполагает пересчет гравитационного либо магнитного поля с дневной поверхности на определенную глубину в рамках краевой задачи первого рода для эллиптического уравнения:

$$\Delta U(X) = 0, \quad X \notin \Omega, \quad U(x, y, 0) = U_0(x, y).$$

Решение задачи ищется в виде ряда Фурье. Количество членов ряда определяет глубину изучаемого поля- то есть является характеристикой настройки нелинейного фильтра. В качестве фильтра выступает полный нормированный градиент (ПНГ) [1]

$$G_N = \sqrt{U_x^2(X) + U_y^2(X) + U_z^2(X)} / \left( 1/S \int_S \sqrt{U_x^2(X) + U_y^2(X) + U_z^2(X)} \right), \quad \text{где } S -$$

обрабатываемая площадь. Предложен новый конечно-разностный вариант ПНГ (КПНГ) использующий перекрестный анализ по осям абсцисс и ординат.

Задача концентрации может использовать увеличенную предыдущим алгоритмом априорную информацию о  $p = \{\Omega, \delta(\omega)\}$ . Кроме того, для нефти  $\delta(\omega) \in [0.4 \text{ г/см}^3, 1 \text{ г/см}^3]$ . Проблема предполагает многократное решение задачи выметания масс в рамках статистической регуляризации на основе невязки либо сглаживающего функционала.

В операторной форме задача концентрации (определения  $p$ ) имеет вид:

$Ap = \delta_\Gamma(s^*)$ ,  $s^* \in \Gamma$ , где  $A$  определяется краевой задачей для линейного параболического уравнения,  $\Gamma \equiv \partial V$ ,  $V : V \supset \Omega$ .

Алгоритм концентрации включает задачу минимизации квадрата невязки между заданной  $\delta_\Gamma(s^*)$ ,  $s^* \in \Gamma$  и граничной плотностью рассчитанной посредством многократного вычисления плотности  $\delta(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$  методом Монте-Карло и ее выметания на границу  $\partial V$ . Задача выметания реализуется численно на основе схемы Д.

Зидарова. Область  $\Omega$  определяется на первом этапе алгоритма на основании целевого условия. Задача минимизации квадрата невязки решается для системы вложенных компактов:

$$\hat{p} = \arg \inf \rho^2(Ap, \delta_\Gamma(s^*)), \quad V \rightarrow \hat{V}, \quad \text{где } \rho^2(Ap, \delta_\Gamma(s^*)) = \|Ap - \delta_\Gamma(s^*)\|_{L_2}^2.$$

Задача решается в два этапа. На первом – по изолиниям на гранях  $V$  мы определяем морфологию области  $\Omega$ . На втором –  $\delta(\omega)$  в рамках статистической регуляризации.

В проведенных вычислительных экспериментах  $V = [0, 1 \text{ км}] \times [0, 1 \text{ км}] \times [1/3 \text{ км}, 4/3 \text{ км}]$ .

Посредством интерпретации рассчитанных карт, мы локализуем топологию области  $\Omega$  в виде: шара малого радиуса расположенного на глубине 1 км (модель 1); двух шаров на различных глубинах (модель 2); двух горизонтальных круговых цилиндров (модели 3,4); топологического произведения шара на два перпендикулярных отрезка параллельных осей абсцисс и ординат. Для более мелкого шага локализуется морфология области  $\Omega$ , как: куб в центре области  $V$ ; параллелепипед (модель 7); две связанных области в форме кубов (модель 8).

На втором этапе концентрации мы определяем плотности локализованных объектов как постоянные, но для некоторых связанных областей расположенных на разных глубинах различные величины.

Для точных значений плотности  $\bar{\delta}_\Gamma(s^*)$  погрешность результата  $\varepsilon = \|\delta(\omega) - \bar{\delta}(\omega)\|_{L_2}^2 \leq 1.5\%$ . Для заданных с погрешностью значений плотности  $\tilde{\delta}_\Gamma(s^*)$ :

$$\delta = \|\tilde{\delta}_\Gamma(s^*) - \bar{\delta}_\Gamma(s^*)\|_{L_2}^2 \leq 5\% \quad \varepsilon \leq 5\%.$$

Алгоритм включен в комплекс программ интерпретации для нефтяных месторождений.

## Литература

1. Никитин А.А., Петров А.В., Мегеря В.М., Старостенко В.И., Филатов В.Г., Лобанов А.М.. Оптимальная фильтрация и интропродолжение геополей с учетом вторичного магнетоминералообразования в нефтегазоразведке. М.: Издательство “НТ Пресс”, 2011. 143 с.
2. Зидаров Д. О решении некоторых обратных задач потенциальных полей и их применение к вопросам геофизики. София: Издательство Болгарской АН. 1968. 143 с.
3. Страхов В.Н. О выметании масс по Пуанкаре и его использовании при решении прямых и обратных задач гравиметрии // ДАН СССР. 1977. Т.236. №1. С. 54-57.
4. Гласко Ю.В. Одна задача эквивалентного перераспределения масс// Физика Земли. 2012. Т.48. №2. С. 88-93.
5. Гласко Ю.В. Задача концентрации масс// Физика Земли. 2015. Т.51. №2. С.37-43.

**О ПРИМЕНЕНИИ ПРИНЦИПА ДВОЙСТВЕННОСТИ  
В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ  
ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

Н. Л. Гольдман

*Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия  
email:goldman@srcc.msu.ru*

**Аннотация.** На основе принципа двойственности установлены свойства плотности усредненных наблюдений в задачах управления для линейных параболических операторов. Принцип двойственности позволяет использовать эти свойства плотности при исследовании условий единственности в некорректных обратных параболических задачах с финальным переопределением.

*Ключевые слова:* принцип двойственности, параболические уравнения, задачи управления, обратные задачи, финальное переопределение, единственность решения.

**ON APPLICATION OF THE DUALITY PRINCIPLE  
IN CONTROL PROBLEMS AND INVERSE PROBLEMS  
FOR PARABOLIC EQUATIONS**

**Abstract.** On the basis of the duality principle density properties of the averaged observations in control problems for linear parabolic operators are proved. The duality principle allows one to use of these density properties for investigation of uniqueness conditions in ill-posed inverse parabolic problems with final overdetermination.

*Key words:* duality principle, parabolic equations, control problems, inverse problems, final overdetermination, uniqueness property.

Рассматривается система, состояние которой определяется как решение  $u(x, t; v)$  задачи управления в области  $\bar{Q} = \bar{\Omega} \times [0, T]$

$$u_t - Lu = 0, \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

$$u|_{S \times (0, T]} = 0, \quad u|_{t=0} = v(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x, t)u_{x_j})_{x_i} - \sum_{i=1}^n b_i(x, t)u_{x_i} - c(x, t)u,$$

где  $Lu$  — равномерно эллиптический оператор с вещественными гладкими коэффициентами,  $\Omega \subset R^n$  — ограниченная область с гладкой границей  $S$ ,  $v(x)$  — управляющая функция из  $\overset{0}{C}(\bar{\Omega})$ .

Для ее наблюдений, усредненных на временном интервале  $[T - T_0, T]$ ,

$$\bar{u}(x; v) = T_0^{-1} \int_{T-T_0}^T u(x, t; v) dt, \quad 0 < T_0 \leq T,$$

установлены следующие свойства.

**Теорема 1.** Пусть коэффициенты уравнения (1) непрерывны в  $\bar{Q}$  вместе с производными  $(a_{ij})_x$ ,  $(a_{ij})_t$ ,  $(b_i)_{x_i}$  и кроме того,  $c(x, t) \geq 0$  в  $\bar{Q}$ . При пробегании управлением  $v(x)$  всего пространства  $\overset{0}{C}(\bar{\Omega})$  наблюдения  $\bar{u}(x; v)$  образуют множество, всюду плотное в  $L_2(\bar{\Omega})$ , т.е. из соотношения для некоторой функции  $w(x) \in \overset{0}{C}(\bar{\Omega})$

$$\int_{\Omega} \bar{u}(x; v) w(x) dx = 0 \quad \forall v \in \overset{0}{C}(\bar{\Omega})$$

следует, что  $w(x) = 0$  при  $x \in \bar{\Omega}$ .

Обобщением этого свойства является

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1. Если для любого управления  $v(x)$  из  $C^0(\bar{\Omega})$  соответствующие решения задачи (1), (2) удовлетворяют соотношению

$$\int_{T-T_0}^T \int_{\Omega} u(x, t; v) \alpha(x, t) dx dt = 0 \quad \forall v \in C^0(\bar{\Omega})$$

для некоторой непрерывной в  $\bar{Q}$  функции  $\alpha(x, t)$ , не меняющей знак по переменной  $t \in [0, T]$ , то  $\alpha(x, T - T_0) = 0$  при  $x \in \bar{\Omega}$ .

Доказательство этих утверждений основано на принципе двойственности и свойстве обратной единственности для линейных параболических операторов. Если  $Lu$  — самосопряженный оператор с коэффициентами, не зависящими от  $t$ , то в [1] соответствующие свойства плотности установлены Ж.-Л. Лионсом с помощью преобразования Фурье. Результаты теорем 1, 2 подтверждают его предположение, что свойство плотности усредненных наблюдений имеет место и в случае линейных параболических операторов более общего вида, чем в [1].

Значение этих свойств плотности (как установленных Лионсом, так и их обобщений) не ограничивается задачами управления. Данная работа продолжает исследования [2, 3] о применении указанных свойств к обратным параболическим задачам на основе принципа двойственности. Такой подход позволяет установить связь проблемы единственности для обратных задач с финальным переопределением со свойствами плотности решений соответствующих сопряженных задач, которые являются задачами управления вида (1), (2).

Для обратной задачи о нахождении функций  $\{u(x, t), f(x)\}$  в классах Гельдера  $H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(\bar{Q}) \times H^\lambda(\Omega)$  ( $0 < \lambda < 1$ ) из условий

$$\begin{aligned} u_t - Lu &= h(x, t)f(x) + p(x, t), & (x, t) \in Q \\ u|_{S \times (0, T]} &= v(x, t), & (x, t) \in S \times (0, T], \\ u|_{t=0} &= \varphi(x), \quad u|_{t=T} = g(x), & x \in \Omega, \end{aligned}$$

на основе предлагаемого подхода доказана

**Теорема 3.** Пусть коэффициенты  $a_{ij}$ ,  $(a_{ij})_{x_i}$ ,  $b_i$ ,  $c$ ,  $h$  и  $p$  принадлежат  $H^{\lambda, \lambda/2}(\bar{Q})$ ; функции  $v$  и  $\varphi$  принадлежат, соответственно,  $H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(S \times [0, T])$  и  $H^{2+\lambda}(\Omega)$  с границей  $S$  из класса  $H^{2+\lambda}$ ; выполнены условия согласования

$$v_t - L\varphi|_{x \in S, t=0} = \{h(x, 0)f(x) + p(x, 0)\}|_{x \in S}.$$

Предположим также, что финальная функция  $g(x)$  принадлежит  $H^{2+\lambda}(\Omega)$  и удовлетворяет условиям согласования

$$v_t - Lg|_{x \in S, t=T} = \{h(x, T)f(x) + p(x, T)\}|_{x \in S}.$$

Пусть, кроме того, коэффициент  $c(x, t) \geq 0$  при  $(x, t) \in \bar{Q}$ , производные  $(a_{ij})_t$  и  $(b_i)_{x_i}$  непрерывны в  $\bar{Q}$ , коэффициент  $h(x, t)$  не меняет знак по переменной  $t \in [0, T]$  и знакоопределен при  $t = T$ , т.е.  $|h(x, T)| > 0$  при  $x \in \Omega$ .

Тогда в случае существования решения  $\{u(x, t), f(x)\} \in H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(\bar{Q}) \times H^\lambda(\Omega)$  оно определяется однозначно.

Полученные результаты позволяют расширить класс обратных задач, обладающих свойством единственности решения (см. [4–6]).

## Литература

1. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970. 336 с.
2. Гольдман Н.Л. Свойства решений параболических уравнений с неизвестной правой частью и их сопряженных задач // Доклады АН. 2008. Т. 420, N 2. С. 151–156.
3. Гольдман Н.Л. Свойства решений параболических уравнений с неизвестными коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, N 1. с. 60–69.
4. Клибанов М.В. Об одном классе обратных задач для нелинейных параболических уравнений // Доклады АН. 1985. Т. 280, N 3. С. 533–536.
5. Прилепко А.И., Соловьев В.В. Теоремы разрешимости и метод Ротэ в обратных задачах для уравнений параболического типа // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23, N 11. с. 1971–1980.
5. Isakov V. Inverse parabolic problems with the final overdetermination // Commun. Pure Appl. Math. 1991. V. 14, N 2. p. 185–209.

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ  
ОДНОФАЗНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА С НЕИЗВЕСТНЫМ  
РАСПРЕДЕЛЕННЫМ КОНВЕКТИВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ**

Н. Л. Гольдман

*Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия  
email:goldman@srcc.msu.ru*

**Аннотация.** Исследуется постановка обратной задачи Стефана в однофазной области для параболического уравнения с неизвестным коэффициентом при младшей производной. В качестве дополнительной информации о решении прямой задачи Стефана задано финальное переопределение. Данная модель связана с идентификацией коэффициента конвективного теплообмена по известным в конечный момент времени распределению температуры и положению фазового фронта.

*Ключевые слова:* обратная задача Стефана, фазовый фронт, коэффициент конвективного теплообмена, финальное переопределение, параболическое уравнение.

**A MATHEMATICAL MODEL OF ONE-PHASE STEFAN PROBLEM  
WITH AN UNKNOWN DISTRIBUTED CONVECTION COEFFICIENT**

**Abstract.** A statement of an inverse Stefan problem in a one-phase domain is investigated for a parabolic equation with an unknown coefficient multiplying the lowest order derivative. Final overdetermination is specified as additional information on the solution of the direct Stefan problem. This model is connected with identification of the convection heat transfer coefficient from the temperature distribution and the phase boundary position given at a final time.

*Key words:* inverse Stefan problem, phase boundary, convection heat transfer coefficient, final overdetermination, parabolic equation.

Рассматриваемая модель обратной задачи Стефана представляет собой в теплофизической интерпретации определение коэффициента конвективного теплообмена по известным в конечный момент времени распределению температуры и положению фазового фронта. Соответствующая математическая постановка состоит в нахождении неизвестного коэффициента при младшей производной в квазилинейном параболическом уравнении в однофазной области с дополнительной информацией в виде финального переопределения.

Пусть прямая задача Стефана заключается в нахождении функции  $u(x, t)$  в однофазной области  $\bar{Q} = \{0 \leq x \leq \xi(t), 0 \leq t \leq T\}$  и фазового фронта  $\xi(t)$  при  $0 \leq t \leq T$  из условий

$$c(x, t, u)u_t - Lu = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

$$u|_{x=0} = v(t), \quad u|_{x=\xi(t)} = u^*(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad \xi|_{t=0} = l_0, \quad l_0 > 0, \quad (3)$$

$$\gamma(x, t, u)|_{x=\xi(t)}\xi_t(t) = a(x, t, u)u_x|_{x=\xi(t)} + \chi(x, t, u)|_{x=\xi(t)}, \quad 0 < t \leq T, \quad (4)$$

где равномерно эллиптический оператор  $Lu$  имеет вид

$$Lu \equiv (a(x, t, u)u_x)_x - p(x)b(x, t, u)u_x - d(x, t, u)u,$$

$a \geq a_{\min} > 0$ ,  $b, c \geq c_{\min} > 0$ ,  $d \geq d_{\min} > 0$ ,  $p, f, v, u^*, \gamma \geq \gamma_{\min} > 0$ ,  $\chi$  и  $\varphi$  — известные функции,  $a_{\min}, c_{\min}, d_{\min}, \gamma_{\min}, l_0 = \text{const} > 0$ .

Под решением соответствующей коэффициентной обратной задачи Стефана понимается совокупность функций  $\{u(x, t), \xi(t), p(x)\}$ , принадлежащих классам

$$u(x, t) \in H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(\bar{Q}), \quad \xi(t) \in H^{1+\lambda/2}[0, T], \quad p(x) \in C^1[0, \beta_1],$$

$$0 < \beta_0 \leq \xi(t) \leq \beta_1, \quad \beta_0, \beta_1 = \text{const}, \quad \beta_1 \geq l,$$

удовлетворяющих соотношениям (1)–(4) и дополнительному условию в конечный момент времени

$$u|_{t=T} = g(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad \xi|_{t=T} = l, \quad l > 0, \quad (5)$$

в предположении, что  $g(x)$ ,  $l$ , а также все другие входные данные в (1)–(4) заданы.

Выбор функциональных пространств для решения и входных данных этой обратной задачи проводится на основе точных дифференциальных зависимостей в классах Гельдера, установленных в [1] для прямой задачи Стефана (1)–(4). Для изучения условий однозначности определения решения  $\{u(x, t), \xi(t), p(x)\}$  (в случае его существования в указанных классах) делается предварительно замена переменных "выпрямление фронта"  $y = x\xi^{-1}(t)$ , преобразующая фазовую область  $\bar{Q}$  в прямоугольную область  $\bar{\Pi} = \{0 \leq y \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$  фиксированной ширины. Это позволяет получить соответствующее утверждение для обратной задачи Стефана (1)–(5) по аналогии с [2], где исследованы условия единственности решения коэффициентной обратной задачи для параболического уравнения в области с фиксированными границами. Дополнительные требования к входным данным, помимо условий их гладкости, согласованности и невырожденности фазовой области  $\bar{Q}$ , устанавливает следующая

**Теорема.** Пусть в области своего определения коэффициент  $b \geq b_{\min} > 0$ , производные  $a_t$  и  $c_t$  непрерывны и, кроме того, финальная функция  $g(x)$  принадлежит  $H^{2+\lambda}[0, l]$ , удовлетворяет условиям согласования  $g|_{x=0} = v|_{t=T}$ ,  $g|_{x=l} = u^*|_{t=T}$  и имеет знакоопределенную производную  $|g_x(x)| > 0$  при  $0 \leq x \leq l$ .

Тогда решение  $\{u(x, t), \xi(t), p(x)\}$  в случае своего существования является единственным в  $H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(\bar{Q}) \times H^{1+\lambda/2}[0, T] \times C^1[0, \beta_1]$ , при условии аналитичности коэффициента  $p(x)$  при  $0 < x < \beta_1$  и знакопостоянства по  $t \in [0, T]$  производной  $u_x(x, t)$ .

Доказательство основано на принципе двойственности [2], свойстве обратной единственности для линейных параболических операторов [3] и на условиях однозначной разрешимости краевых задач с фиксированными [4] и свободными границами [1]. Рассматриваемая постановка обратной задачи Стефана (1)–(5) допускает немонотонное движение фазового фронта. Если во время своего движения фронт  $\xi(t)$  при любом  $t$ ,  $0 < t < T$ , не превосходит своего финального положения  $\xi|_{t=T} = l$ , то от требования аналитичности коэффициента  $p(x)$  можно отказаться.

## Литература

1. Gol'dman N.L. Inverse Stefan Problems. Dordrecht: Kluwer Academic, 1997. 250 p.
2. Гольдман Н.Л. Свойства решений параболических уравнений с неизвестными коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, N 1. с. 60–69.
3. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968. 427 с.
4. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.



НАХОЖДЕНИЕ ВСЕХ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ СО  
ЗНАКОПОСТОЯННЫМИ КУСОЧНО-АНАЛИТИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ,  
ИМЕЮЩИХ ДАННУЮ МАТРИЦУ МОНОДРОМИИ

А.А. Голубков

СУНЦ МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

andrej2501@yandex.ru

**Аннотация.** Пусть известно, что существует хотя бы одно уравнение вида  $(f(x)y') + (r(x) - \lambda^2 w(x))y = 0$  с неизвестными кусочно-аналитическими коэффициентами (функции  $f$  и  $w$ , кроме того, знакопостоянны и не обращаются в нуль), имеющее на отрезке  $[0, a]$  обобщенную матрицу монодромии  $\hat{M}(\lambda)$ . В докладе решена задача нахождения коэффициентов всех таких уравнений.

*Ключевые слова:* обратная спектральная задача, матрица монодромии, обобщенное уравнение Штурма—Лиувилля.

FINDING OF FULL FAMILY OF GENERALIZED STURM – LIOUVILLE EQUATION  
WITH SING-CONSTANT PIECEWISE ANALYTIC COEFFICIENTS HAVING GIVEN  
MONODROMY MATRIX

**Abstract.** Let it is known, that there exist an equation of type  $(f(x)y') + (r(x) - \lambda^2 w(x))y = 0$  with unknown piecewise analytic coefficients (functions  $f(x)$  and  $w(x)$  are also sing-constant and not equal null), which has generalized monodromy matrix  $\hat{M}(\lambda)$  on interval  $[0, a]$ . A problem of finding of full family coefficients of such equation is solved in this paper.

*Key words:* inverse spectral problem, monodromy matrix, generalized Sturm – Liouville equation.

К настоящему времени хорошо изучена обратная спектральная задача для широкого класса уравнений Штурма—Лиувилля с одним неизвестным коэффициентом из трёх [1, 2]. В частности, известно, что если такая задача имеет решение, то оно единственно. При этом очень слабо изучен случай, когда в обобщенном уравнении Штурма—Лиувилля неизвестно более одного коэффициента. Есть только отдельные результаты для уравнений, один из коэффициентов которых является кусочно-постоянным [3].

Будем называть *уравнением А-типа* обобщенное уравнение Штурма—Лиувилля

$$(f(x)y') + (r(x) - \lambda^2 w(x))y = 0, \quad x \in [0, a], \quad a > 0, \quad (1)$$

с вещественными кусочно-аналитическими коэффициентами, если известно, что функции  $f(x)$  и  $w(x)$  знакопостоянны и не обращаются в нуль на отрезке  $[0, a]$ .

Пусть  $y_j(x, \lambda)$ ,  $j = 1, 2$  — решения уравнения (1), удовлетворяющие граничным условиям  $y_1(0, \lambda) = 1$ ,  $y_1'(0, \lambda) = 0$ ,  $y_2(0, \lambda) = 0$ ,  $f(0)y_2'(0, \lambda) = 1$ . *Обобщенной матрицей монодромии* уравнения (1) на отрезке  $[0, a]$  назовем матрицу

$$\hat{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(a, \lambda) & y_2(a, \lambda) \\ f(a)y_1'(a, \lambda) & f(a)y_2'(a, \lambda) \end{pmatrix}.$$

Будем называть *уравнением В-типа* уравнение Штурма-Лиувилля вида

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{V_0(z)}{\alpha} \frac{du}{dz} \right) + (R_0(z) - \lambda^2 \alpha V_0(z)) u(z) = 0, \quad z \in [0, a].$$

Здесь: **1)**  $\alpha$  — некоторая положительная константа. **2)** Функция  $R_0(z)$  является кусочно-аналитической. **3)** Отрезок  $[0, a]$  разбит некоторыми точками  $0 = z_1 < z_2 < \dots < z_N = a$  ( $N = 2k$  или  $N = 2k + 1$ ,  $k \geq 1$  — любое натуральное число) на  $N - 1$  частей. Во всех точках  $z_2, z_3, \dots, z_{N-1}$  либо сама функция  $V_0(z)$ , либо ее производная, либо и функция, и её производная претерпевают скачок. **4)** Для  $z \in Z_i = [z_i, z_{i+1}] \cup [z_{N-i}, z_{N-i+1}]$  ( $i = 1, 2, \dots, k - 1$ ),  $z \in Z_k = [z_k, z_{k+1}]$ , а в случае  $N = 2k + 1$  и для  $z \in Z_{k+1} = [z_{k+1}, z_{k+2}]$ , функция  $V_0(z)$  задается следующими формулами:

$$V_0(z) = \alpha_{1i} f_{1i}(z) + \alpha_{2i} f_{2i}(z) + \alpha_{3i} f_{3i}(z) + \alpha_{4i} f_{4i}(z) + \alpha_{5i} f_{5i}(z), \quad z \in Z_i,$$

где  $i = 1, 2, \dots, K$ ;  $K = k$ , если  $N = 2k$  и  $K = k + 1$ , если  $N = 2k + 1$ ;

$$f_{1i}(z) = \frac{(d_i - z)^2 (d_i - 3z_i + 2z)}{(d_i - z_i)^3}, \quad f_{2i}(z) = \frac{(z - z_i)^2 (3d_i - z_i - 2z)}{(d_i - z_i)^3}, \quad f_{3i}(z) = \frac{(z - z_i)(d_i - z)^2}{(d_i - z_i)^2},$$

$$f_{4i}(z) = \frac{(z - z_i)^2 (z - d_i)}{(d_i - z_i)^2}, \quad f_{5i}(z) = \frac{(z - z_i)^2 (d_i - z)^2}{(d_i - z_i)^2}; \quad d_i = z_{N-i+1} \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \dots, k \quad \text{и}$$

$d_{k+1} = z_{k+2}$ ;  $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \alpha_{3i}, \alpha_{4i}$  — некоторые вещественные числа, причем  $\alpha_{1i}$  и  $\alpha_{2i}$  либо все положительны, либо все отрицательны,  $\alpha_{5i} = \alpha_{6i}^2 / (3\alpha_{0i})$ ;  $\alpha_{6i} = \min(\alpha_{3i}, -\alpha_{4i})$  при  $\alpha_{1i} > 0$  и  $\alpha_{6i} = \max(\alpha_{3i}, -\alpha_{4i})$  при  $\alpha_{1i} < 0$ ;  $\alpha_{0i} = \text{sign}(\alpha_{1i}) \min(|\alpha_{1i}|, |\alpha_{2i}|)$ .

В докладе доказана следующая **основная теорема**: если матрица  $\hat{M}(\lambda)$  является обобщенной матрицей монодромии некоторого уравнения А-типа на отрезке  $[0, a]$ , то:

**1)** существует, и притом единственное, уравнение В-типа (назовем его уравнением В1), имеющее на отрезке  $[0, a]$  обобщенную матрицу монодромии равную  $\hat{M}(\lambda)$ ;

**2)** множество всех уравнения А-типа, имеющих обобщенную матрицу монодромии  $\hat{M}(\lambda)$ , могут быть получены из уравнения В1 с помощью множества всех преобразований вида:

$x(z) = \int_0^z \eta(v) dv$ ,  $y(x) = \mu(z)u(z)$ , где  $\eta$  и  $\mu$  удовлетворяют условиям:

**a)** функции  $\eta$  и  $\mu$  являются положительными кусочно-аналитическими функциями на отрезке  $[0, a]$ ;

$$\mathbf{b)} \int_0^a \eta(v) dv = a; \quad \mathbf{c)} \mu(0) = \mu(a) = 1, \quad \mu'(0) = \mu'(a) = 0;$$

**d)** функции  $\mu$  и  $V_0 \mu'$  всюду непрерывны на  $[0, a]$ .

### Литература

1. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007. 384 с

2. Голубков А.А., Макаров В.А. Обратная спектральная задача для обобщенного уравнения Штурма-Лиувилля с комплекснозначными коэффициентами// Дифференциальные уравнения. 2011. т. 47, № 10, С. 1498-1502.

3. Sini M. On the one-dimensional Gelfand and Borg-Levinson spectral problems for discontinuous coefficients//Inverse Problems. 2004. v. 20, N. 5, P. 1371-1386.

## ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННОЙ ЗАДАЧИ В ТЕРМИНОЛОГИИ ЖОРДАНОВЫХ ЦЕПОЧЕК

**Гражданцева Елена Юрьевна**

канд. физ.-мат. наук, доцент, Институт Математики, Экономики и Информатики  
Иркутского Государственного Университета, Иркутск

E-mail: grelyur@mail.ru

**Аннотация.** В статье построено решения задачи для дифференциально-разностного уравнения при помощи фундаментальной оператор-функции

*Ключевые слова:* банахово пространство; дифференциально-разностный оператор; жорданов набор; фундаментальная оператор-функция.

## THE BUILDING THE SOLUTION OF THE DEGENERATION TASK IN THE TERMINOLOGY OF THE JORDAN SET

**Grazhdantseva Elena**

Candidate of Science, associate professor of Irkutsk State University

E-mail: grelyur@mail.ru

**Abstract.** The building of solution of task for the difference-differential equation with use the fundamental operator-function in presence the article.

*Keywords:* the Banach spaces; the difference-differential operator; the Jordan set; the fundamental operator-function.

Возрастающий интерес к уравнениям, неразрешенным относительно старшей производной, обусловлен необходимостью решения важных прикладных задач (в частности, в области физики атмосферы, физики плазмы, теории электрических цепей, динамике колебаний стратифицированной жидкости и многих других), а также естественным стремлением к изучению новых математических объектов.

В большей части работ, посвященных теории краевых задач для дифференциальных уравнений рассматривался случай, когда оператор при старшей производной невырожден. Если условие невырожденности нарушается, то необходимы дополнительные требования на данные задачи. Подобного рода требования естественным образом сужают возможности применения полученных результатов. Поэтому представляется интересным строить обобщенные решения, для которых нет необходимости в дополнительных условиях.

Однако непосредственно построение обобщенного (и непрерывного в том числе, если таковое существует) решения сопровождается очень громоздкими и достаточно неудобными выкладками, что в свою очередь затрудняет поиск решения.

Понятие фундаментальной оператор-функции, введенное профессором М.В.Фалалеевым, как расширение понятия фундаментального решения дифференциального (интегрального и интегро-дифференциального) оператора на банаховы пространства, дает возможность отойти от прямого построения обобщенного решения, получая его как свертку фундаментальной оператор-функции с источником (правой частью уравнения — свободной функцией). Знание фундаментальной оператор-функции позволяет в замкнутой форме выписывать обобщенные решения и определять условия существования непрерывного решения исследуемой задачи, избегая непосредственного построения последнего [1].

Рассматривается краевая задача

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + Ku \right) = G \frac{\partial}{\partial x} (u(t, x, y - a) - u(t, x, y)) + f(t, x, y),$$

где  $u = u(t, x, y) = \begin{pmatrix} u_1(t, x, y) \\ u_2(t, x, y) \end{pmatrix}$ ,  $u_{1,2}(t, x, y)|_{x=0} = u_{1,2}(t, x, y)|_{x=1}$ ,  
 $u_{1,2}(t, x, y)|_{y=0} = u_{1,2}(t, x, y)|_{y=1}$ ,

$$u(t, x, y)|_{t=0} = \alpha(x, y), \alpha(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha_1(x, y) \\ \alpha_2(x, y) \end{pmatrix}, \alpha_{1,2}(x, y)|_{x=0} = \alpha_{1,2}(x, y)|_{x=1},$$

$$K = k\pi \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, k - \text{четное}, f(t, x, y) = \begin{pmatrix} f_1(t, x, y) \\ f_2(t, x, y) \end{pmatrix},$$

функции  $f_{1,2}(t, x, y)$  непрерывные по  $t, x, y$ , и  $f_{1,2}(t, x, y), u_{1,2}(t, x, y), \alpha_{1,2}(x, y)$  принадлежат классу  $BUC(R, E_2)$  [2] при любых фиксированных  $t, x, y \geq 0$ .

Таким образом, обобщенным решением исходной задачи будет следующая функция:

$$\begin{aligned} u(t, \bar{v}) &= U(t, \bar{v}) * (\tilde{f}(t, \bar{v}) + B\alpha(\bar{v})\delta(t)) = \\ &= \left( \Gamma \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A\Gamma)^k t^k}{k!} \left( I - \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{p_j-1} \langle \bullet, \psi_j^{(i+1)} \rangle A\varphi_j^{(p_j-i)} \right) \theta(t) \times \sum_{h=0}^k (-1)^h C_k^h \delta(\bar{v} - (k-h)\bar{\mu}) + \right. \\ &\left. + \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{p_j-1} \left\{ \sum_{i=0}^{p_j-1-k} (-1)^k \langle \bullet, \psi_j^{(i+1)} \varphi_j^{(p_j-k-i)} \rangle \right\} \delta^{(k)}(t) \sum_{l=0}^{\infty} C_{l+k}^k \delta(\bar{v} - l\bar{\mu}) \right) * (\tilde{f}(t, \bar{v}) + B\alpha(\bar{v})\delta(t)), \end{aligned}$$

где  $B = \frac{\partial}{\partial x} + K$ ,  $A = G \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\Gamma$  - оператор Треногина Шмидта [3] для оператора  $B$ .

### Литература

1. Гражданцева Е.Ю. Фундаментальные оператор-функции вырожденных дифференциальных операторов высокого порядка в банаховых пространствах: монография / Е.Ю. Гражданцева. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2013. – 91с.
2. Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их применения. — Киев: Выща шк. 1989.
3. Вайнберг М.М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М.М. Вайнберг, В.А. Треногин. — М.: Наука, 1969. — 528 с.

# Identification of unknown temporal and spatial load distributions in a vibrating Euler-Bernoulli beam from boundary measurements

A. Hasanoglu (Hasanov)\*, O. Baysal†

\* *Izmir University, Gursel Aksel Blv. no:14 Izmir-Turkey*

*e-mail: alemdar.hasanoglu@izmir.edu*

† *Izmir University, Gursel Aksel Blv. no:14 Izmir-Turkey*

*e-mail: onur.baysal@izmir.edu.tr*

**Abstract.** We consider a system governed by Euler-Bernoulli beam equation  $u_{tt} + (EI(x)u_{xx})_{xx} = F(x)H(t)$ ,  $(x, t) \in (0, l) \times (0, T)$ , with simply supported ends ( $u(0, t) = u_{xx}(0, t) = 0$ ,  $x \in \{0, l\}$ ), where the slope  $\theta_0(t)$  at  $x = 0$  is assumed to be a given available boundary observation (measured data) for all  $t \in (0, T)$ . We formulate two identification problems. In the first problem the temporal load  $H(t)$  is assumed to be a given input and one needs to identify the unknown spatial load  $F(x)$  from the observation (output)  $\theta_0(t) := u_x(0, t; F)$ . In the second problem, the temporal load  $H(t)$  needs to be identified for a given input  $F(x)$  and the output  $\theta_0(t) := u_x(0, t; H)$ . We introduce the input-output operators  $\Phi : L^2(0, l) \mapsto L^2(0, T)$ ,  $(\Phi F)(t) := u_x(0, t; F)$ , and  $\Psi H : L^2(0, T) \mapsto L^2(0, T)$ ,  $(\Psi H)(t) := u_x(0, t; H)$ ,  $t \in (0, T)$ , and reformulate these problems as the operator equations:  $\Phi F = \Theta_0$  and  $\Psi H = \Theta_0$ . Since all observations contain a random noise, we use the most prominent regularization method, Tikhonov regularization and prove the unique solvability of quasi-solutions of both regularized problems. We develop the adjoint problem approach to derive the adjoint problem corresponding to these identification problems and prove that the corresponding cost functionals  $J(F) := \|\Phi F - \Theta_0\|_{L^2(0, T)}$  and  $J(H) := \|\Psi H - \Theta_0\|_{L^2(0, T)}$  are Fréchet differentiable and the Fréchet gradients can be derived explicitly via the adjoint problem solution and known load. Moreover, we show that these gradients are Lipschitz continuous. The last result allows use of gradient types convergent iteration algorithms. Results of numerical simulations illustrate robustness and high accuracy of the algorithm based on the proposed approach.

*Key words:* Temporal and spatial load identification, Euler-Bernoulli beam, Inverse problems Fréchet gradient, Lipschitz continuity, ill-posedness

# Inverse source problems for a vibrating Euler-Bernoulli beam based on boundary measured data

A. Hasanoglu (Hasanov)

*Izmir University, Gursel Aksel Blv. no:14 Izmir-Turkey*

*e-mail: alemdar.hasanoglu@izmir.edu*

**Abstract.** This work presents a systematic study inverse source problems for a vibrating Euler-Bernoulli beam equation  $u_{tt} + (EI(x)u_{xx})_{xx} = F(x)H(t)$  based on limited boundary measured data. The following two class of identification problems are formulated. In the first class of problem the temporal load  $H(t)$  (or the spatial load  $F(x)$ ) is assumed to be a given input and one needs to identify the unknown spatial load  $F(x)$  (or the unknown temporal load  $H(t)$ ) from the observation (output)  $\theta_0(t) := u_x(0, t; F)$  (slope at  $x = 0$ ), i.e. Dirichlet type measured data. In the second class of problems, the temporal load  $H(t)$  (or the spatial load  $F(x)$ ) needs to be identified for a given input  $F(x)$  (or the unknown temporal load  $H(t)$ ) and the output  $\mathcal{M}(t) := (EI(x)u_{xx})_{x=0}$  (momentum at  $x = 0$ ), i.e. Neumann type measured output data. In view of physical models (simply supported bridge model, helicopter rotor blade model, etc.) both measured data are available in engineering applications. In the temporal load identification problems, we introduce the input-output operators  $\Phi : L^2(0, l) \mapsto L^2(0, T)$ ,  $(\Phi H)(t) := u_x(0, t; H)$  and  $\Psi : L^2(0, T) \mapsto L^2(0, T)$ ,  $(\Psi F)(t) := (EI(x)u_{xx})_{x=0}$ . In the spatial load identification problems these operators can be introduced in a similar way. Then these problems are reformulated as the operator equations:  $\Phi H = \theta$  and  $\Psi H = \mathcal{M}$ . Since all observations contain a random noise, the most prominent regularization method, Tikhonov regularization is used to prove the unique solvability of quasi-solutions of both regularized problems. We develop the adjoint problem approach based on weak solution theory for PDEs to derive the unique adjoint problems corresponding to these identification problems. Then we prove that the corresponding cost functionals  $J(H) := \|\Phi - \theta\|_{L^2(0, T)}^2$  and  $J(H) := \|\Psi - \mathcal{M}\|_{L^2(0, T)}^2$  are Fréchet differentiable and the Fréchet gradients can be derived explicitly via the adjoint problem solution and a known load. Moreover, we show that these gradients are Lipschitz continuous. The last result allows use of gradient types iteration convergent algorithms. Results of numerical simulations illustrate robustness and high accuracy of the algorithm based on the proposed approach.

*Key words:* Temporal and spatial load identification, Euler-Bernoulli beam, Inverse problems Fréchet gradient, Lipschitz continuity, ill-posedness

## Bibliography

1. A. Hasanov. Identification of an unknown source term in a vibrating cantilevered beam from final overdetermination // *Inverse Problems*, N. 25, 2009, 115015.
2. A. Hasanov, O. Baysal. Author. Identification of an unknown spatial load distribution in a vibrating cantilevered beam from final overdetermination // *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, N. 23, 2015, p. 85-102.

# ON SMOOTHNESS CONCEPTS IN TIKHONOV REGULARIZATION FOR NONLINEAR ILL-POSED PROBLEMS IN BANACH SPACES

B. Hofmann\*

\* *TU Chemnitz, Faculty of Mathematics, D-09107 Chemnitz, Germany*

*e-mail: hofmannb@mathematik.tu-chemnitz.de*

**Abstract.** Since the 1960s the Moscow research group founded by A. N. Tikhonov developed the basics of the theory and practice of Tikhonov regularization for the stable approximate solution of ill-posed operator equations in abstract spaces and corresponding numerical implementations. With the monograph [1] the scientific community throughout the world became familiar with Tikhonov's regularization method. A few years later the monograph [2], essentially edited by A. G. Yagola, gave an overview of results with focus on nonlinear inverse problems. At this time, also the monograph [3] by H. W. Engl et al. was published which contains two chapters on the variational and iterative regularization of nonlinear ill-posed problems.

It is well-known for thirty years that specific conditions concerning the smoothness of solutions are required in order to obtain convergence rates in regularization of ill-posed problems formulated as linear or nonlinear operator equations in Hilbert spaces. Originally, rate results for such problems were based on source conditions of range-type, i.e. the solution has to belong to the range of some linear operator closely connected with the forward operator or its linearization. Since ten years range-type source conditions also play a prominent role for convergence rates in Banach space regularization. However, in the case of nonlinear ill-posed equations in Hilbert and Banach spaces additional conditions with respect to the structure of nonlinearity of the forward operator are necessary. It is a substantial advantage of variational source conditions, which have been developed since 2007 (cf. [4]), that they combine solution smoothness and nonlinearity conditions. Variational source conditions express the interplay of error terms in the pre-image space and changes of the forward operator in the image space in form of variational inequalities which have to be satisfied for all regularized solutions under consideration (cf. [5-7]).

In this talk, the opportunities and limitations of this new smoothness concept for obtaining convergence rates in Tikhonov regularization are outlined. Moreover, based on variational source conditions, there are presented new results on Tikhonov-type  $\ell^1$ -regularization for ill-posed problems under the condition that the sparsity assumption slightly fails, but the solution is still in  $\ell^1$  (cf. [8]). Specifically, new ideas refer to the improvement of recently published convergence rates results and their extension to non-compact forward operators. One part of the talk is devoted to the relationships between M. Z. Nashed's types of ill-posedness and mapping properties of the forward operator like compactness and strict singularity. The focus of another aspect of the talk is on the applicability of variational source conditions to Lavrentiev regularization in a Hilbert space setting when the forward operator is nonlinear and monotone. As in Tikhonov regularization also in Lavrentiev regularization appropriate variational source conditions have the potential to yield convergence rates.

Parts of the presented results are taken from joint work with Jens Flemming, Steven Bürger, Ivan Veselić (Chemnitz), Peter Mathé, Günter Steinmeyer (Berlin), Otmar Scherzer, Radu Boț (Vienna), Barbara Kaltenbacher, Elena Resmerita (Klagenfurt), and Martin Burger (Münster). The research is supported by the Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) under grant HO 1454/8-2.

*Key words:* Tikhonov regularization, nonlinear ill-posed problems, smoothness.

### Bibliography

1. A. N. Tikhonov, V. Y. Arsenin. Solutions of Ill-posed Problems. // Wiley, New York, 1977. Translated from the Russian original, "Nauka", Moscow.
2. A. N. Tikhonov, A. S. Leonov, A. G. Yagola. Nonlinear Ill-posed Problems, Volumes. 1 and 2. // Volume 14 of Applied Mathematics and Mathematical Computation, Chapman & Hall, London, 1998. Translated from the Russian original, "Nauka", Moscow.
3. H. W. Engl, M. Hanke, A. Neubauer. Regularization of Inverse Problems. // Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.
4. B. Hofmann, B. Kaltenbacher, C. Pöschl, O. Scherzer. A convergence rates result for Tikhonov regularization in Banach spaces with non-smooth operators. // Inverse Problems, N. 3, V. 23, 2007, p. 987-1010.
5. T. Schuster, B. Kaltenbacher, B. Hofmann, K.S. Kazimierski. Regularization Methods in Banach Spaces. // Walter de Gruyter, Berlin/Boston, 2012.
6. B. Hofmann, P. Mathé. Parameter choice in Banach space regularization under variational inequalities. // Inverse Problems, N. 10, V. 28, (2012), 104006 (17pp).
7. J. Cheng, B. Hofmann. Regularization Methods for Ill-Posed Problems. In: 2nd Edition of Handbook of Mathematical Methods in Imaging (ed. by O. Scherzer). // Springer, New York, 2015, pp. 91-123.
8. M. Burger, J. Flemming, B. Hofmann. Convergence rates in  $\ell^1$ -regularization if the sparsity assumption fails. // Inverse Problems, N. 2, V. 29, 2013, 025013 (16pp).



## РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ НА ПРИМЕРЕ МОДЕЛИ ОРЕГОНАТОРА

Р.Д. Икрамов, С.А. Мустафина

*Стерлитамакский филиал Башкирского Государственного Университета,  
Стерлитамак, Россия*

*e-mail: rustam\_ikramov@mail.ru, mustafina\_sa@mail.ru*

**Аннотация.** Рассмотрен алгоритм решения обратных задач поиска и уточнения кинетических параметров моделей химических колебательных реакций. Апробирован алгоритм на примере модели колебательной реакции Белоусова-Жаботинского Орегонатор. В качестве решения прямой задачи использован метод Розенброка с действительными коэффициентами.

*Ключевые слова: колебательные реакции, Орегонатор, реакция Белоусова-Жаботинского, критические явления.*

## SOLVING INVERSE PROBLEM OF CHEMICAL KINETICS FOR OREGONATOR MODEL

**Abstract.** The paper considers an algorithm for solving inverse problems of finding and verifying models of chemical kinetic parameters of oscillatory reactions. The algorithm is tested on the model of the oscillatory Belousov-Zhabotinsky reaction Oregonator. As a solution to the direct problem Rosenbrock method is used with real coefficients.

*Key words: oscillating reactions, Oregonator, BZ-reaction, critical phenomena.*

Реакция Белоусова-Жаботинского является типичным примером колебательных реакций, моделированием и численным исследованием которой занимаются многие ученые, но до настоящего времени остается открытым вопрос разработки методов и алгоритмов решения обратных задач поиска и уточнения кинетических параметров реакции. Одной из известных моделей колебательных реакций является модель реакции Белоусова-Жаботинского «Орегонатор» [1]. Ее математический вид представляет собой жесткую систему дифференциальных уравнений с большим числом обусловленности:

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= k_1AY - k_2XY + k_3AX - 2k_4X^2 \\ \frac{dY}{dt} &= -k_1AY - k_2XY + fk_5Z \\ \frac{dZ}{dt} &= k_3AX - k_5Z\end{aligned}\tag{1}$$

с начальными условиями

$$X_0 = 5 \cdot 10^{-11}, Y_0 = 3 \cdot 10^{-7}, Z_0 = 5 \cdot 10^{-8}.\tag{2}$$

Для решения прямой задачи (1) - (2) был выбран метод Розенброка, основанный на неявных схемах решения систем линейных алгебраических уравнений. В простейшем случае методы типа Розенброка могут иметь вид

$$(E + C_1hJ + C_2h^2J^2)(y_{n+1} - y_n) = hF(y_n + C_3hF),\tag{3}$$

где  $y_{n+1}$  – искомое численное решение на одном шаге интегрирования длины  $h$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  – коэффициенты, определяющие метод,  $y$  и  $F$  –  $n$ -мерные вектор-функции,  $J$  – матрица Якоби исходной системы дифференциальных уравнений,  $E$  – единичная матрица. Отметим, что  $F$  и  $J$  (без аргументов) всюду означают  $F(y_n)$ ,  $J(y_n)$ .

Обратная задача состоит в определении параметров  $k_i (i = \overline{1..5})$  на основе экспериментальных данных концентраций, участвующих в реакции веществ. Тогда функционал критерия поиска кинетических констант примет вид:

$$\sum_{k=1}^W \sum_{i=1}^N \left( \frac{x_{ki}^p - x_{ki}^q}{x_{ki}^q} \right) \rightarrow \min, \quad (4)$$

где  $W$  – количество экспериментов,  $N$  – количество наблюдаемых веществ.

В общем виде алгоритм поиска решения обратной задачи состоит из трех шагов:

1. задать начальные параметры метода минимизации функционала качества, данные эксперимента, начальное приближение значений кинетических констант  $k_i (i = \overline{1..5})$ ;

2. найти минимум функционала качества (4), решая прямую задачу (1) с начальными условиями (2),

3. согласно алгоритму метода минимизации меняем значения кинетических констант  $k_i (i = \overline{1..5})$  и переходим к шагу 2.

В качестве метода минимизации функционала качества используется метод Хука-Дживса. При решении обратной задачи поиска кинетических параметров в модели (1) - (2) были уточнены значения констант скоростей  $k_1, k_3, k_5$ :

	$k_1$	$k_3$	$k_5$
Эталон	1.34	8000	0.5
Численный поиск	1.25	8130	0.57

Полученные результаты показывают, что значения кинетических констант  $k_1 - k_3$  отличаются от эталонных с погрешностью не более 11%. Такая погрешность считается допустимой в кинетическом эксперименте.

Таким образом, в работе разработан алгоритм решения обратных задач, основанный на L-устойчивом методе Розенброка, который позволяет определять кинетические параметры колебательной реакции, проводить расчет прямой кинетической задачи и находить периоды колебаний реакции. Результаты расчета реализованного алгоритма показали удовлетворительное согласование с данными, опубликованными в работе [2].

### Литература

1. Ikramov R.D., Mustafina S.A. Numerical study of the Belousov-Jabotinsky's reaction models on the basis of the two-phase Rozenbrock's method with complex coefficients // International Journal of Applied Engineering Research. 2014. Vol. 9, no. 22. PP 12797-12801.
2. Икрамов Р.Д., Мустафина С.А. Алгоритм поиска констант скоростей колебательной реакции примере реакции Белоусова-Жаботинского // Башкирский Химический Журнал. 2015. Т.22. №1. С.87-91.

**ПРОВЕРКА НА МОДЕЛЬНЫХ ДАННЫХ  
ЭФФЕКТА ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ НЕЙРОСЕТЕВОГО РЕШЕНИЯ  
МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ  
ПРИ ГРУППОВОМ И ПОЭТАПНОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПАРАМЕТРОВ**

И.В. Исаев, С.А. Доленко

*НИИ Ядерной физики имени Д.В. Скобельцына МГУ имени М.В. Ломоносова,  
Москва, Россия*

*e-mail: isaev\_igor@mail.ru, dolenko@srd.sinp.msu.ru*

**Аннотация.** При решении многопараметрических обратных задач (ОЗ) нейросетевыми методами было обнаружено повышение качества решения при групповом и поэтапном определении параметров, имеющих сходные зависимости от входных данных. Эффекты были проверены на модельных данных, заданных явным образом, и сделан вывод об их принадлежности к фундаментальным свойствам перцептронов как метода решения ОЗ.

*Ключевые слова: многопараметрическая обратная задача, перцептрон, групповое определение параметров, поэтапное определение параметров.*

**TEST ON MODEL DATA FOR THE EFFECT OF PRECISION IMPROVEMENT  
IN A MULTI-PARAMETER INVERSE PROBLEM SOLUTION  
WITH GROUP AND STEPWISE DETERMINATION OF PARAMETERS**

**Abstract.** In solving multi-parameter inverse problems (IP) with neural network methods, an improvement of the solution quality has been discovered with group and stepwise determination of parameters having similar dependences on input data. The effects were tested on model data defined explicitly, allowing one to make the conclusion that these effects belong to fundamental properties of perceptrons as a method of IP solution.

*Key words: multi-parameter inverse problem, perceptron, group determination of parameters, stepwise determination of parameters.*

Обратная задача (ОЗ) магнитотеллурического зондирования (МТЗ) заключается в построении распределения электропроводности (ЭП) в толще земли по измеренным на ее поверхности компонентам электромагнитного поля, индуцированного природными источниками. Для реализации нейросетевого решения данной задачи искомое распределение задается конечным числом параметров и в самой общей форме описывается значениями ЭП в узлах заранее определенной пространственной сетки с последующей интерполяцией между узлами.

Однако, для адекватного описания распределения число таких параметров должно быть достаточно большим, достигая нескольких сотен даже в двумерном случае, что существенно снижает точность и увеличивает вычислительную сложность решения. Поэтому при нейросетевом решении многопараметрических ОЗ применяют подход, основанный на разделении исходной задачи, содержащей  $N$  определяемых параметров, на  $N$  задач для одного параметра каждая.

В работе [1] было показано, что объединение искомых параметров в небольшие группы с одновременным определением параметров внутри каждой группы единой нейронной сетью позволила увеличить точность решения ОЗ МТЗ в случае сходных зависимостей группируемых параметров от входных данных.

Эффект повышения качества решения при групповом определении параметров наблюдался и в случае решения ОЗ МТЗ с использованием других схем параметризации, когда определяемыми параметрами являются не только значения электрической проводимости в некоторых точках, но и геометрические размеры определенных геологических структур [2].

В работе [3] было показано, что при подаче на вход нейронной сети, помимо значений полей, еще и значений ЭП параметров, имеющих сходные с определяемым параметром зависимости от входных данных, также отмечается повышение качества решения. Прирост эффективности наблюдался как при подаче на вход сети точных значений электропроводности, так и при подаче значений, определенных аналогичным образом на предыдущих этапах (поэтапное определение параметров).

Ранее подход, связанный с поэтапным определением параметров, также показал свою эффективность при решении многопараметрической ОЗ флуориметрии насыщения [4].

В настоящем исследовании наблюдаемые эффекты были проверены в вычислительном эксперименте на модельных данных, задаваемых явным образом в виде полиномиальной зависимости "наблюдаемых значений" (зависимых переменных) от "параметров" (независимые переменные). Было показано, что оба эффекта сохраняются: в случае подобных зависимостей от входных данных для группируемых или поэтапно определяемых параметров оба подхода позволяют увеличить точность решения ОЗ.

Таким образом, оба эффекта воспроизводятся при решении нескольких различных по своей природе ОЗ. Это приводит к выводу, что наблюдаемые эффекты являются фундаментальным свойством перцептронов как метода решения многопараметрических ОЗ, и что групповое и поэтапное определение параметров могут успешно применяться и для других типов многопараметрических ОЗ.

### Литература

1. Гужва А.Г., Доленко С.А., Исаев И.В., Оборнев Е.А., Персианцев И.Г., Шимелевич М.И. Исследование влияния количества одновременно определяемых параметров на погрешность нейросетевого решения обратной задачи электроразведки. // Нейроинформатика-2012. XIV Всероссийская научно-техническая конференция. Сборник научных трудов. Ч. 3. С. 55-65. М., НИЯУ МИФИ, 2012.

2. Dolenko, S.A., Isaev, I.V., Osborne, I.E., Osborne, E.A., Persiantsev, I.G., and Shimelevich, M.I. Elaboration of a complex algorithm of neural network solution of the inverse problem of electrical prospecting based on data classification // Proceedings of the 10th International Conference "Problems of Geocosmos", pp. 11-16. St. Petersburg, Petrodvorets, 2014.

3. Доленко С.А., Исаев И.В., Оборнев Е.А., Персианцев И.Г., Шимелевич М.И. Исследование эффективности поэтапного определения параметров при нейросетевом решении обратной задачи электроразведки. // Нейроинформатика-2013. XV Всероссийская научно-техническая конференция. Сборник научных трудов. Ч. 2. С. 215-225. М., НИЯУ МИФИ, 2013.

4. Dolenko, S.A., Gerdova, I.V., Dolenko, T.A., Fadeev, V.V. Laser fluorimetry of mixtures of polyatomic organic compounds using artificial neural networks // Quantum Electronics, 2001, V. 31, No. 9, pp. 834–838.

# ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ДИНАМИКУ ЖИДКОСТИ КЕЛЬВИНА–ФОЙГТА

Н.Д. Иванова, В.Е. Федоров

*Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия*

*e-mail: natalia.d.ivanova@gmail.com, kar@csu.ru*

**Аннотация.** Путем редукции к исследованому ранее в работах авторов классу нелинейных обратных задач для вырожденных эволюционных уравнений доказана однозначная разрешимость обратной задачи с неизвестным источником для системы уравнений Осколкова, описывающей динамику вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта.

*Ключевые слова:* обратная задача, система Осколкова, жидкость Кельвина–Фойгта, вырожденное эволюционное уравнение.

## INVERSE PROBLEM FOR EQUATIONS SYSTEM DESCRIBING DYNAMICS OF KELVIN–VOIGT FLUID

**Abstract.** By means of reduction to a class of nonlinear inverse problems for degenerate evolution equations, that researched before in authors' works, unique solvability is proved for the inverse problem with unknown source to Oskolkov system of equations, describing the dynamics of viscoelastic Kelvin–Voigt fluid.

*Key words:* inverse problem, Oskolkov system, Kelvin–Voigt fluid, degenerate evolution equation.

Рассмотрим обратную задачу для нелинейной системы уравнений

$$(1 - \chi\Delta)v_t(x, t) = \nu\Delta v(x, t) - (v \cdot \nabla)v(x, t) - r(x, t) + u(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (1)$$

$$\nabla \cdot v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (2)$$

$$v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \quad (3)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

$$\int_{\Omega} K(x, y)v(y, t)dy = \psi(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T]. \quad (5)$$

Здесь  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  — ограниченная область с гладкой границей  $\partial\Omega$ ,  $T > 0$ . Вектор-функции  $v = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $r = (r_1, r_2, r_3)$  и  $u = (u_1, u_2, u_3)$  неизвестны. Заданы функция  $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  и вектор-функция  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Система уравнений (1), (2) моделирует динамику вязкоупругой несжимаемой жидкости Кельвина–Фойгта [1].

Обозначим через  $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^3$ ,  $\mathbb{H}^1 = (W_2^1(\Omega))^3$ ,  $\mathbb{H}^2 = (W_2^2(\Omega))^3$  соболевские пространства вектор-функций  $w = (w_1, w_2, w_3)$ , определенных в области  $\Omega$ . Замыкание  $\mathcal{L} = \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^3 : \nabla \cdot v = 0\}$  по норме  $\mathbb{L}_2$  обозначим через  $\mathbb{H}_\sigma$ , а по норме  $\mathbb{H}^1$  — через  $\mathbb{H}_\sigma^1$ . Будем использовать также обозначение  $\mathbb{H}_\sigma^2 = \mathbb{H}_\sigma^1 \cap \mathbb{H}^2$ . Обозначим через  $\mathbb{H}_\pi$  ортогональное дополнение к  $\mathbb{H}_\sigma$  в  $\mathbb{L}_2$ , через  $\Sigma : \mathbb{L}_2 \rightarrow \mathbb{H}_\sigma$ ,  $\Pi = I - \Sigma$  — соответствующие ортопроекторы.

В пространстве  $\mathcal{L}$  рассмотрим оператор  $A = \Sigma\Delta$ , продолженный до замкнутого оператора в пространстве  $\mathbb{H}_\sigma$  с областью определения  $\mathbb{H}_\sigma^2$ . Учитывая равенства (2), (3), выберем пространства и операторы в них действующие

$$\mathfrak{X} = \mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi, \quad \mathfrak{Y} = \mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi, \quad \mathfrak{U} = \mathbb{H}_\sigma,$$

$$L = \begin{pmatrix} I - \chi A & \mathbb{O} \\ -\chi \Pi \Delta & \mathbb{O} \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} \nu A & \mathbb{O} \\ \nu \Pi \Delta & -I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y}).$$

Тем самым задача (1)–(5) редуцирована к обратной задаче

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + N(t, x(t), u(t)), \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

$$Px(0) = x_0, \quad (7)$$

$$\Phi x(t) = \Psi(t), \quad t \in [0, T]. \quad (8)$$

Здесь  $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{Y}$ ,  $\mathfrak{U}$  — банаховы пространства,  $L, M : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ ,  $\Phi : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{U}$  — линейные и непрерывные операторы,  $N : [0, T] \times \mathfrak{X} \times \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{Y}$ ,  $\Psi : [0, T] \rightarrow \mathfrak{U}$ . Неизвестными являются функции  $x : [0, T] \rightarrow \mathfrak{X}$ ,  $u : [0, T] \rightarrow \mathfrak{U}$ . При этом предполагается, что  $\ker L \neq \{0\}$ , оператор  $M$  сильно  $(L, 0)$ -радиален, а через  $P$  обозначен проектор вдоль ядра  $\ker L$ . С помощью теоремы 11 [2] о разрешимости задачи (6)–(8) получим следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть  $\nu, \chi \neq 0$ ,  $\chi^{-1} \notin \sigma(A)$ ,  $v_0 \in \mathbb{H}_\sigma^2$ ,  $K \in L_2(\Omega \times \Omega)$ , оператор  $J : \mathbb{H}_\sigma^2 \rightarrow \mathbb{H}_\sigma$  непрерывно обратим,  $\psi \in C^2([0, T]; \mathbb{H}_\sigma)$ , выполняется условие согласования  $\int_\Omega K(x, y)v_0(y)dy = \psi(x, 0)$ . Тогда при некотором  $T_1 \in (0, T]$  решение  $v \in C^1([0, T_1]; \mathbb{H}_\sigma^2)$ ,  $r \in C^1([0, T_1]; \mathbb{H}_\pi)$ ,  $u \in C^1([0, T_1]; \mathbb{H}_\sigma)$  обратной задачи (1)–(5) на отрезке  $[0, T_1]$  существует и единственно.

Для  $K \in L_2(\Omega \times \Omega)$  через  $J$  здесь обозначен оператор, действующий по правилу  $(Jv)(x) = \int_\Omega K(x, y)v(y)dy$ .

## Литература

1. Осколков А.П. Начально краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1988. Т. 179. С. 126–164.
2. Федоров В.Е., Иванова Н.Д. Нелинейная эволюционная обратная задача для некоторых уравнений соболевского типа // Сибирские электронные мат. известия. 2011. Т. 8. Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач: тр. второй междунар. шк.-конф. / под ред. С.И. Кабанихина и М.А. Шишленина. Ч. I. С. 363–378. (<http://semr.math.nsc.ru/v8/c182-410.pdf>)

# ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ГРАНИЧНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В КЛАССЕ СИЛЬНЫХ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Д.А. Иванов, М.М. Потапов

Факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия  
e-mail: deniaru91@gmail.com, mpotapov@tochka.ru

**Аннотация.** Предложен устойчивый метод решения задачи быстрогодействия в классе сильных обобщенных решений волнового уравнения для двусторонних граничных управлений типа Дирихле, Неймана и Робена в любой их комбинации.

*Ключевые слова:* волновое уравнение, граничное управление, задача быстрогодействия, приближенное решение, сходимость.

## OPTIMAL TIME BOUNDARY CONTROLS FOR THE WAVE EQUATION IN CLASS OF STRONG GENERALIZED SOLUTIONS

**Abstract.** A stable numerical method is suggested for optimal time problem in class of strong generalized solutions of the wave equation for two-sided boundary controls of Dirichlet, Neumann and Robin type in arbitrary their combination.

*Key words:* wave equation, boundary control, time optimal control problem, approximate solution, convergence.

Рассматривается задача быстрогодействия с различным комбинациями двусторонних граничных управлений трех основных типов для волнового уравнения вида

$$y_{tt} = y_{xx} - \theta(x)y, \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad (1)$$

в классе *сильных* обобщенных решений. Требуется найти пару граничных управлений  $u_* = (u_{0*}(t), u_{1*}(t))$ , обеспечивающих точное попадание в заданную цель  $f = (f^0(x), f^1(x))$  за *наименьшее* время  $T_* = T_*(f)$ ,

$$T_*(f) = \inf_{T>0} T : \quad y|_{t=T} = f^0(x), \quad y_t|_{t=T} = f^1(x), \quad 0 < x < l. \quad (2)$$

В соответствии с известными свойствами сильных обобщенных решений в качестве пространства целевых состояний  $f = (f^0(x), f^1(x))$ , как и в [1], выбирается множество

$$F = H^1(0, l) \times L^2(0, l).$$

В [1] на временном промежутке заданной докритической длины  $T \leq l$  решалась задача наилучшего приближения к заданной цели:

$$\|y|_{t=T} - f^0\|_{H^1(0,l)}^2 + \|y_t|_{t=T} - f^1\|_{L^2(0,l)}^2 \rightarrow \inf,$$

а здесь решается проблема (1), (2) наискорейшего точного ее достижения.

В работе предложен двухэтапный алгоритм приближенного решения задачи (1), (2), способный устойчиво обрабатывать неточные данные  $\tilde{f} = (\tilde{f}^0, \tilde{f}^1) \in F$  с погрешностями известного уровня  $\delta > 0$  :

$$\|\tilde{f}^0 - f^0\|_{H^1(0,l)} \leq \delta, \quad \|\tilde{f}^1 - f^1\|_{L^2(0,l)} \leq \delta. \quad (3)$$

Сначала по приближенным данным (3) вычисляется приближенное время быстрогодействия  $\tilde{T}_*$ , а затем с помощью вариационного метода [2], использующего полученные

в [1] конструктивные оценки и уже найденное значение  $\tilde{T}_*$ , строятся приближения к оптимальным по времени граничным управлениям.

Доказывается сходимость  $\tilde{T}_* \rightarrow T_*$  моментов быстрогодействия, а также сильная сходимость приближенных граничных управлений при асимптотическом уточнении параметров конечномерной аппроксимации и уменьшении уровня погрешности  $\delta$  в задании целевых функций. Отметим, что данный алгоритм существенно использует специфику пространственно-одномерного волнового уравнения (1) и на рассматриваемом классе задач имеет заметные преимущества как по конструктивности, так и по экономичности перед общими методами решения задач быстрогодействия из [3], сфера применимости которых существенно шире. Приводятся результаты численных экспериментов, иллюстрирующие возможности предложенного алгоритма.

### Литература

1. Потапов М.М., Иванов Д.А. Задачи двустороннего граничного управления для волнового уравнения на докритических промежутках в классах сильных обобщенных решений // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 2013. Т. 19, N 4. С. 192–202.
2. Потапов М.М. Устойчивый метод решения линейных уравнений с неравномерно возмущенным оператором // Докл. РАН. 1999. Т. 365, N 5. С. 596–598.
3. Васильев Ф.П., Иванов Р.П. О приближенном решении задачи быстрогодействия в банаховых пространствах при наличии ограничений на фазовые координаты // ЖВМиМФ. 1971. Т. 11, N 2. С. 328–347.



# ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ СОВМЕЩЕННОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В МЕЛКОЙ ВОДЕ: МОДЕЛИРОВАНИЕ И ВИЗУАЛИЗАЦИЯ

С.И. Кабанихин, О.И. Криворотько

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,  
Новосибирск, Россия*

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия  
e-mail: kabanikhin@sscc.ru, olga.krivorotko@sscc.ru*

**Аннотация.** В статье численно исследована совмещенная обратная задача определения источника распространения волн в теории мелкой воды одновременно по двум типам дополнительной информации: измерения отклонения волнового поля от состояния покоя в конечных точках пространственной области и распределение волнового поля в фиксированный момент времени. Показано, что комбинация двух типов данных увеличивает устойчивость и сходимость численного решения обратной задачи. Продемонстрирована трехмерная ГИС визуализации системы атмосфера-океан с разработанными алгоритмами.

*Ключевые слова:* совмещенная обратная задача, уточнение источника цунами, вариационная постановка, градиентные методы, моделирование, визуализация.

## VARIATIONAL APPROACH FOR SOLVING COMBINED INVERSE PROBLEM OF WAVE PROPAGATION DESCRIBED BY THE SHALLOW WATER THEORY: MODELING AND VISUALIZATION

**Abstract.** We numerically investigate combined inverse problem of determining the tsunami source using two types of additional data, namely the deviation of the wave field from zero in fixed space type points and the wave field distribution at fixed time moment. We show that combination of two types of data allows one to increase stability and convergence of numerical inverse problem solution. We present the 3D GIS visualization and information atmosphere-ocean system with embedded described mathematical tools of simulation of processes in atmosphere and ocean.

*Key words:* combined inverse problem, identification of tsunami source, variational approach, gradient algorithms, modeling, visualization.

Задача Коши распространения волн в линейной теории мелкой воды в размерном виде без учета воздействия внешних сил Кориолиса и донного трения может быть записана в следующем виде

$$\begin{cases} \eta_{tt} = \operatorname{div}(gH(x, y) \operatorname{grad} \eta), & (x, y) \in \Omega, \\ \eta(x, y, 0) = q(x, y), \quad \eta_t|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $\Omega = \{(x, y) \mid x \in (0, L_x), y \in (0, L_y)\}$ ,  $\eta(x, y, t)$  описывает смещение водной поверхности относительно невозмущенного уровня,  $H(x, y)$  – функция дна,  $g = 9.81 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения. Функция  $q(x, y)$  описывает источник возмущения. Для простоты изложения приведены однородные граничные условия.

Пусть о колебаниях водной поверхности задана дополнительная информация в конечном числе точек пространственной области [1]

$$\eta(x_m, y_m, t) = f_m(t), \quad (x_m, y_m) \in \Omega, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad M \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

и в фиксированный момент времени  $T$  на части области  $\omega \subset \Omega$  [2]

$$\eta(x, y, T) = f(x, y), \quad (x, y) \in \omega. \quad (3)$$

Совмещенная обратная задача (1)-(3) состоит в уточнении параметров источника возмущения  $q(x, y)$  по дополнительным измерениям отклонения водной поверхности  $f_m(t)$  и  $f(x, y)$ .

Показана неустойчивость решения совмещенной обратной задачи на основе анализа характера убывания сингулярных чисел дискретного аналога оператора совмещенной обратной задачи. Построен метод регуляризации обратной задачи, основанный на исследовании вариационной постановки [3].

Совмещенная обратная задача (1)-(3) сводится к задаче определения минимума целевого функционала

$$J(q) = \int_0^T (\eta(x_m, y_m, t; q) - f_m(t))^2 dt + \iint_{\omega} (\eta(x, y, T; q) - f(x, y))^2 dx dy. \quad (4)$$

Решение задачи минимизации целевого функционала (4) получено с помощью градиентных метода сопряженных градиентов. Получено явное выражение градиента целевого функционала  $J(q)$  (4), связанное с решением соответствующей сопряженной задачи.

Приведены результаты численных расчетов, демонстрирующие работу алгоритма. Показано, что использование двух типов дополнительной информации увеличивает устойчивость и сходимость численного решения обратной задачи (1)-(3) [4].

Визуализация полученных результатов проводилась с использованием трехмерной геинформационной системы, разработанной в ИВМиМГ СО РАН с возможностью изменения масштаба в реальном времени [5].

*Работа частично поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации и Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 15-01-09230).*

## Литература

1. Kabanikhin S., Hasanov A., Marinin I., Krivorotko O., Khidasheli D. A variational approach to reconstruction of an initial tsunami source perturbation // Applied Numerical Mathematics. 2014. V. 83. P. 22-37.
2. Kabanikhin S.I., Bektemesov M.A., Nurseitov D.B., Krivorotko O.I., Alimova A.N. An optimization method in the Dirichlet problem for the wave equation // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2012. V. 20, N. 2. P. 193-211.
3. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с.
4. Kabanikhin S.I., Krivorotko O.I. Coupled inverse problems and visualization of atmosphere-ocean system // COUPLED PROBLEMS 2015 – Proceedings of the 6th International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering, Venice, Italy, May 18-20, 2015. P. 921-929.
5. Кабанихин С.И., Криворотко О.И., Маринин И.В. Трехмерная ГИС анализа и оценки природных и техногенных катастроф. М.: Palmarium Academic Publishing, 2013. 96 с.

# РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧ ПРОДОЛЖЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ С ЧАСТИ ГРАНИЦЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

С. И. Кабанихин<sup>1,3</sup>, М. А. Шишленин<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия

<sup>2</sup>Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

<sup>3</sup>Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия  
e-mail: kabanikhin@sscc.ru, mshishlenin@ngs.ru

**Аннотация.** Разработаны новые методы регуляризации задач продолжения с части границы решений эллиптических, параболических и гиперболических уравнений. Некорректная задача продолжения формулируется в виде обратной задачи  $Aq = f$ , приближенное решение которой ищется градиентным методом минимизации целевого функционала. Исследована некорректность задач продолжения на основе анализа сингулярных чисел оператора  $A$ . Приведены результаты численных расчетов. Показано, что размер области наблюдения данных обратной задачи является параметром регуляризации.

*Ключевые слова:* задачи продолжения, регуляризация, градиентные методы.

## REGULARIZATION OF THE CONTINUATION PROBLEMS OF PHYSICAL FIELDS FROM THE PART OF THE BOUNDARY: THEORY AND APPLICATIONS

**Abstract.** New regularization methods of the solution continuation of the elliptic, parabolic and hyperbolic equations from the part of the boundary are developed. Ill-posed continuation problem is formulated in the form of the inverse problem  $Aq = f$  and the approximate solution is founded by a gradient method of minimization of the cost functional. The ill-posedness of the continuation problem is investigated based on the analysis of the singular values of the operator  $A$ . The results of numerical calculations are presented. It is shown that the size of the measurements domain of inverse problem data is the regularization parameter.

*Key words:* continuation problems, regularization, gradient methods.

Исследована задача продолжения решения уравнения электродинамики [1,2]:

$$\varepsilon(z, y)u_{tt} + \sigma(z, y)u_t = \frac{1}{\mu(z, y)}(u_{zz} + u_{yy}), \quad z \in (0, h), \quad y \in (0, L), \quad t \in (0, T), \quad (1)$$

$$u_z|_{z=0} = g(y, t), \quad u|_{z=0} = f(y, t), \quad y \in (0, L), \quad t \in (0, T). \quad (2)$$

Здесь  $\varepsilon(z, y)$  — диэлектрическая проницаемость среды,  $\mu(z, y)$  — магнитная проницаемость среды,  $\sigma(z, y)$  — проводимость,  $u(z, y, t)$  — горизонтальная компонента вектора электрической напряженности электромагнитного поля.

Задача продолжения решения уравнения электродинамики (1), (2) формулируется в виде обратной задачи: требуется определить функцию  $q(y, t)$  из соотношений (1), (2) и дополнительных начальных и граничных условий:

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad z \in (0, h), \quad y \in (0, L); \quad (3)$$

$$u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=L} = 0, \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T); \quad (4)$$

$$u|_{z=h} = q(y, t), \quad y \in (0, L), \quad t \in (0, T). \quad (5)$$

Для решения обратной задачи (1)–(5) применяется градиентный метод минимизации целевого функционала

$$J(q) = \int_0^T \int_0^L \left( u(0, y, t) - f(y, t) \right)^2 dy dt.$$

Получена формула для вычисления градиента функционала через решение сопряженной задачи.

В случае режима гармонических колебаний  $u(z, y, t) = v(z, y)e^{i\omega t}$  получены формулы для вычисления сингулярных чисел оператора задачи продолжения  $A$ :

$$\sigma_m(A) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cosh(2\alpha_m h) + \cos(2\beta_m h)}}.$$

Здесь

$$\alpha_m = \sqrt{\frac{\sqrt{(m^2 - \varepsilon\omega^2)^2 + \sigma^2\omega^2} + m^2 - \varepsilon\omega^2}{2}},$$

$$\beta_m = \sqrt{\frac{\sqrt{(m^2 - \varepsilon\omega^2)^2 + \sigma^2\omega^2} - m^2 + \varepsilon\omega^2}{2}}.$$

Формула сингулярных чисел оператора задачи продолжения позволяет охарактеризовать некорректность задачи и построить приближенное решение основанное на первых  $M$  сингулярных чисел в зависимости от глубины восстановления  $h$ , параметров среды  $\varepsilon$  и  $\sigma$ , частоты  $\omega$  и уровня ошибок в данных  $f$ .

Численно показано, что размер области наблюдения данных обратной задачи является параметром регуляризации.

В качестве приложений приведены результаты численных расчетов задач продолжения стационарных тепловых полей и волновых полей с данными георадара [3].

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-01-00208), Министерства образования и науки Российской Федерации, Министерства образования и науки Республики Казахстан, проект НТП 04.03.02 “Создание методических основ геолого-геофизических исследований очаговых зон ПЯВ в магматических породах”.*

## Литература

1. Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A., Nurseitov D.B., Nurseitova A.T., Kasenov S.E. Comparative Analysis of Methods for Regularizing an Initial Boundary Value Problem for the Helmholtz Equation // Journal of Applied Mathematics. 2014. Vol. 2014. 7 pages URL: <http://dx.doi.org/10.1155/2014/786326>.
2. Kabanikhin S.I., Gasimov Y.S., Nurseitov D.B., Shishlenin M.A., Sholpanbaev B.B., Kasenov S.E. Regularization of the continuation problem for elliptic equations // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2013. Vol. 21, N 6. P. 871–884.
3. Kabanikhin S.I., Nurseitov D.B., Shishlenin M.A., Sholpanbaev B.B. Inverse problems for the ground penetrating radar // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2013. Vol. 21, N 6. P. 885–892.

# УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

З.А. Каденова - к.ф.-м.н., доцент,  
Заместитель министра труда, миграции и молодежи  
Кыргызской Республики, 996 555 88 40 66  
e-mail: Kadenova71@mail.ru

**Аннотация.** В настоящей статье доказана теорема о оценки устойчивости решений систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях.

**Ключевые слова:** линейные интегральные уравнения, первого рода, с двумя независимыми переменными, единственность.

## STABILITY OF THE SYSTEMS LINEAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND WITH TWO VARIABLES IN UNLIMITED AREAS

**Abstract.** In the present article the theorem about an assessment of stability of solutions of systems of the linear integral equations of the first t with two independent variables in unlimited areas is proved.

**Key words and phrases:** linear integral equations, first kind, two variables, solution and uniqueness.

Рассмотрим систему уравнений

$$Ku \equiv \int_a^b K(t, x, y)u(t, y)dy + \int_{t_0}^t H(t, x, s)u(s, x)dx + \int_{t_0}^{\infty} \int_a^b C(t, x, s, y)u(s, y)dy = f(t, x), (t, x) \in G, G = \{(t, x) \in R^2, t_0 \leq t < \infty, a \leq x \leq b\}, \quad (1)$$

где

$$K(t, x, y) = \begin{cases} A(t, x, y), & t_0 \leq t < \infty, a \leq y \leq x \leq b; \\ B(t, x, y), & t_0 \leq t < \infty, a \leq x \leq y \leq b, \end{cases} \quad (2)$$

$A(t, x, y), B(t, x, y), H(t, x, s), C(t, x, s, y)$  - известные  $n \times n$ -мерные матричные функции, определенные соответственно в области

$$G_1 = \{(t, x, y): t_0 \leq t < \infty, a \leq y \leq x \leq b\},$$

$$G_2 = \{(t, x, y): t_0 \leq t < \infty, a \leq x \leq y \leq b\},$$

$$G_3 = \{(t, x, s): t_0 \leq s \leq t < \infty, a \leq x \leq b\}, G^2 = G \times G,$$

$f(t, x)$ -известная,  $u(t, x)$  -неизвестная  $n$ -мерные вектор-функции.

Основополагающие результаты для интегральных уравнений Фредгольма первого рода получены в [1,2], где для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву. Рассмотрена единственность, и устойчивость решений для одного класса интегральных уравнений Фредгольма первого рода с двумя независимыми переменными рассмотрена в [3]. В данной работе получены оценки устойчивости решений систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях в классе  $L_2(G)$ .

Введем следующие обозначения:

1) Совокупность всех матриц, действующих в  $R^n$  обозначим  $M$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  - скалярное произведение в  $R^n$ ,  $\|A\|, \|u\|$  - нормы соответственно  $n \times n$  - мерной матрицы  $A = (a_{ij}) \in M$  и  $n$  - мерного вектора  $u$ , т.е. для любых  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n) \in R^n$

$$\langle u, \mathcal{G} \rangle = u_1 \mathcal{G}_1 + u_2 \mathcal{G}_2 + \dots + u_n \mathcal{G}_n,$$

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}, \quad \|A\| = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij})^2 \right)^{1/2};$$

2)  $L_{2,n}(G)$  - пространство  $n$  - мерных векторов с элементами из  $L_2(G)$ ,  $\|\cdot\|_{L_2}$  - норма в  $L_{2,n}(G)$  - т.е. для любого  $u(t, x) \in L_{2,n}(G)$

$$\|u(t, x)\|_{L_2} = \left( \int_{t_0}^{\infty} \int_a^b \|u(t, x)\|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}};$$

3)  $L_2((G^2); M)$  - пространство  $n \times n$  - мерных матриц с элементами из  $L_2(G^2)$ ,  $\|\cdot\|_{L_2}$  - норма в  $L_2((G^2); M)$  - т.е. для любого  $A(t, x, s, y) \in L_2((G^2); M)$

$$\|A(t, x, s, y)\|_{L_2} = \left( \int_{t_0}^{\infty} \int_{t_0}^{\infty} \int_a^b \int_a^b \|A(t, x, s, y)\|^2 dy dx ds dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Предполагается, что ядро  $\|C(t, x, s, y)\| \in L_2(G^2)$  и  $C(t, x, s, y) = C^*(s, y, t, x)$ ,  $(t, x, s, y) \in G^2$ , где  $C^*$  - сопряженная матрица к матрице  $C$ . Тогда матричное ядро  $C(t, x, s, y)$  разлагается в ряд в смысле сходимости в норме пространстве  $L_{2,n}(G^2)$ :

$$C(t, x, s, y) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \begin{pmatrix} \varphi_1^{(i)}(t, x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_n^{(i)}(t, x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1^{(i)}(s, y), \dots, \varphi_n^{(i)}(s, y) \end{pmatrix}, \quad l \leq m \leq \infty, \quad (3)$$

где  $\{(\varphi^{(i)}(t, x)) = (\varphi_v^{(i)}(t, x))\}$  - ортонормированная последовательность собственных вектор - функций из  $L_{2,n}(G)$ ,  $\{\lambda_i\}$  - последовательность соответствующих ненулевых собственных значений интегрального оператора  $C$ , порожденного матричным ядром  $C(t, x, s, y)$ , причем элементы  $\{\lambda_i\}$  расположены в порядке убывания их модулей т.е.

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$$

Обозначим

$$P(s, y, z) = A(s, y, z) + B^*(s, z, y), \quad (s, y, z) \in G_1. \quad (4)$$

где  $B^*(s, z, y)$  – сопряженная матрица и матрице  $B(s, z, y)$ .

Потребуем выполнения следующих условий:

- 1)  $P^*(s, y, z) = P(s, y, z), (s, y, z) \in G_1$ .
- 2) Матрицы  $P(s, b, a), \lim_{t \rightarrow \infty} H(t, y, t_0), P'_z(s, b, z), \lim_{t \rightarrow \infty} H'_\tau(t, y, \tau)$  – неотрицательны соответственно при всех значениях  $s \in [t_0, \infty), y \in [a, b], (s, z), (\tau, y) \in G$ ,  
 $\|P(s, b, a)\| \in C[t_0, \infty), \|\lim_{t \rightarrow \infty} H(t, y, t_0)\| \in C[a, b], \|P'_z(s, b, z)\| \in C(G), \|\lim_{t \rightarrow \infty} H'_\tau(t, y, \tau)\| \in C(G)$ ;
- 3) Матрицы  $P'_y(s, y, a), H'_s(s, y, t_0), P''_{zy}(s, y, z), H''_{\tau s}(s, y, \tau)$  – неположительны при всех значениях соответственно  $(s, y) \in G, (s, y, z) \in G_1, (s, y, \tau) \in G_3$ ,  
 $\|P'_y(s, y, a)\| \in C(G), \|H'_s(s, y, t_0)\| \in C(G), \|P''_{zy}(s, y, z)\| \in C(G_1), \|H''_{\tau s}(s, y, \tau)\| \in C(G_3)$ ;
- 4) Выполняется хотя бы одно из следующих четырех условий:
  - а) при почти всех  $(s, y) \in G$  матрица  $P'_y(s, y, a)$  – отрицательны;
  - б) при почти всех  $(s, z) \in G$  матрица  $P'_z(s, b, z)$  – положительны;
  - в) при почти всех  $(s, y) \in G$  матрица  $H'_s(s, y, t_0)$  – отрицательны;
  - г) при почти всех  $(\tau, y) \in G$  матрица  $\lim_{t \rightarrow \infty} H'_\tau(\infty, y, \tau)$  – положительны

и для любого

$$v(t, x) \in L_{2,n}(G), \int_a^x A(t, x, y)v(t, y)dy, \int_x^b B(t, x, y)v(t, y)dy, \int_{t_0}^t H(t, x, s)v(s, x)ds \in L_{2,n}(G),$$

где  $C[t_0, \infty), C(G), C(G_1)$  и  $C(G_3)$  – пространство всех непрерывных и ограниченных функций соответственно в области  $[t_0, \infty), G, G_1$  и  $G_3$ ;

$$C(t, x, s, y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \begin{pmatrix} \varphi_1^{(i)}(t, x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_n^{(i)}(t, x) \end{pmatrix} (\varphi_n^{(i)}(s, y), \dots, \varphi_n^{(i)}(s, y)) \quad (5)$$

где  $\{(\varphi^{(i)}(t, x)) = (\varphi_v^{(i)}(t, x))\}$  – ортонормированная последовательность собственных вектор - функций из  $L_2(G^2)$ ,  $\{\lambda_i\}$  – последовательность соответствующих ненулевых собственных значений интегрального оператора  $C$ , порожденного матричным ядром  $C(t, x, s, y)$ , причем элементы  $\{\lambda_i\}$  расположены в порядке убывания их модулей

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$$

Будем считать, что все собственные значения  $\lambda_v$ , матричного ядра  $C(t, x, s, y)$  положительны.

В силу вполне непрерывности и самосопряженности оператора  $C$ , порожденного матричным ядром  $C(t, x, s, y)$  ортонормированная последовательность собственных вектор – функций  $\{(\varphi^v(t, x)) = (\varphi_i^{(v)}(t, x))\}$  – полна в  $L_{2,n}(G)$ . Очевидно, что если  $u(t, x) \in L_{2,n}(G)$ , то

$$\text{где } \|u(t, x)\|_{L_2}^2 = \sum_{v=1}^{\infty} |u^{(v)}|^2,$$

$$u^{(v)} = \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \langle u(t, x), \varphi^{(v)}(t, x) \rangle dt dx, \quad (v = 1, 2, \dots).$$

Семейство множеств корректностей  $M_\alpha$  выделим следующим образом:

$$M_\alpha = \left\{ u(t, x) \in L_{2,n}(G) : \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^{-\alpha} |u^{(v)}|^2 \leq c \right\},$$

где  $c > 0$ ,  $0 < \alpha < \infty$ ,

$$u^{(v)} = \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \langle u(t, x), \varphi^{(v)}(t, x) \rangle dx dt, \quad (v = 1, 2, \dots).$$

Обе части системы (1) скалярно умножим на  $u(t, x)$  и интегрируем по области  $G$ . Далее, используя формулы Дирихле и учитывая (3), имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \left\langle P(s, b, a) \int_a^b u(s, v) dv, \int_a^b u(s, v) dv \right\rangle ds - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \int_a^b \left\langle P_y(s, y, a) \int_a^y u(s, v) dv, \int_a^y u(s, v) dv \right\rangle dy ds + \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \int_a^b \left\langle P'_z(s, b, z) \int_z^b u(s, v) dv, \int_z^b u(s, v) dv \right\rangle dz ds - \\ & - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \int_a^b \int_a^y \left\langle P''_{zy}(s, y, z) \int_z^y u(s, v) dv, \int_z^y u(s, v) dv \right\rangle dz dy ds + \\ & + \frac{1}{2} \int_a^b \left\langle \lim_{t \rightarrow \infty} H(t, y, t_0) \int_{t_0}^{\infty} u(\xi, y) d\xi, \int_{t_0}^{\infty} u(\xi, y) d\xi \right\rangle dy - \\ & - \frac{1}{2} \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \left\langle H'_s(s, y, t_0) \int_{t_0}^s u(\xi, y) d\xi, \int_{t_0}^s u(\xi, y) d\xi \right\rangle ds dy + \\ & + \frac{1}{2} \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \left\langle \lim_{t \rightarrow \infty} H'_\tau(t, y, \tau) \int_\tau^{\infty} u(\xi, y) d\xi, \int_\tau^{\infty} u(\xi, y) d\xi \right\rangle d\tau dy - \\ & - \frac{1}{2} \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \int_{t_0}^s \left\langle H''_{\tau s}(s, y, \tau) \int_\tau^s u(\xi, y) d\xi, \int_\tau^s u(\xi, y) d\xi \right\rangle d\tau ds dy + \\ & + \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v |u^{(v)}|^2 = \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \langle f(t, x), u(t, x) \rangle dt dx. \end{aligned}$$

Отсюда, используя неравенства Гельдера, имеем



$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_{\nu} |u^{(\nu)}|^2 \leq \|f(t, x)\| \|u(t, x)\|. \quad (6)$$

Если  $f(t, x) = 0 \quad \forall (t, x) \in G$ , то из (6) имеем  $u(t, x) = 0 \quad \forall (t, x) \in G$ .

С другой стороны

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |u^{(\nu)}|^2 \leq \left( \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_{\nu} |u^{(\nu)}|^2 \right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left( \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|u^{(\nu)}|^2}{\lambda_{\nu}^{\alpha}} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}. \quad (7)$$

Пусть  $u(t, x) \in M_{\alpha}$ . Тогда, учитывая (6), из (7) имеем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |u^{(\nu)}|^2 \leq (\|f(t, x)\| \|u(t, x)\|)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} c^{\frac{1}{1+\alpha}}. \quad (8)$$

Из (8) получим следующую оценку устойчивости:

$$\|u(t, x)\|_{L_2} \leq C^{\frac{1}{2+\alpha}} \|f(t, x)\|_{L_2}^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}. \quad (9)$$

Таким образом, теорема доказана.

**Теорема.** Пусть выполняются условия 1)-2),  $K(M_{\alpha}) \subset L_{2,n}(G)$ - образ  $M_{\alpha}$  при отображении  $K$ . Тогда на решение системы (1) единственно  $L_{2,n}(G)$  и множестве  $K(M_{\alpha})$  существует равномерно непрерывный оператор  $K^{-1}$ , обратный к  $K$ , т.е. справедлива оценка (9).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода. // ДАН СССР. 1959. Т.127, № 1. с. 31-33.
2. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
3. Asanov A., M. Haluk Chelik, Kadenova Z. A. Uniqueness and Stability of Solutions of Linear Integral Equations of the First Kind with Two Variables - International journal of contemporary mathematical sciences Vol. 7, 2013, no. 19, 907 - 914. HIKARI Ltd.

# О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРИ УСЛОВИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ

В.Л.Камынин

*Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва, Россия  
e-mail: vlkamyinin2008@yandex.ru*

**Аннотация.** Получены теоремы существования, единственности и устойчивости относительно возмущения входных данных решений обратных задач для вырождающихся параболических уравнений на плоскости при условии интегрального наблюдения. Получены оценки решения с константами, явно выписываемыми через входные данные задачи.

*Ключевые слова:* Обратные задачи, Вырождающиеся параболические уравнения

## ON CORRECT SOLVABILITY OF THE INVERSE PROBLEM FOR DEGENERATE PARABOLIC EQUATIONS WITH THE CONDITION OF INTEGRAL OBSERVATION

**Abstract.** We obtain theorems of existence, uniqueness and stability with respect to perturbations of the input data of the solutions of inverse problems for degenerate parabolic equations on a plane with the condition of integral observation

*Key words:* Inverse problems, Degenerate parabolic equations

We consider the questions of existence, uniqueness and stability with respect to perturbations of the input data of the solutions  $\{u(t, x), p(t)\}$  of inverse problem for degenerate parabolic equation

$$u_t - a(t, x)u_{xx} = p(t)g(t, x) + h(t, x),$$

with initial and boundary conditions

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u(t, 0) = u(t, l) = 0,$$

and additional condition of integral observation

$$\int_0^l u(t, x)\omega(x)dx = \varphi(t).$$

The inverse problem is considered in rectangle  $Q = [0, T] \times [0, l]$ .

It should be mentioned that the inverse problems for degenerate parabolic equations are very useful in applications. In particular, they arise in the study of option pricing models in financial markets.

**Theorem.** Suppose that

$$a(t, x) \geq 0, \quad a(t, x), \frac{1}{a(t, x)} \in L_q(Q), \quad q > 1,$$
$$g(t, x), h(t, x), \frac{g^2}{a} \in L_\infty(0, T; L_1(0, l)), \quad \frac{h^2}{a} \in L_1(Q)$$

$$\begin{aligned} \omega(x) &\in L_\infty([0, l]), \quad ((a(t, x)\omega(x))_x \in L_\infty(0, T; L_2(0, l)), \\ u_0(x) &\in W_2^1((0, l]), \quad u_0(0) = u_0(l) = 0, \\ a(t, 0)\omega(0) = a(t, l)\omega(l) &= 0, \quad \left| \int_0^l a(t, x)g(t, x)\omega(x) dx \right| \geq g_0 > 0, \\ \varphi(t), \varphi'(t) &\in L_\infty([0, T]), \quad \varphi(0) = \int_0^l u_0(x)\omega(x) dx. \end{aligned}$$

Then there exists a unique generalized solution  $\{u(t, x), p(t)\}$  of the inverse problem concerned, for which the estimates of stability with respect to variations of the functions  $\varphi(t), u_0(x), g(t, x), h(t, x)$  are valid.

The constants in the estimates are written out explicitly via input data of the inverse problem.

Our research is based essentially on the results on solvability of the direct problem for degenerate parabolic equations obtained in [1].

### References

1. S. N. Kruzhkov. Quasilinear parabolic equations and systems with two independent variables // Trudy Sem. Petrovsk. 1979. N 5. P. 217–272.

# КОРРЕКТНЫЕ ПОСТАНОВКИ ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В.В. Карачик

*Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия  
e-mail: karachik@susu.ru*

Б.Т. Торебек

*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан, e-mail: turebekb85@mail.ru*

**Аннотация.** В статье исследуется обобщенная третья краевая задача для однородного бигармонического уравнения в единичном шаре с граничными операторами до третьего порядка включительно. Доказана теорема существования.

**Ключевые слова:** бигармоническое уравнение, краевая задача, нормальные производные.

## CORRECT FORMULATION OF THE THIRD BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE BIHARMONIC EQUATION

V.V. Karachik, B.T. Torebek

**Abstract.** In this paper a generalized third boundary value problem for the homogeneous biharmonic equation in the unit ball with boundary operators up to third order is investigated. The existence theorem is proved.

**Key words:** biharmonic equation, boundary value problems, normal derivatives.

Установившиеся процессы различной физической природы часто описываются дифференциальными уравнениями эллиптического типа. Одним из важных частных случаев эллиптических уравнений четвертого порядка является бигармоническое уравнение. В последнее время стали активно изучать различные типы краевых задач для бигармонического уравнения такие как задача Дирихле [1-2], Рикье, Неймана [3-4], задача Робена и задачи с операторами дробного порядка [5].

В единичном шаре  $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$  рассмотрим следующую краевую задачу для бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u = f(x), \quad x \in S, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} a_{00}u + a_{01} \frac{\partial}{\partial \nu} u + a_{02} \Delta u \Big|_{\partial S} &= \varphi_1(s), \quad s \in \partial S, \\ a_{11} \frac{\partial}{\partial \nu} u + a_{12} \Delta u + a_{13} \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta u \Big|_{\partial S} &= \varphi_2(s), \quad s \in \partial S, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\frac{\partial}{\partial \nu}$  – внешняя нормальная производная, коэффициенты  $a_{0j}$  и  $a_{1j}$  при  $j = 1, 2, 3$  – действительные и постоянные, а  $f(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x)$  – заданные функции, гладкость которых будет указана ниже. Решением задачи (1)-(2) назовем бигармоническую в  $S$  функцию  $u(x)$  из класса  $u \in C^4(S) \cap C^3(\bar{S})$  удовлетворяющую на  $\partial S$  условиям (2).

Основной результат работы – теорема существования решения задачи (1)-(2) для однородного бигармонического уравнения, т.е. при  $f(x) = 0$ .

**Теорема.** *Решение задачи*

$$\Delta^2 u = 0, \quad x \in S, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} a_{00}u + a_{01} \frac{\partial}{\partial \nu} u + a_{02} \Delta u \Big|_{\partial S} &= \varphi_1(s), \quad x \in \partial S, \\ a_{11} \frac{\partial}{\partial \nu} u + a_{12} \Delta u + a_{13} \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta u \Big|_{\partial S} &= \varphi_2(s), \quad x \in \partial S \end{aligned} \quad (4)$$

из класса  $u \in C^3(\bar{S})$  при произвольных функциях  $\varphi_1 \in C^2(\partial S)$  и  $\varphi_2 \in C^1(\partial S)$  существует тогда и только тогда, когда полином вида

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{00} + a_{01}\lambda & 2a_{01} + (2n + 4\lambda)a_{02} \\ a_{11}\lambda & 2a_{11} + (2n + 4\lambda)a_{12} + \lambda(2n + 4\lambda)a_{13} \end{vmatrix}$$

не имеет корней в  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

**Пример.** Задача Рикье-Неймана: при  $a_{01} \neq 0$ ,  $a_{13} \neq 0$  (все остальные коэффициенты равны нулю) имеем

$$\Delta^2 u = 0, \quad x \in S; \quad a_{01} \frac{\partial}{\partial \nu} u \Big|_{\partial S} = \varphi_1(s), \quad a_{13} \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta u \Big|_{\partial S} = \varphi_2(s), \quad s \in \partial S.$$

Для этой задачи нетрудно вычислить, что

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{01}\lambda & 2a_{01} \\ 0 & \lambda(2n + 4\lambda)a_{13} \end{vmatrix} = \lambda^2(2n + 4\lambda)a_{01}a_{13}$$

и значит уравнение  $\Delta(\lambda) = 0$  имеет в  $\mathbb{N}_0$  единственное решение  $\lambda = 0$ . Можно показать, что условие существования решения этой задачи имеет вид

$$\int_{\partial S} \varphi_2(s) ds_x = 0.$$

### Литература

1. Карачик В.В. Решение задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре при полиномиальных данных // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, №8. С. 1038–1047.
2. Карачик В.В. Построение полиномиальных решений задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54, №7. С. 1149–1170.
3. Karachik V.V., Turmetov B.Kh., Beakaeva A. Solvability conditions of the Neumann boundary value problem for the biharmonic equation in the unit ball // International Journal of Pure and Applied Mathematics, 2012. V. 81, No 3. P. 487–495.
4. Карачик В.В. Условия разрешимости задачи Неймана для однородного полигармонического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, №11. С. 1455–1461.
5. Карачик В.В., Турметов Б.Х., Торбек Б.Т. О некоторых интегро-дифференциальных операторах в классе гармонических функций и их применении // Математические труды, 2011. Т.14, №1. С. 99–125.

# КОМПТОНОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ В ПОЗИТРОННОЙ ЭМИССИОННОЙ ТОМОГРАФИИ

И. Г. Казанцев\*

\* *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск 630090, просп. Акад. Лаврентьева 6  
e-mail: kazantsev.ivan6@gmail.com*

**Аннотация.** В работе рассматривается интегральная модель рассеяния фотонов в позитронной эмиссионной томографии. В идеализированных предположениях о геометрии регистрации данных выводится интегральное уравнение формирования данных с учетом однократного рассеяния.

*Ключевые слова:* томография, рассеяние фотонов, интегральная модель

Для распределения внутренних источников активности изотопа  $f(x, y, z)$  внутри среды с линейным коэффициентом ослабления  $\mu(x, y, z)$  и детекторов малых размеров  $A$  и  $B$ , интегральная модель позитронной эмиссионной томографии (ПЭТ) на первичных (не рассеянных) фотонах хорошо известна [1] и имеет вид:

$$P^{AB} = \exp \left[ - \int_A^B \mu(x', y', z') dl' \right] \int_A^B f(x, y, z) dl, \quad (1)$$

где  $dl, dl'$  – элементы длины на линии  $AB$ . Задача состоит в определении (реконструкции) активности изотопов  $f$  и носителя  $D(f)$  по данным  $P^{AB}$ , регистрируемым большим множеством пар детекторов  $(A, B)$ . В традиционной модели ПЭТ экспоненциальный множитель в (1) считается известным из данных предварительного сканирования (например, методами классической рентгеновской или магнитно-резонансной томографии). Физическая модель ПЭТ основана на использовании большого числа пар гамма-квантов  $(u, v)$ , разлетающихся приблизительно в противоположных направлениях из точек носителя функции  $f$  (Рис. 1 а) в результате столкновения позитрона, излучаемого радионуклидом  $f$ , с одним из электронов среды  $\mu$ . Данные детекторов  $P^{AB}$  корректируются и затем интерпретируются как интегралы от  $f$  по прямым линиям, в которых учитываются только первичные фотоны с энергией  $E = 511$  кэВ.

Однако на практике в детекторы попадают и фотоны  $v'$  с меньшими энергиями  $E' < E$ , претерпевшие комптоновское рассеяние (Рис. 1 б). В зависимости от разрешения детектора по энергии, в простейшем случае используется спектральное окно чувствительности  $[t, 511]$  с порогом  $t$  и фотоны с энергией вне окна в алгоритмах ПЭТ не учитываются. Для попавших в окно фотонов методами моделирования оценивается отношение числа первичных к рассеянным фотонам и данные масштабируются в соответствии с этим отношением, что принято называть коррекцией на рассеяние.

Из физических экспериментов известно, что в медицинских сканерах рассеянные фотоны составляют от 30 до 70 процентов общего числа регистрируемых фотонов, при этом однократно рассеянные (вторичные) фотоны составляют большинство (90-95 процентов) из всех многократно рассеянных фотонов. За последние два десятилетия достигнут прогресс в создании детекторов с достаточно высоким (до 2-3 процентов) разрешением по энергии. Поэтому актуальной становится задача не только коррекции, или отбрасывания рассеянных фотонов, но и использования

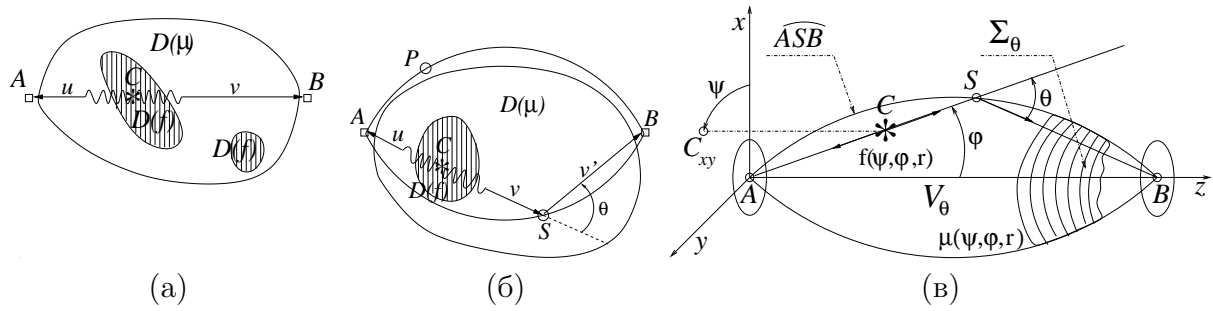


Рис. 1: Идеализированные модели позитронной эмиссионной томографии (ПЭТ). (а) ПЭТ на первичных фотонах  $(u, v)$  с энергией  $E = 511$  кэВ,  $C \in D(f)$  - точка аннигиляции. (б) ПЭТ на однократном комптоновском рассеянии;  $(u, v)$  - пара аннигиляционных фотонов,  $S \in D(\mu)$  - точка рассеяния,  $v'$  - фотон  $v$  энергии  $E'$ , рассеянный с углом  $\theta$ . Точка  $P$  геометрически является потенциальной точкой рассеяния с углом  $\theta$ , однако находится вне среды  $\mu$  ( $P \notin D(\mu)$ ,  $\mu(P) = 0$ ) и вклада в значения счетчика  $B$  не дает. (в) Поверхность  $\Sigma_\theta$  - геометрическое место точек  $S$  рассеяния с углом  $\theta$  и сферическими координатами  $(\psi, \varphi, |AS|)$ . Точка  $C_{xy}$  - проекция  $C$  на плоскость  $xAy$ ,  $\angle ASB = \pi - \theta$ .

их в алгоритмах восстановления активности  $f(x, y, z)$  внутренних источников. Для этого необходимо иметь инструмент моделирования регистрации потока рассеянных фотонов, подобный модели (1).

Из геометрии однократного рассеяния легко видеть (Рис. 1 в), что для всех точек рассеяния  $S$  с углом рассеяния  $\theta$  справедливо простое геометрическое свойство:  $\angle ASB = \pi - \theta$ . Тогда геометрическим местом точек, где происходит рассеяние с определенным углом  $\theta$ , является поверхность  $\Sigma_\theta$  тела вращения  $V_\theta$ , образованного вращением вокруг оси  $Z$  дуги  $\widehat{ASB}$  (Рис. 1). Тогда можно показать [2], что мгновенное количество фотонов, рассеянных с углом  $\theta$ , регистрируемых детектором  $B$  при условии, что в  $A$  попали первичные фотоны, описывается формулой

$$\xi_\theta^{AB} = \int_0^\theta d\varphi \frac{\cos \varphi \cos(\varphi - \theta)}{4\pi|AB|} \int_0^{2\pi} d\psi \frac{\mu(\psi, \varphi, |AS|)}{\sigma_C} \frac{\partial \sigma_C}{\partial \Omega} e^{-\left(\int_A^S \mu dl + \int_S^B \mu' dl\right)} \int_0^{|AS|} f(\psi, \varphi, r) dr, \quad (2)$$

где  $\frac{d\sigma_C}{d\Omega}$  - дифференциальное сечение комптоновского рассеяния, точка рассеяния  $S$  определяется в сферических координатах как  $(\psi, \varphi, |AS|)$ , расстояние от точки  $A$  до  $S$  есть  $|AS| = |AB| \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin \theta}$ ,  $\mu'$  - коэффициент ослабления после рассеяния.

Вданной работе выводятся частные виды преобразования (2). Приводятся результаты численных экспериментов.

Работа частично поддержана РФФИ (грант 13-07-00068).

## Литература

1. Терещенко С.А. Методы вычислительной томографии. М.: Физматлит, 2004.
2. Казанцев И.Г., Яровенко И.П., Прохоров И.В. Моделирование процесса измерения комптоновского рассеяния в позитронной эмиссионной томографии // Вычислительные технологии. 2011. Т. 16, N 6. С. 27–37.

## RECONSTRUCTION IN PHASELESS INVERSE SCATTERING PROBLEMS

Michael V. Klibanov

*Department of Mathematics and Statistics*

*University of North Carolina at Charlotte*

*Charlotte, NC 28223, USA*

*e-mail: [mklibanv@uncc.edu](mailto:mklibanv@uncc.edu)*

**Abstract.** The Phaseless Inverse Scattering Problems (PISPs) arise in applications to imaging of microstructures of sizes of the micron range of less ( $1 \text{ micron} = 1 \mu\text{m} = 10^{-6}\text{m}$ ). Only the intensity rather than the phase can be measured in these applications. Reconstruction formulas for PISPs will be presented [1,2]. In addition, numerical results will be shown.

If time will allow, then a new mathematical model for the Black-Scholes equation will be presented as well. This model enables one to forecast prices of stock options for 1-2 trading days via the solution of an ill-posed problem. The validity of this model is verified on real market data [3]. It is shown, on the examples of twenty randomly picked stock options, that this model enables one to make profit on the market of stock options.

[1] M.V. Klibanov and V.G. Romanov, Reconstruction procedures for two inverse scattering problems without the phase information, [www.arxiv.org](http://www.arxiv.org): 1505.01905v1, 2015.

[2] M.V. Klibanov and V.G. Romanov, Two reconstruction procedures for a 3-d phaseless inverse scattering problem for the generalized Helmholtz equation, [www.arxiv.org](http://www.arxiv.org): 1507.0275v1, 2015.

[3] M.V. Klibanov and A.V. Kuzhuget, Profitable forecast of prices of stock options on real market data via the solution of an ill-posed problem for the Black-Scholes equation, [www.arxiv.org](http://www.arxiv.org): 1503.03567, 2015.



# ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ КОШИ

М.М. Кокурин

Марийский государственный университет, Йошкар-Ола, Россия  
e-mail: kokurin@nextmail.ru

**Аннотация.** Устанавливаются полиномиальные оценки скорости сходимости некоторых классов разностных схем для некорректных задач Коши первого и второго порядка в гильбертовом пространстве.

*Ключевые слова:* Дифференциально-операторные уравнения, некорректные задачи, задача Коши, разностные схемы, скорость сходимости

## POLYNOMIAL ESTIMATES FOR THE CONVERGENCE RATE OF DIFFERENCE SCHEMES FOR ILL-POSED CAUCHY PROBLEMS

**Abstract.** We obtain polynomial estimates for the convergence rate of some classes of difference schemes for ill-posed Cauchy problems of the first and of the second order in Hilbert spaces.

*Key words:* Differential operator equations, ill-posed problems, Cauchy problem, difference schemes, rate of convergence

Изучаются некорректные задачи Коши для дифференциально-операторных уравнений следующего вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = f \in D(A); \quad (1)$$

$$\ddot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = f \in D(A), \quad \dot{x}(0) = 0; \quad (2)$$

$$\ddot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = f. \quad (3)$$

Здесь  $A : H \rightarrow H$  — неограниченный, плотно определенный, самосопряженный линейный оператор в гильбертовом пространстве  $H$  со спектром  $\sigma(A) \in [a, +\infty)$ ,  $a > 0$ . Для каждой из задач (1)–(3) ставится вопрос о дискретной аппроксимации классического решения  $x : [0, T] \rightarrow H$  на отрезке  $[0, T]$ , причем существование этого решения предполагается. Известно, что каждая из задач (1)–(3) не может иметь более одного классического решения.

Для решения задачи (1) предлагается класс одношаговых разностных схем с параметром  $\beta > 0$ , имеющих порядок аппроксимации  $m = 1$ :

$$-x_n + x_{n+1} = \Delta t A((1 + \beta)x_n - \beta x_{n+1}), \quad 0 \leq n \leq N - 1, \quad x_0 = f. \quad (4)$$

Кроме того, рассматривается класс двушаговых разностных схем с параметрами  $\gamma_1 \in (1, 2)$ ,  $\gamma_2 < \gamma_1$  для задачи (1), имеющих порядок аппроксимации  $m = 2$ :

$$\begin{aligned} (-2\gamma_1 + 3)x_n + (2\gamma_1 - 4)x_{n+1} + x_{n+2} = \Delta t A((\gamma_2 - 2)x_n + (3\gamma_1 - 2\gamma_2)x_{n+1} + \\ + (\gamma_2 - \gamma_1)x_{n+2}), \quad 0 \leq n \leq N - 2, \quad x_0 = f, \quad x_1 = 2f - (E + \Delta t A)^{-1}f. \end{aligned} \quad (5)$$

Для решения задачи (2) предлагается класс двушаговых разностных схем с параметром  $\beta > 0$ , имеющих порядок аппроксимации  $m = 2$ :

$$x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2} = (\Delta t)^2 A(-\beta x_n + (1 + 2\beta)x_{n+1} - \beta x_{n+2}), \quad 0 \leq n \leq N - 2. \quad (6)$$

Начальные элементы  $x_0, x_1$  в (6) выбираются по формулам

$$x_0 = f, \quad x_1 = (E + 3/2(\Delta t)^2 A)(E + (\Delta t)^2 A)^{-1} f. \quad (7)$$

Наконец, для решения задачи (3) предлагается класс схем (6) с начальными элементами

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \Delta t f. \quad (8)$$

В формулах (4)–(8)  $\Delta t = T/N$  есть шаг дискретизации,  $x_n \in H$  — приближение к значению  $x(n\Delta t)$  искомой функции  $x(t)$  в  $n$ -м узле дискретизации,  $E$  — единичный оператор в  $H$ .

Если  $x(t)$  — классическое решение одной из задач (1)–(3), то элемент  $x(T)$  допускает истокообразное представление  $x(T) = A^{-p}w$  с некоторым  $p \geq 1$ ,  $w \in H$ . Следующие теоремы устанавливают степенные оценки скорости сходимости схем (4)–(6) в зависимости от показателя истокопредставимости  $p$  соответствующего решения.

**Теорема 1.** *Для разностных схем (4) решения задачи (1) справедлива оценка скорости сходимости*

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leq \begin{cases} C_1(\Delta t)^{p/2}, & 1 \leq p < 2 \\ C_1\Delta t, & p \geq 2 \end{cases}, \quad 0 \leq n \leq N, \quad C_1 = C_1(p).$$

**Теорема 2.** *Для разностных схем (5) решения задачи (1) справедлива оценка скорости сходимости*

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leq \begin{cases} C_2(\Delta t)^{2p/3}, & 1 \leq p < 3 \\ C_2(\Delta t)^2, & p \geq 3 \end{cases}, \quad 0 \leq n \leq N, \quad C_2 = C_2(p).$$

**Теорема 3.** *Для схем (6), (7) решения задачи (2) и для схем (6), (8) решения задачи (3) справедлива оценка скорости сходимости*

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leq \begin{cases} C_3(\Delta t)^{4p/3}, & 1 \leq p < 3/2 \\ C_3(\Delta t)^2, & p \geq 3/2 \end{cases}, \quad 0 \leq n \leq N, \quad C_3 = C_3(p).$$

В теоремах 1–3 предполагается, что элемент  $f$  в задачах (1)–(3) задан точно. Однако было установлено, что разностные схемы (4)–(6) можно применять и в случае приближенно заданных входных данных, и при надлежащем согласовании шага дискретизации  $\Delta t$  с уровнем погрешности элемента  $f$  эти схемы дают регуляризующие алгоритмы для некорректных задач (1)–(3). Кроме того, доказаны теоремы, обратные к теоремам 1–3: они устанавливают необходимые условия степенной сходимости схем (4)–(6) с показателем степени  $q$  в терминах показателя  $p$  истокопредставимости искомого решения. Наконец, получены обобщения теорем 1–3 и обратных к ним для некорректных задач Коши в банаховом пространстве.

## Литература

1. Кокурин М.М. Об оптимизации оценок скорости сходимости некоторых классов разностных схем решения некорректной задачи Коши // Вычислительные методы и программирование. 2013. Т.14. С.58–76.
2. Кокурин М.М. Разностные схемы решения задачи Коши для линейного дифференциально-операторного уравнения второго порядка // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т.54, N 4. С.569–584.

# УСТОЙЧИВЫЙ ГРАДИЕНТНО–ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УСЛОВНО–КОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

М.Ю. Кокурин

Марийский государственный университет, Йошкар–Ола, Россия

e-mail: kokurim@yandex.ru

**Аннотация.** В статье описывается класс нелинейных условно–корректных задач, для которых возможно построение устойчивых итерационных процессов на основе применения классических процедур минимизации в схеме квазирешений.

*Ключевые слова:* некорректные задачи, условно–корректные задачи, итерационные методы, метод проекции градиента, сходимость, устойчивость

## STABLE GRADIENT PROJECTION METHOD FOR NONLINEAR CONDITIONALLY WELL–POSED PROBLEMS

**Abstract.** In this paper we describe a class of nonlinear conditionally well–posed problems for which it is possible to construct stable iterative processes with the use of classical minimization procedures in the quasisolution scheme.

*Key words:* ill–posed problems, conditionally well–posed problems, iterative methods, gradient projection method, convergence, stability

Рассматриваются нелинейные обратные задачи

$$F(u) = f, \quad u \in D, \quad (1)$$

где  $F : H_1 \rightarrow H_2$  — дифференцируемый по Фреше оператор с липшиц–непрерывной производной, вместо элемента  $f \in H_2$  доступно его приближение  $\tilde{f}$ ,  $\|\tilde{f} - f\|_{H_2} \leq \delta$ . Предполагается, что оператор  $F$  инъективен на выпуклом замкнутом ограниченном множестве  $D$ , содержащем искомое решение  $u^*$ . Пусть для  $1 \leq p \leq 2$  выполняется гельдеровская оценка условной устойчивости

$$\|F(u) - F(u^*)\|_{H_2} \geq m \|u - u^*\|_{H_1}^p \quad \forall u \in D \quad (m = m(p) > 0). \quad (2)$$

Рассмотрим метод проекции градиента

$$u_{n+1} = P_D(u_n - \rho \tilde{J}'(u_n)), \quad u_0 \in D, \quad \rho > 0$$

для минимизации на  $D$  функционала невязки

$$\tilde{J}(u) = \|F(u) - \tilde{f}\|_{H_2}^2; \quad u \in D.$$

**Теорема 1.** Пусть в условии (2)  $p = 1$ . Тогда в случае достаточно малых  $\rho$ ,  $\delta$ ,  $\|u_0 - u^*\|_{H_1}$  выполняются соотношения

$$\|u_n - u^*\|_{H_1}^2 \leq C_1 \delta^2 + \|u_0 - u^*\|_{H_1}^2 \left(1 - \frac{1}{2} C_2 \rho\right)^n, \quad n = 0, 1, \dots; \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u^*\|_{H_1} \leq C_1 \delta. \quad (3)$$

**Теорема 2.** Пусть в условии (2)  $1 < p \leq 2$ . Тогда в случае достаточно малых  $\rho$ ,  $\delta$ ,  $\|u_0 - u^*\|_{H_1}$  выполняется

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u^*\|_{H_1} \leq C_3 \delta^{1/p}. \quad (4)$$

Кроме того, справедлива оценка

$$\|u_n - u^*\|_{H_1} \leq \max \left\{ \frac{\|u_0 - u^*\|_{H_1}}{[1 + C_4(p-1)\|u_0 - u^*\|_{H_1}^{2p-2} \rho n]^{1/(2p-2)}}, C_5 \delta^{1/p} \right\}.$$

Оценки (3), (4) неуклучшаемы по порядку на классе задач (1), удовлетворяющих условию (2). При сделанных предположениях функционал  $\tilde{J}$  в общем случае многоэкстремален на  $D$ . Если множество  $D$  компактно, то в условиях теорем 1, 2 выполняется  $\tilde{J}(u_{n+1}) \leq \tilde{J}(u_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , последовательность  $\{u_n\}$  имеет предельные точки и каждая такая точка  $\tilde{u}^*$  удовлетворяет необходимому условию минимума в задаче  $\min\{\tilde{J}(u) : u \in D\}$  и кроме того

$$\|\tilde{u}^* - u^*\|_{H_1} \leq C_6 \delta^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq 2.$$

## РЕКОНСТРУКЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ЛАВОВОГО ПОТОКА ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПОТОКА НА ЕГО ДНЕВНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

А.И. Короткий<sup>1,2</sup>, Д.А. Ковтунов<sup>1,2</sup>, А.Т. Исмаил-Заде<sup>2</sup>, О.Э. Мельник<sup>2,3</sup>, И.А. Цепелев<sup>1,2</sup>  
<sup>1</sup>Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,

Екатеринбург, Россия

<sup>2</sup>Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН,  
Москва, Россия

<sup>3</sup>Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова,  
Москва, Россия

E-mail: korotkii@imm.uran.ru, dmitry.kovtunov@gmail.com, aismail@mitp.ru,  
melnik@imec.msu.ru, tsepelev@imm.uran.ru

**Аннотация.** В статье рассматривается задача об определении распределения температуры и скорости внутри лавового потока по измерениям некоторых физических параметров лавы на поверхности потока. Задача формализуется как обратная граничная задача для модели динамики вязкой теплопроводной несжимаемой неоднородной жидкости. Задача является некорректно поставленной. Разработаны методы, алгоритмы и программные средства решения этой задачи в стационарном случае.

*Ключевые слова:* поток лавы, вязкая жидкость, обратная граничная задача, некорректная задача, метод Тихонова, численное моделирование.

## RECONSTRUCTION OF VOLCANIC LAVA PROPERTIES BASED ON MEASUREMENTS OF SOME PHYSICAL PARAMETERS ON DAILY SURFACE OF LAVA FLOW

**Abstract.** We consider a problem of volcanic lava flow to determine the temperature and velocity distributions from the measurement on the surface of the lava. Mathematically this problem is reduced to an inverse boundary problem for viscous incompressible heterogeneous heat-conducting fluid flow. This problem is ill-posed. We have developed methods and solution algorithms for this problem and considered the case of steady-state flow.

*Key words:* lava flow, viscous fluid, boundary inverse problem, ill-posed problem, Tikhonov method, numerical simulation.

Опишем кратко один из вариантов задачи, решение которого основано на методе Тихонова [1]. Математическая модель установившегося движения жидкости в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  с границей  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$  (см. рис.) представлена уравнениями [2]

$$\nabla \cdot (\mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)) = \nabla p - Ra T \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot (\kappa \nabla T) = \langle \mathbf{u}, \nabla T \rangle, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3)$$

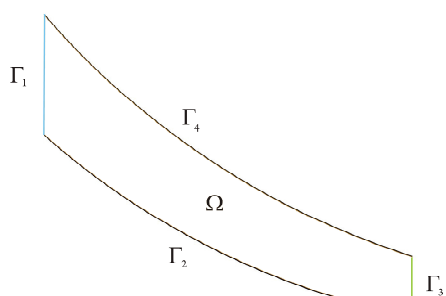


Рис. Область  $\Omega$  и ее граница  $\Gamma$ .

где  $\Omega \ni \mathbf{x}$  – точка пространства с декартовыми координатами  $(x_1, x_2)$ ;  $\mathbf{u} = (u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}))$  – вектор скорости движения жидкости;  $p = p(\mathbf{x})$  – давление;  $T = T(\mathbf{x})$  – температура;  $Ra$  – число Рэлея;  $\mu = \mu(T)$  – вязкость;  $\kappa = \kappa(T)$  – коэффициент температуропроводности. На границе  $\Gamma$  области  $\Omega$  заданы граничные условия

$$\Gamma_1: T = T_1, \mathbf{u} = \mathbf{u}_1; \quad \Gamma_2: \mathbf{u} = \mathbf{0}; \quad \Gamma_3: T = T_3, \mu \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - p \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (\boldsymbol{\sigma} \equiv \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T); \quad (4)$$

$$\Gamma_4: T = T_4, \kappa \langle \nabla T, \mathbf{n} \rangle = \varphi, \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle = 0, \boldsymbol{\sigma}_\tau \mathbf{n} \equiv \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \langle \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (5)$$

**Задача.** Найти решение  $(T, \mathbf{u}, p)$  краевой задачи (1)–(5) в области  $\Omega$ , а также найти распределение температуры на границе  $\Gamma_2$  и слой корки остывающей лавы под границей  $\Gamma_4$  (он определяется по пороговым значениям температуры и вязкости).

Задача сводится к минимизации регуляризованного функционала невязки

$$J_\alpha(v) = \left\| \kappa(T_v) (\partial T_v / \partial \mathbf{n}) - \varphi \right\|_{L_2(\Gamma_4)}^2 + \alpha \left\| v \right\|_{L_2(\Gamma_2)}^2 \rightarrow \min : v \in V, \quad (6)$$

где  $V$  – некоторое подмножество допустимых элементов  $v \in L_2(\Gamma_2)$ ,  $(T_v, \mathbf{u}_v, p_v)$  – решение краевой задачи (1)–(3) с граничными условиями

$$\Gamma_1: T = T_1, \mathbf{u} = \mathbf{u}_1; \quad \Gamma_2: T = v, \mathbf{u} = \mathbf{0}; \quad \Gamma_3: T = T_3, \mu \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - p \mathbf{n} = \mathbf{0}; \quad (7)$$

$$\Gamma_4: T = T_4, \boldsymbol{\sigma}_\tau \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \langle \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (8)$$

Функционал (6) минимизируется каким-либо подходящим методом, например, методом сопряженных градиентов или каким-нибудь из квазиьютоновских методов [3]. Параметр  $\alpha$  находится квазиоптимальным методом в результате решения соответствующей одномерной задачи минимизации.

Градиент целевого функционала

$$\nabla J_\alpha(v) = (\kappa(T_v) (\partial z / \partial \mathbf{n}) + 2\alpha v) \Big|_{\Gamma_2}$$

находится из решения сопряженной краевой задачи

$$\nabla \cdot (\mu(T_v) (\nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^T)) = \nabla q + z \nabla T_v, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$\nabla \cdot (\kappa(T_v) \nabla z) + \langle \mathbf{u}_v - \kappa'(T_v) \nabla T_v, \nabla z \rangle = \mu'(T_v) [(\nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^T), \nabla \mathbf{u}_v] - Ra \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{w} \rangle, \quad \mathbf{x} \in \Omega;$$

$$\Gamma_1: z = 0, \mathbf{w} = \mathbf{0}; \quad \Gamma_2: z = 0, \mathbf{w} = \mathbf{0}; \quad \Gamma_3: z = 0, \mu \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n} - q \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^T);$$

$$\Gamma_4: z = 2(\kappa(T_v) (\partial T_v / \partial \mathbf{n}) - \varphi), \langle \mathbf{w}, \mathbf{n} \rangle = 0, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_\tau \mathbf{n} = \mathbf{0}.$$

Минимизирующий элемент  $v = v_*$  в задаче (6) дает приближение к искомому распределению температуры на границе  $\Gamma_2$ , решение краевой задачи (1)–(3), (7)–(8) при  $v = v_*$  дает приближение к искомому решению  $(T, \mathbf{u}, p)$  краевой задачи (1)–(5), затем, по пороговым значениям температуры и вязкости определяется слой корки в области  $\Omega$ .

В соответствии с предложенным способом решения задачи проведены серии вычислительных экспериментов, показавших работоспособность метода и алгоритмов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекта № 14-17-00520).

### Литература

1. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995. 212 с.
2. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. N.Y.: Dover Publications, 1981. 656 p.
3. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.

## Fast processing of the tomographic data.

Nikolay Koshev.

ICMC USP, Sao Carlos, SP, Brazil.

e-mail: nikolay.koshev@gmail.com

**Abstract.** Tomographic imaging is a very powerful instrument of non-destructive research and control of the internal structure on non-opaque objects. An important branch of tomographic techniques is *transmission tomography*, which can be used at nano, micro and macro resolution levels.

Physically, all types of transmission tomography are based on registering the energy loss or/and intensity loss of the incoming electromagnetic wave (X-rays for instance), after passing through the object under investigation also referred here as *sample*). In our case, we consider that X-rays generated from a synchrotron light source hit the object under investigation determining a projection image (also referred as *frame*) at a CCD (charge coupled device) camera.

We consider the *feature function*, i.e. the function, which represents the internal structure of the object in the plane of the given slice, and the *sinogram* - the output signal of the tomographic device. In case of the tomography in parallel rays the feature function is connected with the sinogram via well-known *Radon transform* operator (see [1]):

$$\mathcal{R}: U \mapsto V : g(\theta, t) \equiv \mathcal{R}f = \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}_\theta - t)d\mathbf{x}, \quad (1)$$

where  $U, V$  are the Hilbert spaces,  $\boldsymbol{\xi}_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)^T$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ . The adjoint operator  $\mathcal{B}: V \rightarrow U$  defined as

$$b(\mathbf{x}) = \mathcal{B}g(\mathbf{x}) = \int_{[0, \pi]} g(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}_\theta, \theta)d\theta, \quad (2)$$

Since the Radon transform is well-known for a long time, a big number of reconstruction algorithms have been developed. Unfortunately, most of them has sufficient disadvantages and the work on developing new methods is still actual. One of the most noticeable disadvantages of known algorithms is big computational complexity.

We consider two fast methods to obtain the backprojection/reconstruction of the feature functions from the sinograms. The first one, called *Andersson's formula* (see [2]) is based on representation of the backprojection as a convolution in Log-Polar coordinates, which allows us, after all necessary preparation, use the Fast Fourier Transform techniques on uniform meshes.

The second approach was developed by authors, we call the *Backprojection Slice Theorem* (BST) [3], is related to the well-known Fourier Slice Theorem, but provides the backprojection instead of the reconstruction. This approach based on uniform convolution in curvilinear coordinates and the Hilbert transform, and gives the possibility to work in polar coordinates (i.e. the natural coordinates, in which we have sinogram) instead of Log-Polar, which reduces both calculation time and the interpolation error.

Both algorithms can dramatically reduce the calculation time and computational needs due to the fact, that the calculation complexities of them are closed to the complexity of the uniform convolution. We present the comparison of performance of both algorithms with other popular algorithms of sinogram reconstruction on Fig.1. Due to high performance, these algorithms can give us two main possibilities:

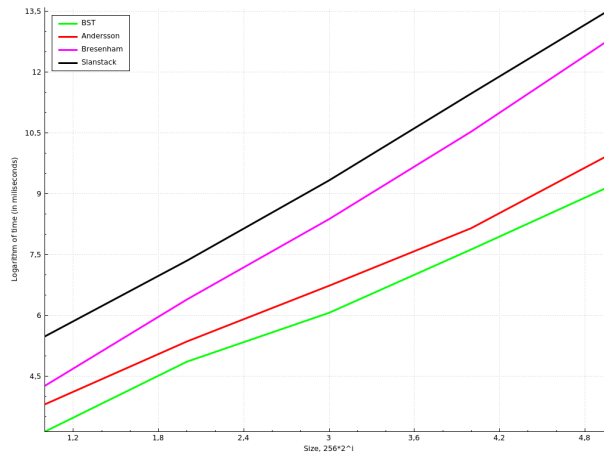


Рис. 1: Comparison of calculation time of size dependence for two considered approaches.

- Reconstruction of big science datasets (with resolution over 64 megapixels). Both algorithms are easily can be parallelized with usage of MPI techniques for clusters or GPU+CPU systems.
- The developed algorithms can be used in the development of new iterative methods of the sinogram reconstruction. These algorithms can provide better images than analytical techniques because they allow for improved modeling of the sensor, the photon emission phenomenon, among others issues such as beam-hardening. Furthermore, iterative methods can successfully reconstruct images from data acquired under less-than-ideal circumstances such as when the sample does not fit the scanner field-of-view or when sparse or limited angular sampling is required.

*Key words:* Inverse problems, ill-posed problems, tomographical imaging, signal processing

## Bibliography

1. A. C. Kak and Malcolm Slaney, Principles of Computerized Tomographic Imaging, IEEE Press, 1988.
2. F.Andersson, Fast inversion of the Radon transform using Log-Polar coordinates and Partial back-projections, SIAM, J.Appl. Math, Vol.65, No.3, 2005, p. 818-837
3. Miqueles E.X. and Helou E.S, Fast Backprojection Operator for Synchrotron Tomographic Data, Accepted for publication, European Conference on Mathematics for Industry, Taormina, Italy, 2014



# ВОССТАНОВЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПРИ $U_t$ В УРАВНЕНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПО УСЛОВИЮ НЕЛОКАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ

А. Б. Костин

*Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Россия, Москва  
e-mail: abkostin@yandex.ru*

**Аннотация.** Ищется коэффициент  $\rho(x) = \rho_0 + r(x)$  перед  $u_t$  в уравнении теплопроводности. Помимо начальных и граничных условий задаётся условие наблюдения в виде  $\int_0^T u(x, t) d\mu(t) = \chi(x)$  с известной мерой  $d\mu(t)$  и функцией  $\chi(x)$ . Получены достаточные условия существования и единственности решения обратной задачи.

*Ключевые слова:* коэффициентные обратные задачи, обратная задача для уравнения теплопроводности, нелокальное наблюдение (или переопределение).

## RECOVERY OF THE COEFFICIENT OF $U_t$ IN THE HEAT EQUATION FROM A CONDITION OF NONLOCAL OBSERVATION

**Abstract.** The inverse problem of finding the coefficient  $\rho(x) = \rho_0 + r(x)$  multiplying  $u_t$  in the heat equation is studied. In addition to the initial and boundary conditions, a nonlocal condition is specified in the form  $\int_0^T u(x, t) d\mu(t) = \chi(x)$  with a given measure  $d\mu(t)$  and a function  $\chi(x)$ . Sufficient conditions for the existence and uniqueness of a solution to the inverse problem are obtained.

*Keywords:* coefficient inverse problems, inverse problem for the heat equation, nonlocal observation (or overdetermination) condition.

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  – ограниченная область с границей  $\partial\Omega \in C^2$ . В цилиндре  $Q = \Omega \times (0, T)$  с боковой поверхностью  $S = \partial\Omega \times [0, T]$  рассмотрим задачу о нахождении пары функций  $\{u(x, t); r(x)\}$  из следующих условий

$$(1 + r(x))u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = g(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad u(x, t) = \beta(x, t), \quad (x, t) \in S, \quad (2)$$

$$l(u) \equiv \int_0^T u(x, t) d\mu(t) = \chi(x), \quad x \in \Omega. \quad (3)$$

Здесь функции  $g, u_0, \beta, \mu, \chi$  заданы,  $\Delta$  оператор Лапласа. Обозначим  $u^0(x, t)$  решение прямой задачи (1), (2) с  $r(x) \equiv 0$ . Ограничения на заданные функции называются более слабыми в случае  $d\mu(t) = \omega(t)dt$ , поэтому случаи интегрального наблюдения и общего переопределения (3) с функцией  $\mu \in BV[0, T]$  рассматриваются отдельно. В последнем случае интеграл в условии (3) понимается как интеграл Римана-Стилтьеса.

Ограничимся здесь случаем интегрального наблюдения, т.е.  $d\mu(t) = \omega(t)dt$  в (3), при этом будем предполагать выполненными следующие условия

$$(A) \quad \begin{aligned} &g, g_t \in L_\infty(Q); \quad \Delta u_0, \Delta \chi \in L_\infty(\Omega); \quad \exists \Phi(x, t) : \Phi, \Phi_t \in W_\infty^{2,1}(Q), \text{ причём} \\ &\text{выполнены условия: } \Phi(x, 0) = u_0(x) \text{ в } \Omega, \quad \Phi(x, t) = \beta(x, t) \text{ на } S; \\ &\omega \in C^1[0, T], \quad l(1) \equiv \int_0^T \omega(t)dt = 1. \\ &u_0(x) = \beta(x, 0), \quad l(\beta)(x) = \chi(x), \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

При выполнении условий (A) для любого  $r \in L_\infty(\Omega), r(x) \geq 0$  решение прямой задачи (1), (2) принадлежит  $W_p^{2,1}(Q)$  с  $p \geq n + 1$ , по теореме вложения  $u \in C(\bar{Q})$ .

**Определение 1.** Пару функций  $u \in W_p^{2,1}(Q)$  (с  $p \geq n + 1$ ) и  $r \in L_\infty(\Omega)$ ,  $r(x) \geq 0$  в  $\Omega$  назовем решением обратной задачи (1)–(3), если эти функции удовлетворяют уравнению (1) п.в. в  $Q$ , а условиям (2), (3) в классическом смысле (по непрерывности).

Важную роль в разрешимости обратной задачи играют константы

$$\beta_0 = \min_S \{\beta_t(x, t)\}, \quad \varkappa_0 = \operatorname{ess\,inf}_\Omega \{\Delta u_0(x) + g(x, 0)\},$$

$$\varkappa_1 = \operatorname{ess\,sup}_\Omega \{\Delta \chi(x) + l(g)(x)\},$$

а также неравенства

$$g \geq 0, \quad g_t \geq 0 \text{ в } Q; \quad u_0 \geq 0 \text{ в } \Omega; \quad \beta \geq 0, \quad \beta_t \geq 0 \text{ на } S; \quad \omega \geq 0, \quad \omega' \leq 0 \text{ на } [0, T]; \quad (4)$$

$$\beta_0 > 0, \quad \varkappa_0 > 0, \quad \varkappa_1 \leq \varkappa_0. \quad (5)$$

**Теорема 1.** Пусть выполнено условие (A), неравенства (4), (5) и

$$\Delta[l(u^0) - \chi](x) \leq 0 \text{ в } \Omega.$$

Тогда существует и притом единственная пара  $\{u; r\}$  – решение обратной задачи (1)–(3), причём  $u(x, t)$  обладает следующими свойствами дополнительной гладкости

$$u_t \in C([0, T]; L_p(\Omega)), \quad u \in C([0, T]; W_p^2(\Omega)) \text{ при } p \geq n + 1,$$

а функция  $r(x) \geq 0$  удовлетворяет оценке  $r(x) \leq M = \max\{0, \varkappa_0/\beta_0 - 1\}$ .

Для случая общего наблюдения, т.е. когда про функцию  $\mu(t)$  известно лишь, что  $\mu \in BV[0, T]$ , также получены достаточные условия разрешимости и единственности. Результаты опубликованы в работе [1], получено обобщение на случай параболического уравнения с коэффициентами, зависящими от  $x$  и  $t$ . Доказательство опирается на теорему единственности решения линейной задачи из [2] и на теорию монотонных операторов. Нелокальное условие вида (3) впервые в обратных задачах появилось в работе [3], оно включает в себя финальное и интегральное наблюдение. Отмечу также работы [4–6], где рассматривались отдельные частные случаи.

### Литература

1. Костин А. Б. Восстановление коэффициента перед  $u_t$  в уравнении теплопроводности по условию нелокального наблюдения по времени // Журнал вычислит. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 1. С. 89 – 104.
2. Костин А. Б. Обратная задача восстановления источника в параболическом уравнении по условию нелокального наблюдения // Матем. сб. 2013. Т. 204, № 10. С. 3 – 46.
3. Прилепко А. И., Тихонов И. В. Восстановление неоднородного слагаемого в абстрактном эволюционном уравнении // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58, № 2. С. 167–188.
4. Isakov V.M. Inverse problems for partial differential equations. Springer. New York. 2006.
5. Прилепко А. И., Костин А. Б. Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении II // Сиб. матем. журн. 1993. Т. 34, № 5. С. 147–162.
6. Камынин В. Л., Костин А. Б. Две обратные задачи определения коэффициента в параболическом уравнении // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 3. С. 372–383.

## СХОДИМОСТЬ СИСТЕМ С РЕГУЛЯРИЗОВАННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ЛОКАЛЬНО ДОПУСТИМЫХ УПРАВЛЕНИЙ

В.Н. Козлов, А.А. Ефремов

Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого,  
Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: saiu@ftk.spbstu.ru

**Аннотация.** Рассматривается сходимость и регуляризация систем с проекционными алгоритмами локально допустимых управлений для динамических объектов.

*Ключевые слова:* динамический объект, проекционный метод, регуляризация и сходимость, ограничения на координаты и управления.

## CONVERGENCE OF SYSTEMS WITH REGULARIZED OPERATIONS OF LOCALLY VALID CONTROL IMPACTS

**Abstract.** Convergence of regularization of projection algorithms for synthesis of locally valid control impacts for dynamic object is introduced.

*Key words:* dynamic object, projection algorithms, convergence of regularizations, valid control impacts.

Рассматривается функциональная регуляризация и сходимость дискретной системы автоматического управления с локально допустимыми управлениями (ЛДУ), учитывающими смешанные ограничения на координаты и управления, которые синтезированы на основе проекционных операторов [1]

$$\begin{aligned} X_{k*} &= P_A b_k + (1 - 2\theta_k) \tilde{P}^0 C \tilde{\sigma}_k, \\ \theta_{k*} &= p(\theta_k) = (|\theta_k| - |\theta_k - 1| + 1) / 2 \in [0, 1], \quad \theta_k = (1 - \tilde{\sigma}_k^{-1}) / 2, \\ \tilde{\sigma}_k &= |\alpha_k / \rho|^{1/2}, \quad \alpha_k = r^2 - b_k^T (A A^T)^{-1} b_k \geq 0, \quad \rho = C^T \tilde{P}^0 C > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Исследованы условия сходимости разностных операторов динамических систем в евклидовом пространстве состояний с регуляризацией. Результат сформулирован в утверждении.

**Утверждение.** Пусть выполнены условия:

1. Разностный оператор системы локально допустимых управлений с оператором (1) имеет вид

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= G(x_k, p_k) = Hx_k + F_u u_{k,*}(x_k) = \\ &= Hx_k + F_u \Gamma T \left[ P_A Hx_k + (1 - 2\theta_{k*}) |\sigma|^{1/2} \tilde{P}^0 C \right], \quad x_{k0} = x^0, \end{aligned} \quad (2)$$

а регуляризованный проекционный оператор ЛДУ задан с учетом представления (1) следующими соотношениями

$$\theta_{k^*} = p(\theta_{k_0}) = (|\theta_{k_0}| - |\theta_{k_0} - 1| + 1)/2 \in [0, 1], \quad \theta_{k_0} = (1 - \tilde{\sigma}_k^{-1})/2, \quad \tilde{\sigma}_k = |\alpha_k / \rho|^{1/2},$$

$$|\tilde{\sigma}|^{1/2} = \alpha_k(x_k) \rho^{-1}, \quad \alpha(x_k) = \sqrt{r^2 - \varphi(\|P_A b_k^1\|^2)}, \quad b_k^1 = Hx_k, \quad \rho = C^T \tilde{P}^0 C \neq 0,$$

$$\varphi(q) = 0,5 \left( |q - \varepsilon^2| - |q - r_1^2| + \varepsilon^2 + r_1^2 \right), \quad q \in \mathbb{R}^1.$$

2. Состояния объекта управления в (2) являются управляемыми по Р. Калману и достижимы при регуляризирующих параметрах операторов в (1) и (2) при учете смешанных ограничений на координаты и управления

$$\alpha_k = \alpha(x_k) = r^2 - \varphi(\|P_A b_k^1\|^2) > 0,$$

$$b_k^1 = Hx_k, \quad P_A^T P_A = (AA^T)^{-1}, \quad \|x_k\| \leq r_1 = r(\|P_A\| \cdot \|H\|)^{-1}.$$

3. Область определения регуляризованного нелинейного оператора локально допустимых управлений определяется условиями совместности

$$\alpha_k = r^2 - \varphi(b_k^T P_A^T P_A b_k^1) > 0, \quad b_k^1 = Hx_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

которые гарантированно выполнены в силу предлагаемой регуляризации.

4. Счетное семейство разностных операторов системы ЛДУ типа (2) имеет начальные условия  $x_{k_0} = \bar{x}^0 \in T$ , принадлежащие шару  $T \subset R^n$ , имеющему центр в начале координат.

Тогда условия сжатия для оператора замкнутой системы автоматического управления (2) принимают вид

$$\alpha = \|H\| + \|F_u\| \cdot \|\Gamma\| \cdot \|T\| \left\langle \|P_A\| \cdot \|H\| + 2L_p L_\varphi r_1 \rho^{-1} \|P_A\|^2 \cdot \|H\|^2 \|\tilde{P}^0 C\| \right\rangle < 1. \quad (3)$$

Приводится доказательство условий сходимости оператора (2) в виде (3), сформулированные в евклидовом пространстве на основе принципа сжимающих отображений. Из этих условий следует ограничение на спектральную норму оператора обратной связи, дополняющее условия сжатия, полученные в [1, 2].

## Литература

1. Козлов В.Н. Негладкие системы, операторы оптимизации и устойчивость. Изд-во Петерб. Политехн. ун-та. СПб.: 2012. 195 с.
2. Козлов В.Н. О сжимающих свойствах операторов систем с проекционными локально оптимальными методами управления // Материалы международной конференции «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения -V» в г. Ростове-на-Дону. Издательский центр ДГТУ, Ростов н/Д. 2015.— 211 с. ISBN: 978-5-7890-101-6.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

В.Н. Кризский, М.Б. Беляева, С.В. Викторов, А.Р. Нафикова, Л.З. Султанов

*Башкирский государственный университет, Уфа, Россия*

*e-mail: Krizsky@rambler.ru*

**Аннотация.** Предложены алгоритмы решения прямых и обратных задач математической геофизики в кусочно-постоянных анизотропных средах. Обсуждаются результаты численной реализации для задач геоэлектрики, диффузии-адвекции радона.

*Ключевые слова:* кусочно-постоянная анизотропная среда, квазифрактальное включение, прямая и обратная задача, геоэлектрика, диффузия-адвекция радона.

## MATHEMATICAL MODELLING OF GEOPHYSICAL FIELDS IN PIECEWISE CONSTANT ANISOTROPIC MEDIA

**Abstract.** Algorithms for solving direct and inverse problems of mathematical geophysics in piecewise constant anisotropic media were offered. Results of calculations for geoelectric problems and radon diffusion-advection were discussed.

*Key words:* piecewise constant anisotropic media, quasi-fractal inclusion, direct and inverse problem, geoelectric problem, radon diffusion-advection.

Рассмотрен класс математических моделей, представляемых краевыми задачами математической физики, описывающих различные по своей природе нестационарные и стационарные физические поля в кусочно-постоянных анизотропных средах с симметричными тензорами анизотропии среды в подобластях.

Представлены алгоритмы решения прямых стационарных и нестационарных задач, основанные на методах интегральных преобразований, интегральных представлений и граничных интегральных уравнений [1,2]. Алгоритмы позволяют строить рекурсивные процедуры понижения геометрической сложности среды. Показана возможность использования алгоритма для задач смешанного типа.

Единство подхода к решению различных по типу задач и возможность распараллеливания процесса вычисления формул позволяют строить единый программный комплекс для многопроцессорных вычислительных систем и кластеров.

Предложенные алгоритмы генерации полей использованы при решении обратных граничных задач в вариационных процедурах поиска аппроксимированных сплайнами границ сред как экстремалей регуляризирующего функционала А.Н. Тихонова.

Приводятся численные примеры решений некоторых практически значимых прямых и обратных граничных задач геофизики (геоэлектрики [3], диффузии-адвекции радона[4]) в кусочно-постоянных однородных и анизотропных средах (включая квазифрактальные среды Жюлиа, моделирующие рудные и нефтегазонасыщенные вкрапленные, пористые или трещиноватые анизотропные объекты).

## Литература

1. Кризский В.Н. О способе вычисления физических полей в кусочно-анизотропных средах. Часть I. Стационарные поля // Вестник Башкирского университета. 2009. т. 14, № 3. С.726-730.

2. Кризский В.Н. О способе вычисления физических полей в кусочно-анизотропных средах. Часть II. Нестационарные поля // Вестник Башкирского университета. 2009. т. 14, № 4. С.1302-1306.

3. Яматов Р.Р., Кризский В.Н. Математическое моделирование геоэлектрических полей в кусочно-анизотропных квазифрактальных средах Жюлиа // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». 2011. Вып. 9., № 25 (242). С.43-51.

4. Кризский В.Н., Нафикова А.Р. Математическое моделирование процессов диффузии-адвекции радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». 2014. т.7, №2. С.38-45.

## НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ В МЕТРИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ

А.В. Крянев<sup>1</sup>, Г.В. Лукин<sup>1</sup>, Д.К. Удмуян<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Россия

<sup>2</sup>University of Miami 1320 S. Dixie Hwy, Coral Gables, FL 33124, United States

e-mail: avkryanev@mephi.ru

**Аннотация.** В статье рассматриваются некорректно поставленные задачи, возникающие при решении прикладных задач с помощью метрического анализа. Примерами таких задач являются задачи интерполяции, фильтрации и прогнозирования значений функций одной и многих переменных, востребованных при решении прикладных задач физики, техники, экономики и других областей исследований.

*Ключевые слова:* некорректно-поставленные задачи, метрический анализ

### ILL-POSED PROBLEMS IN METRIC ANALYSIS

**Abstract.** The paper deals with ill-posed problems that arise in dealing with applications using metric analysis. Examples of such problems is interpolation filtering and prediction values of functions of one and several variables, sought the solution of applied problems in physics, engineering, economics and other areas of research.

*Key words:* ill-posed problems, metric analysis

In this paper it is presented a universal approach for solving of the problem of multidimensional interpolation, smoothing and forecasting [2-4] without fixing the kind of functional dependence of the function of its arguments. This approach uses only the information about the location of the point at which we restore the value of function with respect to locations of interpolation knots  $\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_n$  as well as the values of function  $Y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  at interpolation knots [5-11].

We consider the problems associated with functional dependence:

$$Y = F(\vec{X}) \quad (1)$$

where the function  $F(\vec{X})$  is unknown, and its value should be restored at point  $\vec{X}^*$  using the function values  $Y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  at interpolation knots  $\vec{X}_i = (X_{i1}, \dots, X_{im})^T$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

In accordance with the scheme of the metrical analysis we form a matrix  $W$  of metric uncertainty for the point  $\vec{X}^*$  on a set of points  $\vec{X}_i = (X_{i1}, \dots, X_{im})^T$ ,  $i = 1, \dots, n$ :

$$W = \begin{pmatrix} \rho^2(\vec{X}_1, \vec{X}^*) & (\vec{X}_1, \vec{X}_2) & \dots & (\vec{X}_1, \vec{X}_n) \\ (\vec{X}_2, \vec{X}_1) & \rho^2(\vec{X}_2, \vec{X}^*) & \dots & (\vec{X}_2, \vec{X}_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\vec{X}_n, \vec{X}_1) & (\vec{X}_n, \vec{X}_2) & \dots & \rho^2(\vec{X}_n, \vec{X}^*) \end{pmatrix} \quad (2)$$

where

$\rho^2(\vec{X}_i, \vec{X}^*) = \sum_{k=1}^m v_k \cdot (X_{ik} - X_k^*)^2$ ,  $(\vec{X}_i, \vec{X}_j) = \sum_{k=1}^m v_k \cdot (X_{ik} - X_k^*) \cdot (X_{jk} - X_k^*)$ ,  $v_k$  determine the functions sensitivity degree of its arguments.

The interpolation formula for the restored value  $Y^*$  at the point  $\vec{X}^*$  has the form:

$$Y^* = \sum_{i=1}^n z_i \cdot Y_i, \quad (3)$$

where the interpolation weights  $z_i, i = 1, \dots, n$  as usual for the interpolated formulas satisfy to normalized condition  $\sum_{i=1}^n z_i = 1$ .

The required vector  $\vec{z}^*$  and interpolated value  $Y^*$  are given by equalities [5-7]:

$$\vec{z}^* = \frac{W^{-1}\vec{1}}{(W^{-1}\vec{1}, \vec{1})}, \quad Y^* = \frac{(W^{-1}\vec{1}, \vec{Y})}{(W^{-1}\vec{1}, \vec{1})}, \quad \vec{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^T, \quad (4)$$

where  $W^{-1}$  is the inverse matrix.

The problem of filtration and prediction are solved by reducing them to the interpolation schemes support functions [5-13]. If the matrix of the metric of uncertainty is ill-conditioned or degenerate, then used a regularization scheme for the solution of these problems [1, 5].

## References

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1977 (Tikhonov, A. N.; V. Y. Arsenin. Solution of Ill-posed Problems. Washington: Winston & Sons, 1977).
2. Watson, G. Alistair, Approximation Theory and Numerical Methods, John Wiley, New York, 1980.
3. Jeffrey S. Simonoff, Smoothing Methods in Statistics, 2nd edition, Springer, 1998.
4. S. Makridakis, S. Wheelwright, R.J. Hyndman, Forecasting: Methods and Applications, Wiley, New York, 1998.
5. Крынев А.В., Лукин Г.В. Метрический анализ для интерполяции и прогнозирования функций многих переменных. М.: Препринт МИФИ, 2005.
6. A.V. Kryanev, G.V. Lukin, D.K. Udumyan, Metric analysis and applications, Numerical Methods and Programming. Advanced Computing Scientific Journal, 2009, v. 10, pp.408-414.
7. Крынев А.В., Лукин Г.В., Удумян Д.К. Метрический анализ и обработка данных. М.: Физматлит, 2012.
8. A.V. Kryanev, D.K. Udumyan, G.V. Lukin, V.V. Ivanov, Metric analysis approach for interpolation and forecasting of time processes, Applied Mathematical Sciences, 2014, 8 (22), pp.1053-1060.
9. A. V. Kryanev, D. K. Udumyan, Metric analysis, properties and applications as a tool for interpolation, Int. Journal of Mathematical Analysis, 2014, 8 (45), pp.2221 - 2228.
10. A. V. Kryanev, D. K. Udumyan, Metric analysis, properties and applications as a tool for smoothing, Int. Journal of Mathematical Analysis, 2014, 8 (47), pp.2337 - 2346.
11. A. V. Kryanev, D. K. Udumyan, Metric analysis, properties and applications as a tool for forecasting, Int. Journal of Mathematical Analysis, 2014, 8 (60), pp.2971 - 2978.
12. A. V. Kryanev, D.K. Udumyan, A.Yu. Kurchenkov, and A.A. Gagarinskiy. Determination of Power Distribution in the VVER-440 Core on the Basis of Data from In-Core Monitors by Means of a Metric Analysis. Physics of Atomic Nuclei, 2014, V. 77 (14), pp.1651-1655.
13. Kryanev A.V., Ivanov V.V., Klimanov S.G., Lukin G.V., Udumyan D.K. Forecasting of chaotic dynamic processes by means of allocation regular components, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2015, Vol. 55, No. 2, pp. 340–347.



## КЛАСТЕРНЫЕ МОДЕЛИ В РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИХ АЛГОРИТМАХ РАСЧЕТА МОЛЕКУЛЯРНЫХ СИЛОВЫХ ПОЛЕЙ

Г.М.Курамшина<sup>1</sup>, И.В.Кочиков<sup>2</sup>

*Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Химический факультет, кафедра физической химии<sup>1</sup>, НИВЦ<sup>2</sup>, Москва, Россия  
e-mail: kuramshi@phys.chem.msu.ru*

**Аннотация.** В докладе рассмотрены проблемы построения силовых полей супрамолекулярных систем на основе кластерных моделей в рамках теории регуляризации нелинейных некорректных задач

*Ключевые слова:* супрамолекула, кластер, молекулярное силовое поле, теория регуляризации, некорректно поставленная нелинейная задача, мелатонин..

### CLUSTER MODELS IN REGULARIZING ALGORITHMS OF MOLECULAR FORCE FIELD CALCULATIONS

**Abstract.** We consider the regularizing algorithms of force field calculations within cluster models based on the theory of regularization of non-linear ill-posed problems. These algorithms are applied to construction of force fields of supramolecular systems.

*Key words:* supramolecule, cluster, molecular force field, theory of regularization, non-linear ill-posed problem, melatonin.

Обратная задача колебательной спектроскопии – расчет молекулярного силового поля – относится к классу нелинейных некорректно поставленных задач, причем не удовлетворяющих ни одному из условий корректности. Для преодоления некорректности данной задачи была предложена постановка задачи с включением в качестве дополнительной априорной информации и в качестве стабилизатора решения результатов квантово-механических расчетов, выполненных на современных уровнях теории и созданы соответствующие регуляризирующие алгоритмы нахождения т.н. регуляризованного квантово-механического силового поля (РКМСП) [1]. В докладе рассматриваются проблемы применения данных алгоритмов для определения силовых полей супрамолекул, в которых в качестве фрагментов могут выступать отдельные молекулы, либо кластеры молекул. Образование таких сложных систем может происходить за счет т.н. координационных взаимодействий с ионами металлов, межмолекулярных водородных связей, ван-дер-ваальсовых взаимодействий и т.д. При анализе спектральных свойств супрамолекулярных систем, в частности, относящихся к биологическим объектам, необходимо полное знание о геометрической структуре и колебательных спектрах отдельных фрагментов молекулы и в работе эти данные получены из результатов квантово-химических расчетов отдельных молекул или фрагментов кластеров. Далее эти данные использованы в устойчивых численных алгоритмах коррекции силовых полей кластеров в рамках теории регуляризации нелинейных некорректных задач. В качестве примеров рассмотрены приложения к анализу силовых полей ряда биологически важных молекул – мелатонина и его метаболитов, пар нуклеотидов ДНК и кластеров производных пиперидина.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ № 14-03-00929а.

#### Литература

1. A.G.Yagola, I. V. Kochikov, G.M.Kuramshina, Yu.A.Pentin, Inverse Problems of Vibrational Spectroscopy, VSP, Zeist, The Netherlands, (1999).

# ЛОКАЛЬНО ЭКСТРАОПТИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ С РАЗРЫВНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

Леонов А.С.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

115409, Москва, Каширское ш., д. 31

e-mail: asleonov@mephi.ru

1. Пусть  $Z$  и  $U$  – нормированные пространства с элементами  $z$  и  $u$  соответственно. В пространстве  $Z$  зададим некоторую топологию секвенциальной сходимости  $\tau$ . Пусть, далее,  $\mathcal{D} \neq \emptyset$  – заданное множество в  $Z$ ,  $F: Z \rightarrow U$  некоторый оператор, возможно, нелинейный, а  $f = \langle f, z \rangle$  – линейный  $\tau$ -непрерывный функционал, определенный на  $\mathcal{D}$ . Предположим, что операторное уравнение  $F(z) = u$  имеет для данной правой части  $u \in U$  единственное решение  $\bar{z} \in \mathcal{D}$ . Нам требуется вычислить значение функционала  $\langle f, \bar{z} \rangle$ . Для нахождения функций  $\bar{z}(s)$  и последующего вычисления величины  $\langle f, \bar{z} \rangle$  будем использовать приближенные данные задачи: оператор  $F_h: Z \rightarrow U$  и элемент  $u_\delta \in U$ . Приближенные данные  $(F_h, u_\delta)$ , аппроксимирующие точные данные  $(F, u)$ , удовлетворяют условиям:

$$\|F_h(z) - F(z)\| \leq \Psi(h, \Omega[z]), \forall z \in \mathcal{D}, \|u_\delta - u\| \leq \delta,$$

в которых величины  $\eta = (h, \delta)$  являются известными характеристиками точности аппроксимации, а  $\Omega[z] \geq 0$  – заданный функционал. Требования на меру аппроксимации  $\Psi$  и функционал  $\Omega[z]$  будут сформулированы в докладе.

2. Задача приближенного вычисления величины  $\langle f, \bar{z} \rangle$  в общем случае является некорректно поставленной. Решим ее следующим образом. Сначала используем для решения уравнения  $F(z) = u$  некоторый регуляризующий алгоритм и найдем с его помощью приближенные решения  $z_\eta \in \mathcal{D}$  такие, что  $z_\eta \rightarrow \bar{z}$  (по топологии  $\tau$ ) при  $\eta \rightarrow 0$ . Затем вычислим  $\langle f, z_\eta \rangle$  – приближение для  $\langle f, \bar{z} \rangle$ . Нас интересуют апостериорные оценки точности вычисления величины  $\langle f, \bar{z} \rangle$ , т.е. оценки для  $|\langle f, z_\eta - \bar{z} \rangle|$ . Оценки могут быть получены по следующей схеме. Зная  $z_\eta$ , найдем величины  $\Delta_\eta = C \|F_h(z_\eta) - u_\delta\|$ ,  $R_\eta = C \Omega[z_\eta]$ , где  $C > 1$  – заданная оценочная константа. Введем множество

$$\mathcal{Z}_\eta = \{z \in \mathcal{D} : \|F_h(z) - u_\delta\| \leq \Delta_\eta, \Omega[z] \leq R_\eta\}$$

и предположим, что  $\bar{z} \in \mathcal{Z}_\eta$ . Тогда справедливы следующие апостериорные оценки точности приближенных решений  $z_\eta$ :

$$\|z_\eta - \bar{z}\| \leq \sup\{\|z_\eta - z\| : z \in \mathcal{Z}_\eta\} \stackrel{\Delta}{=} \varepsilon(\eta), \quad |\langle f, z_\eta - \bar{z} \rangle| \leq \sup\{|\langle f, z_\eta - z \rangle| : z \in \mathcal{Z}_\eta\} \stackrel{\Delta}{=} E_f(\eta)$$

**Определение 1.** Назовем функцию  $\varepsilon(\eta)$  глобальной, а функцию  $E_f(\eta)$  – локальной (по функционалу  $f$ ) апостериорной оценкой точности приближенного решения  $z_\eta$ .

Локальная оценка  $E_f(\eta)$  определяет точность вычисления функционала  $\langle f, \bar{z} \rangle$ . Устанавливаются достаточные условия, гарантирующие включение  $\bar{z} \in \mathcal{Z}_\eta$ .

3. Типичные оценочные функционалы для получения локальных апостериорных оценок.

(а) Поточечное оценивание точности приближенного решения:  $\langle f_s, z \rangle = z(s)$ ,  $Z = \mathcal{D} = C(T)$ ,  $s \in T \subset \mathbf{R}^N$ :

$$E_f(\eta) = \sup \{ |z(s) - z_\eta(s)| : z \in \mathcal{Z}_\eta \}.$$

(б) Оценивание точности средних значений приближенного решения в некоторой окрестности  $B(s)$ ,  $B(s) \subset T$ , точки  $s$ ,  $s \in T \setminus \partial T$ :  $\langle f_s, z \rangle = \frac{1}{\text{mes } B(s)} \int_{B(s)} z(x) dx$ ,  $Z = \mathcal{D} = L_1(T)$ ,

$$E_f(\eta) = \sup \left\{ \frac{1}{\text{mes } B(s)} \left| \int_{B(s)} [z(x) - z_\eta(x)] dx \right| : z \in \mathcal{Z}_\eta \right\}.$$

4. В докладе вводится понятие точности  $\Delta_f(\eta, P_\eta)$  метода  $P_\eta$  вычисления функционала  $\langle f, \bar{z} \rangle$ , оптимальной точности его вычисления  $\Delta_f^{opt}(\eta)$  и регуляризующего алгоритма  $P_\eta$ , локально оптимального по порядку по функционалу  $f$ :  $\Delta_f(\eta, P_\eta) \leq k_0 \Delta_f^{opt}(\eta)$ ,  $k_0 > 0$ ,  $\forall \eta$ .

5. **Определение 2.** Регуляризующий алгоритм  $z_\eta = P_\eta(F_h, u_\delta, \eta)$  называется локально экстраоптимальным по функционалу  $f$ , если апостериорная оценка его точности – функция  $E_f(\eta)$  – является оптимальной по порядку, т.е. найдется определяемая этим алгоритмом константа  $k_1 > 0$  такая, что  $E_f(\eta) \leq k_1 \Delta_f^{opt}(\eta)$  (хотя бы при достаточно малых  $\|\eta\|$ ).

Оказывается, что метод регуляризации А.Н.Тихонова с апостериорным выбором параметра по обобщенному принципу невязки является экстраоптимальным.

6. Формулируется численный алгоритм нахождения локальных апостериорных оценок точности. Он сводится для линейных обратных задач к минимизации линейного функционала при квадратичных ограничениях.

7. Предлагаемая методика получения локальных апостериорных оценок иллюстрируется численными примерами при решении обратных задач с разрывными решениями на классах функций двух переменных с ограниченной  $BV$ -вариацией и ограниченной полной вариацией типа Харди [2]. В частности, для этих классов решений получаются апостериорные оценки средних значений приближений в двумерной (по пространственным переменным) линейной обратной ретроспективной задаче теплопроводности и в задаче обработки дефоку-сированного и зашумленного изображения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 14-01-00182-а и 14-01-91151-ГФЕН-а.

## Литература

1. Leonov, A.S. Locally extra-optimal regularizing algorithms // J. of Inverse and Ill-posed Problems. 2014. V.22, Issue 5. 713-737.
2. Leonov A.S. Numerical piecewise-uniform regularization for two-dimensional ill-posed problems // Inverse Problems. 1999. V.15. P.1165–1176.

# ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ПОИСКА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В СЕКТОРИАЛЬНЫХ ОБЛАСТЯХ<sup>1</sup>

Р.Ю. Леонтьев

*Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия*

*e-mail: romanisu@yandex.ru*

**Аннотация.** Предлагается метод поиска малого решения для нелинейных уравнений с векторным параметром последовательными приближениями при условиях, когда теорема о неявном операторе не выполняется.

*Ключевые слова:* нелинейное уравнение, метод последовательных приближений, банахово пространство

## ITERATION METHODS FOR CONSTRUCTING OF SOLUTIONS OF NON-LINEAR EQUATIONS IN SECTORIAL DOMAINS

**Abstract.** We suggest method for constructing small solutions for degenerate non-linear operator equation with the vector parameter using method of successive approximations.

*Key words:* non-linear equation, method of successive approximations, Banach space

Пусть  $X, Y$  — банаховы пространства,  $\Lambda$  — линейное нормированное пространство. Рассматривается нелинейное операторное уравнение

$$B(\lambda)x = R(x, \lambda) + b(\lambda), \quad (1)$$

где  $B(\lambda)$  — замкнутый линейный оператор с плотной в банаховом пространстве  $X$  областью определения, не зависящей от параметра  $\lambda$ . Нелинейный оператор  $R(x, \lambda)$  непрерывен по  $x$  и  $\lambda$  в окрестности точки  $(0, 0)$ ,  $R(0, 0) = 0$ . Функция  $b(\lambda)$  со значениями в  $Y$  непрерывна в нуле,  $b(0) = 0$ .

Предполагается, что

$$\|B^{-1}(\lambda)\| = O\left(\frac{1}{a(\lambda)}\right) \text{ при } S \ni \lambda \rightarrow 0,$$

где  $a(\lambda)$  положительный функционал, непрерывный в окрестности нуля,  $a(0) = 0$ ;  $S \subset \Lambda$  — открытое множество, границе которого принадлежит точка  $\lambda = 0$ . Далее множество  $S$  будем называть *секториальной окрестностью нуля*.

Методом последовательных приближений строится малое решение  $x(\lambda) \rightarrow 0$  при  $S \ni \lambda \rightarrow 0$  уравнения (1) и приводятся условия его существования.

### Литература

1. Леонтьев Р.Ю. Нелинейные уравнения в банаховых пространствах с векторным параметром в нерегулярных случаях. Иркутск: Изд-во ИГУ, 2013. 101 с.
2. Сидоров Н.А., Леонтьев Р.Ю., Дрегля А.И. О малых решениях нелинейных уравнений с векторным параметром в секториальных окрестностях // Математические заметки, 2012. Т.91, вып.1. С. 120–135.
3. Сидоров Н.А. Минимальные ветви решений нелинейных уравнений и асимптотические регуляризаторы // Нелинейные граничные задачи. Донецк: Институт прикладной математики и механики, 2004. Вып.14. С. 161–164.

<sup>1</sup>Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №14-01-31175 мол\_а

## Time-dependent coefficient identification problems for the heat equation

D. Lesnic\*, M.S. Hussein\*,†

\* *Department of Applied Mathematics, University of Leeds, Leeds LS2 9JT, UK*  
*e-mail: amt5ld@maths.leeds.ac.uk*

† *Department of Mathematics, College of Science, University of Baghdad, Iraq*  
*e-mail: mmmsh@leeds.ac.uk*

**Abstract.** Coefficient identification problems are in general ill-posed and nonlinear. Consequently, optimisation techniques are mainly used for their numerical solution, as well as various modifications are made to the properties of the corresponding direct problems, e.g. monotonicity or smoothness, [1]. In this paper, multiple time-dependent coefficient identification problems for the heat equation are investigated. In particular, we wish to determine:

- free surfaces (Stefan problems);
  - thermal properties (conductivity, diffusivity, heat capacity, specific heat, density);
  - convection and reaction coefficients (blood perfusion in bio-heat conduction);
  - heat sources (sources of pollution);
  - heat transfer coefficients (thermal monitoring)
- in inverse heat transfer thermal problems with applications.

### Mathematical formulation

The interest is to study the unique and stable identification of multiple time-dependent coefficients  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$ ,  $s(t)$  and/or the free boundary  $h(t)$  together with the temperature  $u(x, t)$  in the parabolic heat equation, [2,3],

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(t) \frac{\partial u}{\partial x} + c(t)u + s(t)g(x, t),$$
$$(x, t) \in \Omega := \{(x, t) | 0 < x < h(t), 0 < t < T\},$$

where  $g(x, t)$  is a given function, subject to the initial condition

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad 0 \leq x \leq h(0) =: h_0 > 0 \text{ (given)},$$

the Dirichlet boundary conditions

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(h(t), t) = \mu_2(t), \quad t \in [0, T],$$

and additional measurements of certain physical quantities. These may involve:

$$-a(t)u_x(0, t) = \tilde{\mu}_3(t), \quad t \in [0, T], \quad (\text{flux})$$

$$h'(t) + u_x(h(t), t) = \mu_3(t) \quad t \in [0, T], \quad (\text{Stefan condition})$$

$$\int_0^{h(t)} x^k u(x, t) dx = \mu_{k+4}(t), \quad t \in [0, T], \quad k = 0, 1, 2, \quad (\text{mass, energy, moment}).$$

Make the change of variables

$$y = \frac{x}{h(t)}, \quad v(y, t) = u(yh(t), t).$$

Then the previous heat equation with initial, boundary and additional conditions become

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{a(t)}{h^2(t)} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{b(t) + yh'(t)}{h(t)} \frac{\partial v}{\partial y} + c(t)v + s(t)g(yh(t), t), & (y, t) \in Q_T := (0, 1) \times (0, T), \\ v(y, 0) &= \phi(h_0 y), & y \in [0, 1], \\ v(0, t) &= \mu_1(t), \quad v(1, t) = \mu_2(t), & t \in [0, T], \\ -a(t)v_y(0, t) &= \tilde{\mu}_3(t)h(t), & t \in [0, T], \\ h'(t) + \frac{1}{h(t)}v_y(1, t) &= \mu_3(t) & t \in [0, T], \\ h^{k+1}(t) \int_0^1 y^k v(y, t) dy &= \mu_{k+4}(t), & t \in [0, T], \quad k = 0, 1, 2, \end{aligned}$$

in the fixed domain  $Q_T = (0, 1) \times (0, T)$ .

The techniques used to prove the unique solvability of these inverse problems use, [2]: Green's functions; Schauder's fixed point theorem; and the theory of Volterra's integral equations of the 2nd kind.

### Solution

Minimize the non-linear Tikhonov objective functional

$$F(\text{unknown}) := \|\text{computed}(\text{unknown}) - \text{measured}\|^2 + \beta \|\text{unknown}\|^2,$$

subject to constraints on the *unknown*, where  $\beta \geq 0$  is a regularization parameter to be prescribed according to some criterion, e.g. the discrepancy principle. Alternatively, stopping the iterations at an appropriate threshold may play the role of regularization parameter. Note that for the simultaneous determination of several coefficients multiple regularization parameters may be needed.

This nonlinear constrained minimization problem is solved iteratively using the Matlab toolbox routines *lsqnonlin* based on a trust reflection algorithm. Thorough numerical results will be presented and discussed at the conference.

*Key words:* Coefficient identification, time-dependent coefficients, heat equation

**Acknowledgements:** Discussions held with Professor M.I. Ivanchoy are gratefully acknowledged.

### Bibliography

1. S.I. Kabanikhin, Inverse and Ill-Posed Problems, Theory and Applications, de Gruyter, 2012.
2. M.I. Ivanchoy, Inverse Problems for Equations of Parabolic Type, VNTL Publishers, 2003.
3. V.L. Kamynin, Inverse problem of simultaneously determining the right-hand side and the coefficient of a lower order derivative for a parabolic equation on the plane, Differential Equations, N. 6, V. 50, 2014, p. 1-13.

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УРБООКОСИСТЕМЫ НА ПРИМЕРЕ ГОРОДОВ БЛИЖНЕГО ПОДМОСКОВЬЯ

Н.Т. Левашова, А.А. Мельникова, А.Э. Сидорова, А.Е. Семина

*МГУ имени М.В. Ломоносова, Физический факультет, Москва, Россия*

*e-mail: natasha@npanalytica.ru, melnikova@physics.msu.ru, sky314bone@mail.ru, syoanya@yandex.ru*

**Аннотация.** В работе рассматривается пространственно-временная модель природно-антропогенной урбоекосистемы, представляющей собой объединение городской среды небольших городов и прилегающих к ним участков сельской местности. Модель разработана на основе системы уравнений типа ФитцХью-Нагумо. На основании расчетов, сделанных по аэрофотосъемкам городов ближнего Подмосковья, получено соответствие между параметрами безразмерной модельной задачи и соответствующими величинами в реальной городской среде.

*Ключевые слова:* урбоекосистема, внутренний переходный слой, активатор-ингибитор

## THE MATHEMATICAL MODELLING OF URBOECOSYSTEM ON THE EXAMPLE OF THE TOWNS NEAR MOSCOW

**Abstract.** A spatial-temporal model of natural-anthropogenic urboecosystem including the urban environment of small towns and surrounding rural areas is discussed. The model is developed on the basis of the system of equations of the FitzHugh-Nagumo type. On the basis of the estimates made by the aerial photography of towns near Moscow, there was obtained correspondence between the parameters of the dimensionless model problem and the corresponding values in the real urban environment.

*Key words:* urboecosystem, internal transition layer, the activator-inhibitor

Объектом исследования в настоящей работе является природно-антропогенная система, представляющая собой объединение городской среды небольших городов и прилегающих к ним участкам сельской местности. Для описания этой системы предложена модель на основе системы ФитцХью-Нагумо (А.Э. Сидорова, Н.Т. Левашова, А.А. Мельникова, Л.В. Яковенко, 2015)

$$u_t - \varepsilon D_u u_{xx} = -\frac{1}{\varepsilon} (u(u - \alpha(x))(u - 1) + uv), \quad v_t - \varepsilon D_v v_{xx} = -\gamma v + \beta u, \quad x \in [0; L] \quad (1)$$

с начальными и краевыми условиями

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad v_x(0, t) = v_x(L, t) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x).$$

Система (1) относится к типу активатор-ингибитор. В качестве активатора выступает компонента  $u$  — функция интенсивности антропогенных процессов, а в качестве ингибитора компонента  $v$  — функция интенсивности природных процессов;  $u_0(x)$ ,  $v_0(x)$  — некоторые начальные функции распределения антропогенных и природных факторов.

В качестве активаторов системных процессов можно рассматривать техногенные электромагнитные излучения, коррозию подземных сооружений и коммуникаций, изменение температуры, кислотности ( $pH$ ) и окислительно-восстановительный потенциал ( $Eh$ ) подземных вод, акустические и вибрационные нагрузки на верхний

слой литосферы, рост концентрации тяжелых металлов в биогенном веществе, численность и плотность населения и т.д. В качестве ингибиторов — удельное электрическое сопротивление, возрастание/уменьшение плотности и влажности почво-грунтов, скорость течения и перемешивания подземных вод, площадь природного каркаса и т.д.

Параметры системы уравнений (1) имеют следующий смысл:

функция  $\alpha(x)$  определяется в зависимости от численности населения, а именно, обратно пропорциональна плотности населения, причем  $0.05 < \alpha(x) < 0.25$  при  $x \in [0; L]$  ;

$\gamma > 0$  — кинетический параметр затухания потенциала ингибитора;

$\beta > 0$  — кинетический параметр взаимодействия активатора и ингибитора;

$D_u$  и  $D_v$  — коэффициенты диффузии активатора и ингибитора,  $1 < D_u/D_v < 10$ ,  $D_u \in [1; 10]$ ,  $D_v \in [0.1; 1]$ ;

$\varepsilon$  — параметр, характеризующий скорость распространения активатора ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ). Наличие множителя  $\varepsilon^{-1}$  в правой части первого уравнения (1) означает, что скорость изменения компоненты  $u$  значительно больше скорости изменения компоненты  $v$ .

Реальный объект исследования характеризуется наличием переходной области от городской среды к сельской — городской окраины — положение которой не изменяется в течение достаточно больших промежутков времени (год и более). В районе городской окраины происходит резкое изменение функций интенсивностей активатора и ингибитора. Область, в которой происходит резкое изменение значений функции, называют внутренним переходным слоем. Существование и положение переходного слоя в рамках рассматриваемой модели определяется функцией  $\alpha(x)$ , обратно пропорциональной плотности населения (В.Ф.Бутузов, Н.Т. Левашова, А.А. Мельникова, 2012).

На основании расчетов, сделанных по аэрофотосъемкам городов ближнего Подмосковья, получено соответствие определяемого моделью значения безразмерной величины плотности населения в области переходной слоя и плотности населения на окраинах реальных городских массивов и, тем самым, выявлен коэффициент пропорциональности между параметрами безразмерной модельной задачи и соответствующими величинами в реальной городской среде. Расчеты показали, что внутренний переходный слой образуется, если плотность населения равна 80 человек на квадратный километр. Эти результаты хорошо согласуются с данными о расположении таких городов как Пушкино, Ивантеевка, Марфино, Сколково, Перedelкино, Луч, Мичуринец и др.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 13-05-01174-а , 15-01-04619-а).

## Литература

1. А.Э. Сидорова, Н.Т. Левашова, А.А. Мельникова, Л.В. Яковенко. Популяционная модель урбоэкосистем в представлениях активных сред. //Биофизика. 2015. Т. 60. Вып. 3. С.574–582.

2. В.Ф.Бутузов, Н.Т.Левашова, А.А.Мельникова. Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе уравнений с различными степенями малого параметра //Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012, том 52, N 11, с. 1983–2003.



# НОВАЯ ВАРИАЦИЯ ОБОБЩЕННОГО ПРИНЦИПА НЕВЯЗКИ, УЧИТЫВАЮЩАЯ ОШИБКИ МАШИННОГО ОКРУГЛЕНИЯ, НАКАПЛИВАЮЩИЕСЯ ПРИ РЕШЕНИИ МНОГОМЕРНЫХ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Д.В. Лукьяненко

*МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

*e-mail: lukyanenko@physics.msu.ru*

**Аннотация.** Один из наиболее эффективных подходов для решения многомерных некорректно поставленных обратных задач — использование многопроцессорных систем, которые позволяют обрабатывать огромные объемы данных [1]. Однако, ошибки машинного округления, которые растут с увеличением объема операций, могут существенным образом повлиять на устойчивость найденного приближенного решения. В этой работе обсуждается подход, который позволяет учитывать эти ошибки округлений и строить достаточно устойчивое приближенное численное решение решаемых многомерных некорректно поставленных обратных задач. Работа была поддержана РФФИ, проект No. 14-01-31201, и Суперкомпьютерным центром МГУ имени М.В. Ломоносова [2].

*Ключевые слова:* многомерные некорректно поставленные обратные задачи, регуляризирующий алгоритм, обобщенный принцип невязки.

## NEW VARIATION OF THE GENERALIZED DISCREPANCY PRINCIPLE WITH DUE ACCOUNT TAKEN OF ROUND-OFF ERRORS FOR SOLVING MULTIDIMENSIONAL ILL-POSED PROBLEMS

**Abstract.** One of the most efficient way of solving multidimensional ill-posed problems is using of parallel computing that helps us to process a huge amount of data [1]. But the round-off errors that grow with increasing amount of computations can significantly affect the final result of calculations. In this work an approach that is able to take into account these errors and to construct sufficiently stable approximate solution of an ill-posed problem is discussed. Several recent results will be presented on the study of the main issue of this work. The project has been partially supported by RFBR, project No. 14-01-31201, and by the Supercomputing Center of Lomonosov Moscow State University [2].

*Key words:* multidimensional ill-posed problems, regularizing algorithm, generalized discrepancy principle.

### Литература

1. Lukyanenko D.V., Yagola A.G., Evdokimova N.A. Application of inversion methods in solving illposed problems for magnetic parameter identification of steel hull vessel // J. Inverse and Ill-Posed Problems, Vol.18, No.9, 1013-1029, 2011.
2. Sadovnichy V., Tikhonravov A., Voevodin Vl., Opanasenko V. "Lomonosov": Supercomputing at Moscow State University. In Contemporary High Performance Computing: From Petascale toward Exascale (Chapman & Hall/CRC Computational Science), pp.283-307, Boca Raton, USA, CRC Press, 2013.

## ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ НЕКОТОРЫХ УСЛОВИЙ РЕГУЛЯРИЗУЕМОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Л.Д. Менихес, В.В. Карачик

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия  
e-mail: leonid.menikhes@gmail.com, karachik@susu.ru

**Аннотация.** В статье исследуется одна бесконечная серия достаточных условий регуляризуемости интегральных уравнений, построенных с помощью теории двойственности банаховых пространств. Этот метод построения достаточных условий показал свою эффективность при решении некорректных задач. Доказано, что эти условия являются попарно не эквивалентными, даже если ограничиться уравнениями с гладкими симметричными ядрами.

**Ключевые слова:** интегральные уравнения, регуляризуемость, гладкие симметричные ядра.

## ABOUT EQUIVALENCE OF SOME REGULARIZABILITY CONDITIONS OF INTEGRAL EQUATIONS

L.D. Menikhes, V.V. Karachik

**Abstract.** In this article one infinite series of sufficient conditions for regularizability of integral equations constructed with the help of duality theory of Banach spaces is investigated. This method of constructing sufficient conditions proved to be effective in solving ill-posed problems. It is proved that these conditions are not pairwise equivalent even if we are restricted by the equations with the smooth symmetric kernels.

**Key words:** integral equations, regularizability, smooth symmetric kernels.

В работах [1-7] исследовались достаточные условия регуляризуемости интегральных уравнений с помощью теории двойственности банаховых пространств. Были найдены бесконечные серии таких условий. Интегральный оператор задачи рассматривается как действующий из  $C(0, 1)$  в  $L_2(0, 1)$ . Он предполагается инъективным, так как речь идет о регуляризуемости. Однако продолжение интегрального оператора задачи на различные подпространства  $M$ ,  $C(0, 1) \subset M \subset L_2(0, 1)$  уже может иметь ненулевое ядро, т.е. быть неинъективным оператором. Более того, из структуры ядра продолженного оператора можно сделать вывод о регуляризуемости данного интегрального оператора. В частности, если продолжение данного оператора на некоторое  $L_p(0, 1)$ ,  $p \geq 2$ , или на  $L_\infty(0, 1)$ , или на  $\bigcap_{p \geq 2} L_p(0, 1)$  имеет конечномерное ядро, то данное интегральное уравнение регуляризуемо.

Таким образом, мы имеем бесконечно много достаточных условий регуляризуемости. Ранее исследовался вопрос об эквивалентности некоторых из этих условий.

В докладе будет рассказано о некоторых новых результатах об эквивалентности. В частности, показано как из следующих теорем выводятся некоторые результаты о неэквивалентности многих достаточных условий.

**Теорема 1.** *Существует инъективный интегральный оператор из  $C(0, 1)$  в  $L_2(0, 1)$  с гладким симметричным ядром, продолжение которого на любое  $L_p(0, 1)$ ,  $p \geq 2$  имеет конечномерное ядро, а его продолжение на  $\bigcap_{p \geq 2} L_p(0, 1)$  имеет конечномерное ядро.*

**Теорема 2.** *Существует инъективный интегральный оператор из  $C(0, 1)$  в  $L_2(0, 1)$  с гладким симметричным ядром, продолжение которого на  $\bigcap_{p \geq 2} L_p(0, 1)$  имеет бесконечномерное ядро, а ядро его продолжения на  $L_\infty(0, 1)$  конечномерно.*

### Литература

1. Менихес Л.Д. О регуляризуемости отображений, обратных к интегральным операторам // Докл. АН СССР. 1978. Т. 241, №2. С. 282–285.
2. Винокуров В.А., Менихес Л.Д. Необходимое и достаточное условие линейной регуляризуемости // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229, №6. С. 1292–1294.
3. Менихес Л.Д. О регуляризуемости некоторых классов отображений, обратных к интегральным операторам // Математические заметки. 1999. Т. 65, №2. С. 222–229.
4. Менихес Л.Д. Об одном достаточном условии регуляризуемости линейных обратных задач // Математические заметки. 2007. Т. 82, №2. С. 242–247.
5. Менихес Л.Д., Кондратьева О.А. О сравнении условий регуляризуемости интегральных уравнений // Известия Челябинского научного центра. 2009. Вып. 1(43). С. 11–15.
6. Менихес Л.Д. О связи достаточных условий регуляризуемости интегральных уравнений // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия “Математика. Механика. Физика” 2013. Т. 5, №1. С. 50–54.
7. Menikhes L.D. Karachik V.V. On the regularizability conditions of integral equations // Bulletin of the South Ural State University, Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software, 2015. V. 8, No. 3, P. 141–147.

## АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ИЗМЕРЕНИЯ

Ю.Л. Меньшиков

Днепропетровский национальный университет, Днепропетровск, Украина

e-mail: Menshikov2003@list.ru

**Аннотация.** В статье рассматривается возможный алгоритм оценки решения обратной задачи с приближенным компактным оператором (обратная задача измерения). Для получения приближенной устойчивой оценки решения обратной задачи используется алгоритм регуляризации с привлечением гипотезы относительно точного решения. Даны примеры.

*Ключевые слова:* обратная задача измерения, регуляризация, основная гипотеза

## THE ALGORITHM FOR AN EVALUATION OF SOLUTION OF MEASUREMENT'S INVERSE PROBLEMS

**Abstract.** One possible algorithm for solving the inverse problem with the approximate compact operator (the inverse problem of measurement) is considered. The regularization algorithm involving a hypothesis about the exact solution is suggested for the approximate stable solution of the inverse problem. In paper were given the examples.

*Key words:* measurement's inverse problems, regularization, the main hypothesis

В практике решения обратных задач часто встречаются обратные задачи, в которых необходимо принимать во внимание погрешность математической модели физического процесса [1]. Такого типа задачи называют обратными задачами измерения (задачами интерпретации или задачами распознавания).

Рассмотрим такого типа обратную задачу как решение следующего уравнения с неточно заданным оператором  $\tilde{A}$ :

$$\tilde{A}z = u_\delta, \quad (1)$$

где  $z \in Z, u_\delta \in U$  ( $Z, U$  – функциональные пространства),  $\tilde{A}$  – неточный компактный оператор.

В работе [1] предложен устойчивый алгоритм для уравнения с приближенным линейным оператором  $\tilde{A}$  для Банаховых пространств  $Z, U$ , который базируется на методе регуляризации [2].

Пусть погрешности оператора  $\tilde{A}$  и функции  $u_\delta$  заданы:

$$\|\tilde{A} - A_{ex}\|_{Z \rightarrow U} \leq h, \quad \|u_\delta - u_{ex}\|_U \leq \delta, \quad (2)$$

где  $A_{ex}$  – точный оператор в (1),  $u_{ex}$  – точная правая часть в (1).

Нахождение решения уравнения (1) сводится к решению следующей экстремальной задаче:

$$\inf_{z \in Z_1} M^\alpha[z, u_\delta, \tilde{A}] = \inf_{z \in Z_1} \left\{ \|\tilde{A}z - u_\delta\|_U^2 + \alpha \Omega[z] \right\} = M^\alpha[z_\alpha, u_\delta, \tilde{A}], \quad (3)$$

где  $\Omega[z]$  – стабилизирующий функционал для (1).

Параметр регуляризации  $\alpha$  определяется из уравнения обобщенной невязки:

$$\left\| \tilde{A} z_\alpha - u_\delta \right\|_U^2 = (\delta + h \|z_\alpha\|)^2 + \mu^2(u_\delta, \tilde{A}), \quad (4)$$

где  $\mu(u_\delta, \tilde{A})$  есть мера несоответствия.

### Основная гипотеза

В большинстве обратных задач измерения возникают трудности по определению величины  $h$ . В данной работе предлагается возможный алгоритм оценки решения обратных задач измерения, в котором не используется величина  $h$ . Аналогичный методологический подход можно обнаружить в [3].

*Основная гипотеза:* для точного решения обратной задачи измерения  $z_{ex}$  выполняется неравенство:

$$\Omega[z_{ex}] \geq \Omega[z_\alpha], \quad (5)$$

где  $z_\alpha$  есть регуляризованное решение уравнения (1) без учета погрешности приближенного оператора  $\tilde{A}$ . Точный оператор  $A_{ex}$  в уравнении (1) ( $A_{ex} z_{ex} = u_{ex}$ ) может не иметь аналитической записи.

Рассмотрим множество возможных решений  $Z_\delta$  уравнения (1) без учета погрешности оператора  $\tilde{A}$ :

$$Z_\delta = \{z \in Z : \|u_\delta - \tilde{A}z\|_U \leq \delta\}.$$

За оценку точного решения обратной задачи измерения принимается элемент, на котором достигается точная нижняя грань стабилизирующего функционала  $\Omega[z]$  на множестве  $Z_\delta$ . В силу основной гипотезы можно получить полезные оценки снизу точного решения обратной задачи измерения.

Для иллюстрации такого подхода приведены решения двух практических задач [4]: обратная задача Крылова, идентификация момента технологического сопротивления на прокатном стане.

### Литература

1. Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г. Об одном регуляризирующем алгоритме для некорректно поставленных задач с приближенно заданным оператором // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1972. т.12. № 6. С.1592-1594.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979, 288 с.
3. Тихонов А.Н. О приближенных функциональных уравнениях первого рода // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 1981. т.158. С.197-202.
4. Menshikov Yu.L. Approximate Evaluation of Exact Solutions of Measurement's Inverse Problems // Journal Applied Mechanics and Materials. Vol. 527, Mechatronics and Computational Mechanics II, 2014, p.326-331.

# ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА СОПОЛИМЕРИЗАЦИИ БУТАДИЕНА СО СТИРОЛОМ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО С УЧЕТОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО ВРЕМЕНИ ПРЕБЫВАНИЯ

Михайлова Т.А.<sup>1</sup>, Мифтахов Э.Н.<sup>2</sup>, Мустафина С.А.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,  
Стерлитамак, Россия

<sup>2</sup> Уфимский государственный авиационный технический университет,  
Ишимбай, Россия

e-mail: T.A.Mihailova@yandex.ru, promif@mail.ru, MustafinaSA@mail.ru

**Аннотация.** В статье описан подход к исследованию молекулярно-массового распределения продукта сополимеризации бутадиена со стиролом. В основе подхода лежит имитация роста каждой макромолекулы сополимера и отслеживание происходящих с ней процессов. Моделирование осуществляется с учетом распределения по времени пребывания частиц в системе, что дает возможность исследовать процесс, протекающий в каскаде последовательно соединенных реакторов.

*Ключевые слова:* сополимеризация, молекулярно-массовое распределение, распределение по времени пребывания, метод Монте-Карло.

## RESEARCH OF BUTADIENE-STYRENE COPOLYMERIZATION PROCESS ON THE BASIS OF THE MONTE-CARLO METHOD TAKING INTO ACCOUNT THE RESIDENCE-TIME DISTRIBUTION

**Abstract.** In the paper approach to research of the molecular weight distribution of butadiene-styrene copolymerization product has been described. Imitation of growth of each macromolecule of copolymer and tracking processes occurring with it is the basis of this approach. Simulation is carried out taking into account residence-time distribution. It gives the chance to investigate the process proceeding in the cascade of consistently connected reactors.

*Key words:* copolymerization, molecular weight distribution, residence-time distribution, Monte Carlo method.

Промышленное производство бутадиен-стирольных каучуков представляет собой сложный технологический процесс, который производится непрерывным способом в батарее последовательно соединенных между собой полимеризаторов при температуре 5-10 °С. При этом каждый полимеризатор представляет собой реактор идеального смешения непрерывного действия. Для непрерывного процесса теряет смысл само понятие времени реакции; можно говорить лишь о некотором среднем времени пребывания как о случайной величине, которая характеризуется вероятностной функцией распределения. Но при этом возможно, что молекулярно-массовое распределение полимера будет искажаться, так как на случайное молекулярно-массовое распределение продукта накладывается случайное распределение времени пребывания частиц в системе.

Вероятность того, что частица проводит время от  $t$  до  $t + dt$  в текущем реакторе, равна  $p(t)dt$ . В случае реакторов идеального смешения непрерывного действия величина  $p(t)$  рассчитывается по формуле [1]:

$$p(t) = \left(\frac{n}{\tau}\right)^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\frac{nt}{\tau}}, \quad (1)$$

где  $n$  – количество реакторов в системе,  $\tau$  – среднее время пребывания реакционной смеси в одном реакторе (ч).

Следовательно, для моделирования процесса сополимеризации, протекающего в каскаде реакторов, необходимо учитывать распределение по времени пребывания частиц продукта в системе. Для этого в каждый момент времени необходимо оценивать возможность перехода каждой частицы системы в следующий реактор: если время пребывания молекулы в текущем реакторе истекло, то необходимо перевести ее в следующий реактор и рассчитать новое время пребывания. Так как на имитацию различных реакций требуется различное время, то помимо времени пребывания в реакторе каждую частицу стоит характеризовать временем пребывания в реакции, т.е. временем, необходимым для осуществления выбранной реакции. Но данная характеристика применима лишь к образуемым частицам: для процесса сополимеризации бутадиена со стиролом ими являются свободные радикалы, а также активные и неактивные цепи. При этом время пребывания в реакции рассчитывается согласно формуле:

$$\Delta t = \frac{1}{\sum_{i=1}^n R_i} \ln\left(\frac{1}{r}\right), \quad (2)$$

где  $R_i$  – скорость протекания  $i$ -й реакции,  $r$  – число, полученное при помощи генератора случайных чисел,  $r \in [0,1]$ .

С учетом данных особенностей было осуществлено моделирование процесса сополимеризации бутадиена со стиролом в каскаде из 12 полимеризаторов объемом  $V = 10.8 \text{ м}^3$  с объемной скоростью потока  $C_f = 9,5982 \text{ м}^3/\text{ч}$  [2]. На рисунке 1 представлено молекулярно-массовое распределение частиц продукта при  $t = 30$  ч. Со временем молекулярно-массовое распределение продукта сополимеризации повторяет поведение модельного распределения Шульца-Флори, учитывающего обрыв цепи в результате взаимодействия с регулятором.

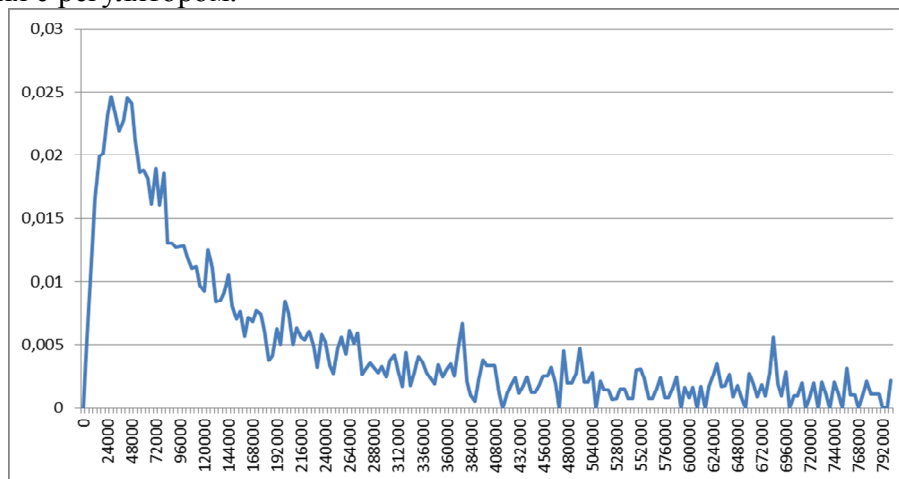


Рис. 1. Молекулярно-массовое распределение продукта при  $t = 30$  ч

### Литература

1. Rawlings J.B., Ekerdt J.G. Chemical Reactor Analysis and Design Fundamentals. – Madison: Nob Hill Publishing, 2002. PP. 609.
2. Михайлова Т.А., Григорьев И.В., Мустафина С.А. Исследование синтеза бутадиен-стирольного сополимера на основе метода Монте-Карло с учетом распределения по времени пребывания // Фундаментальные исследования, 2015. № 5 (часть 3). С. 517-520.

# О РЕШЕНИИ СИНГУЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ ГИЛЬБЕРТА МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

В.А. Морозов<sup>1</sup>, А.Б. Назимов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>2</sup>Вологодский государственный университет, Вологда, Россия

<sup>1</sup>morozov@srcc.msu.ru, <sup>2</sup>n.akbar54@mail.ru

**Аннотация.** В статье рассматривается сингулярное интегральное уравнение Гильберта нейтрального типа первого рода. Приведены формулировки теорем разрешимости, однозначной разрешимости изучаемого уравнения и сходимости решений регуляризованных уравнений.

*Ключевые слова:* сингулярное уравнение, метод регуляризации, сходимость.

## THE DECISION OF THE HILBERT SINGULAR EQUATION METHOD OF REGULARIZATION

**Abstract.** The article discusses the Hilbert singular integral equation neutral type of the first kind. Given the formulate theorem on the solvability, on the unique solvability and convergence of solutions of regularized equations.

*Key words:* singular equation, regularization method, convergence.

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение Гильберта нейтрального типа

$$(Tx)(t) + (Kx)(t) = f(t), \quad f \in H^\gamma(0, 2\pi), \quad (1)$$

где

$$(Tx)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{t-s}{2} x(s) ds$$

– главная часть, а

$$(Kx)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_1(t-s)x(s) ds + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_2(t+s)x(s) ds$$

– регулярная часть сингулярного интегрального уравнения,

$$k_1(t-s) = \sum_{m=-M}^M b_m e^{im(t-s)}, \quad k_2(t+s) = \sum_{m=-M}^M c_m e^{im(t+s)}$$

– тригонометрические многочлены степени  $M \geq 0$ ;  $b_m, c_m$  ( $m = -M, \dots, M$ ) – произвольные комплексные числа,  $H^\gamma$  – пространство  $2\pi$ -периодических комплекснозначных гёльдеровых функций с показателем  $\gamma: 0 < \gamma < 1$ .

В настоящем докладе в исследовании разрешимости уравнения (1) в  $H^\gamma$  использован метод регуляризации сдвигом [1, 2]. Доказаны теоремы сходимости решения регуляризованных уравнений к решениям соответствующих задач.

Разрешимость уравнения (1) зависит от числа  $b_0 + c_0$ , ранга и линейно зависимости строк матриц  $B_k = \begin{bmatrix} i + b_{-k} & c_{-k} \\ c_k & -i + b_k \end{bmatrix}$ ,  $k = 1, \dots, M$ .

**Теорема 1.** Пусть  $b_0 + c_0 = 0$  и  $\det B_k \neq 0$  для всех  $k = 1, \dots, M$ . Тогда необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (1) является выполнение соотношения  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$ . Если выполнено условие разрешимости, то: 1) для любого



комплексного числа  $d_0$  существует только одно решение  $x_0 \in H^\gamma$ , удовлетворяющее условию  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x_0(s) ds = d_0$  и 2) для любого комплексного числа  $\alpha \neq 0$  уравнение

$$(Tx)(t) + (Kx)(t) + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(s) ds = f(t) + \alpha d_0$$

имеет единственное решение  $x_\alpha \in H^\gamma$ , сходящееся равномерно к  $x_0$  при  $\alpha \rightarrow 0$ .

Теорема 2. Пусть  $b_0 + c_0 \neq 0$  и для некоторого  $k = 1, \dots, M$  выполнено равенство  $B_k = 0$ . Тогда необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (1) является выполнение условий

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikt} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} f(t) dt = 0. \quad (2)$$

Если выполнены условия (2), то: 1) для любых комплексных чисел  $d_{-k}$  и  $d_{+k}$  существует только одно решение  $x_0 \in H^\gamma$ , удовлетворяющее условиям

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iks} x_0(s) ds = d_{-k}, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iks} x_0(s) ds = d_{+k}$$

и 2) для любых комплексных чисел  $\alpha \neq 0$ .  $\beta \neq 0$  уравнение

$$(Tx)(t) + (Kx)(t) + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iks} x(s) ds + \frac{\beta}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iks} x(s) ds = f(t) + \alpha d_{-k} + \beta d_{+k} \quad (3)$$

имеет единственное решение  $x_{\alpha, \beta} \in H^\gamma$ , сходящееся равномерно к  $x_0$  при  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\beta \rightarrow 0$ .

Параметры регуляризации  $\alpha$  и  $\beta$  в равенстве (3) являются свободными, то есть их можно выбрать независимо друг от друга.

Для классического уравнения Гильберта имеем:

Теорема 3. Необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{t-s}{2} x(s) ds = f(t)$  является условие  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$ . Если выполнено это условие, то: 1) для любого комплексного числа  $d_0$  существует только одно решение

$x_0 \in H^\gamma$ , удовлетворяющее условию  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x_0(s) ds = d_0$  и 2) для любого комплексного

числа  $\alpha \neq 0$  уравнение  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \operatorname{ctg} \frac{t-s}{2} + \alpha \right) x(s) ds = f(t) + \alpha d_0$  имеет единственное решение  $x_\alpha \in H^\gamma$ , сходящееся равномерно к  $x_0$  при  $\alpha \rightarrow 0$ .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 13-01-00096а).

### Литература

1. Назимов А.Б., Мухамадиев Э.М., Морозов В.А., Муллоджанов М. Метод регуляризации сдвигом. Теория и приложения. Монография. Вологда: ВоГУ, 2012. 368 с.
2. Назимов А.Б., Менухова Н.О., Муллоджанов М. Сингулярные интегральные уравнения Гильберта нейтрального типа. Теория и алгоритмы. Монография. Вологда: ВоГУ, 2014. 244 с.

# ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ АКУСТИКИ

Н.С. Новиков

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,  
Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск, Россия  
e-mail: novikov-1989@yandex.ru*

**Аннотация.** В работе рассмотрена двумерная обратная задача акустики. Для её решения использована комбинация метода Гельфанда-Левитана-Крейна и быстрого алгоритма обращения трёхмерной матрицы. Свойства обратной задачи, в сочетании с использованием трёхмерной структуры, позволяют значительно повысить эффективность метода. Представлены результаты расчётов.

**Ключевые слова:** Обратные задачи акустики, метод Гельфанда-Левитана, обращение трёхмерной матрицы

В работе рассматривается обратная задача акустики. Задача заключается в определении функций  $c(x, y)$ ,  $\rho(x, y)$  и  $u(x, y, t)$ , удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}c^{-2}(x, y)u_{tt} &= \Delta u - \nabla \ln \rho \nabla u, \quad x > 0, y \in \mathbb{R}, t > 0; \\ u|_{t=0} &\equiv 0 \\ u_x(+0, y, t) &= g(y, t); \\ u|_{x=0} &= f(y, t), y \in \mathbb{R}, t > 0.\end{aligned}$$

Данная задача описывает распространение акустических волн в среде. Функция  $c(x, y)$  описывает скорость распространения волн в среде,  $\rho(x, y)$  - плотность среды,  $u(x, y, t)$  - акустическое давление, и  $f(y, t)$  - данные обратной задачи.

В работе предполагается, что функция  $c(x, y)$  известна. Задача, таким образом, сводится к определению функции  $\rho(x, y)$ . Для решения этой задачи использован подход И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана и М.Г. Крейна. Суть метода заключается в сведении нелинейной обратной задачи к однопараметрическому семейству линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Кроме того, метод Гельфанда-Левитана-Крейна является прямым методом (нет необходимости неоднократного решения прямой задачи) и не использует априорную информацию.

Обратная задача акустики сводится к следующему семейству интегральных уравнений (в предположении, что все рассматриваемые функции представимы в виде конечных сумм Фурье):

$$\Phi^k(x, t) = \frac{1}{2} \sum_m \int_{-x}^x (f_m^k)'(t-s) \Phi^m(x, s) ds - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iky}}{\rho(0, y)} dy, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Функция  $\rho(x, y)$  связана с решением  $\Phi(x, t)$  этого уравнения следующим соотношением:

$$\rho(x, y) = \frac{\pi^2}{\rho(0, y)} \left[ \sum_m \Phi^m(x, x-0) e^{-imy} \right]^{-2}$$

В работе уравнение Гельфанда-Левитана-Крейна было сведено к системе линейных алгебраических уравнений. Для её решения был применен метод, использующий трёхмерную структуру матрицы. Был использован метод, основанный на рекурсии Левинсона, имеющий сложность  $O(n^2)$ . Будет показано, что использование данного подхода

позволяет получить решение обратной задачи на интервале  $x \in [0, L]$ , решая уравнение Гельфанда-Левитана-Крейна только в одной точке  $x = L$ . Будут представлены результаты численных экспериментов.

## NUMERICAL SOLUTION OF THE TWO-DIMENSIONAL ACOUSTIC INVERSE PROBLEM

**Abstract.** The report considers two-dimensional acoustic inverse problem. In order to solve it, we used the combination of the Gelfand-Levitan-Krein approach and the fast Toeplitz inversion algorithm. The structure of the inverse problem, combined with the usage of the Toeplitz structure, allows to significantly increase the effectiveness of the method. Result of the numerical experiments are presented.

*Key words:* Acoustic inverse problem, Gelfand-Levitan method, fast Toeplitz inversion  
The report considers acoustic inverse problem. The problem consists in determining the functions  $c(x, y)$ ,  $\rho(x, y)$  and  $u(x, y, t)$ , which satisfies the following system:

$$\begin{aligned} c^{-2}(x, y)u_{tt} &= \Delta u - \nabla \ln \rho \nabla u, \quad x > 0, y \in \mathbb{R}, t > 0; \\ u|_{t < 0} &\equiv 0 \\ u_x(+0, y, t) &= g(y, t); \\ u|_{x=0} &= f(y, t), y \in \mathbb{R}, t > 0. \end{aligned}$$

This system describes the propagation of acoustic waves in the medium. Function  $c(x, y)$  is the speed of the wave propagation,  $\rho(x, y)$  is the density of the medium,  $u(x, y, t)$  is exceeded pressure and  $f(y, t)$  is known data on the surface.

In the report we consider that function  $c(x, y)$  is known. Therefore the problem reduces to determination of the function  $\rho(x, y)$ . Then the approach of I.M.Gelfand, B.M. Levitan and M.G. Krein (GLK-method) is applied for solving considered inverse problem. The essence of this method lies in reduction of the nonlinear inverse problem to a one-parameter set of linear Fredholm equations of the first or second kind. Moreover, the GLK-method is direct method (there is no need in multiple solution of the direct problem) and doesn't use *information*.

The acoustic inverse problem can be reduced to the following set of integral equations (in assumption that all considerable functions can be represented as a finite Fourier sum):

$$\Phi^k(x, t) = \frac{1}{2} \sum_m \int_{-x}^x (f_m^k)'(t-s) \Phi^m(x, s) ds - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iky}}{\rho(0, y)} dy, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Function  $\rho(x, y)$  is connected with the solution  $\Phi(x, t)$  of this equation according to the following ratio:

$$\rho(x, y) = \frac{\pi^2}{\rho(0, y)} \left[ \sum_m \Phi^m(x, x-0) e^{-imy} \right]^{-2}$$

In the report we reduce the GLK-equation to a linear system of algebraic equations and use the method, based on the Toeplitz form of the corresponding matrix. We used the method, based on a Levinson-Durbin recursion, which has  $O(n^2)$  complexity. It is shown, that usage of this method allows to obtain the solution of the inverse problem for  $x \in [0, L]$  by solving GLK-equation only in one point  $x = L$ . Results of numerical experiments will be presented.

# ОСОБЕННОСТИ ОБРАТНЫХ И НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ В АСПЕКТЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Паршина С.В.

*Южно-Уральский государственный университет*

454080, Челябинск, пр-т Ленина 76

Тел.: 89514439850, e-mail: ssvetik15@yandex.ru

Синтагматический подход к изучению случайных процессов в семиотике позволяет рассмотреть структурные и логические взаимосвязи между элементами информации представленными посредством знаковых систем в виде знаков. Кодирование информации с помощью знаков, их передача и распознавание при получении происходит под влиянием случайных факторов, которые приводят к искажениям и создают информационную энтропию. Оценка вероятности искажений и изменений информации осуществляется с помощью величины  $X = X(\mu(t), \vartheta(\Delta t))$  – случайной синтагматической ошибки. Оптимизация передачи и получения информации предполагает создание таких условий и способов организации коммуникативных процессов, при которых вероятность случайной синтагматической ошибки  $P(X(\mu(t), \vartheta(\Delta t))) \rightarrow 0$  стремится к нулю. Другими словами, для согласованного взаимодействия между объектами коммуникативной системы, необходимо обеспечивать условия наименее вероятного значения  $X = X(\mu(t), \vartheta(\Delta t))$ . Распределение вероятностей  $f$  случайной величины  $X$  обусловлено не только используемым кодом, но и свойствами канала передачи. В общем случае  $f$  представляет собой целочисленную функцию непрерывных параметров канала передачи с учетом кодирующего сигнала и реакции на него (декодирования). Обозначим через  $F$ - функцию распределения случайной синтагматической ошибки. По определению функции распределения  $F' = f$ . Изменение параметров канала передачи приводит к изменению вида функции  $f$ , а, следовательно, и к изменению вида функции  $F$ . Если  $A$  - оператор преобразования случайной синтагматической ошибки, то прямая задача оптимизации процесса коммуникации может быть представлена в виде  $Af \rightarrow p$ , где  $p = p(k_{\text{нв}})$ , а  $k_{\text{нв}}$  - наименее вероятное число ошибок в элементарной синтагме. Собственно оптимизация процесса коммуникации состоит не в том, чтобы с помощью оператора  $A$  преобразовать случайную синтагматическую ошибку, а в том, чтобы отследить наиболее проблемный параметр канала передачи (либо совокупность параметров) с целью его устранения или замены для снижения информационной энтропии. Соответственно обратная задача состоит в определении совокупности параметров канала передачи, приводящих к высокой информационной энтропии. Иными словами, по высокой энтропии следует определить условия и состояния канала передачи к ней приводящие. Оценка любого состояния коммуникативной системы может быть проведена с помощью случайной синтагматической ошибки  $X = X(\mu(t), \vartheta(\Delta t))$ , которая соединяет в себе информацию о последовательности трех составляющих (кодирования, передачи, декодирования). Заметим, что внутренний характер случайной синтагматической ошибки не может быть изучен посредством известного метода цепей Маркова, в виду целостного единства трех разделенных во времени элементов процесса коммуникации. Требуется расширение метода марковских цепей. Кроме того, последовательность элементарных синтагм может иметь временное

(во времени) рассеяние. Все эти особенности информационных случайных процессов составляют дополнительные условия при решении обратных и некорректно поставленных задач поиска параметров дающих высокую энтропию.

Литература:

1. Бартлетт М.С. Введение в теорию случайных процессов. Перевод с английского Севастьянова Б.А. Издательство иностранной литературы. Москва, 1958, 385 с.
2. Заляпин В.И. Вероятностная структура специальных функций. В сборнике: Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования. Сборник статей Международной конференции. Под ред. А.И. Кириллова, С.А. Розановой. Москва, 2015. С. 101-105.
3. Паршина С.В. Случайные процессы в семиотике. В сборнике: Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования. Тезисы и тексты докладов Международной конференции. Москва, РУДН, 15-18 декабря 2014 г. С. 54-55.
4. Васин В.В., Танана В.П. Об устойчивости проекционных методов при решении некорректных задач., Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1975. Т.15 №1. С. 19- 29.
5. Федотов А.М. Некорректные задачи со случайными ошибками в данных. Новосибирск.: Наука, 1990, 280 с.
6. Яглом Я.М., Яглом И.М. Вероятность и информация. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1973, 513 с.

# ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ВЫРОЖДЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

М.В. Плеханова

*Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия  
e-mail: mariner79@mail.ru*

**Аннотация.** Исследована разрешимость одного класса задач оптимального управления для распределенных систем, моделируемых квазилинейными вырожденными эволюционными уравнениями высокого порядка в банаховых пространствах.

*Ключевые слова:* задача оптимального управления, вырожденное эволюционное уравнение, квазилинейное уравнение, уравнение высокого порядка, распределенная система управления.

## OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR QUASILINEAR DEGENERATE HIGHER ORDER EQUATIONS IN BANACH SPACES

**Abstract.** Solvability is investigated for a class of optimal control problems to distributed systems that modeled by quasilinear degenerate higher order evolution equations in Banach spaces.

*Key words:* optimal control problem, degenerate evolution equation, quasilinear equation, higher order equation, distributed control system.

Пусть  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  – банаховы пространства,  $L : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ ,  $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}$  – линейные непрерывные операторы,  $M : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  – линейный замкнутый оператор с плотной в  $\mathcal{X}$  областью определения  $D_M$ ,  $N : [t_0, T] \times \mathcal{X}^m \rightarrow \mathcal{Y}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Рассмотрим задачу оптимального управления

$$Lx^{(m)}(t) = Mx(t) + N(t, x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(m-1)}(t)) + Bu(t) \quad (1)$$

$$P(x^{(k)}(t_0) - x_k) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (2)$$

$$u \in \mathfrak{U}_\partial, \quad (3)$$

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \|x - \tilde{x}\|_{W_2^m(t_0, T; \mathcal{X})}^2 + \frac{C}{2} \|u - \tilde{u}\|_{L_2(t_0, T; \mathcal{U})}^2 \rightarrow \inf \quad (4)$$

с заданными  $z_k \in \mathcal{X}$ ,  $k = 0, 1, \dots, m-1$ ,  $\tilde{x} \in W_2^m(t_0, T; \mathcal{X})$ ,  $\tilde{u} \in L_2(t_0, T; \mathcal{U})$ .

Обозначим  $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{X})\}$ ,  $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ ,  $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ ,  $L_\mu^L = L(\mu L - M)^{-1}$ . Оператор  $M$  называется  $(L, \sigma)$ -ограниченным [1], если  $\sigma^L(M)$  является ограниченным множеством в  $\mathbb{C}$ . В этом случае существуют проекторы

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_\mu^L(M) d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X}), \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma L_\mu^L(M) d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}).$$

Положим  $\mathcal{X}^0 = \ker P$ ,  $\mathcal{Y}^0 = \ker Q$ ;  $\mathcal{X}^1 = \text{im} P$ ,  $\mathcal{Y}^1 = \text{im} Q$ . Обозначим через  $L_k$  ( $M_k$ ) сужение оператора  $L$  ( $M$ ) на  $\mathcal{X}^k$  ( $D_{M_k} = D_M \cap \mathcal{X}^k$ ),  $k = 0, 1$ . В [1] показано, что при условии  $(L, \sigma)$ -ограниченности оператора  $M$  имеет место действие операторов  $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ ,  $M_0 \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X}^0; \mathcal{Y}^0)$ ,  $L_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^k; \mathcal{Y}^k)$ ,  $k = 0, 1$ , а также существуют обратные операторы  $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0; \mathcal{X}^0)$ ,  $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$ .

Обозначим  $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$ ,  $H = M_0^{-1}L_0$ . При  $p \in \mathbb{N}_0$  оператор  $M$  называется  $(L, p)$ -ограниченным, если он  $(L, \sigma)$ -ограничен,  $H^p \neq \mathbb{O}$ ,  $H^{p+1} = \mathbb{O}$ . Определим также пространство  $\mathcal{Z} = \{x \in W_2^m(t_0, T; \mathcal{X}) : Lx^{(m)} - Mx \in L_2(t_0, T; \mathcal{Y})\}$  с нормой

$$\|x\|_{\mathcal{Z}}^2 = \|x\|_{W_2^m(t_0, T; \mathcal{X})}^2 + \|Lx^{(m)} - Mx\|_{L_2(t_0, T; \mathcal{Y})}^2.$$

С помощью результатов работы [2] распространив на квазилинейный случай методы исследования разрешимости задач оптимального управления для линейных вырожденных распределенных систем, развитые в [3, 4], получим следующие результаты.

**Теорема 1.** Пусть  $p \in \mathbb{N}_0$ ,  $M$   $(L, p)$ -ограниченный оператор, отображение  $N : [t_0, T] \times \mathcal{X}^m \rightarrow \mathcal{Y}$  такое, что  $QN \in C^{m(p+1)-1}([t_0, T] \times \mathcal{X}^m; \mathcal{Y})$  равномерно липшицево по  $\bar{v} = (v_0, \dots, v_{m-1})$ ,  $H^k M_0^{-1}(I - Q)N \in C^{m(k+1)}([t_0, T] \times \mathcal{X}^m; \mathcal{X})$  при  $k = 0, 1, \dots, p$ , для всех  $(t, \bar{v}) \in [t_0, T] \times \mathcal{X}^m$  выполняется равенство  $N(t, v_0, v_1, \dots, v_{m-1}) = N(t, Pv_0, Pv_1, \dots, Pv_{m-1})$ ,  $\mathfrak{U}_\partial$  непустое замкнутое выпуклое подмножество пространства  $L_2(t_0, T; \mathcal{U})$ ,  $\mathfrak{U}_\partial \cap W_2^{m(p+1)}(t_0, T; \mathcal{U})$ ,  $x_0, x_1, \dots, x_{m-1} \in \mathcal{X}$ . Тогда существует решение  $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathcal{Z} \times \mathfrak{U}_\partial$  задачи (1)–(4).

**Теорема 2.** Пусть оператор  $M$   $(L, p)$ -ограничен, отображение  $N : (t_0, T) \times \mathcal{X}^m \rightarrow \mathcal{Y}$  для всех  $v_0, v_1, \dots, v_{m-1} \in \mathcal{X}$  является измеримым на  $(t_0, T)$ , оно равномерно липшицево по  $\bar{v}$ , для некоторого  $\bar{z} \in \mathcal{X}^m$   $N(\cdot, \bar{z}) \in L_2(t_0, T; \mathcal{Y})$ ,  $\text{im} N \subset \mathcal{Y}^1$ ,  $\mathfrak{U}_\partial$  — непустое выпуклое замкнутое подмножества пространства  $L_2(t_0, T; \mathcal{U})$ ,  $\mathfrak{U}_\partial \cap W_2^{m(p+1)}(t_0, T; \mathcal{U}) \neq \emptyset$ ,  $x_0, x_1, \dots, x_{m-1} \in \mathcal{X}^1$ . Тогда существует решение  $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathcal{Z} \times \mathfrak{U}_\partial$  задачи (1)–(4).

**Замечание 1.** Достаточным условием для того, чтобы выполнялось условие  $\mathfrak{U}_\partial \cap W_2^{m(p+1)}(t_0, T; \mathcal{U}) \neq \emptyset$ , является, например, наличие внутренней точки у множества  $\mathfrak{U}_\partial$  в топологии пространства  $L_2(t_0, T; \mathcal{U})$ .

## Литература

1. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht; Boston: VSP, 2003.
2. Плеханова М.В. Квазилинейные уравнения, не разрешимые относительно старшей производной по времени // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 4. С. 909–921.
3. Плеханова М.В., Федоров В.Е. О существовании и единственности решений задач оптимального управления линейными распределенными системами, не разрешенными относительно производной по времени // Изв. РАН. Сер. мат. 2011. Т. 75, № 2. С. 177–194.
4. Плеханова М.В., Федоров В.Е. Оптимальное управление вырожденными распределенными системами. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2013. 174 с.

# ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. И. Прилепко

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Россия  
e-mail: prilepko.ai@yandex.ru*

**Аннотация.** Рассматривается связь обратных задач восстановления источника с задачами управления и наблюдения. Доказан принцип максимума в задаче нахождения оптимального управления.

*Ключевые слова:* обратные задачи, управляемость, наблюдаемость, оптимальное управление, принцип максимума.

## PROBLEMS OF OPTIMAL CONTROL AND INVERSE PROBLEM FOR EVOLUTION EQUATION IN BANACH SPACE

**Abstract.** We investigate the relationship of inverse problems of the source reconstruction with the tasks of control and observation. Maximum principle in the optimal control problem is proved.

*Keywords:* inverse problems, controllability, observability, optimal control, maximum principle.

Рассматриваются уравнения первого рода в рефлексивных банаховых пространствах. Для указанных уравнений известны соответствующие теоремы Банаха о разрешимости, единственности и устойчивости решений (см., например, [1,2,3]). Вопрос о нахождении решения уравнения первого рода трактуется как задача управления, а соответствующее решение сопряженного уравнения трактуется как задача наблюдения.

Вводятся понятия: точной управляемости, аппроксимативной управляемости, нормально разрешимой управляемости для основного уравнения. На основании теорем Банаха приводятся условия на сопряженное уравнение, когда выполнены соответствующие критерии для основного уравнения. Данные проблемы рассматриваются в различных функциональных пространствах, в том числе, в пространствах О.В. Бесова, С.М. Никольского, С.Л. Соболева см. [4]. Задачи управления и наблюдения исследуются как для систем с сосредоточенными параметрами см. [5], так и для систем с распределенными параметрами см. [6,7]. В гильбертовых пространствах задачи управления и наблюдения тесно связаны с обратными задачами специального вида [8]. При выполнении ряда ограничений доказывается принцип максимума нахождения точных оптимальных управлений, справедливый для систем ОДУ, а также для целого ряда уравнений с частными производными.

## Литература

1. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. — М.: Иностранная литература, 1962.
2. Иосида К. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.



3. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1988.
4. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1996.
5. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Ф. Е. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Физматлит, 1961.
6. Васильев Ф. П., Куржанский М. А., Потапов М. М., Разгулин А. В. Приближенное решение двойственных задач управления и наблюдения. — М.: Макс-пресс, 2010.
7. Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. — Новосибирск: Научная книга, 1999.
8. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. — New York: Marcel Dekker, 2000.

# ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ С ДАННЫМИ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ НА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

С.Г. Пятков<sup>1</sup>

*Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, Россия  
pyatkov@math.nsc.ru*

**Аннотация.** Мы рассматриваем вопросы существования и несуществования решений обратных задач для параболических уравнений и систем о нахождении правой части и коэффициентов уравнения, где значения решения или его производных на некоторых поверхностях или отдельных точках, лежащих внутри пространственной области, служат в качестве условий переопределения. Находятся условия на данные задачи, когда задача корректна или некорректна, и условия гарантирующие наличие оценок устойчивости.

*Ключевые слова:* обратная задача, параболическая система уравнений, начально-краевая задача, корректность, условия переопределения

## INVERSE PROBLEMS FOR PARABOLIC EQUATIONS AND SYSTEMS WITH OVERDETERMINATION CONDITIONS ON SPATIAL MANIFOLDS

S.G. Pyatkov

*Yugra State University, Khanty-Mansiisk, Russia  
pyatkov@math.nsc.ru*

**Abstract.** We examine the questions of existence and nonexistence of solutions to inverse problems for parabolic equations and systems on determination of the right-hand side and coefficients of the equation, in which values of a solution on some surfaces or separate points serve as the overdetermination conditions. The conditions on the data of the problem ensuring its well-posedness or ill-posedness and stability estimates are found.

*Key words:* inverse problem, parabolic system of equations, initial-boundary value problem, well-posedness, overdetermination condition

Мы рассматриваем вопрос о определении вместе с решением правой части специального вида и коэффициентов в параболических уравнениях и системах. Пусть  $G$  – область в  $\mathbb{R}^n$  с границей  $\Gamma$  класса  $C^{2m}$  и  $Q = (0, T) \times G$ . Параболическое уравнение имеет вид

$$u_t + A(t, x, D)u = \sum_{i=1}^r b_i(t, x)q_i(t, x') + f, \quad (t, x) \in Q, \quad (1)$$

где  $x' = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ ,  $x'' = (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)$  и  $A$  – матричный эллиптический оператор порядка  $2m$  с матричными коэффициентами размерности  $h \times h$ , представимый в виде

$$A(t, x, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(t, x)D^\alpha, \quad D = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \dots, \partial_{x_n}).$$

Уравнение (1) дополняется начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0} = u_0, \quad B_j u|_S = \sum_{|\beta| \leq m_j} b_{j\beta}(t, x)D^\beta u|_S = g_j(t, x), \quad (2)$$

где  $m_j < 2m$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  и  $S = (0, T) \times \Gamma$ . Неизвестными в (1), (2) являются решение  $u$ , функции  $q_i(t, x')$  ( $i = 1, 2, \dots, hs$ ,  $sh \geq r$ ), входящие как в правую часть

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Грант № 15-41-00063)

(1) так и в оператор  $A$  как коэффициенты. Мы рассмотрим два случая. В первом случае условия переопределения для нахождения этих функций  $q_i$  имеют вид

$$u|_{S_i} = \psi_i(t, x) \quad (x \in S_i = (0, T) \times \Gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, s), \quad (3)$$

Во втором случае  $k = n - 1$  и

$$\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k}|_{S_i} = \psi_{ik}(t, x), \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad k = 0, 1, \dots, r_i - 1, \quad (3')$$

где  $1 \leq r_i \leq 2m$  для всех  $i$  и  $r \leq h(r_1 + r_2 + \dots + r_s)$ . Здесь  $\{\Gamma_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) – множество гладких  $n - 1$ -мерных поверхностей, лежащих в  $G$  (в (3')  $\nu$  – вектор нормали к  $\Gamma_i$ ).

Проблемы подобного вида возникают при описании процессов тепломассопереноса, диффузионных процессов, процессов фильтрации и во многих других областях, в частности в химии и биологии. Многочисленные результаты и библиография, посвященные в том числе и параболическим задачам может быть найдена в монографиях следующих авторов: Алифанов О.М. (1988, 1994, 2009), Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент-Клэр Ч. (1989), Ozisik M.N., Orlando H.A.B. (2000), Ramm A.G. (2005), Кабанихин С.И. (2005, 2009, 2012), Kozhanov A.I. (1999), Isakov V. (2006), Prilepko A.I., Orlovsky D. G., and Vasin I.A. (1999), Альфаров О.М. (1988), Ткаченко В.М. (2008), Денисов А.М. (1994). Наибольшее количество работ посвящено уравнениям и системам второго порядка (системам конвекции-диффузии), которые иногда дополняются и системой Навье-Стокса (модель Обербека-Буссинеска и ее обобщения). В этом случае система имеет вид

$$u_t - \nu \Delta u + (u, \nabla)u + \nabla p = f + \beta_c C + \beta_\theta \Theta, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad (4)$$

$$\Theta_t - \lambda_\theta \Delta \Theta + (u, \nabla)\Theta = f_\theta, \quad (5)$$

$$C_t + (u, \nabla)C - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} C_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i C_{x_i} + a_0 C = f_c, \quad (6)$$

где  $\nu = \text{const} > 0$ ,  $(x, t) \in Q = G \times (0, T)$  ( $G \subset \mathbb{R}^n$ ,  $T < \infty$ ),  $u$ ,  $\Theta$ ,  $p$ ,  $C$  есть вектор скорости, температура жидкости, давление, вектор концентраций примесей (органических или неорганических) в жидкости, и  $f_c$  – объемная плотность источников примесей, соответственно. Здесь  $a_{ij}$ ,  $a_i$ ,  $a_0$  – матрицы размерности  $h \times h$ , где  $h$  – это количество примесей,  $\beta_c$  – матрица размерности  $n \times h$ ,  $\beta_\theta$  – вектор-функция длины  $n$ ,  $\lambda_\theta > 0$  – коэффициент теплопроводности. Надо отметить, что в реальных системах, используемых при описании процессов тепломассопереноса в соответствующих математических пакетах используется до 90 различных параметров, характеризующих в том числе химические и биологические процессы в жидкости. Постановка обратной задачи для системы (4)-(6) аналогична задаче (1)-(3), в простейшем случае неизвестной является правая часть  $f_c$  в системе (6) такого же вида как в (1), т.е. функция источников. Для обратных задач (1)-(3), (1), (2), (3') и для соответствующей обратной задачи для системы (4)-(6) мы приводим условия когда задача безусловно разрешима в пространствах Соболева и справедливы оценки устойчивости или условия когда задача разрешима в видоизмененной постановке.

**ПРИМЕНЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ  
СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В  
РАМКАХ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА  
S-АППРОКСИМАЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ  
ГРАВИМЕТРИИ**

Д.Н. Раевский, И.Э. Степанова

*Институт Физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН, Москва, Россия*

*e-mail: nofirma2010@mail.ru, tet@ifz.ru*

**Аннотация.** В работе описаны параллельные алгоритмы регуляризованного итерационного трехслойного метода Чебышева и блочного метода контрастирования для интерпретации данных аномального гравитационного поля с использованием модифицированной S-аппроксимации. Проведен математический эксперимент для оценки эффективности алгоритмов.

*Ключевые слова:* параллельные вычисления, гравиметрия, интерпретация, аппроксимация, обратная задача, регуляризация.

**APPLICATION OF PARALLEL ALGORITHMS OF SOLVING OF THE  
SIMULTANEOUS LINEAR EQUATIONS WITHIN MODIFIED  
S-APPROXIMATION METHOD AT THE SOLVING OF GRAVIMETRY  
INVERSE PROBLEMS**

**Abstract.** Parallel algorithms of regularized iterative three-layer Chebyshev method and block contrasting method for the anomalous gravity field data interpretation using modified S-approximation method are described in this paper. Mathematical experiment is carried out for algorithms efficiency estimation.

*Key words:* parallel computing, gravimetry, interpretation, approximation, inverse problem, regularization.

Гравиразведка является одним из методов детального изучения геологического строения коры и верхней мантии Земли. В настоящее время существует множество методов интерпретации данных аномального гравитационного поля. Современные обратные задачи гравиметрии характеризуются большой размерностью системы, поэтому целесообразным представляется создание параллельных алгоритмов их решения.

Предположим, что значения аномального поля  $f_i$  заданы в совокупности точек  $(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i})$ ,  $1 \leq i \leq N$ . В рамках модифицированного метода S-аппроксимаций [1-2] поле представляется в виде суммы простого и двойного слоев, распределенных на некотором носителе, залегающего ниже дневного рельефа. Основной вычислительной проблемой метода является нахождение устойчивого приближенного решения  $\hat{x}$ , согласованного с имеющейся априорной информацией о поле. Авторами были предложены регуляризованный итерационный трехслойный метод Чебышева [3] и блочный метод контрастирования (БМК) [4] как эффективные методы интерпретации данных гравиметрии большого объема. В настоящей работе предложены параллельные алгоритмы методов решения СЛАУ при использовании S-аппроксимации поля.

Общее число процессоров на вычислительном кластере будем обозначать через  $P$ . Опишем каждый из параллельных алгоритмов:

I. В рамках регуляризованного итерационного трехслойного метода Чебышева представим СЛАУ следующим образом

$$Ax = f, \tag{1}$$

где  $f$ – $N$ -вектор правой части,  $A = A^T > 0$ – $N \times N$ -матрица,  $x$ –искомый  $N$ -вектор решения. Применим распараллеливание системы по строкам, то есть разделим исходную систему (матрицу  $A$  и вектора  $f$  и  $x$ ) на  $P$  равных частей. Таким образом на текущей итерации каждый процессор находит свою часть вектора решения. Число строк в матрице для каждого процессора в этом случае равно  $N/P$ , а число столбцов– $N$ . Так как система трехслойная и число столбцов остается неизменным, то каждому процессору также необходимо знать полностью предыдущие две итерации. Обмен необходимой информацией между процессорами осуществляется ведущим процессором и реализован с помощью встроенных в пакет MPI функций MPI\_Bcast и MPI\_Allreduce.

II. БМК предназначен для разбиения исследуемой области  $D$  на подобласти локальных аномалий, для каждой из которых решается своя СЛАУ. Такой подход позволяет за короткое время находить хорошее нулевое приближение для всей системы, так как подобласти разбиваются не произвольным образом, а в соответствии с геометрией поля. Опишем параллельный алгоритм БМК: исследуемая область делится на  $P$  равных подобластей  $D_p, 1 \leq p \leq P$ :

$$\bigcup_{p=1}^P D_p = D; D_{p_2} \cap D_{p_1} = \emptyset, \forall p_1 \neq p_2; |D_{p_1}| = |D_{p_2}| \forall p_1, p_2. \quad (2)$$

Каждый  $p$ -й процессор ищет координаты локальных экстремумов поля для своей подобласти  $D_p$ . Координаты найденных экстремумов и значение аномального поля в этой точке передаются ведущему процессору в виде массива  $(x_{1s}, x_{2s}, x_{3s}, f_s), 1 \leq s \leq S$ , где  $f_s$ – значение аномального гравитационного поля, заданного в точке  $(x_{1s}, x_{2s}, x_{3s})$ ,  $S$  – общее количество найденных экстремумов. Далее каждый из  $P$  процессоров для своей подобласти  $D_p$  проверяет принадлежность отдельно взятой точки  $M_v \in D_p$  к определенному блоку  $B_s, 1 \leq s \leq S$ , соответствующему своей локальной аномалии в рамках БМК [4]. В конце алгоритма блоки суммируются ведущим процессором и передаются на решение СЛАУ методом, описанным в п. I.

Данные алгоритмы были апробированы на модельных примерах различной размерности для расчета эффективности  $E_p$  и ускорения  $S_p$ :

$$S_p = \frac{T_p}{T_1}; E_p = \frac{S_p}{p}, \quad (3)$$

где  $T_1$ –время выполнения алгоритма на одном процессоре,  $T_p$ –время выполнения алгоритма на  $p$  процессорах. Если число процессоров выбирать из условия  $N/P \geq 300$ , то эффективность  $E_p > 90\%$ . Если же  $N/P < 300$ , то время решения системы на каждой итерации для  $p$ -го процессора уменьшается, а время, затрачиваемое на межпроцессное взаимодействие, увеличивается, поэтому эффективность алгоритмов снижается. Качество аппроксимации при варьировании общего числа процессоров  $P$  не изменяется: найденные аппроксимации искомых функций совпадали с точностью  $\approx 99.98\%$ . Описанные методы были апробированы на реальных данных большого объема ( $N > 10^5$ ).

Работа выполнена с использованием ресурсов суперкомпьютерного комплекса МГУ имени М.В. Ломоносова [5].

## Литература

1. Степанова И.Э., Раевский Д.Н. О решении обратных задач гравиметрии с помощью модифицированного метода S-аппроксимаций // Физика Земли. 2015. N 2. С. 55–66.
2. Степанова И.Э., Раевский Д.Н. Модифицированный метод S-аппроксимаций. Региональный вариант // Физика Земли. 2015. N 2. С. 44–54.
3. Раевский Д.Н. Регуляризованный трехслойный итерационный метод Чебышева при решении обратных задач гравиметрии // «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования» : Тезисы и тексты докладов международной конференции, Москва, РУДН, 15-18 декабря 2014. Москва: РУДН. 2014. С. 151–152.
4. Раевский Д.Н. О новых подходах к решению обратных задач геофизики с помощью модифицированного метода S-аппроксимаций // Материалы IV Международной научно-практической конференции молодых ученых и специалистов памяти академика А.П. Карпинского, 16-20 февраля, 2015, Санкт-Петербург, ФГУП «ВСЕГЕИ». Спб.: Изд-во ВСЕГЕИ. 2015. С. 558–560.
5. Воеводин Вл.В., Жуматий С.А., Соболев С.И., Антонов А.С., Брызгалов П.А., Никитенко Д.А., Стефанов К.С., Воеводин Вад.В. Практика суперкомпьютера «Ломоносов» // Открытые системы. Москва: Издательский дом «Открытые системы». 2012. N 7. С. 36–39.

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПТИЧЕСКОГО СЕКЦИОНИРОВАНИЯ В ОФТАЛЬМОЛОГИИ

А.В. Разгулин

*МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия*

*e-mail: razgulin@cs.msu.ru*

Т.Е. Романенко

*МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия*

*e-mail: romanenko@cs.msu.ru*

А.С. Старостин

*МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия*

*e-mail: alexisstarostin@cs.msu.ru*

Н.Г. Ирошников

*МГУ имени М.В.Ломоносова, физический факультет, Москва, Россия*

*e-mail: nikita@optics.ru*

А.В. Ларичев

*МГУ имени М.В.Ломоносова, физический факультет, Москва, Россия*

*e-mail: larichev@optics.ru*

**Аннотация.** Рассматривается обратная задача секционирования стека изображений глазного дна, представляющих собой суперпозиции истинных изображений с размытыми изображениями соседних по глубине сечений. Для устойчивого к искажениям решения соответствующей задачи трехмерной деконволюции используется неявный итерационный метод регуляризации в Фурье-плоскости.

*Ключевые слова:* секционирование, трехмерная деконволюция, глазное дно, итерационный метод регуляризации.

## INVERSE PROBLEM OF OPTICAL SECTIONING IN OPHTHALMOLOGY

**Abstract.** The inverse sectioning problem is considered for a stack of fundus images, which are superpositions of true images with blurred images of near-depth sections. Implicit iterative regularization method in the Fourier plane is used for stable under distortions 3-D deconvolution.

*Key words:* sectioning, 3-D deconvolution, fundus, iterative regularization method.

Важной задачей, возникающей в офтальмологии, является неинвазивное восстановление изображения 3-х мерной структуры различных отделов глаза (например, сетчатки) для последующей диагностики их заболеваний. Один из перспективных методов восстановления основан на быстрой перефокусировке изображающей системы (например, с использованием методов адаптивной оптики [1]) для получения стека изображений глазного дна, находящихся на различной глубине, с последующим восстановлением 3-х мерной структуры известными методами. Получающиеся на этом пути изображения в каждой фокальной плоскости представляют собой суперпозицию истинного сечения 3-х мерного объекта в данной

фокальной плоскости с размытыми изображениями соседних по глубине сечений. При этом на истинное изображение в фокальной плоскости накладываются aberrации оптической системы глаза, флуктуации фиксации, а при его регистрации приходится также учитывать искажения светочувствительных сенсоров. Таким образом, возникает проблема устойчивого к помехам получения «очищенного» от указанных искажений стека изображений глазного дна по глубине для его последующего использования в 3-мерной реконструкции.

Хорошо известно, что задачи секционирования и деконволюции трехмерных объектов являются весьма затратными относительно вычислительных ресурсов [2]. Имея в виду широкие возможности реализации идей распараллеливания алгоритмов на современных многопроцессорных системах, задача переформулируется в каждой точке поперечной Фурье-плоскости в виде системы линейных алгебраических уравнений с матрицей размера  $N \times N$ , где  $N$  – количество сечений по глубине (см. близкие постановки в [3]). Для устойчивого нахождения приближенного решения используется неявный итерационный метод (см., например, [4]) с различными вариантами выбора параметра  $\mu > 0$ . Приводятся результаты секционирования синтезированных трехмерных объектов и изображений глазного дна. Обсуждается проблема выбора параметра и количества итераций метода в условиях гауссова и пуассоновского шумов в типичных условиях, а также повышение быстродействия при использовании многоядерной структуры современных CPU/GPU.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 15-29-03896.

### Литература

1. Larichev A.V., Ivanov P.V., Iroshnikov N.G., Shmalhauzen V.I., Otten L.J. Adaptive system for eye-fundus imaging // Quantum Electron. 2002. Vol. 32. Pp. 902-908.
2. Agard D. Optical sectioning microscopy: cellular architecture in three dimensions // Ann. Rev. Biophys. Bioeng. 1984. Vol. 13. Pp. 191-219.
3. Матвиенко А.Н., Новикова Т.Н. Метод обработки изображений полупрозрачных слоистых сред // Вестник Моск. Ун-та, сер. 15, Вычислительная математика и кибернетика. 1988. № 4. С. 33-37.
4. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989. 128 с.



# REGULARIZATION OF ILL-POSED PROBLEMS VIA REGULARIZATION OF THEIR DISCRETIZATION

T. Regińska\*

\* *Institute of Mathematics of the Polish Academy of Sciences, Śniadeckich 8, 00-656  
Warsaw, Poland  
e-mail: reginska@impan.pl*

**Abstract.** Stable solving an ill-posed problem  $Au = f$  formulated in infinite dimensional spaces  $X, Y$  can be achieved using different regularization strategies. Many regularization methods are formulated just in these spaces. In general, such regularized problems are numerically not feasible and discretization is required to treat related well-posed problems. Another approach consists in discretization of the ill-posed problem under consideration. As a result of discretization one obtains so called a discrete ill-posed problem, i.e. a family of finite dimensional ill-conditioned problems for which a condition number tends to infinity with increasing dimension of discrete problems. In this framework, two research directions can be mainly observed in the literature:

- looking for so called self-regularization property of discretization methods. There are many results on regularization by projections for linear and nonlinear problems with a priori and a posteriori methods of choice of discretization level.
- applying appropriate regularization methods for discrete ill-posed problem. The starting problem is then a least squares problem for a system of (linear) algebraic equations and the regularization parameter is usually chosen for a fixed dimension of a discrete problem. Often, as a result of such an approach, one obtains a regularized solution of finite dimensional problem instead of an approximation of the true unknown solution of the initial infinite dimensional problem.

The subject of this presentation will be a combination of the projection- and the regularization methods for an ill-posed equation in Hilbert spaces with a linear bounded operator with unclosed range. It is a novelty of our approach that the dimension of the projection is treated as the second parameter of regularization. So, we deal with two-parameter regularization of the main problem in infinite dimensional spaces. We focus our attention on an a-posteriori parameter choice rule. A new two-parameter discrepancy principle defines a discrepancy set  $DS(\delta)$  for any data error bound  $\delta$ . We focus on the order of convergence with respect to data error. Convergence rate is obtained in the case when a pair of regularization parameters belongs to the discrepancy set and standard source conditions are satisfied. Under certain assumptions the optimal order of accuracy can be achieved.

*Key words:* ill-posed problems, discretization, regularization, two-parameter discrepancy principle

## Bibliography

1. T. Regińska. Two-parameter discrepancy principle for combined projection and Tikhonov regularization of ill-posed problems // *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, N. 21, V. 2, 2013, p. 561-577.
2. T. Regińska. Regularization of discrete ill-posed problems // *BIT Numerical Mathematics*, N. 44, 2004, p. 119-133.

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ 3D ЗАДАЧИ ГЕОЭЛЕКТРИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

М.И. Шимелевич<sup>1</sup>, Е.А. Оборнев<sup>1</sup>, И.Е. Оборнев<sup>2</sup>, Е.А. Родионов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> - Российский государственный геологоразведочный университет им. С. Орджоникидзе, МГРИ-РГГРУ, Москва, Россия

<sup>2</sup> - Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д. В. Скобельцына Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия  
*e-mail: shimelevich-m@yandex.ru, eugenyo@mail.ru, o\_ivano@mail.ru, evgeny\_980@list.ru*

**Аннотация.** В статье рассматривается метод решения конечномерных операторных уравнения I рода на регуляризованных сетках с использованием нейронных сетей. Приводятся численные примеры решения обратных задач геоэлектрики на модельных данных.

*Ключевые слова:* нелинейная обратная задача, нейронные сети, степень неоднозначности решения, модуль непрерывности обратного оператора.

## NUMERICAL SOLUTION OF 3D INVERSE PROBLEMS OF GEOELECTRICS USING NEURAL NETWORKS

**Abstract.** The method of solving finite dimensional operator equations of I kind at regularized grid with using of neural networks is considered in the article. Numerical examples of the solution of geoelectric inverse problems, using the model data, are shown.

*Key words:* nonlinear inverse problem, neural networks, ambiguity degree of the solution, the modulus of continuity of the inverse operator.

Многие практические обратные задачи геофизики могут быть сведены к численному решению нелинейного операторного уравнения вида:

$$A_N s = e, \quad s \in S_N \subset R^N, \quad e \in R^M \quad (1)$$
$$S_N : [s_{\min} \leq s^n \leq s_{\max}], \quad n = 1, \dots, N$$

где  $s = (s_1, \dots, s_N)$  - искомый вектор параметров среды, определяемый значениями искомой характеристики среды (например, уд. сопротивления) в ячейках укрупненной *регуляризованной сетки*  $\theta_N$  *обратной задачи* размерности  $N$ ,  $S_N$  - множество априорных ограничений,  $e = (e_1, \dots, e_M)$  - вектор измеренных данных,  $A_N$  - заданный оператор *прямой параметризованной задачи*. Регуляризованная сетка  $\theta_N$ , на которой ищется решение обратной задачи (1), строится путем объединения ячеек исходной конечно-разностной сетки прямой задачи  $\theta_{N_0}$  размерности  $N_0 > N$  таким образом, чтобы ее размерность  $N$  была максимальной при условии, что степень неоднозначности  $\beta_N(2\delta_0)$  решений уравнения (1) не превышала заданной желаемой величины  $\varepsilon_0$ , при заданном уровне погрешности данных  $\delta_0$  [3]:

$$\beta_N(2\delta_0) \leq \varepsilon_0, \quad (2)$$

где  $\beta_N(x)$  - модуль непрерывности обратного оператора  $A_N$  для уравнения (1), определяемый выражением, не требующим знания обратного оператора  $A^{-1}$ , вида [1,2]:

$$\beta_N(x) = \sup_{s, s' \in S_N} \|s' - s\|_{R^N} \quad \text{при} \quad \|A_N s' - A_N s\|_{R^M} \leq x, \quad (3)$$

При этом прямая задача решается на исходной конечно-разностной сетке  $\theta_{N_0}$ , на которую предварительно проектируется модель среды, определяемая укрупненной *регуляризованной* сеткой  $\theta_N$ .

В работе рассматривается аппроксимационный нейросетевой метод инверсии, при котором приближенное решение (1) ищется в виде заданной, специального вида функции  $\Psi$  от входных данных  $e_1, \dots, e_N$ , называемой *нейросетью* или *нейросетевым (НС) аппроксиматором* [4]:

$$s \approx \Psi(V, W, e), \quad (4)$$

или в развернутом виде:

$$s_n = \sum_{l=1}^L v_{nl} g\left(\sum_{m=1}^M w_{lm} e_m\right), \quad n=1, \dots, N, \quad (5)$$

где  $g$  - заданная монотонная функция, например,  $g(x) = 1 / (1 + e^{-x})$ ,  $V = \{v_{nl}\}$ ,  $W = \{w_{lm}\}$  - матрицы свободных коэффициентов НС аппроксиматора  $\Psi$ , определяемые в процессе обучения нейросети на множестве опорных решений прямых задач (банке решений),  $L$  - параметр, который характеризует сложность аппроксимационной конструкции (5). Если матрицы коэффициентов нейросети определены, то приближенное решение уравнения (1) может быть получено в аналитическом виде по формуле (5) для любых данных  $e \in R^M$ . Это решение может быть уточнено с помощью *аппроксимационно-итерационного* нейросетевого алгоритма [5], суть которого заключается в построении последовательности НС аппроксиматоров на подмножествах допустимых решений в окрестности первого приближения. Для найденного приближенного решения  $s_{\delta_1}$  уравнения (1), полученного с фактической невязкой  $\delta_1$ , вычисляются апостериорные *скалярные и векторные* оценки степени неоднозначности, определяемые значениями модуля непрерывности обратного оператора (3) и его модификациями [3].

Для численного расчета матриц  $V = \{v_{nl}\}$ ,  $W = \{w_{lm}\}$  свободных коэффициентов НС аппроксиматора (5) и характеристик степени неоднозначности решаются соответствующие нелинейные оптимизационные задачи с использованием методов группы Монте-Карло. В работе представлены примеры численных решений 3D обратных задач геоэлектрики для модельных данных.

В работе использовались ресурсы суперкомпьютерных кластеров МВС-100К МСЦ РАН, «Ломоносов» и «Чебышев» НИВЦ МГУ. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-11-00579, И.Е.Оборнев, НИИЯФ МГУ) и Российского Фонда фундаментальных исследований (проект 13-05-01135, Е.А.Оборнев, М.И.Шимелевич, Е.А.Родионов, МГРИ-РГГРУ).

#### Литература

1. Иванов В. К. О некорректно поставленных задачах / В.К. Иванов // Математический сборник. — 1963. — № 61(103):2. — С. 211-223.
2. Лаврентьев М.М. Некорректные задачи математического анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. — М.: Наука, 1980. — 288 с.
3. Шимелевич М.И. Методы повышения устойчивости инверсии данных геоэлектрики на основе нейросетевого моделирования / М.И. Шимелевич // Геофизика. — 2013. — №4. — С. 49-55.
4. Шимелевич М.И. Аппроксимационный метод решения обратной задачи МТЗ с использованием нейронных сетей / М.И. Шимелевич, Е.А. Оборнев // Физика Земли. — 2009. — № 12. — С. 22-38.
5. Шимелевич М.И. Модифицированный нейросетевой метод решения обратной задачи МТЗ / М.И. Шимелевич, Е.А. Оборнев, И.Е. Оборнев, Е.А. Родионов // Изв. вузов, Геология и разведка. — 2013. — №4. — С. 46-52.

## РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ОБЩИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Садовничий В.А.<sup>1</sup>, Султанаев Я.Т.<sup>2,3</sup>, Ахтямов А.М.<sup>3,4</sup>

<sup>1</sup> Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия,

<sup>2</sup> Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы,

<sup>3</sup> Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, <sup>4</sup> Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

e-mail: rector@msu.ru, sultanaevyt@gmail.com, akhtyamovam@mail.ru

**Аннотация.** Доказаны теоремы разрешимости обратной несамосопряженной задачи Штурма-Лиувилля с общими краевыми условиями по двум спектрам и одному собственному значению, а также теоремы об однозначной разрешимости по двум спектрам и трем собственным значениям. Найдены точные и приближенные решения обратных задач. Приведены соответствующие примеры и контрпример.

*Ключевые слова:* Обратная задача Штурма-Лиувилля, нераспадающиеся краевые условия, несамосопряженная задача, разрешимость.

## ON SOLVABILITY OF INVERSE NONSELF-ADJOINT STURM-LIOUVILLE PROBLEM WITH COMMON BOUNDARY CONDITIONS

**Abstract.** The theorems of solvability of an inverse nonself-adjoint Sturm-Liouville problem with nonseparated boundary conditions from two spectra and one eigenvalue are proved. The theorems on unique solvability of an inverse Sturm-Liouville problem with nonseparated boundary conditions from two spectra and three eigenvalues are proved also. Exact and approximate solutions of the inverse problems are found. The examples and counterexample are considered.

*Key words:* inverse Sturm-Liouville problem, nonseparated boundary conditions, nonself-adjoint problem, solvability.

Обратная задача Штурма-Лиувилля рассматривалась во многих работах (см. подробнее [1,2]).

Изучение обратной несамосопряженной задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями началось с работы [3]. В ней было показано, что для однозначного восстановления несамосопряженной задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями достаточно использования трех спектров, а также двух наборов весовых чисел и вычетов определенных функций. Причем эти спектральные данные использовались по существу [4]. Впоследствии предпринимались попытки выбрать восстанавливаемые или вспомогательные задачи так, чтобы использовать меньшее количество спектральных данных для восстановления [5–9]. В частности, О.А. Плаксина [6–7] заменила несамосопряженную задачу самосопряженной и показала, что для ее однозначного восстановления в качестве спектральных данных достаточно использовались три спектра спектра, некоторую последовательность знаков и некоторое вещественное число.

В работе М.Г. Гасимова, И.М. Гусейнова и И.М. Набиева [8] вспомогательная задача была выбрана таким образом, что количество спектральных данных для восстановления самосопряженной задачи было уменьшено на один спектр. Т.е. в качестве спектральных данных использовалось уже два спектра, некоторая последовательность знаков и некоторое вещественное число.

В настоящей работе рассмотрена несамосопряженная задача Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями. Показано, что для однозначного ее

восстановления можно использовать еще меньшее количество спектральных данных, чем использовалось для восстановления самосопряженной задачи в работах [6–8]. А именно, два спектра и еще три собственных значения.

Более того, показано, что полученный в настоящей статье результат является обобщением критерия Б.М. Левитана и М.Г Гасымова [10].

Исследование выполнено при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ в рамках научного проекта НШ-1096.2014.1, а также РФФИ в рамках научных проектов № 15-01-01095\_а и 14-01-97010-р\_поволжье\_а.

#### Литература

1. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля и их приложения. М.: Наука, 1984. 240 с.
2. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М: Физматлит, 2007. 384 с.
3. Садовничий В.А. Единственность решения обратной задачи в случае уравнения второго порядка с нераспадающимися условиями, регуляризованные суммы части собственных чисел. Факторизация характеристического определителя//ДАН СССР. 1972. Т.206, № 2. С.293–296.
4. Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Ахтямов А.М. Обратная задача Штурма-Лиувилля. Теоремы единственности и контрпримеры // ДАН. 2006. Т. 411, № 6.
5. Юрко В.А. Обратная задача для дифференциальных операторов второго порядка с регулярными краевыми условиями// Матем. заметки. 1975. Т.18, № 4. С. 569–576.
6. Плаксина О.А. Обратные задачи спектрального анализа для операторов Штурма-Лиувилля с неразделенными граничными условиями//Матем. сб. 1986. Т. 131, № 1. С. 3–26.
7. Плаксина О.А. Обратные задачи спектрального анализа для операторов Штурма-Лиувилля с неразделенными граничными условиями. II//Матем. сб. 1988. Т. 136, № 1. С.140–159.
8. Гасымов М.Г., Гусейнов И.М., Набиев И.М. Обратная задача для оператора Штурма–Лиувилля с неразделенными самосопряженными граничными условиями // Сибирский математический журнал, 1991. Т. 31, № 6, С. 46–54.
9. Yurko V.A. The Inverse Spectral Problems for Differential Operators with Nonseparated Boundary Conditions//Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2000. V. 250. P. 266–289.
10. Левитан Б.М., Гасымов М.Г. Определение дифференциального уравнения по двум спектрам//УМН. 1964. Т. 19, № 2(116). С.3–63.

**ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ  
ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ  
КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ-РЕАКЦИИ С НЕОДНОРОДНЫМ  
ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ**

Ж.Ю. Сарицкая

*Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия*

*e-mail: zhsar@icloud.com*

**Аннотация.** Исследуются краевая задача и задачи управления для стационарного уравнения конвекции-диффузии-реакции, в котором коэффициент реакции квадратично зависит от концентрации вещества. Доказывается глобальная разрешимость краевой задачи с неоднородными условиями Дирихле для концентрации вещества и нелокальная единственность ее решения. Также доказывается разрешимость общих задач управления, в которых роль управления выполняет граничная функция, имеющая смысл концентрации вещества на границе. Для конкретного функционала качества выводится система оптимальности и с ее помощью получаются оценки устойчивости решения рассматриваемой экстремальной задачи.

*Ключевые слова:* уравнение конвекции-диффузии-реакции, нелинейная зависимость, задачи управления, система оптимальности, локальная устойчивость, оценки устойчивости.

**STABILITY ESTIMATES OF CONTROL PROBLEM'S SOLUTIONS FOR  
NONLINEAR CONVECTION-DIFFUSION-REACTION EQUATION  
WITH INHOMOGENEOUS DIRICHLET BOUNDARY CONDITION**

**Abstract.** Boundary value and optimal control problems are studied for stationary convection-diffusion-reaction equation, in which reaction coefficient depends quadratically on substance's concentration. Global solvability of boundary value problem with inhomogeneous Dirichlet boundary conditions for concentration of substance and nonlocal uniqueness of its solution are proved. Also solvability of common optimal control problems is proved. In these problems boundary function, which has sense of concentration on the boundary, plays a role of control. For a particular cost functional optimality system is obtained and with its help stability estimates for observing extremum problem's solution is got.

*Key words:* convection-diffusion-reaction equation, nonlinear dependence, optimal control problem, optimality system, local stability, stability estimates.

The following stationary boundary value problem in bounded domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  with boundary  $\Gamma$  is considered:

$$-\lambda \Delta \varphi + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi + k(\varphi) \varphi = f \quad \text{in } \Omega, \quad \varphi = \psi \quad \text{on } \Gamma. \quad (1)$$

Here function  $\varphi$  is a concentration of polluting substance,  $\mathbf{u}$  is a given vector of velocity,  $f$  is a volume density of external sources of substance,  $\lambda$  - a constant diffusion coefficient and  $k(\varphi)$  is a reaction coefficient. This boundary value problem is studied with the help of the following assumptions:

- (i)  $\Omega$  is a bounded domain in  $\mathbb{R}^3$  with boundary  $\Gamma \in C^{0,1}$ ;
- (ii)  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbf{Z}$ ;
- (iii)  $k(\varphi) = \varphi^2$ .

The solution should be searched in this form:

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \varphi_0, \quad \varphi_0 \in H^1(\Omega), \quad \tilde{\varphi} \in H_0^1(\Omega), \quad (2)$$

$$\varphi_0 = \psi \text{ on } \Gamma, \quad \|\varphi_0\|_1 \leq C_\Gamma \|\psi\|_{1/2, \Gamma}. \quad (3)$$

Then the weak formulation can be obtained:

$$\lambda(\nabla \tilde{\varphi}, \nabla S) + (\tilde{\varphi}^3 + 3\tilde{\varphi}^2 \varphi_0 + 3\tilde{\varphi} \varphi_0^2, S) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{\varphi}, S) = (l, S) \quad \forall S \in H_0^1(\Omega), \quad (4)$$

where  $(l, S) = (f, S) - \lambda(\nabla \varphi_0, \nabla S) - (\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_0, S) - (\varphi_0^3, S)$ . The proof of this problem's solution's existence can be got by the scheme, which was described in [1] for nonlinear hydrodynamic models with the help of Schauder's fixed point theorem. In addition for this case can be obtained nonlocal uniqueness of problem (1)'s solution.

Further the following extremum problem is studied:

$$J(\varphi, \psi) = \frac{\mu_0}{2} \|\varphi - \varphi_d\|_Q^2 + \frac{\mu_1}{2} \|\psi\|_{1/2, \Gamma}^2 \rightarrow \inf. \quad (5)$$

It consists of minimization of functional (5) on weak problem's solutions (here  $\varphi_d$  is a given concentration in some subdomain  $Q$ ). The existence of solutions can be proved by using the standart method of minimizing sequences, which is also described in [1]. Then the method of Lagrange multipliers should be justified according to [2]. As the result with the help of optimality system and weak formulation, in assumption that we have two solutions of optimal control problem and for each of them there are different functions  $f$  and  $\varphi_d$  as small disturbances, the estimates for stability of extremum problem's solutions are obtained:

$$\|\psi_1 - \psi_2\|_{1/2, \Gamma} \leq \sqrt{(2\mu_0/\mu_1)}(a\|f\| + b\sqrt{\|f\|} + c\|\varphi_d\|_Q); \quad (6)$$

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_1 \leq (M_\psi + C_\Gamma)\sqrt{(2\mu_0/\mu_1)}(a\|f\| + b\sqrt{\|f\|} + c\|\varphi_d\|_Q) + (1/\lambda_*)\|f\|. \quad (7)$$

So smallness conditions with some constants  $a, b$  and  $c$ , in case of which the solution of extremum problem is stable relatively to disturbances of  $\varphi_d$  and  $f$ , are got.

This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 14-11-00079).

## Bibliography

1. Alekseev G.V., Optimization in stationary problems of heat and mass transfer and magnetohydrodynamics. Moscow: Nauchnyi Mir, 2010. 412 p.
2. Ioffe A.D., Tikhomirov V.M., Theory of extremal problems. Amsterdam: Elsevier, 1978.
3. Alekseev G.V., Brizitskii R.V., Stability estimates for solutions of control problems for the Maxwell equations with mixed boundary conditions // Differential Equations. 2013. V. 49, N. 8. Pp. 963–974.
4. Alekseev G.V., Inverse extremal problems for stationary equations in mass transfer theory // Comp. Math. Math. Phys. 2002. V. 42, N. 3. Pp. 363–376.

# A THREE-DIMENSIONAL IMAGE RECONSTRUCTION ALGORITHM FOR ELECTRICAL IMPEDANCE TOMOGRAPHY USING PLANAR ELECTRODE ARRAYS

C. Sebu\*

\* *Department of Mathematics, University of Malta, Msida, MSD 2080, Malta  
e-mail: cristiana.sebu@um.edu.mt*

**Abstract.** Electrical Impedance Tomography (EIT) is a technology used to image the distribution of electrical properties such as conductivity and/or permittivity within an object using measurements of electric currents and voltages on its surface. Since different materials display different electrical properties, EIT can be used as a method of industrial, geophysical and medical imaging (see, for example, [1] and the references therein). The application of EIT considered in this paper is breast cancer imaging.

Several EIT mammographic sensors have been developed recently at the University of Mainz in collaboration with Oxford Brookes University. In contrast to most previous EIT instruments designed for breast cancer detection [2], but similar to devices studied by [3-6], these mammographic sensors are planar. Detailed descriptions of earlier prototypes can be found in [7-9]. The latest design consists of a planar sensing head with 36 disk electrodes of equal size arranged in a rectangular array of 20 outer (active) electrodes where the external currents are injected, and 16 inner (passive) electrodes where the induced voltages are measured [10]. The novelty of our EIT devices, and hence of the reconstruction methods proposed, consists exactly in the distinct use of active and passive electrodes. The active electrodes are used only for current injection while the passive electrodes only for voltage measurements.

A three-dimensional non-iterative reconstruction algorithm developed for conductivity imaging with real data collected on this latest planar rectangular array of electrodes is presented. The algorithm is based on linearizing the conductivity about a constant value and allows real-time reconstructions. The performance of the algorithm was tested on numerically simulated data and we successfully detected small inclusions with conductivities three or four times the background lying beneath the data collection surface. The results were fairly stable with respect to the noise level in the data and displayed very good spatial resolution in the plane of electrodes [10].

*Key words:* Inverse problems, ill-posed problems, Electrical Impedance Tomography (EIT), planar electrode arrays, breast cancer detection, image reconstruction

## Bibliography

1. Borcea L. Electrical Impedance Tomography// Inverse Probl. N. 18, 2002, p. R99-R136.
2. Zou Y, Guo Z. A review of electrical impedance techniques for breast cancer detection // Med End Phys, N. 25, 2003, p. 79-90.
3. Cherepenin V, Karpov A, Korjnevsky A, Kornienko V, Mazaletskaya A, Mazourov D, Meister D. A 3D electrical impedance tomography (EIT) system for breast cancer detection// Physiol Meas, N. 22, 2001, p. :9-18.
4. Cherepenin VA, Karpov AY, Korjnevsky AV, Kornienko VN, Kultiasov YS, Ochapkin MB, Tochanova OV, Meister JD, Three-dimensional EIT imaging of breast tissues: system design and clinical testing // IEEE Trans Med Imaging, N. 21, 2002, p. 662-667.



5. Mueller JL, Isaacson D, Newell JC. A Reconstruction Algorithm for Electrical Impedance Tomography Data Collected on Rectangular Electrode Arrays// IEEE Trans Biomed Eng, N. 46, 1999, p. 1379-1386.
6. Azzouz M, Hanke M, Oesterlein C, Schilcher K. The factorization method for electrical impedance tomography data from a new planar device// Int J Biomed Imaging 2007, Article ID 83016, 2007, 7 pages,
7. Hähnlein C, Schilcher K, Sebu C, Spiesberger H. Conductivity imaging with interior potential measurements// Inverse Probl Sc Eng, N. 19, 2011, p. 729-750.
8. Georgi K-H, Hähnlein C, Schilcher K, Sebu C, Spiesberger H. Conductivity Reconstructions using Real Data from a New Planar Electrical Impedance Device // Inverse Probl Sc Eng. 2013;21:801-822.
9. Gehre M, Kluth T, Sebu C, Maass P. Sparse 3D reconstructions in Electrical Impedance Tomography using real data// Inverse Probl Sc Eng, N. 22, 2014, p. 31-44.
10. Perez H, Pidcock M, Sebu C. A Three-dimensional Image Reconstruction Algorithm for Electrical Impedance Tomography using Planar Electrode Arrays// Inverse Probl Sc Eng, 2015 (submitted).

# BORG-LEVINSON THEOREM FOR ELLIPTIC OPERATORS

Valery S. Serov

*University of Oulu, Finland*

*e-mail: vserov@cc.oulu.fi*

**Abstract.** The analog of one-dimensional Borg-Levinson theorem for Sturm-Liouville operator on the finite interval is generalized for the magnetic Schrödinger operator and for the second order perturbation of the bi-harmonic operator in multidimensional smooth bounded domains.

*Key words:* Borg-Levinson, magnetic Schrödinger, bi-harmonic operator

The subject of this work concerns to the classical inverse spectral problem. Do the Dirichlet eigenvalues and some derivatives of the normalized eigenfunctions at the boundary determine uniquely the coefficients of the corresponding differential operators? For operators of order 2 this type of theorem is called Borg-Levinson theorem. In the case of the Schrödinger operators the knowledge of the Dirichlet eigenvalues and the normal derivatives of the normalized eigenfunctions at the boundary uniquely determine unknown potential (see Nachman, Sylvester and Uhlmann [1], see also Novikov [2]). This problem is reduced finally to the fact that the Dirichlet-to-Neumann map uniquely determines such potentials. Using the same technique for the magnetic Schrödinger operator (as well as for the Schrödinger operator) with singular coefficients Borg-Levinson theorem was proved by Serov [3] (see also [4] and [5]). For the operator of order 4 which is the first order perturbation of the bi-harmonic operator with Navier boundary conditions on a smooth bounded domain it was proved by Krupchyk, Lassas and Uhlmann [6] that the Dirichlet-to-Neumann map uniquely determines this first order perturbation. For Riemannian manifolds Borg-Levinson theorem was proved by Kachalov, Kurylev and Lassas (they call this problem as the Gelfand inverse problem for quadratic pencil) in series publications [7], [8]. For elliptic operators with constant coefficients and with potential see Ikehata [9] and Krupchyk and Päiväranta [10].

The main goal of present work is to show that the knowledge of the discrete Dirichlet spectrum and some special derivatives up to the first or third order of the normalized eigenfunctions at the boundary uniquely determine the coefficients of the magnetic Schrödinger operator or the coefficients of the second order perturbation of the bi-harmonic operator, respectively.

## References

1. Nachman A., Sylvester J., Uhlmann G. An  $n$ -dimensional Borg-Levinson theorem // *Comm. Math. Phys.* 1988. V. 115. P. 595–605.
2. Novikov R. G. Multidimensional inverse spectral problem for the equation  $-\Delta\psi + (v(x) - Eu(x))\psi = 0$  // *Funct. Anal. Appl.* 1988. V. 22. P. 263–272.
3. Serov V. S. Borg-Levinson theorem for magnetic Schrödinger operator // *Bull. Greek Math. Soc.* 2010. V. 57. P. 321–332.
4. Krupchyk K., Uhlmann G. Uniqueness in an inverse boundary value problems for a magnetic Schrödinger operator with a bounded magnetic potential // *Comm. Math. Phys.* 2014. V. 327. P. 995–1009.
5. Päiväranta L., Serov V. S. An  $n$ -dimensional Borg-Levinson theorem for singular potentials // *Adv. Appl. Math.* 2002. V. 29. P. 509–520.

6. Krupchyk K., Lassas M., Uhlmann G. Inverse boundary value problems for poly-harmonic operator // *Trans. Amer. Math. Soc.* 2014. V. 366. P. 95–112.
7. Kachalov A., Kurylev Y., Lassas M. Inverse boundary spectral problems // Chapman Hall/CRC, 2001.
8. Kurylev Y., Lassas M. Gelfand inverse problem for a quadratic operator pencil // *J. Funct. Anal.* 2000. V. 17. P. 247–263.
9. Ikehata M. A special Green's function for the bi-harmonic operator and its application to the boundary value problem // *Computers Math. Appl.* 1991. V. 22. P. 53–66.
10. Krupchyk K., Päivärinta L. A Borg-Levinson theorem for higher order elliptic operators// *Int. Math. Res. Not. IMRN.* 2012. V. 6. P. 1321–1351.

## НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЛЭКА-ШОУЛЗА

А.И. Шарамед, Д.В. Лукьяненко

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация

e-mail: sharamed.a@gmail.com, lukyanenko@physics.msu.ru

**Аннотация.** В работе рассматриваются некоторые особенности решения коэффициентной обратной задачи для параболического уравнения типа Блэка-Шоулза. Для повышения устойчивости получаемого численно решения используются эффективные численные методы (квазиравномерные сетки и схема Розенброка с комплексными коэффициентами) решения соответствующей прямой задачи, необходимость в многократном решении которой возникает при использовании градиентных методов при минимизации регуляризирующего функционала.

*Ключевые слова:* уравнение Блэка-Шоулза, обратная задача, параболическое уравнение, квазиравномерная сетка, схема Розенброка с комплексными коэффициентами (CROS).

## SOME FEATURES OF SOLVING OF INVERSE PROBLEM FOR THE BLACK-SCHOLES EQUATION

**Abstract.** In this work some features of solving of coefficient inverse problem for the Black-Scholes equation is considered. In order to enhance stability of its numerical solution we use highly efficient numerical method (quasi-uniform meshes and Rosenbrock scheme with complex coefficients) for solving of corresponding direct problem that is usually arisen in the process of using gradient methods of minimization of the regularizing functional.

*Key words:* Black-Scholes equation, inverse problem, parabolic equation, quasi-uniform mesh, Rosenbrock scheme with complex coefficients (CROS).

При решении рассматриваемого уравнения Блэка-Шоулза возникает необходимость в решении коэффициентной обратной задачи для уравнения параболического типа на всей числовой прямой [1]. В данной работе предлагается алгоритм ее решения с помощью регуляризирующего алгоритма, основанного на минимизации функционала А.Н. Тихонова [2]. Для минимизации функционала А.Н. Тихонова используются градиентные методы. При их реализации возникает необходимость многократного решения прямой задачи. Для более устойчивого решения прямой задачи предложено использовать квазиравномерные сетки и сведение с помощью метода прямых исходного уравнения в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которую можно решать с помощью высокоэффективных схем Розенброка с комплексными коэффициентами (CROS), обладающими повышенной устойчивостью [3].

### Литература

- [1] Yury M. Korolev, Hideo Kubo and Anatoly G. Yagola, Parameter identification problem for a parabolic equation – application to the Black–Scholes option pricing model, J. Inverse Ill-Posed Probl, de Gruyter, 2012.
- [2] Тихонов А.Н. Гончарский А.В. Степанов В.В. Ягола А.Г. *Численные методы решения некорректных задач* М.: Наука, 1990.
- [3] Н.Н. Калиткин, Е.А. Альшина. Численные методы: Кн. 1, М.: Издательский центр «Академия», 2013.

# ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ЭЛАСТОГРАФИИ НА ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КЛАССАХ РЕШЕНИЙ

А.Н.Шаров

*МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, Москва, Россия*

*e-mail: scharov.aleksandr@physics.msu.ru*

**Аннотация.** В работе представлено решение специальной обратной задачи эластографии: по известным значениям смещений тканей тела в рассматриваемой области определить распределение там модуля Юнга, предполагая, что модуль Юнга – постоянная функция внутри и вне искомым включений, геометрия которых задана параметрически. Проведена апостериорная оценка точности полученного численного решения.

*Ключевые слова:* эластография, восстановление модуля Юнга, обратная задача, апостериорная оценка точности.

## NUMERICAL SOLUTIONS OF INVERSE ELASTOGRAPHY PROBLEM TO PARAMETRIC CLASSES OF SOLUTIONS

**Abstract.** In this work some special inverse elastography problem is considering. It is needed to determine the distribution of Young's modulus using displacement of tissue that is known. An assumptions that the Young's modulus is the constant inside and outside of the required inclusions, the geometry of which is given parametrically is used. Performed a posteriority accuracy estimates for obtained numerical solution.

*Key words:* elastography, Young modulus reconstructions, inverse problem, a posteriority accuracy estimates.

Эластография – новая, активно развивающаяся технология в онкологии (см., например, [1]). При эластографических процедурах на изучаемую биологическую ткань дополнительно к ультразвуковому исследованию (УЗИ) накладывается низкочастотное давление. Известно, что здоровые и опухолевые ткани сокращаются по-разному. Это позволяет определить по смещениям ткани наличие и форму опухоли, даже если плотность опухоли мало отличается от плотности здоровой ткани – случай, в котором обычный ультразвук бессилён.

Рассматриваемая математическая прямая задача в двумерной постановке состоит в определении смещений  $u(x,y)$ ,  $v(x,y)$  вдоль оси  $x$  и  $y$  в прямоугольной области  $\Omega$  из системы уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \frac{E}{1+\nu} + \frac{E \cdot \nu}{(1+\nu)(1-\nu)} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{E \cdot \nu}{(1+\nu)(1-\nu)} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -K_x, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{E \cdot \nu}{(1+\nu)(1-\nu)} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \frac{E}{1+\nu} + \frac{E \cdot \nu}{(1+\nu)(1-\nu)} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -K_y, \end{cases}$$

где  $u(x,y)$ ,  $v(x,y)$  – функции, принадлежащие пространству  $W_2^2(\Omega)$ ,  $K_x$ ,  $K_y$  – компоненты объемной силы,  $\nu = 0,495$  – коэффициент Пуассона,  $E$  – модуль Юнга.

Граничные условия имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \left( \frac{1}{2} - \nu \right) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_1 = \frac{(1+\nu)(1-\nu)}{E} f_x, \nu \frac{\partial u}{\partial x} + (1-\nu) \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_1 = \frac{(1+\nu)(1-\nu)}{E} f_y, \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{2,3} = 0, \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{2,3} = 0, u \Big|_4 = 0, v \Big|_4 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где 1,2,3 и 4 – соответственно верхняя, левая, правая и нижняя границы области  $\Omega$ ,  $f_x$ ,  $f_y$  - функции, пропорциональные давлению на поверхность.

Обратная задача состоит в определении модуля Юнга  $E(x,y) \in Z(\Omega)$  по экспериментальным значениям смещений  $v_\delta(x,y)$ , где  $\delta$  – ошибка экспериментальных данных, такая, что  $\|v - v_\delta\|_{L^2} \leq \delta$ .

В данной работе предполагается, что модуль Юнга в рассматриваемой области имеет следующий вид:

$$E(x,y) = E_0 + \sum_{k=1}^N E_k \chi_k(x,y),$$

где  $\chi_k(x,y)$  - характеристические функции эллипсов, заданных параметрически (центр  $k$ -го эллипса  $(x_k, y_k)$ , большая и малая полуоси  $k$ -го эллипса  $a_k, b_k$ , угол поворота  $\varphi_k$   $k$ -го эллипса относительно оси  $x$ )<sup>1</sup>,  $N$  – число неоднородностей в виде эллипсов,  $E_0$  - фоновое значение модуля Юнга (значение вне эллипсов),  $E_k$  - значение модуля Юнга внутри  $k$ -го эллипса.

Таким образом, решается параметрическая обратная задача, состоящая в определении числа неоднородностей в виде эллипсов  $N$ , параметров эллипсов  $\vec{a}$  и значения модуля Юнга внутри каждого эллипса  $E_k$ .

Метод решения задачи состоит в следующем:

- Решаем обратную задачу для одного эллипса ( $N=1$ ). В процессе решения находятся оптимальные параметры  $\vec{a}^*$  и получается (относительная) невязка

$$\Delta(\vec{a}^*) = \|F(E(x,y;\vec{a}^*)) - v_\delta\| / \|v_\delta\|.$$

Если  $\Delta(\vec{a}^*) \leq \delta$ , то задача решена, и решение имеет вид

$$E(x,y) = E(x,y;\vec{a}^*) = E_0 + E_1 \chi_1(x,y).$$

- Если  $\Delta(\vec{a}^*) > \delta$ , то решаем обратную задачу для двух эллипсов ( $N=2$ ). Решение обозначим  $\vec{a}^{**}$ . Если для новой невязки оказывается, что  $\Delta(\vec{a}^{**}) \leq \delta$ , то задача решена, и решение имеет вид

$$E(x,y) = E(x,y;\vec{a}^{**}) = E_0 + E_1 \chi_1(x,y) + E_2 \chi_2(x,y).$$

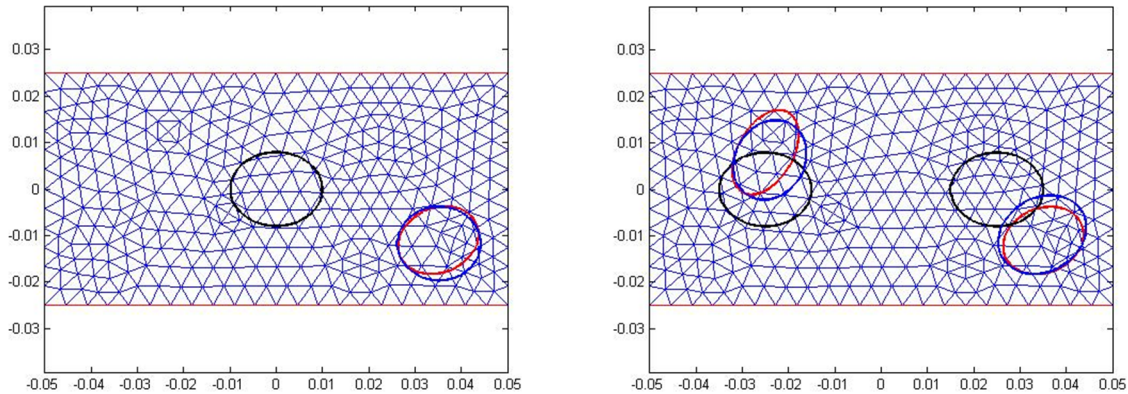
- Если  $\Delta(\vec{a}^{**}) > \delta$ , то решаем обратную задачу для трех эллипсов ( $N=3$ ). И т.д. При этом предполагается, что искомое параметрическое решение задачи существует. Дополнительно критерием остановки увеличения числа  $N$  является увеличение относительной невязки.

Обратная задача для каждого  $N$  решается путем минимизации невязки  $\Delta(\vec{a}) = \|F(E(x,y;\vec{a})) - v_\delta\| / \|v_\delta\|$  по параметрам решения  $\vec{a}$  при имеющихся ограничениях  $\vec{a} \in A$ .

Решалась модельная задача, в которой  $\Omega = \{[-0,05;0,05]\} \times [-0,025;0,025]$ ,  $K_x=0$ ,  $K_y=0$ , величины  $f_x, f_y$  из граничных условий имеют вид (1) с  $f_x=0$ ,  $f_y=-10 \text{ kPa}$ .

Приведем результаты решения модельной задачи, в которой ошибка входных данных составляла 5%. Слева результаты для задачи с точным решением в виде одной эллиптической неоднородности, справа – в виде двух эллиптических неоднородностей.

<sup>1</sup> Далее параметры эллипсов будем обозначать вектором  $\vec{a}$



Красным обозначено точное решение, синим – приближенное решение, черным – начальное приближение.

### Литература

1. Oberai A. A., Gokhale N. H. and Feijoo G. R. Solution of inverse problems in elasticity imaging using the adjoint method. 2003. *Inverse Problems*, V.19, pp. 297–313
2. Leonov A.S. Numerical piecewise-uniform regularization for two-dimensional ill-posed problems. *Inverse Problems*, 1999, V.15, pp.1165–1176.
3. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
4. Леонов А.С. Решение некорректно поставленных обратных задач. Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ. М.: УРСС, 2010. 326 с.
5. Leonov A.S. 2012 A posteriori accuracy estimations of solutions of ill-posed inverse problems and extra-optimal regularizing algorithms for their solution *Num. Anal. and Appl.* 5 no.1 68-83

# НОВЫЙ ПОДХОД К ВОССТАНОВЛЕНИЮ ФУНКЦИИ ОТКЛИКА В ПРИЛОЖЕНИИ К АСТРОНОМИЧЕСКИМ НЕРАВНОМЕРНЫМ ВРЕМЕННЫМ РЯДАМ

Е.В. Шимановская, В.Л. Окнянский, Е.А. Бруевич

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, Государственный астрономический институт им. П.К.Штернберга, Москва, Россия

e-mail: *eshim@sai.msu.ru, oknyan@mail.ru, red-field@yandex.ru*

**Аннотация.** Предлагается новый подход к восстановлению функции отклика излучающих областей астрономических объектов, сочетающий в себе кросс-корреляционный анализ неравномерных временных рядов наблюдений и метод регуляризации Тихонова. Восстановленную функцию отклика можно использовать для изучения структуры и физических свойств области излучения путем сравнения с функциями отклика, предсказанными различными моделями.

**Ключевые слова:** некорректные обратные задачи, интегральное уравнение Фредгольма 1 рода типа свертки, функция отклика, неравномерные ряды, внегалактическая астрономия, активные ядра галактик, кросс-корреляционный анализ

## NEW APPROACH TO RECONSTRUCTION OF THE RESPONSE FUNCTION FOR ASTRONOMICAL UNEVENLY SPACED TIME SERIES

**Abstract.** A new approach to reconstruction of the emitting medium response function for astronomical objects is suggested. It combines the cross-correlation analysis of observational unevenly spaced time series and Tikhonov regularization. Reconstructed response function can be used to investigate the structure and physical properties of the emitting medium though comparison with response functions, predicted by different models.

**Key words:** ill-posed inverse problems, Fredholm integral equation, convolution equation, response function, unevenly spaced time series, extragalactic astronomy, active galactic nuclei, reverberation mapping

В астрофизике достаточно типичной является ситуация, когда из наблюдений объекта регистрируются два сигнала  $F_1(t)$  и  $F_2(t)$ , где  $F_2(t)$  является результатом преобразования сигнала  $F_1(t)$  в некоторой физической среде:

$$F_2(t) \sim const + \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\tau) F_1(\tau - t) d\tau \quad (1)$$

Функция отклика  $\psi(\tau)$  определяется геометрией и физическими свойствами этой среды. Как правило, эти особенности являются ключевыми для моделей исследуемых объектов. Примерами таких задач являются исследования связи переменности континуума и широких эмиссионных линий в активных галактических ядрах, переменности континуума в оптическом и ИК диапазонах. В первом случае излучение центрального источника переизлучается плотными облаками в эмиссионных линиях. Во втором случае переменное коротковолновое излучение центрального источника переизлучается пылевыми облаками. В обоих случаях для понимания физики и геометрии объектов важно получить из наблюдений функцию  $\psi(\tau)$ , которую затем можно сравнить с функциями отклика, предсказанными различными моделями.



Типичной проблемой астрономических наблюдений является их неравномерность распределения во времени. Эта особенность не позволяет применять математические методы для получения  $\psi(\tau)$  непосредственно из соотношения (1). Существует ряд методов кросс-корреляционного анализа неравномерных временных рядов, позволяющих получить кросс-корреляционную функцию двух кривых блеска на равномерной сетке. При этом легко показать, что кросс-корреляционная функция  $CCF_{F_1, F_2}$  является сверткой авто-корреляционной функции  $ACF_{F_1}$  с функцией отклика  $\psi$ :

$$CCF_{F_1, F_2}(t) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\tau) ACF_{F_1}(\tau - t) d\tau \quad (2)$$

Относительно  $\psi(\tau)$  уравнение (2) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма 1 рода типа свертки, являющееся классической некорректно-поставленной обратной задачей. Для ее решения можно применить метод регуляризации Тихонова. Решение, полученное на пространстве функций, интегрируемых с квадратом, представлено на рис. 1. Используя априорную информацию, можно получить функцию отклика с другими свойствами гладкости. Наличие двух максимумов в функции отклика характерно для некоторых моделей.

Работа поддержана грантом РФФИ 14-02-01274

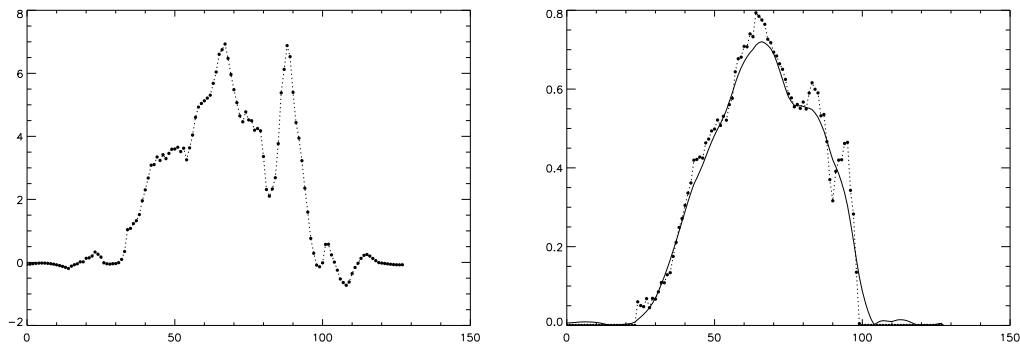


Рис. 1: Функция отклика, полученная из наблюдений NGC 7469 с помощью предлагаемого подхода (слева); кросс-корреляционная функция  $CCF_{F_V, F_K}$  для NGC 7469 (справа), сплошная линия соответствует найденной функции отклика

## Литература

1. Гончарский А.В., Черпацук А.М., Ягола А.Г. Некорректные задачи астрофизики. М.: Наука, 1985. 352 с.
2. Леонов А.С. Решение некорректно поставленных обратных задач: Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ. Либроком, 2010. 336 с.
3. Oknyansky V.L. et al. Correlation of Near-Infrared and Optical Variability of NGC 4151 in 2008–2013 // Astronomy Letters, 2014, V. 40, No. 9, pp. 527-536
4. Oknyansky V.L. et al. The relative wavelength independence of IR lags in AGNs: implications for the distribution of the hot dust // Odessa Astronomical Publications, 2015 (in preparation)
5. Suganuma M. et al. Reverberation Measurements of the Inner Radius of the Dust Torus in Nearby Seyfert 1 Galaxies // Astrophysical Journal, 2006, V. 639, 1, pp. 46-63
6. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.

# ОЦЕНКА СТЕПЕНИ НЕОДНОЗНАЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГЕОФИЗИКИ

М.И. Шимелевич

Российский государственный геологоразведочный университет им. С. Орджоникидзе,  
МГРИ-РГГРУ, Москва, Россия  
e-mail: shimelevich-m@yandex.ru

**Аннотация.** В статье рассматриваются априорные и апостериорные векторные характеристики степени неоднозначности приближенных решений нелинейных обратных задач геофизики, основанные на численных оценках модуля непрерывности обратного оператора и его модификациях. Приводятся примеры численного расчета характеристик степени неоднозначности решений обратных задач геоэлектрики.

*Ключевые слова:* нелинейная обратная задача, степень неоднозначности решения, модуль непрерывности обратного оператора.

## AMBIGUITY DEGREE ESTIMATION OF APPROXIMATE SOLUTIONS OF THE INVERSE PROBLEMS OF GEOPHYSICS

**Abstract.** In this article a priori and a posteriori characteristics of the ambiguity degree of nonlinear inverse geophysical problems approximate solution, based on numerical estimations of the modulus of continuity of the inverse operator and its modifications, are considered. Examples of numerical calculation of the characteristics of the ambiguity degree of approximate solution of geoelectric inverse problems are shown.

*Key words:* nonlinear inverse problem, ambiguity degree of the solution, the modulus of continuity of the inverse operator.

Многие обратные задачи геофизики сводятся к решению нелинейного операторного уравнения 1 рода вида [2]:

$$Ag = f, \quad g \in G_1 \subset G, \quad f \in F, \quad (1)$$

где  $G$ ,  $F$  - заданные нормированные пространства решений (искомых характеристик среды  $g$ ) и данных (измеряемых характеристик геофизического поля  $f$ ) соответственно,  $A$  - заданный непрерывный оператор прямой задачи, действующий из  $G$  в  $F$ ,  $G_1 = G_1[\Omega]$  - компактное множество функций, заданных в исследуемой области  $\Omega$  и определяющих свойства среды в этой области с учетом естественных априорных ограничений. При определенных дополнительных условиях, которые в данной работе считаются выполненными, задача решения (1) является условно-корректной [2]. Условно-корректные обратные задачи, являясь теоретически устойчивыми, могут оставаться практически неустойчивыми (плохо обусловленными), что приводит к практической неоднозначности приближенных решений. Любые два (эквивалентные) решения  $g_{\delta_1}, g_{\delta_2}$ , удовлетворяющие уравнению (1) при некоторой произвольно заданной правой части  $f$  с невязкой, не превышающей уровень погрешности данных  $\delta_0$ , не могут отличаться между собой на величину большую, чем  $\beta(2\delta_0)$  [4]:

$$\|g_{\delta_1} - g_{\delta_2}\|_G \leq \beta(2\delta_0), \quad (2)$$

где  $\beta(x)$  - модуль непрерывности обратного оператора для уравнения (1), определяемый выражением, не требующим знания обратного оператора  $A^{-1}$ , вида [1,2]:

$$\beta(x) = \sup_{g, g' \in G_1} \|g' - g\|_G \quad \text{при} \quad \|Ag' - Ag\|_F \leq x, \quad (3)$$

Функция  $\beta(2\delta_0)$  является *априорной* количественной характеристикой степени *неоднозначности* решений уравнения (1), находимых при любой правой части  $f \in F$  с невязкой  $\leq \delta_0$ . На основе модуля непрерывности обратного оператора (3), рассматриваемого при фиксированном  $g = g_{\delta_1}$ , определяется *апостериорная* характеристика  $\beta_1(g_{\delta_1}, 2\delta_1)$  степени *неоднозначности* фиксированного решения  $g_{\delta_1}$  уравнения (1), найденного при некоторой фиксированной правой части  $f_1 \in F$  с фактической невязкой  $\delta_1$  [3], которая позволяет объективно оценить качество проведенной интерпретации геофизических данных.

Функции  $\beta(2\delta_0)$ ,  $\beta_1(g_{\delta_1}, 2\delta_1)$  являются скалярными характеристиками, которые определяют степень неоднозначности решений обратной задачи интегрально по всей исследуемой области  $\Omega$ . В работе рассматриваются *векторные априорные*  $\beta^k(\Omega_k, 2\delta_0)$ ,  $k = 1, \dots, K$  и *апостериорные*  $\beta^k(g_{\delta_1}, \Omega_k, 2\delta_1)$ ,  $k = 1, \dots, K$  характеристики, определяющие степень практической неоднозначности решений уравнения (1) локально для  $k$ -ых подобластей  $\Omega_k$ ,  $k = 1, \dots, K$  исследуемой области  $\Omega = \bigcup_k \Omega_k$  [3], которые более дифференцированно отражают свойства решений обратных задач по сравнению со скалярными. Векторные характеристики степени *неоднозначности* основаны на значениях *модифицированного модуля непрерывности обратного оператора*  $\beta^k(\Omega_k, x)$ , который определяет количественные соотношения между изменениями свойств среды в заданной подобласти  $\Omega_k \subseteq \Omega$  и соответствующими им изменениями полей в области измерений [3].

На основе векторных и скалярных априорных характеристик решается задача выделения подмножества  $G_\beta(\delta_0, \varepsilon_0) \subset G_1$  решений уравнения (1), на котором априорная степень их неоднозначности не превышает заданной величины  $\varepsilon_0$ , при заданном уровне погрешности данных  $\delta_0$  [3]. В работе рассматриваются также *многокритериальные характеристики степени неоднозначности* решений обратной задачи, позволяющие оценить эффективность комплексирования геофизических критериев [3].

Задачи численного расчета рассмотренных характеристик степени неоднозначности сводятся к многократному решению нелинейных оптимизационных задач по функционалу с нелинейными ограничениями, и решаются в данной работе методами группы Монте-Карло [4]. Приводятся численные примеры расчета характеристик степени неоднозначности решений обратных задач геоэлектрики.

В работе использовались ресурсы суперкомпьютерных кластеров МВС-100К МСЦ РАН, «Ломоносов» и «Чебышев» НИВЦ МГУ. Исследование выполнено за счет гранта Российского Фонда фундаментальных исследований (проект 13-05-01135)

#### Литература

1. Иванов В. К. О некорректно поставленных задачах / В.К. Иванов // Математический сборник. — 1963. — № 61(103):2. — С. 211-223.
2. Лаврентьев М.М. Некорректные задачи математического анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. — М.: Наука, 1980. — 288 с.
3. Шимелевич М.И. Методы повышения устойчивости инверсии данных геоэлектрики на основе нейросетевого моделирования / М.И. Шимелевич // Геофизика. — 2013. — №4. — С. 49-55.
4. Шимелевич М.И. Аппроксимационный метод решения обратной задачи МТЗ с использованием нейронных сетей / М.И. Шимелевич, Е.А. Оборнев, И.Е. Оборнев, Е.А. Родионов // Физика Земли. — 2013. — №3. — С. 58-64.

# EXISTENCE THEORY AND REGULARIZATION OF IRREGULAR EQUATIONS<sup>1</sup>

Nikolay Sidorov *Irkutsk State University*

*e-mail: sidorovisu@gmail.com*

Denis Sidorov *Energy Systems Institute SB RAS*

*e-mail: dsidorov@isem.irk.ru*

**Abstract.** The regularization of linear equations with closed operators is considered. The stabilizing operator selection is discussed for regularized equation. Regularization parameter can be vector. The existence theory for systems of integral equations with piecewise continuous kernels is discussed. We also propose the method of degenerate differential equations reduction to non-classic IVP enjoying unique solution.

*Key words:* irregular equations, perturbation theory, integral equations, discontinuous kernel.

In this talk we deal with linear equations

$$Ax = f,$$

where  $A$  is closed operator acting in Banach space. It is assumed that only approximate  $\tilde{A}$  and source function  $\tilde{f}$  are known. The regularizing equations

$$\tilde{A}x + B(\alpha)x = \tilde{f}$$

with a vector parameter of regularization  $\alpha$  are constructed. Range of the operator can be open, and the homogeneous equation may have a non-trivial solution. The conditions of solution uniqueness for such auxiliary regularized equation are derived. The convergence of regularized solution to  $B$ -normal solution of the exact equation is proved. The bounds estimates are derived for both deterministic and stochastic cases. The choice of the stabilizing operator and vector regularization parameter are provided. The regularization parameter  $\alpha \in S$ , where  $S$  is open space  $\mathbb{R}^n$ ,  $0 \in \bar{S}$ ,  $\alpha = \alpha(\delta)$ , enjoy unique solution  $x_\alpha$ , and sequence  $\{x_\alpha\}$  as  $\delta \rightarrow 0$ ,  $S \ni \alpha(\delta) \rightarrow 0$  converges to  $B$ -normal solution  $x^*$  of exact equation  $Ax = f$ , if  $f \in R(A)$ . The theory is applied for regularization of systems of integral equations with piecewise continuous kernels

$$\int_0^{\alpha_1(t)} K_1(t, s)x(s) ds + \int_{\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} K_2(t, s)x(s) ds + \dots + \int_{\alpha_{n-1}(t)}^t K_n(t, s)x(s) ds = f(t).$$

Finally we discuss application of the skeleton decomposition of linear operator for degenerate differential equations reduction to non-classic initial value with unique solution.

## Список литературы

- [1] N. Sidorov, B. Loginov at al. Lyapunov-Schmidt methods in nonlinear analysis and applications. *Springer Science & Business Media*, 2013.
- [2] D. Sidorov, Integral Dynamical Models: Singularities, Signals and Control. Nonlinear Science Ser. A, Vol. 87, *World Scientific Publ.* 2015.

---

<sup>1</sup>This work is funded by RSF Grant No. 14-19-00054.

# О ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА С РАЗРЫВНЫМИ ЯДРАМИ

Д.Н. Сидоров *Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск, Россия*

*e-mail: contact.dns@gmail.com*

А.Н. Тында *Пензенский государственный университет, Пенза, Россия*

*e-mail: tyndaan@mail.ru*

И.Р. Муфтахов *Иркутский национальный исследовательский технический университет, Иркутск, Россия*

*e-mail: ildar\_sm@mail.ru*

**Аннотация.** В работе предлагаются численные методы решения линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра I рода с ядрами, претерпевающими разрывы первого рода вдоль семейства кривых. Методы основаны на применении квадратурной формулы средних прямоугольников и построении адаптивных сеток, учитывающих в каждый момент времени поведение кривых разрыва. Точность предлагаемых методов составляет  $\mathcal{O}(1/N)$  или  $\mathcal{O}(1/N^2)$ . Методика построения численных методов обобщена также на случай систем уравнений такого типа.

*Ключевые слова:* интегральные уравнения Вольтерра I рода; развивающиеся системы; модель Глушкова; численные методы.

## ON NUMERICAL METHODS FOR THE SOLUTION OF VOLTERRA EQUATIONS OF THE FIRST KIND WITH DISCONTINUOUS KERNELS

**Abstract.** In the work the numerical methods to solve linear and nonlinear Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels are suggested. The methods are based on the middle rectangle rule and the construction of the adaptive meshes taking into account the discontinuities behaviour. The accuracy of these methods is  $\mathcal{O}(1/N)$  or  $\mathcal{O}(1/N^2)$ .

*Key words:* Volterra integral equations; evolving systems; Glushkov's model; numerical methods.

В данной работе рассматриваются нелинейные слабо-регулярные уравнения Вольтерра I рода следующего вида

$$\int_0^t K(t, s, x(s)) ds = f(t), \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad f(0) = 0, \quad (1)$$

ядра которых определяются формулой

$$K(t, s, x(s)) = \begin{cases} K_1(t, s)G_1(s, x(s)), & t, s \in m_1, \\ \dots & \dots \\ K_n(t, s)G_n(s, x(s)), & t, s \in m_n, \end{cases}$$

где  $m_i = \{t, s \mid \alpha_{i-1}(t) < s < \alpha_i(t)\}$ ,  $\alpha_0(t) = 0$ ,  $\alpha_n(t) = t$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $\alpha_i(t)$ ,  $f(t) \in \mathcal{C}_{[0, T]}^1$ ,  $K_i(t, s)$  имеют непрерывные производные по  $t$  для  $t, s \in \overline{m_i}$ ,  $0 < \alpha_1(t) < \alpha_2(t) < \dots < \alpha_{n-1}(t) < t$ ,  $\alpha_1(t), \dots, \alpha_{n-1}(t)$  возрастают в малой окрестности  $0 \leq t \leq \tau$ ,  $K_n(t, t) \neq 0$ ,  $\alpha_i(0) = 0$ ,  $0 < \alpha'_1(0) \leq \dots \leq \alpha'_{n-1}(0) < 1$ .

Уравнения данного типа можно использовать в моделировании широкого круга задач, в частности задачи прогноза развития электроэнергетических систем на основе моделей Глушкова с учетом их возрастной структуры, где на разных участках жизни системы имеется свой коэффициент интенсивности использования мощностей.

Также рассматривается система интегральных уравнений

$$\int_0^t K(t, s)x(s) ds = f(t), \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad f(0) = 0, \quad (2)$$

где матричное ядро  $K(t, s)$  размерности  $m \times m$  имеет на компакте  $0 \leq s \leq t \leq T$  разрывы первого рода на кривых  $s = \alpha_i(t), i = 1, \dots, n - 1$ . Т.е.

$$K(t, s) = \begin{cases} K_1(t, s), & t, s \in m_1, \\ \dots & \dots \\ K_n(t, s), & t, s \in m_n, \end{cases} \quad (3)$$

Здесь  $m_i = \{t, s \mid \alpha_{i-1}(t) < s < \alpha_i(t)\}$ ,  $f(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t))'$ ,  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))'$ . Матрицы  $K_i(t, s)$  размерности  $m \times m$  определены, непрерывны и имеют непрерывные производные по  $t$  в соответствующих областях  $D_i = (s, t) \mid \alpha_{i-1}(t) < s < \alpha_i(t), i = 1, \dots, n$ ,  $\alpha_0(t) = 0$ ,  $\alpha_n(t) = t$ . Функции  $f_i(t), \alpha_i(t)$  имеют непрерывные производные,  $f_i(0) = 0, \alpha_i(0) = 0, 0 < \alpha'_1(0) \leq \dots \leq \alpha'_{n-1}(0) < 1, 0 < \alpha_1(t) < \alpha_2(t) < \dots < \alpha_{n-1}(t) < t$  при  $t \in (0, T]$ . Предполагается, что каждая из матриц  $K_i(t, s), i = 1, \dots, n$  имеет непрерывно дифференцируемое по  $t$  продолжение в область  $0 \leq s \leq t \leq T$ .

## Список литературы

- [1] Сидоров Д.Н., Тында А.Н., Муфтахов И.Р., Численное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода с кусочно-непрерывными ядрами *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование*, том. 7, выпуск 3, 2014, 107–115.
- [2] D.N. Sidorov, On parametric families of solutions of Volterra integral equations of the first kind with piecewise smooth kernel, *Differential Equations*, Vol. 49, N.2, 2013, 210–216.
- [3] D.N. Sidorov, Solution to systems of Volterra integral equations of the first kind with piecewise continuous kernels, *Russian Mathematics*, Vol. 57, 2013, 62–72.
- [4] E.V. Markova, D.N. Sidorov, On one integral Volterra model of developing dynamical systems, *Automation and Remote Control*, Vol. 75, No. 3, 2014, 413–421.
- [5] Boikov I.V., Tynda A.N., Approximate solution of nonlinear integral equations of developing systems theory. *Differential Equations*, Vol.39, 9, 2003, 1214-1223.
- [6] D.N. Sidorov, Volterra Equations of the First kind with Discontinuous Kernels in the Theory of Evolving Systems Control. *Stud. Inform. Univ.*, Vol. 9 (2011), 135–146
- [7] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery, Numerical recipes in C: the art of scientific computing. *Cambridge University Press*, 2nd ed.

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ПОЛИНОМОВ ВОЛЬТЕРРА

С.В. Солодуша

*Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск, Россия  
e-mail: solodusha@isem.irk.ru*

**Аннотация.** Рассматриваются динамические системы, допускающие активный эксперимент с помощью тестовых наборов возмущающих воздействий. Применены алгоритмы моделирования в виде полиномов Вольтерра. Идентификация полиномов проводится на основе эталонных моделей, описывающих объекты тепло- и электроэнергетики.

*Ключевые слова:* нелинейная динамика, полиномы Вольтерра, элемент теплообменного аппарата, ветроэнергетическая установка с горизонтальной осью вращения

## NUMERICAL MODELING ENERGY SYSTEMS BASED ON VOLTERRA POLYNOMIALS

**Abstract.** The algorithms of modeling dynamic systems that allow active experiments using test signals are considered. These algorithms in the form of the Volterra polynomials are used. Polynomials identification is based on reference models describing heat and power object.

*Key words:* nonlinear dynamics, Volterra polynomials, element of heat exchanger, a wind turbine with a horizontal axis of rotation.

Проблема восстановления многомерных переходных характеристик нелинейной динамической системы типа «черного ящика» является основной при аппроксимации непрерывного отображения входного сигнала  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$  в выходной  $y(t)$  с помощью полиномов Вольтерра  $N$ -ой степени в форме

$$y(t) = \sum_{n=1}^N \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq 2} \int_0^t \dots \int_0^t K_{i_1, \dots, i_n}(t, s_1, \dots, s_n) \prod_{k=1}^n x_{i_k}(s_k) ds_k. \quad (1)$$

Исследования Института систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН в области идентификации ядер Вольтерра были начаты в 90-х годах (см. обзорную статью [1]). Цель данной работы — на примере «эталонных» динамических систем рассмотреть новые алгоритмы построения интегральных моделей в виде полиномов Вольтерра (1) в наиболее важных для приложений случаях  $N = 2, 3$ .

Современные энергетические объекты характеризуются сложностью технологических схем и разнообразием процессов, протекающих в их элементах. Создание безопасных режимов эксплуатации оборудования — одна из ключевых задач перспективных энергетических технологий. В связи с этим актуальны исследования в области математического описания динамики энергетических систем.

В работе используются эталонные динамические системы из области тепло- и электроэнергетики. В первом случае рассмотрена математическая модель переходного процесса в элементе теплообменного аппарата (теплообменнике) с независимым подводом тепла, а во втором случае — математическая модель ветроэнергетической установки с горизонтальной осью вращения.

Эталонная модель теплообмена может быть представлена в виде [2]:

$$\Delta i_{et}(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_0^t \left( \Delta Q(\eta) - \frac{Q_0}{D_0} \Delta D(\eta) \right) \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 \int_0^\eta D(s) ds} & -\lambda_2 \int_0^\eta D(s) ds \\ -e^{-\lambda_2 \int_0^\eta D(s) ds} & -\lambda_1 \int_0^\eta D(s) ds \end{pmatrix} d\eta, \quad t \in [0, T]. \quad (2)$$

В (2)  $t$  — время, индексами "0" обозначены параметры начального стационарного режима,  $D_0 = 0.16$  (кг/с),  $Q_0 = 100$  (кВт),  $i_0 = 434$  (кДж/кг),  $\Delta$  — приращение, например  $D(t) = D_0 + \Delta D(t)$ ,  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — корни характеристического уравнения для некоторой системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Эталонная модель ветроэнергетической установки с горизонтальной осью вращения представлена с помощью методик [3, 4]:

$$Z(t) = \frac{\omega_T(t)R}{V(t)}, \quad z(t) = \left( \frac{1}{Z(t) + 0.08b(t)} - \frac{0.035}{b^3(t) + 1} \right)^{-1}, \quad (3)$$

$$C_p(t) = 0.22 \left( \frac{116}{z(t)} - 0.4b(t) + 5 \right) \exp \left( -\frac{12.5}{z(t)} \right), \quad (4)$$

$$M_T(t) = \frac{\rho S C_p(t) V^3(t)}{2\omega_T(t)}, \quad \frac{d\omega_T}{dt} = \frac{M_T(t) - M_C(t)}{J}, \quad \omega_T(0) = \omega_{T_0}, \quad (5)$$

где  $\omega_T$  (рад/с) — угловая скорость вращения элементов ветроустановки,  $\omega_{T_0}$  (рад/с) — некоторое стационарное значение угловой скорости вращения,  $M_T$  (Н·м) — крутящий момент, созданный аэродинамической силой,  $M_C$  (Н·м) — момент сопротивления нагрузки,  $J$  (кг·м<sup>2</sup>) — момент инерции движущихся частей ветровой турбины,  $\rho$  (кг/м<sup>3</sup>) — плотность воздуха,  $S$  (м<sup>2</sup>) — ометаемая площадь,  $R$  (м) — радиус ветроколеса,  $b$  (град) — угол наклона лопастей по нормали от направления ветра,  $V$  (м/с) — скорость ветра; безразмерные величины:  $C_p$  — коэффициент использования энергии ветра,  $Z$  — быстроходность,  $z$  — текущее значение быстроходности. Исследования, использующие модель (3)–(5), начаты в [5].

Вычислительный эксперимент показал, что изучаемые динамические системы в исследуемом диапазоне входных параметров являются нестационарными. Также получено, что интегральные модели, описывающие нелинейную динамику теплообмена, возможно упростить за счет стационарных свойств эталонной модели (2) относительно тепловой нагрузки.

## Литература

1. Apartsyn A.S., Solodusha S.V., Spiryaev V.A. Modeling of Nonlinear Dynamic Systems with Volterra Polynomials: Elements of Theory and Applications // The International Journal of Energy Optimization and Engineering. 2013. V. 2, iss 4. P. 16–43.
2. Таиров Э.А. Нелинейное моделирование динамики теплообмена в канале с однофазным тепло-носителем // Изв. АН СССР: Энергетика и транспорт. 1989. № 1. С. 150–156.
3. Пронин Н.В., Мартьянов А.С. Модель ветрогенератора ВЭУ-3 в пакете MATLAB // Вестник ЮУрГУ. Энергетика. 2012. № 37(296). С. 143–145.
4. Perdana A., Carlson O., Persson J. Dynamic Response of Grid-Connected Wind Turbine with Doubly Fed Induction Generator during Disturbances // Proc. of IEEE Nordic Workshop on Power and Industrial Electronics. Trondheim. 2004.
5. Suslov K.V., Gerasimov D.O., Solodusha S.V. Smart Grid: Algorithms for Control of Active- Adaptive Network Components // PowerTech 2015, Eindhoven, Netherlands, 29 June – 2 July 2015, № 461662.



# КОЛЛОКАЦИОННО-ВАРИАЦИОННЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

М.В. Булатов, Л.С. Соловарова

Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН,

Иркутск, Россия

e-mail: mvbul@icc.ru, soleilu@mail.ru

**Аннотация.** В докладе рассмотрена начальная задача для дифференциально-алгебраических уравнений. Для ее численного решения предложены коллокационно-вариационные разностные схемы. Приведен конкретный вид таких схем.

**Ключевые слова:** дифференциально-алгебраические уравнения, разностные схемы.

## COLLOCATION-VARIATION DIFFERENCE SCHEMES FOR DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC EQUATIONS

**Abstract.** In the report we consider initial value problem of differential-algebraic equations. Collocation-variation difference schemes are proposed for its numerical solution. The concrete form of these schemes is given.

**Key words:** differential-algebraic equations, difference schemes.

Рассмотрим систему

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) = f(t), \quad t \in [0, 1], \quad (1)$$

где  $A(t)$ ,  $B(t)$  –  $(n \times n)$ -матрицы,  $f(t)$  и  $x(t)$  – заданная и искомая  $n$ -мерные вектор-функции, элементы матриц  $A(t)$ ,  $B(t)$  и  $f(t)$  достаточно гладкие, с начальным условием

$$x(0) = x_0. \quad (2)$$

В докладе рассматривается случай

$$\det A \equiv 0.$$

Такие задачи принято называть дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ).

Предполагается, что общее решение системы (1) имеет вид

$$x(t, c) = \Phi(t)c + \int_0^t K_0(t, \tau)g(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^r K_j(t)f^{(j-1)}(t), \quad (3)$$

где  $\Phi(t)$ ,  $K_0(t, \tau)$ ,  $K_j$  –  $(n \times n)$ -матрицы,  $c \in R^n$ ,  $\text{rank } \Phi(t) = m = \text{const } \forall t \in [0, 1]$ , и на любом интервале  $[\alpha, \beta] \subseteq [0, 1]$  у системы (1) нет решений, отличных от (3). Принято называть  $r$  индексом системы (1).

Будем полагать, что начальные данные согласованы с правой частью.

Зададим на отрезке  $[0, 1]$  равномерную сетку  $t_l = lh$ ,  $l = 0, 1, \dots, N$ ,  $h = 1/N$ , и обозначим  $A_l = A(t_l)$ ,  $B_l = B(t_l)$ ,  $f_l = f(t_l)$ ,  $x_l \approx x(t_l)$ .

Приближенное решение в узлах сетки будем искать из условия минимума целевой функции

$$\Phi(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+1+l}), \quad (4)$$

где  $\Phi(\cdot)$  является квадратичной функцией с ограничениями типа равенств

$$A_{i+q} \sum_{j=0}^k \alpha_j^q x_{i+1+q} + hB_{i+q} \sum_j^k x_{i+1+q} = hf_{i+q}, \quad (5)$$

где  $q = 1, 2, \dots, p$ , причем  $p < k$ .

Таким образом, (4) и (5) являются задачей квадратичного программирования и представляют собой развитие идеи, изложенной в [1].

В докладе приведен анализ частных случаев такого подхода.

### Литература

1. Булатов М.В., Рахвалов Н.П., Соловарова Л.С. Численное решение дифференциально-алгебраических уравнений методом коллокационно-вариационных сплайнов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т.53, N 3. С.46–58.

## Численный анализ двумерной обратной задачи маскировки с использованием многослойных материалов

Ю.Э. Спивак<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия*  
*e-mail: u3l3i3y3a3@mail.ru*

**Аннотация.** В настоящей работе рассматривается обратная задача для 2D уравнения Гельмгольца с сингулярными переменными коэффициентами, к которой сводится задача маскировки цилиндра, покрытого многослойной оболочкой с кусочно постоянными параметрами. Указанная задача заменяется задачей приближенной маскировки. Степень приближения ее характеризуется неотрицательным параметром  $\delta \geq 0$ , имеющим смысл параметра регуляризации. Исследуются свойства решения для различных значений параметра регуляризации  $\delta$  и числа  $M$  слоев маскировочной оболочки для случаев поперечной магнитной (ТМ) и поперечной электрической (ТЕ) проницаемостей падающей плоской волны. Обсуждаются теоретические и численные аспекты описанного подхода.

*Ключевые слова: задача рассеяния, обратная задача, уравнение Гельмгольца, маскировка, метод сингулярного разложения, эффективная площадь рассеяния*

## Numerical analysis of 2D inverse cloaking problem using multi-layered materials

J.E. Spivak<sup>1</sup>,

<sup>1</sup> *Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia*  
*e-mail: u3l3i3y3a3@mail.ru*

**Abstract.** In this work, an inverse problem for 2D Helmholtz equation with the singular variable coefficients is considered, which describes the problem of cloaking of the cylinder that is coated with multi-layered cloak with piecewise constant parameters. The mentioned problem is replaced by approximating cloaking problem for which the degree of approximation is characterized by non-negative parameter  $\delta \geq 0$  that has meaning of the regularization parameter. The properties of solution are studied for different values of the regularization parameter  $\delta$  and the number of layers  $M$  for both transverse magnetic (TM) and transverse electric (TE) polarizations of the incident plane wave. Theoretical and numerical aspects of this approach are discussed.

*Key words: scattering problem, inverse problem, Helmholtz equation, invisibility cloaking, singular value decomposition, scattering width*

В последние годы большое внимание уделяется созданию средств маскировки материальных объектов от их обнаружения с помощью электромагнитной локации. Разработке методов решения указанных задач посвящено большое количество работ [1-3]. Однако техническая реализация решений, полученных в этих работах, весьма затруднительна из-за отсутствия в природе соответствующих маскировочных материалов, отвечающих найденным решениям. Существует несколько способов преодоления трудностей с технической реализацией решений. Один из таких способов заключается в замене точных решений задачи маскировки, описывающих сингулярные анизотропные параметры маскировочной оболочки [3,4,5,6,7], некоторыми приближенными (несингулярными) параметрами, и построением маскировочных устройств именно на основе использования этих приближенных решений. Основываясь на этой

идею, в работе исследуется метод приближенной маскировки тела цилиндрической формы, покрытого цилиндрической маскировочной оболочкой. Степень приближения характеризуется неотрицательным параметром  $\delta \geq 0$ , имеющим смысл параметра регуляризации, причем случай  $\delta = 0$  отвечает задаче точной маскировки, решение которой описывает технически нереализуемую оболочку. Еще один параметр  $M \geq 1$  описывает количество однородных анизотропных слоев с постоянными электрической и магнитной проницаемостями, составляющих искомую маскировочную оболочку. Как и в [7], каждый анизотропный слой, в свою очередь, заменяется двумя эквивалентными ему однородными изотропными слоями. С помощью метода Фурье находится решение задачи рассеяния плоской волны на указанной оболочке в виде рядов Фурье по цилиндрическим функциям. Коэффициенты этих рядов определяются путем решения системы  $4M + 3$  линейных алгебраических уравнений с плохо обусловленной при малых  $\delta$  и больших  $M$  матрицей. С учетом этого в работе развивается эффективный численный алгоритм решения рассматриваемой задачи маскировки, использующий метод сингулярного разложения матрицы указанной линейной системы, и разрабатывается комплекс программ, реализующий указанный алгоритм. Находится приближенное решение задачи маскировки, отвечающее разным значениям переменных параметров  $\delta$ ,  $M$  и других параметров, входящих в рассматриваемую задачу. В качестве основной информации о решении выдаются значения найденных параметров и значения так называемой эффективной площади рассеяния (ЭПР), которая определяется следующей формулой:

$$\sigma(\varphi) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} 2\pi\rho \frac{|E^S(\rho, \varphi)|^2}{|E^{inc}|^2} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} 2\pi\rho \frac{|H^S(\rho, \varphi)|^2}{|H^{inc}|^2}. \quad (1)$$

Разработан комплекс программ, реализующий разработанный алгоритм, выполнен цикл вычислительных экспериментов по его реализации в широком диапазоне изменения параметров задачи, проведен сравнительный анализ полученных результатов с результатами других авторов. Проведенный анализ показал эффективность разработанного алгоритма.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13-03-00313-а).

### Литература

1. Долин Л.С. О возможности сопоставления трехмерных электромагнитных систем с неоднородным анизотропным заполнением // Радиофизика. 1961. Т. 4. №5. С. 964-967.
2. Leonhardt U. Optical conformal mapping // Science. 2006. Vol. 312. №5781. P. 1777-1780.
3. Pendry J.B., Shurig D., Smith D.R. Controlling electromagnetic fields // Science. 2006. Vol. 312. №5781. P. 1780-1782.
4. Popa B.I., Cummer S.A. Cloaking with optimized homogeneous anisotropic layers // Phys. Rev. A. 2009. Vol. 79. P. 023806.
5. Алексеев Г.В. Оптимизация в задачах маскировки материальных тел методом волнового обтекания // Доклады Академии наук. 2013. Т. 449. № 6. С. 652.
6. Alekseev G.V. Cloaking via impedance boundary condition for 2-D Helmholtz equation // Applicable analysis Vol. 93. 2014. P. 254-268.
7. Zamel H. Approximate electromagnetic cloaking of a conducting cylinder using homogeneous isotropic multilayered materials // J. of El. Syst. and Inf. Techn. Vol. 1. 2014. P. 82-93.

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОГРАММНЫХ ПАКЕТОВ LAMMPS И GROMACS ДЛЯ ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НАПЫЛЕНИЯ НАНОСТРУКТУРИРОВАННЫХ ТОНКИХ ПЛЁНОК\*

А.В. Сулимов<sup>2</sup>, Д.В. Лукьяненко<sup>1</sup>, А.Н. Шаров<sup>1</sup>,  
М.Ю. Козьмин<sup>1</sup>, А.А. Горох<sup>2</sup>, С.А. Шарапова<sup>2</sup>

МГУ имени М.В. Ломоносова: физический факультет, Москва, Россия<sup>1</sup>,  
Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ имени М.В. Ломоносова,  
Москва, Россия<sup>2</sup>

e-mail: scharov.aleksandr@physics.msu.ru, kozminmyu@gmail.com,  
arturgorokh@yahoo.com, svet.sharapova@gmail.com, sulimovv@mail.ru,  
lukyanenko@physics.msu.ru

**Аннотация.** В работе представлен подход к молекулярному моделированию современных высокоэнергетических процессов напыления оптических нанопокровов диоксида кремния на подложку и его реализация с использованием суперкомпьютера «Ломоносов» и программных пакетов для решения задач молекулярной динамики LAMMPS и GROMACS.

*Ключевые слова:* наноструктуры, высокопроизводительные вычисления, математическое моделирование, молекулярная динамика, релаксационные процессы.

## USING OF LAMMPS AND GROMACS SOFTWARE PACKAGES FOR HIGH-PERFORMANCE DEPOSITION SIMULATION OF NANOSTRUCTURED THIN FILM

**Abstract.** The paper presents an approach to molecular modeling of modern high-energy deposition processes of optical coatings of silicon dioxide and its implementation using the supercomputer “Lomonosov” and the software packages for molecular dynamics Lammeps and Gromacs.

*Key words:* nanostructures, high performance computing, mathematical modeling, molecular dynamics, relaxation processes.

Напыление тонкоплёночных покрытий имеет множество практически важных приложений в науке и технике: от широко используемых потребительских продуктов таких, как мобильные телефоны, камеры, очки, до всех типов лазеров, телекоммуникационных фильтров и т.д. [1-3]. В работе представлен подход к молекулярному моделированию современных высокоэнергетических процессов напыления оптических нанопокровов диоксида кремния на подложку и его реализация с использованием суперкомпьютера «Ломоносов» и программных пакетов для решения задач молекулярной динамики LAMMPS и GROMACS. В результате работы были получены напылённые слои толщиной до нескольких десятков нанометров, содержащих более миллиона атомов.

Приведем описание процедуры напыления, используемой при симуляции напыления в LAMMPS. В данном численном эксперименте была использована версия LAMMPS v. 18 Sep. 2014, программа была скомпилирована на суперкомпьютере «Ломоносов» с дополнительными библиотеками USER-CUDA и USER-MISC. В качестве компилятора был использован mpicxx (OpenMPI).

В качестве области молекулярно-динамического моделирования был выбран параллелепипед размерами 28x23x30 нм с периодическими граничными условиями по всем направлениям. Размеры этой области не менялись во время моделирования. Используется ансамбль NVT, T = 300 К.

\* Работа выполнена при поддержке РФФ, код проекта 14-11-00409.

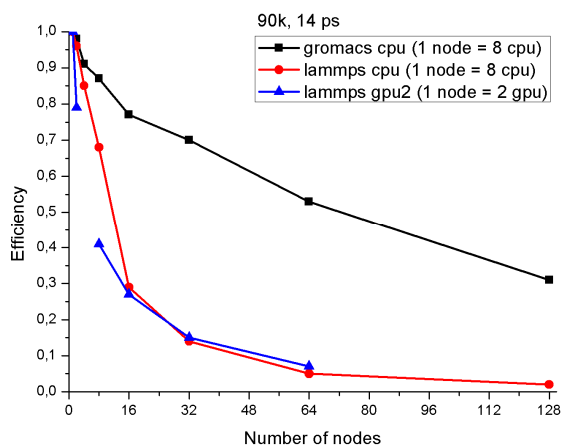
Стенка с потенциалом Ленарда-Джонса устанавливается в координате  $z=0$ . Сверху от этой стенки помещается предварительно приготовленная подложка стеклообразного  $\text{SiO}_2$ , состоящая из 90000 атомов.

Атомы кремния и кислорода вставляются на высоте 4 нм от поверхности пленки с энергиями 10 эВ и 0.05 эВ, соответственно. Положения для вставки атомов кремния и кислорода выбираются случайно, с равномерным распределением, и независимо друг от друга. Вставка атомов кремния происходит каждые 40 фс, кислорода – 20 фс.

В результате были получены свойства напыленного слоя, близкие к экспериментальным значениям. Плотность подложки  $2.158 \text{ г/см}^3$ , плотность пленки  $2,447 \text{ г/см}^3$  близки к экспериментальному значению  $2,2 \text{ г/см}^3$ .

Аналогичные результаты были получены и в результате процедуры напыления диоксида кремния с такими же параметрами с помощью пакета GROMACS. Соответствующая процедура подробно описана в работе [1] и не приводится здесь.

Исследовалась эффективность программных пакетов при использовании 90000 атомов на временах 14 пс. При расчете с помощью пакета LAMMPS использовались как вычислительные узлы CPU, так и графические узлы GPU. При этом на один узел приходится либо 8 CPU, либо 2 GPU.



**Рис. 1.** Эффективность распараллеливания программных пакетов Gromacs и LAMMPS.

Эффективность распараллеливания пакета Gromacs существенно выше эффективности распараллеливания пакета LAMMPS. Распараллеливание пакета Gromacs эффективно до 16 узлов включительно, в то время как распараллеливание LAMMPS эффективно лишь до 4-8 узлов.

### Литература

1. Grigoriev F.V., Sulimov A.V., Kochikov I.V., Kondakova O.A., Sulimov V.B., Tikhonravov A.V. High-performance atomistic modeling of optical thin films deposited by energetic processes // International Journal of High Performance Computing Applications. 2015. Vol. 29, No. 2. P. 184 -192.
2. Григорьев Ф.В., Кочиков И.В., Кондакова О.А., Сулимов В.Б., Тихонравов А.В. Алгоритм суперкомпьютерного моделирования напыления оптических нанопокровов // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии (Электронный научный журнал). 2013. Т. 14. С. 323–327.
3. Григорьев Ф.В., Сулимов В.Б., Кондакова О.А., Кочиков И.В., Тихонравов А.В. Пространственные и временные эффекты при осаждении частиц на тонкие пленки диоксида кремния, получаемые с использованием высокоэнергетических процессов напыления // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика, астрономия. 2013. № 3. С. 80-83.

**ОБРАТНАЯ НЕСАМОСОПРЯЖЕННАЯ ЗАДАЧА  
ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ,  
НЕЛИНЕЙНО ВХОДЯЩИМ В КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ**

Ya.T. Sultanaev<sup>1,2</sup>, A.M. Akhtyamov<sup>2,3</sup>, Kh.R. Mamedov<sup>4</sup>, F.A. Cetinkaya<sup>4</sup>  
<sup>1</sup>*M. Akmullah Bashkir State Pedagogical University*, <sup>2</sup>*Mavlutov Institute of Mechanics*,  
<sup>3</sup>*Bashkir state university, Ufa, Russia*; <sup>4</sup>*Mersin University, Mersin, Turkey*  
*e-mail: AkhtyamovAM@mail.ru, hanlar@mersin.edu.tr*

**Аннотация.** В статье доказана теорема единственности решения обратной несамосопряженной задачи Штурма-Лиувилля со спектральным параметром, нелинейно входящим в нераспадающиеся краевые условия. Этот результат является обобщением соответствующей теоремы единственности решения обратной задачи Штурма-Лиувилля с распадающимися краевыми условиями.

*Ключевые слова:* обратная задача Штурма-Лиувилля, функция Вейля, собственные значения, нераспадающиеся краевые условия

**AN INVERSE NONSELFADJOINT STURM-LIOUVILLE PROBLEM  
WITH SPECTRAL PARAMETER NONLINEARLY CONTAINED IN  
BOUNDARY CONDITIONS**

**Abstract.** The uniqueness theorem for the solution of an inverse nonselfadjoint Sturm-Liouville problem with spectral parameter nonlinearly contained in nonseparated boundary conditions is proved. The result obtained in the present paper generalizes the corresponding uniqueness theorem for solution of Sturm-Liouville problem with separated boundary conditions.

*Key words:* inverse Sturm-Liouville problem, Weyl function, eigenvalues, nonseparated boundary conditions

Let  $L_0$  denote the Sturm-Liouville problem

$$ly = -y'' + q(x)y = \lambda y = s^2 y, \quad (1)$$

$$U(y) := s^2 (y'(0) + h_1 y(0)) + h_2 y'(0) + h_3 y(0) + h(s) y(\pi) = 0,$$

$$V(y) := s^2 (y'(\pi) + H_1 y(\pi)) + H_2 y'(\pi) + H_3 y(\pi) + H(s) y(0) = 0.$$

Here  $q(x)$  is a continuous real valued function on the interval  $[0, \pi]$ ,  $h_i$  and  $H_i$  with  $i, k = 1, 2, 3$  are real constants,  $h(s)$  and  $H(s)$  are following polynomials:

$$h(s) = a_0 + a_2 s^2 + a_4 s^4 + \dots + a_{2m} s^{2m}; \quad H(s) = a_1 s + a_3 s^3 + a_5 s^5 + \dots + a_{2m-1} s^{2m-1};$$

where  $m$  is arbitrary natural number,  $a_i$  with  $i = 0, 1, \dots, 2m$  are real constants.

The Sturm-Liouville problem inverse to Problem  $L_0$  in the case of separated boundary conditions ( $h(s) = H(s) = 0$ ) is considered in [1]. Various inverse problems with nonseparated boundary conditions was studied by I.V. Stankevich, V.A. Sadovnichii, V.A. Yurko, V.A. Marchenko, O.A. Plaksina, M.G. Gasymov, I.M. Guseinov, I.M. Nabiev, and other authors (see [2,3]).

For the inverse problem of reconstructing Problem  $L_0$  in which all coefficients  $h_i$  and  $H_i$  with  $i, k = 1, 2, 3$  and  $a_i$  with  $i = 0, 1, \dots, 2m$  are unknown, no uniqueness theorems have been obtained.

In the present paper, we consider a nonself-adjoint Sturm-Liouville problem with nonseparated boundary conditions. We show that, for unique reconstruction of  $L_0$  we need  $2m+1$  eigenvalues of  $L_0$  and a Weyl Function  $M(\lambda)$  of an additional problem  $L_1$ .

Along with problem  $L_0$ , we consider the following two problems with separated boundary conditions.

*Problem  $L_1$ .* The Equation (1) with boundary conditions

$$U_0(y) := s^2 (y'(0) + h_1 y(0)) + h_2 y'(0) + h_3 y(0) = 0,$$

$$V_0(y) := s^2 (y'(\pi) + H_1 y(\pi)) + H_2 y'(\pi) + H_3 y(\pi) = 0.$$

*Problem  $L_2$ .* The Equation (1) with boundary conditions  $y(0) = 0$ ,  $V_0(y) = 0$ .

For problem  $L_0$ , we pose the inverse problem.

*Inverse problem.* Let the potential function  $q(x)$  and all coefficients in the boundary conditions of problems  $L_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) be unknown. The Weyl Function  $M(\lambda)$  of problem  $L_1$  and  $2m+1$  eigenvalues  $\lambda_m$  ( $m = 0, 1, \dots, 2m$ ) of problem  $L_0$  are known. Find a function  $q(x)$  and boundary conditions of problems  $L_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) by the Weyl function  $M(\lambda)$  of problem  $L_1$  and  $2m+1$  eigenvalues  $\lambda_m$  ( $m = 0, 1, \dots, 2m$ ) of problem  $L_0$ .

**Theorem 1.** *Suppose Problem  $L_0$  has discrete spectrum. Then Problems  $L_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) can be uniquely reconstructed from the Weyl function  $M(\lambda)$  of problem  $L_1$  and  $2m+1$  eigenvalues  $\lambda_m$  ( $m = 0, 1, \dots, 2m$ ) of problem  $L_0$ .*

For case Equation (1) the result obtained in the present paper generalizes Mamedov and Cetinkaya's uniqueness theorem [1] for inverse Sturm-Liouville problem with separated boundary conditions. In the case where Problem  $L_0$  is a spectral problem with separated boundary conditions ( $h(s) = H(s) = 0$ ), this problem coincides with Problem  $L_1$ . Therefore, Mamedov and Cetinkaya's uniqueness theorem [1] is a special case of Theorem 1.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project № 15-01-01095 a), by the Academy of Sciences of the Republic of Bashkortostan (project № 14-01-97010-r\_ povolzh'e) and by the Scientific and Technological Research Council of Turkey.

## References

1. Mamedov Kh.R. and Cetinkaya F.A. A Uniqueness Theorem for a Sturm-Liouville Equation with Spectral Parameter in Boundary Conditions // Appl. Math. Inf. Sci. 2015. Vol. 9, № 2, P. 981-988.
2. Akhtyamov A.M., Sadovnichy V.A., Sultanaev Ya.T. Generalizations of Borg's uniqueness theorem to the case of nonseparated boundary conditions // Eurasian mathematical journal. 2012. Vol. 3, № 4. P. 10-22.
3. Sadovnichii V.A., Sultanaev Ya.T., Akhtyamov A.M. General Inverse Sturm-Liouville Problem with Symmetric Potential // Azerbaijan Journal of Mathematics. 2015. Vol. 5, № 2, P. 96-108.



# О КОНЕЧНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

В.П. Танана

Южно-Уральский государственный университет(НИУ), Челябинск, Россия  
e-mail: tvpa@susu.ac.ru

**Аннотация.** Исследован регуляризирующий алгоритм приближенного решения интегральных уравнений первого рода, включающий конечномерную аппроксимацию исходной задачи. Получена оценка погрешности этого алгоритма, использующего дискретизацию интегрального уравнения первого рода по двум переменным.

**Ключевые слова:** интегральное уравнение, конечномерная аппроксимация, оценка погрешности.

## FINITE-DIMENSIONAL APPROXIMATION FOR INTEGRAL EQUATIONS

**Abstract.** A regularizing algorithm for the approximate solution of integral equations of the first kind, including the finite-dimensional approximation is studied and obtained the error estimate of this algorithm.

**Key words:** integral equation, finite-dimensional approximation, error estimate.

Рассмотрим интегральное уравнение первого рода

$$Au(s) = \int_a^b P(s, t)u(s)ds = f(t), \quad c \leq t \leq d, \quad (1)$$

где  $P(s, t)$  и  $P'_t(s, t) \in C([a, b] \times [c, d])$ ,  $u(s) \in L_2[a, b]$ ,  $f(t) \in L_2[c, d]$ .

Предположим, что при  $f(t) = f_0(t)$  существует единственное точное решение  $u_0(s)$  уравнения (1), которое принадлежит множеству  $M$ , где

$$M = \{u(s) : u(s), u'(s) \in L_2[a, b], u(a) = u(b) = 0\}.$$

Пусть точное значение  $f_0(t)$  не известно, а вместо него даны  $f_\delta(t) \in L_2[c, d]$  и  $\delta > 0$  такие, что  $\|f_\delta(t) - f_0(t)\| \leq \delta$ . Требуется по  $f_\delta(t)$ ,  $\delta$  и  $M$  определить приближенное решение  $u_\delta(s)$  уравнения (1) и оценить его отклонение от точного решения  $u_0(s)$  в метрике пространства  $L_2[a, b]$ .

Введем оператор  $B$ , отображающий пространство  $L_2[a, b]$  в  $L_2[a, b]$ , формулой

$$u(s) = Bv(s) = \int_a^s v(\xi)d\xi; \quad v(s), Bv(s) \in L_2[a, b] \quad (2)$$

и оператор  $C$

$$Cv(s) = ABv(s); \quad v(s) \in L_2[a, b], Cv(s) \in L_2[c, d]. \quad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что  $Cv(s) = \int_a^b K(s, t)v(s)ds$ , где  $K(s, t) = -\int_a^s P(\xi, t)d\xi$ .

Разобьем отрезок  $[a, b]$  на  $n$  равных частей точками  $s_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , а также отрезок  $[c, d]$  на  $m$  равных частей точками  $t_j = c + \frac{j(d-c)}{m}$ ,  $j = 0, 1, \dots, m-1$ .

Введем функции

$$\bar{K}_i(t) = K(s_i, t), \quad K_n(s, t) = \bar{K}_i(t); \quad s_i \leq s < s_{i+1}, \quad t \in [c, d], \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$K_{n,m}(s, t) = \bar{K}_i(t_j); \quad s_i \leq s < s_{i+1}, \quad t_j \leq t < t_{j+1}; \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

и определим операторы  $C_n$ ,  $C_{n,m}$  формулами

$$C_n v(s) = \int_a^b K_n(s, t)v(s)ds; \quad t \in [c, d], \quad C_{n,m}v(s) = \int_a^b K_{n,m}(s, t)v(s)ds; \quad t \in [c, d].$$

Для численного решения уравнения (1) оператор  $C$  заменим конечномерным  $C_{n,m}$  и найдем величину  $h_{n,m}$ , удовлетворяющую соотношению  $\|C_{n,m} - C\| \leq h_{n,m}$ , где

$$h_{n,m} = \sqrt{(b-a)(d-c)} N_1 \frac{d-c}{m} + \sqrt{b-a} \|N(t)\|_{L_2} \frac{b-a}{n},$$

$$N(t) = \max_{a \leq s \leq b} |P(s, t)|; \quad t \in [c, d] \text{ и число } N_1 = \max\{|K'_t(s, t)| : a \leq s \leq b; c \leq t \leq d\}.$$

Для решения уравнения (1) воспользуемся методом регуляризации

$$\inf\{\|C_{n,m}v(s) - f_\delta^m(t)\|^2 + \alpha\|v(s)\|^2 : v(s) \in L_2[a, b]\}, \quad \alpha > 0, \quad (4)$$

являющейся конечномерным вариантом метода регуляризации А.Н. Тихонова [1].

Задача (4) имеет единственное решение  $v_\delta^{\alpha(n,m)}(s)$ , в котором параметр  $\alpha(n, m)$  должен удовлетворять обобщенному принципу невязки [2].

$$\|C_{n,m}v_\delta^\alpha(s) - f_\delta^m(t)\| = \|v_\delta^{\alpha(n,m)}(s)\|h_{n,m} + \delta. \quad (5)$$

Вариационная задача (4) эквивалентна системе линейных алгебраических уравнений

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} b_{ik}v_i + \alpha v_k = g_k; \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$\text{где } b_{ik} = \frac{d-c}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \bar{K}_i(t_j)\bar{K}_k(t_j), \text{ а } g_k = \frac{d-c}{m} \sqrt{\frac{b-a}{n}} \sum_{j=0}^{m-1} \bar{K}_k(t_j)f_j.$$

Для приближенного решения  $u_{\delta, h_{n,m}} = Bv_\delta^{\alpha(n,m)}(s)$  уравнения (1) будет иметь место оценка

$$\|u_{\delta, h_{n,m}}(s) - u_0^n(s)\| \leq 2\omega(2\|v_0(s)\|h_{n,m} + \delta, \|v_0(s)\|),$$

$$\text{где } u_0^n = P_n u_0, \quad \omega(\tau, r) = \sup_u \{\|u\| : u \in M_r, \|Au\| \leq \tau\}.$$

## Литература

1. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР.1963. Т. 151, N 3. С. 501–504.
2. Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г. Обобщенный принцип невязки // Журн. вычисл. матем. и матем. физики.1973. Т. 13, N 2. С. 294–302.

## МАТРИЧНЫЕ И ТЕНЗОРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ МАЛОГО РАНГА В МАТЕМАТИКЕ И ПРИЛОЖЕНИЯХ

Е.Е. Тыртышников

*Институт вычислительной математики РАН, Москва, Россия.*

*E-mail: tee@inm.ras.ru*

**Аннотация.** В докладе будет рассказано о новых направлениях вычислительной линейной алгебры, которые получили развитие в ИВМ РАН за последние 20 лет. Ключевая роль в них принадлежит матрицам малого ранга, которые используются как для представления данных, в том числе многомерных матриц, так и для построения эффективных вычислительных алгоритмов. Мы обсудим различные методы представления и аппроксимации тензоров и связанные с ними математические вопросы, в том числе и открытые, и перспективы новых методов (тензорный поезд и др.), в которых все действия сводятся к матричным операциям. Новые области применений связаны с задачами оптимизации, в частности для докинга при разработке лекарственных препаратов и для идентификации параметров в моделях математической иммунологии. Получены также новые эффективные методы для специальных классов нестационарных задач, в частности для так называемого основного кинетического уравнения, и новые подходы к численному решению уравнений типа Смолуховского.

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СПИН-РЕШЕТОЧНОЙ РЕЛАКСАЦИИ

Усманов С.М., Шакирьянов Э.Д.

Бирский филиал Башкирского государственного университета

e-mail: usm@birsk.ru, eddydan@rambler.ru

**Аннотация.** В статье рассматриваются результаты численного расчета на основе регуляризирующего алгоритма А.Н.Тихонова мгновенных частотных характеристик (спектров времен корреляций) из экспериментальных измерений времени спин-решеточной релаксации для трехмерных полимеров олигокарбонат(мет)акрилатов, а также разделению и идентификации механизмов молекулярной подвижности в трехмерных полимерах в области проявления локального  $\beta$ -процесса ядерной магнитной релаксации.

*Ключевые слова:* некорректные задачи, ядерная магнитная релаксация, время спин-решеточной релаксации, трехмерные полимеры

## NUMERICAL SOLUTION OF INVERSE PROBLEMS SPIN-LATTICE RELAXATION

**Abstract.** The article discusses the results of a numerical calculation based on the regularizing algorithm Tikhonov instantaneous frequency characteristics (specters correlation times) from the experimental measurements of the spin-lattice relaxation time for the re-dimensional polymers oligokarbonat (meth) acrylates, as well as separation and identification of mechanisms of molecular mobility in the three-dimensional polymer in on-field displays the local  $\beta$ -process nuclear magnetic relaxation.

*Keywords:* ill-posed problems, nuclear magnetic relaxation time of the spin-lattice relaxation time, three-dimensional polymers

Согласно теории ядерной магнитной релаксации [1, 2] полимерные системы представляют собой многоспиновые молекулы с большим числом степеней свободы движения. Поскольку каждый элементарный механизм молекулярной подвижности характеризуется своим корреляционным временем ( $\tau$ ), то изучаемая полимерная система обладает целым спектром времен корреляций (СВК). В случае, когда основным компонентом взаимодействий в спиновой системе является внутримолекулярное диполь-дипольные взаимодействия, выражение для времени спин-решеточной релаксации ( $T_1$ ) запишется в виде [2]:

$$\frac{1}{T_1} = A \int_0^{\infty} \left[ \frac{\tau}{1 + \omega^2 \tau^2} + \frac{4\tau}{1 + 4\omega^2 \tau^2} \right] G(\tau) d\tau, \quad (1)$$

$A = \gamma^2 \Delta H_2^2 / 3$ ;  $\gamma$  – гиромагнитное отношение для протонов;  $\omega$  – резонансная частота;  $\Delta H_2^2$  – значение второго момента для жесткой решетки;  $G(\tau)$  – спектр времен корреляций.

Время корреляции молекулярной подвижности зависит от температуры по закону Аррениуса:

$$\tau = \tau_0 \exp\left(\frac{E}{RT}\right), \quad (2)$$

где  $\tau_0$  – частотный фактор,  $E$  – энергия активации рассматриваемого типа движения,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $T$  – абсолютная температура.

С помощью уравнений (1) и (2) можно описать экспериментальную зависимость времени  $T_1$  от температуры:

$$\frac{1}{T_1(T)} = K \int_a^b \left[ \frac{e^{\frac{2E}{RT}}}{1 + \omega^2 \tau_0^2 e^{\frac{2E}{RT}}} + \frac{4e^{\frac{2E}{RT}}}{1 + 4\omega^2 \tau_0^2 e^{\frac{2E}{RT}}} \right] \frac{F(E)}{T} dE, \quad (3)$$

где  $K = \frac{\gamma^2 \Delta H_2^2 \tau_0^2}{3R}$  – константа исследуемого вещества,  $F(E)$  – функция распределения по энергиям активаций, пределы интегрирования определяются условиями экспери-

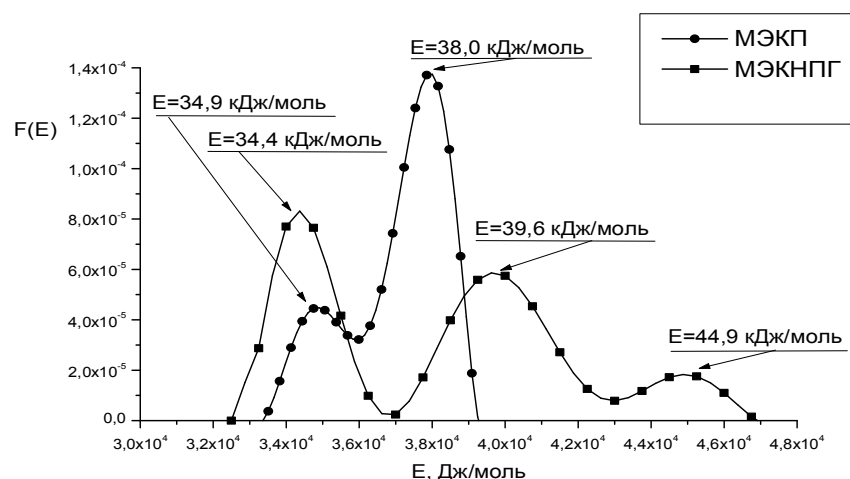


Рис.1. Результаты численного расчета функций по энергиям активации для образцов  $\alpha, \omega$ -бис(метакрилоилоксиэтиленоксикарбонилокси)-1,3-пропилен (МЭКП) и  $\alpha, \omega$ -бис(метакрилоилоксиэтиленоксикарбонилокси)-2,2-диметилпропилен (МЭКНПГ).

мента.

Уравнение (3) представляет собой уравнение Фредгольма первого рода и решается методом регуляризации А.Н. Тихонова [3]. Решение представлено на рис.1.

На основе численного решения обратной задачи спин-решеточной релаксации в области проявления  $\beta$ -перехода позволило идентифицировать наличие нескольких механизмов молекулярного движения, которые могут быть обнаружены только с помощью импульсного ЯМР-измерения [4].

### Литература

1. Релаксационные явления в полимерах. /Под ред. Бартенева Г.М., Зеленева Ю.В. Л.: Химия, 1972. С. 25-44.
2. Фаррар Т., Беккер Э. Импульсная и Фурье-спектроскопия ЯМР. М.: Мир, 1973. 166 с.
3. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 229 с.
4. Шакирьянов Э.Д., Усманов С.М., Сивергин Ю.М., Улитин Н.В. Исследование механизмов молекулярной подвижности в области  $\beta$ -процесса ядерной магнитной релаксации в трехмерных полимерах олигокарбонат(мет)-акрилатов//Вестник Казанского технологического университета. 2015. т. 18. № 1. С.15-19.

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

П.Н. Вабищевич<sup>1</sup>, В.И. Васильев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ИБРАЭ РАН, Москва, Россия

*e-mail: vabishchevich@gmail.com*

<sup>2</sup>СВФУ им. М.К. Аммосова, Якутск, Россия

*e-mail: vasvasil@mail.ru*

**Аннотация.** Среди обратных задач для уравнений в частных производных представляют интерес коэффициентные обратные задачи, которые связаны с идентификацией правой части уравнения при использовании некоторой дополнительной информации. При рассмотрении нестационарных задач можно выделить как самостоятельную задачу восстановления зависимости правой части от времени и задачу восстановления зависимости правой части от пространственных переменных. Эти задачи относятся к классу линейных обратных задач, что существенно упрощает их исследование. Работа посвящена проблеме определения зависимости правой части многомерного параболического уравнения от времени по дополнительным наблюдениям за решением в точке расчетной области. Чтобы решить численно обратную задачу для модельного уравнения в прямоугольнике мы используем стандартные разностные аппроксимации по пространству. Вычислительный алгоритм основан на специальной декомпозиции решения, при которой переход на новый временной слой реализуется на основе решения двух стандартных сеточных эллиптических задач. Представлены результаты численных экспериментов.

В работе рассматривается также задача определения младшего коэффициента многомерного параболического уравнения, который зависит только от времени. Для приближенного решения нелинейной обратной задачи строятся линеаризованные аппроксимации по времени

*Ключевые слова:* обратные задачи, идентификация коэффициентов, параболическое уравнение, разностные схемы.

## NUMERICAL SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEMS FOR PARABOLIC EQUATIONS

**Abstract.** Among inverse problems for partial differential equations, a task of interest is to study coefficient inverse problems related to identifying the right-hand side of an equation with the use of additional information. In the case of nonstationary problems, finding the dependence of the right-hand side on time and the dependence of the right-hand side on spatial variables can be treated as independent tasks. These inverse problems are linear, which considerably simplifies their study. The time dependence of the right-hand side of a multidimensional parabolic equation is determined using an additional solution value at a point of the computational domain. The inverse problem for a model equation in a rectangle is solved numerically using standard spatial difference approximations. The numerical algorithm relies on a special decomposition of the solution whereby the transition to a new time level is implemented by solving two standard grid elliptic problems. Numerical results are presented.

Also this work deals with the problem of determining in a multidimensional parabolic equation the lower coefficient that depends on time only. To solve numerically a nonlinear inverse problem, linearized approximations in time are constructed using standard finite element procedures in space.

*Key words:* inverse problems, identification of coefficients, parabolic equation, difference schemes

Большое внимание уделяется проблеме определения правой части, младших и старших коэффициентов параболического уравнения второго порядка. В частности, рассматриваются обратные задачи, в которых правая часть и коэффициенты зависят только от времени [1,2]. Дополнительные условия наиболее часто формулируются в виде задания решения во внутренней точке (точках) или как некоторое взвешенное среднее значение — результат интегрирования решения с некоторым весом по всей области на каждый момент времени. Существование и единственность решения таких обратных задач и корректность этих неклассических краевых задач в различных функциональных классах рассматривается многими авторами.

Прямая задача формулируется следующим образом. Ищется функция  $u(\mathbf{x}, t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,  $T > 0$ , которая удовлетворяет параболическому уравнению второго порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k(\mathbf{x})\operatorname{grad}u) = p(t)\psi(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 < t \leq T. \quad (1)$$

Граничные и начальное условия задаются следующим образом:

$$k(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (2)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3)$$

где  $n$  — нормаль к  $\partial\Omega$ . Формулировка (1)–(3) соответствует прямой задаче, в которой правая часть и коэффициенты уравнения заданы также как граничные и начальное условия.

Рассматривается обратная задача, в которой коэффициент  $p(t)$  в уравнении (1) неизвестен. Дополнительное условие часто задается в виде

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{x}, t)\eta(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \varphi(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (4)$$

где  $\eta(\mathbf{x})$  — весовая функция. В частности, выбирая в (4)  $\eta(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$  ( $\mathbf{x}^* \in \Omega$ ), где  $\delta(\mathbf{x})$  —  $\delta$ -функция Дирака, получим

$$u(\mathbf{x}^*, t) = \varphi(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (5)$$

Мы предполагаем, что сформулированная выше обратная задача по нахождению пары  $u(\mathbf{x}, t)$ ,  $p(t)$  из (1)–(3) и дополнительного условия (4) или (5) является хорошо поставленной.

## Литература

1. Вабищевич П.Н., Васильев В.И., Васильева М.В. Вычислительная идентификация правой части параболического уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55, № 6, С.1020–1027.

2. Vabishchevich P.N., Vasil'ev V.I. Numerically Solving the Identification Problem for the Lower Coefficient of a Parabolic Equation // Математические заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 4 (84), С.71–87.

Обратная спектральная задача для бигармонического оператора с точечными креплениями.

Н.Ф. Валеев

ИМВЦ УНЦ РАН, Уфа, Россия

e-mail: valeevnf@mail.ru

**Аннотация.** В работе исследуется обратная спектральная задача для бигармонического оператора с точечными креплениями. Поставленная задача сведена к многопараметрической обратной спектральной задаче для оператора в конечномерном пространстве. Получена теорема о существовании решений и предложен метод построения решений.

*Ключевые слова:* обратная спектральная задача, бигармонический оператор.

## THE INVERSE SPECTRAL PROBLEM FOR THE BIHARMONIC OPERATOR WITH OF POINT FIXINGS.

**Abstract.** In this paper we consider the inverse spectral problem for biharmonic operator with a finite number of point fixings. The aim of this paper is to prove the existense theorem and description of algorithms for the numerical decision of this problem. *Key words:* inverse spectral problem, biharmonic operator.

В работе рассматривается обратная спектральная задача для малых колебаний ортотропной пластины, несущей сосредоточенные массы  $m_j$  в точках  $M_j = M_j(x_j, y_j)$ , которые в свою очередь соединены с пружинами с коэффициентами жесткости  $k_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Суть обратной спектральной задачи состоит в определении коэффициентов жесткости и сосредоточенных масс по  $2n$  известным значениям частот собственных колебаний пластины.

При моделировании подобного рода конструкций бывает удобно интерпретировать присоединенные элементы с помощью  $\delta$ -функции Дирака. Степень идеализации модели в этом случае остается той же самой, что и при переходе от распределенной нагрузки к сосредоточенной силе. Потенциальная энергия исследуемой системы описывается квадратичной формой:

$$Q[u, u] = \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 - a \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] dx dy + \sum_{k=1}^m p_k |u(x_k, y_k)|^2$$

Уравнение движения имеет вид

$$a \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2b \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + a \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \left( \sum_{j=1}^n k_j \delta(x - x_j, y - y_j) \right) w + \rho h \left( \sum_{j=1}^n m_j \delta(x - x_j, y - y_j) \right) w_{tt} = 0 \quad (1)$$

к уравнению присоединим однородные граничные условия, записанные в общем виде  $l(w)|_{\partial\Omega} = 0$ . Под решением этой задачи будем понимать функцию из класса

$$D_L = \{w \in C^2(\Omega) | l(w)|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Далее обозначим

$$Lw = a \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2b \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + a \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$



Разделяя переменные в (1) и переходя к безразмерным величинам, получим задачу на собственные значения для пучка операторов

$$Lu + \left( \sum_{j=1}^n k_j \delta(x - x_j, y - y_j) \right) u - \lambda \left( 1 + \sum_{j=1}^n m_j \delta(x - x_j, y - y_j) \right) u = 0, \quad u \in D_L \quad (2)$$

При этом строгое определение указанного пучка операторов мы формулируем через квадратичную форму  $Q[u, u]$ .

**Постановка обратной спектральной задачи.** Требуется подобрать такие значения  $m_j$  точечных масс и коэффициентов жесткости пружин  $k_j$ , чтобы  $2n$  собственных значений операторного пучка (2) были равны наперед заданным числам  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n, \lambda_{n+1} < \dots < \lambda_{2n}$ .

Отметим, что в формулировке МПОСЗ количество неизвестных совпадает с количеством известных собственных значений.

Для формулировки основных результатов введем необходимые обозначения. Пусть  $G(M, M', \lambda)$  ядро оператора  $(L - \lambda I)^{-1}$ . Заметим, что оператор  $(L - \lambda I)^{-\frac{3}{4}}$  ядерный оператор и у ядра  $G(M, M', \lambda)$  нет особенностей, что важно для корректного определения следующей матрицы. Введем в рассмотрение

$$g(\lambda) = \begin{pmatrix} G(M_1, M_1, \lambda) & \dots & G(M_1, M_n, \lambda) \\ G(M_2, M_1, \lambda) & \dots & G(M_2, M_n, \lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ G(M_n, M_1, \lambda) & \dots & G(M_n, M_n, \lambda) \end{pmatrix},$$

диагональные матрицы  $\mathbf{k} = \text{diag}\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$   $\mathbf{m} = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$  и обозначим  $\vec{u}(\lambda) = (u(M_1, \lambda), u(M_2, \lambda), \dots, u(M_n, \lambda))^T$ .

С помощью преобразований исходная обратная спектральная задача приводится к многопараметрической обратной спектральной задаче (далее МПОСЗ) для оператора в конечномерном пространстве (размерности  $2n$ , в точности равного количеству неизвестных переменных  $m_j$  и  $k_j$ ) (см. [1]):

$$(I + g(\lambda)(\mathbf{k} - \lambda \mathbf{m})) \vec{u}(\lambda) = 0.$$

Теперь, используя результаты о МПОСЗ для конечномерных операторов (см. например [1]), получим теорему о существовании решений.

**Теорема 1** Пусть  $\text{rank} \Delta_0 = N_1$ , тогда рассматриваемая обратная спектральная задача для операторного пучка (2) имеет  $N_1$  изолированных и устойчивых к возмущениям спектральных данных решения.

В данном утверждении  $\Delta_k$  составляются из матриц  $g(\lambda_j)$ ,  $\lambda_j g(\lambda_j)$  (см. [1], [3]) и являются функциями координат точечных масс и собственных значений, т.е.  $\Delta_k = \Delta_k(\vec{\lambda}, M_1, M_2, \dots, M_n)$ .

Нами также доказано, что  $\text{rank} \Delta_0 \neq 0$  почти всюду (за исключением аналитического множества малой размерности).

### Литература

1. Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Валеев Н.Ф. Многопараметрические обратные спектральные задачи и их приложения. Доклады РАН. 2009. Т. 426, N 4. С. 1–4.
2. Базаров М.Б., Сафаров И.И., Шокин Ю.И. Численное моделирование колебаний диссипативно однородных и неоднородных механических систем. Издательство СО РАН, Новосибирск, 1996, 189 с.
3. Валеев Н.Ф. Обратная спектральная задача для конечномерных операторов. Уфимский математический журнал. 2010. т2. N 2, с.3-19

## ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА ГРАФЕ

Н.Ф. Валеев, Ю.В. Мартынова

*Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа, Россия*

*ООО «РН-УфаНИПИнефть», Уфа, Россия*

*e-mail: busa1987@mail.ru*

**Аннотация.** В работе исследуется модельная обратная спектральная задача для оператора Штурма-Лиувилля на геометрическом графе. Суть данной задачи состоит в восстановлении  $N$  параметров граничных условий по  $N$  собственным значениям. Установлено, что эта задача обладает свойством монотонной зависимости собственных значений от параметров граничных условий. Поставленная задача сведена к многопараметрической обратной спектральной задаче для оператора в конечномерном пространстве. Предложен новый алгоритм численного решения рассматриваемой задачи.

**Ключевые слова:** дифференциальный оператор, обратная спектральная задача, геометрический граф.

## INVERSE SPECTRAL PROBLEM FOR SHURM- LIOUVILLE OPERATOR ON GRAPH

**Abstract.** Investigate model inverse spectral problem for Shurm-Liouville operator on geometrical graph. This problem consists in finding  $N$  parameters of boundary conditions according to  $N$  eigenvalues. Establish, that given problem has property of monotonous dependence of eigenvalues from parameters of boundary conditions. Considered problem is reduced to multiparameter inverse spectral problem for the operator in a finite-dimensional space. Suggest new algorithm of numerical decision of this problem.

**Key words:** differential operator, inverse spectral problem, geometrical graph.

Рассматривается электрическая цепь в виде соединения типа «звезда» из трех звеньев, на каждом из которых задается уравнение электрических колебаний в проводнике длиной  $l_k$  с распределенными емкостью  $C_k$  и индуктивностью  $L_k$

$$L_k C_k (U_k)_{tt} = (U_k)_{x_k x_k} (x_k; t), x_k \in (0; l_k), k = \overline{1, 3}. \quad (1)$$

Граничные условия описывают ситуацию, когда  $k$ -ый проводник заземлен через сосредоточенную самоиндукцию  $\tilde{L}_k$  и емкость  $\tilde{C}_k$ , соединенные последовательно,

$$(U_k)_{x_k} (l_k; t) + C_k \tilde{L}_k (U_k)_{tt} (l_k; t) + \frac{C_k}{\tilde{C}_k} (U_k) (l_k; t), k = \overline{1, 3}. \quad (2)$$

В общем узле задаются условие непрерывности потенциала и условие баланса токов, известные как законы Кирхгофа

$$\begin{cases} U_1(0; t) = U_2(0; t) = U_3(0; t), \\ \sum_{i=1}^3 (U_i)_{x_i} (0; t) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Собственные колебания рассматриваемой динамической системы могут быть представлены в виде

$$U_k(x_k; t) = e^{i\omega t} y_k(x_k), k = \overline{1, 3}.$$

Тогда с учетом следующих обозначений

$$a_k^2 = \frac{1}{L_k C_k}, p_{k1} = \frac{C_k}{\tilde{C}_k} > 0, p_{k2} = -C_k \tilde{L}_k, k = \overline{1, 3}.$$

получим краевую задачу для оператора Штурма-Лиувилля

$$a_k^2 y_k''(x_k) + \lambda y_k(x_k), x_k \in (0; l_k), k = \overline{1, 3}, \quad (4)$$

с граничными условиями

$$y_k'(l_k) + (p_{k1} + \lambda p_{k2}) y_k(l_k) = 0, k = \overline{1, 3}, \quad (5)$$

и условиями в общем узле:

$$\begin{cases} y_1(0) = y_2(0) = y_3(0), \\ \sum_{i=1}^3 y_i'(0) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Обратная спектральная задача для краевой задачи (??)–(??) состоит в нахождении всевозможных значений вектора  $\vec{p} = (p_{11}, p_{21}, p_{31}, p_{12}, p_{22}, p_{32})$  коэффициентов граничных условий, при которых наперед заданные числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$  являются собственными значениями краевой задачи. В работе эта задача сведена к многопараметрической обратной спектральной задаче для оператора

$$B(\lambda, \vec{p}) = B_0(\lambda) + \sum_{k=1}^3 (p_{k1} B_{k1}(\lambda) + p_{k2} B_{k2}(\lambda)).$$

Последняя задача эквивалента решению системы 6 алгебраических уравнений

$$\det(B(\lambda_j, \vec{p})) = 0, j = \overline{1, 6} \quad (7)$$

относительно 6 неизвестных координат вектора  $\vec{p}$ . Отметим, что стандартные средства пакетов прикладных программ для вычислений, таких как MATLAB, Maple, с решением системы (??) не справляются.

В работе предложен метод численного решения многопараметрической обратной спектральной задаче для оператора  $B(\lambda, \vec{p})$ , основанный на монотонной зависимости собственных значений от параметров граничных условий  $p_{11}, p_{21}, p_{31}, p_{12}, p_{22}, p_{32}$  и являющийся аналогом метода деления отрезка пополам. Разработан прототип программного обеспечения в пакете MATLAB для реализации предложенного численного метода. Тестирование данного прототипа дало удовлетворительные результаты.

### Литература

1. Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Валеев Н.Ф. Многопараметрические обратные спектральные задачи и их приложения // Доклады РАН. 2009. Т. 426, N 4. С. 1–4.
2. Покорный Ю.В., Пенкин О.В., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит, 2005. 272 с.
3. Грэхем М., Глэдвелл Л. Обратные задачи теории колебаний. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. 608 с.
4. Валеев Н.Ф., Рабцевич С.А., Нугуманов Э.Р. О задаче определения параметров граничных условий оператора Штурма-Лиувилля по спектру // Вестник СамГУ – Естественнонаучная серия. 2009. N 6(72) С. 12–20.

# РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ПРОЦЕССЫ ГРАДИЕНТНОГО ТИПА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

В.В. Васин, А.Ф. Скурыдина

*Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского РАН, Екатеринбург,  
Россия*

*Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия*

*e-mail: vasin@imm.uran.ru, afnarpal@gmail.com*

**Аннотация.** Исследуется новый класс итерационных методов решения обратных задач, основанный на нелинейных регуляризованных аналогах  $\alpha$ -процессов. Формулируются теоремы сходимости, устанавливается регуляризующее свойство итераций и обсуждаются результаты численных экспериментов.

*Ключевые слова:* Нелинейные операторные уравнения,  $\alpha$ -процессы, регуляризация и модификация.

Для построения регуляризующего алгоритма (РА) обратной некорректно поставленной обратной задачи в форме нелинейного уравнения

$$A(u) = f \tag{1}$$

с монотонным оператором  $A$  и приближенно заданной правой частью  $f$ ,  $\|f - f_\delta\| \leq \delta$ , предлагается следующее семейство итерационных процессов:

$$u_\epsilon^{k+1} = u_\epsilon^k - \gamma \frac{\langle (A'(u_\epsilon^0) + \epsilon I)^\alpha S_\epsilon(u_\epsilon^k), S_\epsilon(u_\epsilon^k) \rangle}{\langle (A'(u_\epsilon^0) + \epsilon I)^{1+\alpha} S_\epsilon(u_\epsilon^k), S_\epsilon(u_\epsilon^k) \rangle} S_\epsilon(u_\epsilon^k), \tag{2}$$

где  $S_\epsilon(u) = A(u) + \epsilon u - f_\delta$ ,  $A'(u^0)$  — неотрицательно определенный самосопряженный оператор,  $u^0$  — некоторое пробное решение,  $-1 \leq \alpha < \infty$ .

При дополнительном условии, что оператор  $A$  удовлетворяет условию Липшица

$$\|A(u_1) - A(u_2)\| \leq N \|u_1 - u_2\|$$

и некотором требовании к начальному приближению, устанавливается сходимость итерационной последовательности  $\{u_\epsilon^k\}$  к решению регуляризованного уравнения

$$A(u) + \epsilon u - f_\delta = 0 \tag{3}$$

и дается оценка погрешности. Поскольку при принятых предположениях последовательность  $\{u_\epsilon\}$  решений уравнения (3) при  $\delta/\alpha(\delta)$  и  $\alpha(\delta) \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$  сходится к точному решению  $\bar{u}$  уравнения (1), то это позволяет построить регуляризованное семейство приближенных решений, аппроксимирующее  $\bar{u}$ , т.е., РА.

Заметим, что процессы (2) можно рассматривать как нелинейные аналоги регуляризованных  $\alpha$ -процессов для линейного оператора  $A$ . В частности, при  $\epsilon = 0, \gamma = 1$  и значениях параметра  $\alpha = -1, 0, 1$  процесс (2) переходит, соответственно, в метод минимальной ошибки, метод наискорейшего спуска и метод минимальных невязок для линейного оператора [1]. Итеративная регуляризация  $\alpha$ -процессов для линейного оператора на основе иного подхода рассматривалась в [2].

В общем случае, когда монотонность оператора  $A$  не предполагается, регуляризованными вариантами методов минимальной ошибки и наискорейшего спуска являются процессы [3]:

$$u^{k+1} = u^k - \gamma \frac{\langle [A'(u_\epsilon^k)^* A'(u_\epsilon^k) + \epsilon I]^{-1} S_\epsilon^k, S_\epsilon^k \rangle}{\|S_\epsilon^k\|^2}, \tag{4}$$

$$u^{k+1} = u^k - \gamma \frac{\|S_\epsilon^k\|^2}{\langle [A'(u_\epsilon^k)S_\epsilon^k, S_\epsilon^k] \rangle + \epsilon\|S_\epsilon^k\|^2}, \quad (5)$$

где  $S_\epsilon(u) = A'(u)^*A(u) + \epsilon(u - u_\epsilon^0) - A'(u)^*f_\delta$ . При замене оператора  $A'(u_\epsilon^k)$  на  $A'(u_\epsilon^0)$  процессы (4), (5) переходят в регуляризованные модифицированные версии.

Получены теоремы сходимости итерационных методов (4), (5) и их модифицированных аналогов и установлено свойство сильной фейеровости итераций [4]. В совокупности с результатами о сходимости решений регуляризованного уравнения

$$A'(u)^*A(u) + \epsilon(u - u_\epsilon^0) - A'(u)^*f_\delta = 0$$

либо уравнения

$$A'(u_\epsilon^0)^*A(u) + \epsilon(u - u_\epsilon^0) - A'(u)^*f_\delta = 0$$

к решению  $\bar{u}$  и оценкой погрешности регуляризованных аппроксимаций [5, 6], строится регуляризованное семейство приближенных решений, аппроксимирующее точное решение  $\bar{u}$  уравнения (1). В предположении, что выполнено условие истокообразной представимости решения доказывается оптимальность построенного РА.

Обсуждаются результаты численной реализации развитых методов на примере трехмерной обратной задачи гравиметрии на сетках большой размерности и дается сравнительный анализ их эффективности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-01-00629).

### Литература

1. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 455 с.
2. Bakushinsky A. B. and Goncharsky A. V. Ill-Posed Problems: Theory and Applications. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 1994, 257 p.
3. Vasin V. V. Irregular nonlinear operator equations: Tikhonov's regularization and iterative approximation // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2013. Vol. 21, No.1. P. 109–123.
4. Vasin V. V., Eremin I. I., Operators and Iterative Processes of Fejér Type. Theory and Applications. Berlin/ New York: Walter de Gruyter, 2009, 155 p.
5. Engl H. W., Hanke M. and Neubauer A. Regularization of Inverse Problems. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 1996, 321 p.
6. Vasin V. and George S. Expanding the applicability of Tikhonov's regularization and iterative approximation for ill-posed problems // Inv. Ill-Posed Problems. 2014. Vol. 22, No. 4. P. 593-607.

# УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГОГО ЭЛЕРОНА КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ В ПРОТОЧНОМ КАНАЛЕ

А.В. Анкилов, П.А. Вельмисов

Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск, Россия  
e-mail: ankil@ulstu.ru, velmisov@ulstu.ru

**Аннотация.** В статье предложена математическая модель крылового профиля с упругим элероном, расположенного в проточном канале и обтекаемого дозвуковым потоком идеального газа. Дано решение аэрогидродинамической части задачи, основанное на методах теории функций комплексного переменного. Получено интегро-дифференциальное уравнение, позволяющее исследовать динамику элерона. На основе исследования построенного функционала типа Ляпунова для этого уравнения получены условия динамической устойчивости элерона.

**Ключевые слова:** аэрогидроупругость, динамическая устойчивость, упругая пластина, крыловой профиль, канал, деформация, обтекание, дозвуковой поток.

## STABILITY OF ELASTIC AILERON OF WING PROFILE IN THE FLOWING CHANNEL

**Abstract.** In article the mathematical model of the wing profile with the elastic aileron located in the flowing channel and which is flowed round by a subsonic stream of ideal gas is offered. The decision of aerohydrodynamical part of a problem based on methods of the theory of functions of the complex variable is given. The integro-differential equation allowing to investigate the dynamics of the aileron is received. On the basis of research of the constructed functional of Lyapunov type for this equation the conditions of dynamic stability of the aileron are received.

**Key words:** aerohydroelasticity, dynamic stability, elastic plate, wing profile, channel, deformation, flow, subsonic stream.

Рассматривается плоская задача аэрогидроупругости о малых колебаниях упругого элерона тонкого крылового профиля при обтекании его бесциркуляционным потоком идеального газа (жидкости) в канале с прямолинейными стенками  $G = \{(x, y) : x \in (-\infty, +\infty), y \in (-H/2, H/2)\}$ , где  $x, y$  – декартовы координаты. Элерон моделируется упругой деформируемой пластиной. В физической плоскости  $Oxy$  упругому элерону соответствует на оси  $Ox$  отрезок  $[b, c]$  (рисунок 1).

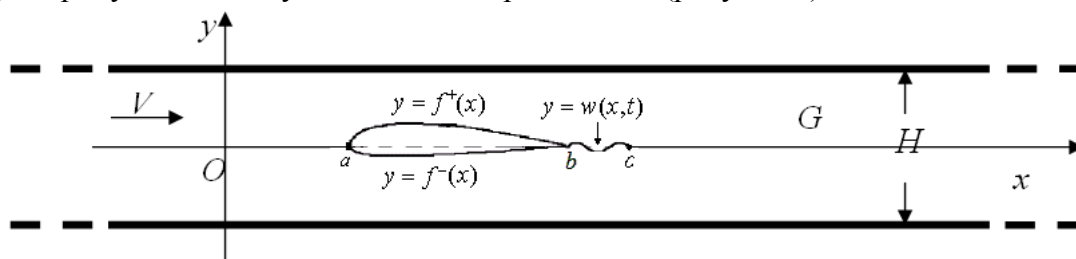


Рисунок 1 – Двустороннее безотрывное обтекание крылового профиля в проточном канале

Скорость набегающего потока газа (жидкости) равна  $V$  и направлена вдоль оси  $Ox$ , ширина канала равна  $H$ . Предполагается, что возмущение однородного потока и деформация упругого элерона малы. Введем обозначения:  $\varphi(x, y, t)$  – потенциал скорости потока,  $w(x, t)$  – деформация (прогиб) упругого элерона,  $f^+(x), f^-(x)$  – функции, определяющие форму недеформируемой части профиля ( $t$  – время).

Математическая постановка задачи имеет вид

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in G \setminus [a, c], \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_t^2) = 0, \quad (2)$$

$$\varphi_y \left( x, \mp \frac{H}{2}, t \right) = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad (3)$$

$$\varphi_y^\pm(x, 0, t) = \lim_{y \rightarrow 0 \pm 0} \varphi_y(x, y, t) = \begin{cases} Vf^{\pm'}(x), & x \in (a, b), \\ \dot{w}(x, t) + Vw'(x, t), & x \in (b, c). \end{cases} \quad (4)$$

Уравнение колебаний элерона с учетом аэрогидродинамического воздействия примет вид

$$M\ddot{w} + Dw'''' + \beta_0 w + \beta_1 \dot{w}'''' + \beta_2 \dot{w} = \rho(\varphi_t^+ - \varphi_t^-) + \rho V(\varphi_x^+ - \varphi_x^-), \quad x \in (b, c), \quad y = 0, \quad (5)$$

где  $\rho, M, D, N, \beta_0, \beta_1, \beta_2$  – постоянные параметры механической системы, штрих и точка обозначают частные производные по  $x$  и  $t$  соответственно.

На основе методов теории функций комплексного переменного для решения краевой задачи (1)–(4) выразили потенциал  $\varphi(x, y, t)$  через функцию прогиба  $w(x, t)$  и, согласно (5), получили уравнение для  $w(x, t)$

$$M\ddot{w} + Dw'''' + \beta_0 w + \beta_1 \dot{w}'''' + \beta_2 \dot{w} = -\frac{2\rho}{\pi} \int_b^c (\ddot{w}(\tau, t) + V\dot{w}'(\tau, t)) K(x, \tau) d\tau - \\ - \frac{2\rho V}{\pi} \int_b^c (\dot{w}(\tau, t) + Vw'(\tau, t)) K'_x(x, \tau) d\tau - \frac{\rho V^2}{\pi} \int_a^b (f^{+'}(\tau) + f^{-'}(\tau)) K'_x(x, \tau) d\tau, \quad x \in (b, c), \quad (6)$$

где  $K(x, \tau) = \gamma \int_a^x \frac{\text{cth}\gamma(\tau-x)\sqrt{h(\tau)}}{\sqrt{h(x)}} dx - \gamma^2 \left( \int_a^\tau \sqrt{h(\tau)} d\tau - \frac{\tilde{N}}{\tilde{M}} \int_a^\tau \frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}} \right) \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{h(x)}}$ ,  $\gamma = \frac{\pi}{H}$ ,

$$h(x) = \text{sh}\gamma(x-a)\text{sh}\gamma(c-x), \quad \tilde{N} = \int_a^c \sqrt{h(x)} dx, \quad \tilde{M} = \int_a^c \frac{dx}{\sqrt{h(x)}}.$$

Воздействие (6) получено при любых способах закрепления упругого элерона. Исследуется случай упругого соединения левого конца элерона с крылом и свободного правого конца, тогда граничные условия на концах элерона имеют вид:

$$w(b, t) = 0, \quad w''(b, t) = \alpha w'(b, t), \quad w''(c, t) = 0, \quad w'''(c, t) = 0, \quad (7)$$

где число  $\alpha$  – коэффициент жесткости упругой связи между крылом и элероном.

На основе исследования построенного функционала типа Ляпунова для уравнения (6) с граничными условиями (7) следующего вида

$$\Phi = \int_b^c \left\{ M\dot{w}^2 + Dw''^2 + \beta_0 w^2 + 2D\theta_1 \dot{w}'' w'' + \beta_2 \theta_1 \dot{w}''^2 + \beta_1 \theta_1 \dot{w}^2 + 2\beta_0 \theta_1 \dot{w} w + \right. \\ \left. + 2M\theta_2 \dot{w} w + \beta_2 \theta_2 w''^2 + \beta_1 \theta_2 w^2 \right\} dx + 2\alpha D\theta_1 w'(b, t) \dot{w}'(b, t) + \alpha Dw'^2(b, t) + \\ + \alpha \beta_2 \theta_1 \dot{w}'^2(b, t) + \alpha \beta_2 \theta_2 w'^2(b, t) + \frac{\rho}{\pi} \int_b^c dx \int_b^c (\dot{w}(x, t) \dot{w}(\tau, t) G_1(x, \tau) - V^2 w'(x, t) w'(\tau, t) G_1(x, \tau) - \\ - 4Vw'(x, t) \dot{w}(\tau, t) G_2(x, \tau) - 2V\theta_1 \dot{w}'(x, t) \dot{w}(\tau, t) K(x, \tau) - 2V^2 \theta_1 \dot{w}'(x, t) w'(\tau, t) K(x, \tau) - \\ - 2V\theta_2 w'(x, t) w(\tau, t) G_1(x, \tau) - 2V\theta_2 w'(x, t) w(\tau, t) G_2(x, \tau) + 2\theta_2 w(x, t) \dot{w}(\tau, t) G_2(x, \tau)) d\tau.$$

где  $G_1(x, \tau) = 0.5(K(x, \tau) + K(\tau, x))$ ,  $G_2(x, \tau) = 0.5(K(x, \tau) - K(\tau, x))$ , а  $\theta_1, \theta_2$  некоторые положительные параметры, получены условия динамической устойчивости элерона.

# АСИМПТОТИКО-ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЛОКАЛИЗАЦИИ И ДИНАМИКИ ВНУТРЕННИХ СЛОЕВ В СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

В.Т. Волков, Д.В. Лукьяненко, Н.Н. Нефедов

*Кафедра математики, физический факультет,*

*МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

*e-mail: volkovvt@mail.ru, lukyanenko@physics.msu.ru, nefedov@phys.msu.ru*

**Аннотация.** В работе рассматривается подход, позволяющий на основе асимптотического анализа развить экономичные численные алгоритмы решения задачи о локализации и динамике внутреннего слоя в сингулярно возмущенных параболических уравнениях. Это позволяет существенным образом понизить численную размерность решаемой задачи.

*Ключевые слова:* сингулярные возмущения, движущиеся фронты, внутренний слой, обратные задачи

## ASYMPTOTIC-NUMERICAL METHODS FOR LOCATION AND DYNAMICS OF INTERNAL LAYERS IN SINGULAR PERTURBED PARABOLIC PROBLEMS

**Abstract.** In this paper we discuss one approach based on asymptotic analysis to develop an economic numerical algorithms for solving the problem of location and dynamics of internal layers in singularly perturbed parabolic equations. The asymptotic approach allows to reduce the spatial dimension of the numerical problem, and highlight a priori information to optimize numerical calculations and save computational resources.

*Key words:* singular perturbations, moving fronts, internal layers, inverse problem

Известно, что сингулярно возмущенные параболические задачи при определенных условиях допускают решения, содержащие стационарные или движущиеся внутренние переходные слои (фронты). В процессе построения асимптотики локализация (скорость) фронта определяется, как правило, из условия гладкого сшивания асимптотических приближений. При этом, одно из граничных условий задается на некоторой неизвестной заранее кривой, т.е. асимптотическая процедура позволяет сформулировать задачу о нахождении положения (скорости) внутреннего слоя в форме  $A(x) = b$ , где  $x$  – искомое положение фронта, а оператор  $A$  ставит в соответствие каждому  $x$  из некоторой области разность значений производных решения по разные стороны от этой точки (кривой). В некоторых случаях удается провести процедуру сшивки аналитически и получить локализацию (скорость) фронта в явном виде, т.е. построить оператор  $A^{-1}$ . Однако, часто сделать это в явном виде невозможно, и приходится решать эту (обратную) задачу численно. При этом, асимптотический анализ позволяет понизить пространственную размерность задачи, что важно для численного решения. В работе предложены некоторые алгоритмы ее решения.

### Литература

1. N.N. Nefedov, L. Recke, K.R. Schneider "Existence and asymptotic stability of periodic solutions with an interior layer of reaction-advection-diffusion equations" // J. Math. Anal. Appl, V. 405, 2013, pp. 90–103.
2. V. Volkov, N. Nefedov, E. Antipov "Asymptotic-numerical method for moving fronts in two-dimensional r-d-a problems" // Lect. Notes in Comp. Science, V. 9045, 2015, pp. 408–416.



# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА $r$ -РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ЦУНАМИ

Т.А.Воронина

*Институт Вычислительной Математики и Математической Геофизики СО РАН,  
Новосибирск, Россия  
e-mail: vta@omzg.sccc.ru*

**Аннотация.** В работе рассматривается задача восстановления первоначальной формы волны цунами по измерениям колебаний уровня свободной поверхности, обусловленных прошедшей волной в серии удаленных приемников, которая ставится как обратная задача математической физики. Для решения этой некорректной задачи применяются метод наименьших квадратов и метод  $r$ -решений. Предложенная методика позволяет избежать неустойчивости численного решения рассматриваемой некорректной задачи. Эффективность предложенного подхода подтверждается путем численного моделирования источника цунами 2013 года вблизи Соломоновых островов.

**Ключевые слова:** некорректная задача, цунами, численное моделирование, регуляризация, сингулярное разложение,  $r$ -решение.

## APPLICATION OF THE $r$ -SOLUTION METHOD TO TSUNAMI INITIAL WAVEFORM RECOVERY

**Abstract.** The application of an inversion method to the problem of recovering the initial water elevation field generating a tsunami is considered. The ill-posed inverse problem at hand is regularized by means of the least square inversion using the truncated Singular Value Decomposition. As a result of the numerical process, an  $r$ -solution is obtained. The applied approach allows one to control the instability of the numerical solution and to obtain an acceptable result in spite of the ill-posedness of the problem. The algorithm was verified by the numerical simulation with a real data of 2013 Solomon Islands tsunami.

**Key words:** ill-posed inverse problem, numerical modeling, tsunami, regularization, singular value decomposition,  $r$ -solution

Катастрофические цунами последнего десятилетия в Тихом и Индийском океанах с особой остротой поставили вопрос о прогнозировании столь разрушительного события и разработке мер по смягчению последствий будущих ударов стихии. Цунами - это серия волн, движущихся с огромной скоростью и характеризующихся большой длиной. Такие волны формируются в результате резкого вертикального смещения больших объемов воды в океане. Для количественной оценки цунамиопасности конкретных участков побережья существенными оказываются характеристики самого очага, где, как правило, отсутствуют прямые приборные наблюдения. Анализ одних только сейсмических данных не позволяет дать достоверный прогноз о последующем цунами. В этих условиях математическое моделирование является почти единственным средством, позволяющим изучить закономерности процесса распространения цунами. Ключевым моментом численного моделирования цунами является конструирование источника, который генерирует волну цунами (под *источником* в дальнейшем будем понимать первоначальное поднятие морской поверхности в области источника). Этим объясняется увеличение интереса к обратной задаче цунами, которая заключается в восстановлении пространственно-временной области источника цунами по характеристикам регистрируемых волн в удаленных пунктах

наблюдения. Одной из целей настоящей работы является исследование возможности восстановления функции источника в зависимости от конфигурации используемой системы наблюдений и уровня зашумленности данных. Для решения обратной задачи об очаге цунами используется подход, в котором регуляризация оператора осуществляется путем сужения оператора на подпространство, натянутое на конечный набор первых сингулярных векторов. Строится обобщенное нормальное  $r$ -решение ([1]). Этот подход к решению задачи восстановления источника цунами был впервые предложен Т.А. Ворониной и В.А. Чевердой в работе [2]. Обоснование компактности оператора прямой задачи, исследование свойств оператора обратной задачи путем численного моделирования было изложено в работах [3], [4]. Зависимость качества восстановления от количества и азимутального расположения приемников и уровня шумов для модельного источника цунами исследовалось в работе [5]. Численное моделирование основано на линейной теории мелкой воды. Аппроксимация задачи осуществляется на основе конечно-разностного подхода. Предложенная методика позволяет избежать неустойчивости численного решения рассматриваемой некорректной задачи. Более того, анализ сингулярного спектра матрицы решаемой системы позволяет понять, как изменится результат инверсии при изменении используемой системы наблюдения. Преимуществами метода являются: 1) не предполагается никакой дополнительной информации об источнике, кроме самой области локализации; 2) решение строится на основе анализа свойств оператора, определяемых выбранной системой наблюдения и реальной батиметрией, что позволяет получить максимально надежный результат восстановления для заданных условий. На сегодняшний день этот подход дает наиболее реалистическую и обоснованную оценку эффективности выбранной системы наблюдения. Установлено, что качество получаемого решения существенно зависит от пространственного распределения регистрирующей системы относительно предполагаемого очага цунами, количества регистраторов, особенностей рельефа дна и уровня шумов. Эффективность предложенного подхода подтверждается путем численного моделирования для реального события 2013 года вблизи Соломоновых островов с использованием реальных данных. Полученные выводы могут быть использованы при проектировании систем наблюдения за цунами.

### Литература

1. Cheverda V.A., Kostin V.I.  $r$ -pseudoinverse for compact operator // Siberian Electronic Mathematical Reports, 2010, V. 7, P.258-282.
2. Voronina, T. A. and Tcheverda, V. A. Reconstruction of tsunami initial form via level oscillation // Bull. Nov. Comp. Center, Math. Model. Geoph., 1998, V. 4, P.127-136.
3. Воронина Т.А. Определение пространственного распределения источников колебаний по дистанционным измерениям в конечном числе точек // Сиб.Журн. Вычисл. Математики, 2004, Т. 7, С.203-211.
4. Voronina T. A., Tcheverda V. A. and Voronin V. V. Some properties of the inverse operator for a tsunami source recovery // Siberian Electronic Mathematical Reports, 2014, V. 11. P.532-547.
5. Voronin V.V., Voronina T.A., and Tcheverda V.A. Inversion method for initial tsunami waveform reconstruction // Nat. Hazards Earth Syst. Sci., 2015, V. 15, P. 1251-1263.

## Numerical methods of solving inverse problems of physiology. Identifiability concepts. Software development.

D.A. Voronov\*, S.I. Kabanikhin\*, O.I. Krivorotko\*

\* *Novosibirsk State University*

\* *Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS*  
*e-mail: dmitriy.voronov.89@gmail.com*

**Abstract.** The analysis of a biological data is a key topic in bioinformatics, computational genomics, molecular modeling and systems biology. The methods covered in this talk could reduce the costs of conducting experiments on obtaining a biological data. The problem of identifiability of mathematical models of physiology, pharmacokinetics and epidemiology is considered in this report. The definition of identifiability of mathematical models is considered. The review of methods of analysis of identifiability of dynamic models is given. The necessity of making a priori identifiability analysis before estimating parameters characterizing any process is demonstrated on several examples. The examples of identifiability analysis of mathematical models of medical biology are presented. Different approaches of estimating physiological parameters are covered in this talk. Special software for modeling pharmacokinetic, epidemiology and immunology processes is presented in this report.

*Key words:* identifiability, inverse problem, epidemiology, pharmacokinetics, numerical methods

### Bibliography

1. Carson E., Cobelli C. Introduction to Modelling in Physiology and Medicine // Academic Press, 2008. 337 p.
2. Meshkat N. Identifiable reparametrizations of linear compartment models. // Journal of Symbolic Computation, 2014; 63: 46-67. DOI: 10. 1016/j.jsc.2013.11.002.

## Synchrotron-based regularizing micro-CT imaging in shale structure analysis

Yanfei Wang

*Key Laboratory of Petroleum Resources Research, Institute of Geology and Geophysics,  
Chinese Academy of Sciences, P. O. Box 9825, Beijing, 100029. P. R. China.*

*e-mail: yfwang@mail.iggcas.ac.cn*

**Abstract.** With the development of nonconventional oil and gas exploration, microscopic analysis of mineral distributions in shale receives much more attention in recent years. Meanwhile X-ray computerized tomography (CT) based on synchrotron radiation (SR), as a non-destructive technique, become an important tool and can be applied to the study of morphology, microstructure, transport properties and fracturing of shale. Traditional methods such as optical and scanning electron microscopy (SEM) are common tools for providing valuable information of microstructures; however, those surface observations are often inadequate in obtaining detailed 3D information of the sample, such as compositional distribution inside the shale. Moreover, samples of shale are usually damaged during serial sectioning. Therefore two scientific issues rose: one is how to generate high level reconstructed image data using SR-CT, another is how to use these CT image data to analyzing compositional microstructures. We study sparse regularization methods for reconstruction of image using SR-CT data. In addition, we study microstructure prediction with a volume of material on a simple cubic lattice, where each site, or voxel, represents a small region of space containing a mixture of compositions forming the material. Numerical experiments are performed to show feasibility of our algorithms..

*Key words:* Micro-CT imaging, sparse regularization, shale structure

### Bibliography

1. G. T. Herman. Fundamentals of Computerized Tomography: Image Reconstruction from Projections // Springer, 2 ed., 2009.
2. R. A. Ketcham, W. D. Carlson. Acquisition, optimization and interpretation of X-ray computed tomographic imagery: applications to the geosciences // Computers & Geosciences, V. 27, 2001, p. 381-400.
3. L. Riepe, M. H. B. Suhaimi, M. Kumar, M. A. Knackstedt. Application of high resolution micro-ct imaging and pore network modeling (PNM) for the petrophysical characterization of tight gas reservoirs - a case history from a deep clastic tight gas reservoir in Oman // SPE-142472-PP, 2011, p. 1-13.
3. Y. F. Wang. Seismic impedance inversion using  $l_1$ -norm regularization and gradient descent methods // J. Inv. Ill-Posed Problems, v. 18, 2011, p. 823-838.
4. Y. F. Wang. Sparse optimization methods for seismic wavefields recovery // Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, v. 18, 2012, p. 42-55.
5. Y. F. Wang, A. G. Yagola, C. C. Yang (editors). Computational Methods for Applied Inverse Problems // Series: Inverse and Ill-Posed Problems Series 56, Walter de Gruyter, 2012.

## МНОГОМЕРНЫЕ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ

А.Г.Ягола

Физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва, Россия

e-mail: yagola@physics.msu.ru

**Аннотация.** В докладе рассматриваются теоретические основы и численные методы решения многомерных некорректных задач.

*Ключевые слова:* некорректно поставленные задачи, многомерные задачи

### MULTIDIMENSIONAL ILL-POSED PROBLEMS

**Abstract.** In the talk we will consider theoretical and numerical approaches for solving multidimensional ill-posed problems.

*Key words:* ill-posed problems, multidimensional problems

В настоящее время наибольший интерес представляют возникающие на практике многомерные обратные некорректно поставленные задачи. В докладе рассматриваются задачи обработки изображений в астрономии, цифровой фотографии, электронной микроскопии, задача восстановления магнитного поля корабля. При решении трехмерных задач очень важно использование распараллеливания и высокопроизводительных вычислительных кластеров.

Работа поддерживалась грантами РФФИ 14-01-00182 и РФФИ-ГФЕН 14-01-91151.

#### Литература

1. E. Koptelova, E. Shimanovskaya, B. Artamonov, M. Sazhin, A. Yagola, V. Bruevich, O. Burkhonov. Image reconstruction technique and optical monitoring of the QSO 2237+0305 from Maidanak Observatory in 2002-2003. – Monthly Notices of Royal Astronomical Society, 2005, v. 356, pp. 323-330.
2. А.Г.Ягола, Н.А.Кошев. Восстановление смазанных и дефокусированных цветных изображений. – Вычислительные методы и программирование, т. 9, 2008, с. 207-212.
3. S. Titarenko, Philip J. Withers. A. Yagola. An analytic formula for ring artefact suppression in X-ray tomography. – Applied Mathematics Letters, v. 23, № 12, 2010, pp. 1489-1495.
4. Н.А.Кошев, Ф.А.Лукьянов, Э.И.Рау, Р.А.Сеннов, А.Г.Ягола. Повышение пространственного разрешения в режиме отраженных электронов в сканирующей электронной микроскопии. - Известия РАН, серия физическая, 2011, т.75, №9, с. 1248-1251.
5. D.V. Lukyanenko, A.G. Yagola, N.A. Evdokimova. Application of inversion methods in solving ill-posed problems for magnetic parameter identification of steel hull vessel. – Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2011, v. 18, issue 9, pp. 1013–1029.
6. Y. Zhang, D.V. Lukyanenko, A.G. Yagola. Using Lagrange principle for solving two-dimensional integral equation with a positive kernel. - Inverse Problems in Science and Engineering, 2015, DOI: 10.1080/17415977.2015.1077445

# ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕИЗВЕСТНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Н.М. Япарова

Южно-Уральский государственный университет (НИУ), Челябинск, Россия  
e-mail: ddjy@math.susu.ac.ru

**Аннотация.** В статье рассмотрена обратная граничная задача с неизвестными начальными условиями, возникающая при исследовании электромагнитных и тепловых характеристик работающих двигателей. Указана принципиальная возможность построения численного метода решения этой задачи, предложена вычислительная схема, а также получены условия локальной устойчивости метода. Предложенный подход послужил основой для разработки алгоритмов численного решения рассматриваемой задачи и для проведения вычислительных экспериментов. Результаты экспериментов подтверждают эффективность предложенного метода.

**Ключевые слова:** обратная граничная задача, метод регуляризации, устойчивость вычислительной схемы, численные методы

## NUMERICAL METHOD FOR SOLVING AN INVERSE MULTIDIMENSIONAL PROBLEM WITH UNKNOWN INITIAL CONDITIONS

**Abstract.** The numerical method for solving an inverse boundary value problem with unknown initial conditions is considered in this paper. This type of inverse boundary value problem arises in the investigation of electromagnetic and thermal characteristics of working thrusters. The principal possibility of constructing the numerical method to this problem is contained. We propose a computational scheme. The conditions of local stability for the method are obtained. The efficiency of the method and accuracy of the numerical solutions were evaluated by means of a computational experiment.

**Key words:** inverse boundary value problem, regularization method, stability of the computational scheme, numerical methods

Пусть  $\Omega \subset R^n$  – замкнутое ограниченное выпуклое множество с кусочно-гладкой границей  $\partial\Omega$  и  $\Gamma \subset \partial\Omega$ . Обозначим  $Q_T = \Omega \times (0; T)$  для всех  $T > 0$ , а оператор  $A$  определим следующим образом.

$$A = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{j=1}^n b_j(x,t) \frac{\partial}{\partial x_j} - c(x,t). \quad (1)$$

Предположим, что выполнены условия  $a_{ij}(x,t) \in C^1(Q_T)$ ,  $b_j(x,t) \in C(Q_T)$ ,  $i, j = 1..n$ ,  $c(x,t) \in C(Q_T)$  и для любых  $(x,t) \in \bar{Q}_T$  справедливо  $\eta_1 |\xi|^2 \leq a_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \leq \eta_2 |\xi|^2$ , где  $\eta_1, \eta_2$  – фиксированные числа, а  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  – произвольный вещественный вектор. Рассмотрим уравнение:

$$Au = f, \quad (2)$$

где  $u(x,t) \in H^{4,2}(\bar{Q}_T)$ , функция  $f(x,t) \in H^{2,1}(R^n \times [0, T])$ , и граничные условия:

$$u(x,t) |_{\Gamma} = p(x,t), \quad \frac{\partial u}{\partial n} |_{\Gamma} = g(x,t), \quad (3)$$

где  $p(x, t), g(x, t) \in H^{2,1}(Q_T)$ , а  $n$  – вектор нормали. Задача состоит в том, чтобы найти функцию, удовлетворяющую (2),(3), а также найти граничную функцию

$$u(x, t) |_{\partial\Omega} = \varphi(x, t). \quad (4)$$

Предположим, что при некоторых  $f(x, t) = f_0(x, t)$ ,  $p(x, t) = p_0(x, t)$  и  $g(x, t) = g_0(x, t)$  существует функция  $u_0(x, t)$ , удовлетворяющая (2),(3), и известно, что  $\varphi(x, t) \in H^{2,1+\beta}(Q_T)$ , где  $\beta \in (0, 1)$ . Из результатов, представленных в работах [1] и [2] следует единственность решения задачи (2)-(4) в некоторой области  $\Omega_T \subset Q_T$ .

Предположим, что существуют  $\Phi, \beta, S > 0$  т.ч.  $\left\{ \max_{Q_T} |\partial^2 u_t|, \max_{Q_T} |\partial^2 u_x|, \max_{Q_T} |\partial^4 u_x| \right\} \leq S$ , и  $\max_{Q_T} |u(x, t)| \leq \Phi e^{\beta(x+t)}$ . Тогда для решения поставленной задачи мы используем метод дискретной регуляризации. Идея метода заключается в следующем. В исходное уравнение (2) добавляют слагаемое  $\alpha u$  и получают численное решение уравнения

$$Au + \alpha u = f \quad (5)$$

следующим образом. В области  $Q_T$  вводят конечно-разностную сетку и, следуя подходу предложенному Самарским в работе [3], составляют конечно-разностный аналог уравнения (5). Далее, используя явные схемы определяют значение функции  $u(x, t)$  в каждом узле сетки. Для получения локальной устойчивости предложенного численного метода был использован подход, принятый в теории регуляризации, см., например, [4]. В результате были получены соотношения между величинами шага дискретизации по пространственным переменным в области  $\Omega \subset R^2$ , переменной, характеризующей время, параметром регуляризации и погрешностью исходных данных, обеспечивающие локальную устойчивость предлагаемого метода [5]. Эти результаты возможно обобщить для случая  $\Omega \subset R^n$ .

Предложенная схема послужила основой для разработки численного метода решения обратной граничной задачи теплопроводности и проведения вычислительного эксперимента. Основная цель вычислительного эксперимента заключалась в проверке принципиальной возможности построения численного решения обратной задачи методом дискретной регуляризации во всей области рассматриваемой и получение соответствующей граничной функции (4), а также получение экспериментальных оценок погрешностей численных решений. Результаты эксперимента свидетельствуют о достаточной эффективности предложенного метода.

## Литература

- 1 Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. с.
- Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. с.
- Самарский А. А.: Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
- А.Н.Тихонов, А.С.Леонов, А.Г.Ягола. Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995. с.
- Н.М.Япарова. Метод решения некоторых многомерных обратных граничных задач параболического типа без начальных условий // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. 2015. Т. 15, N 2. С. 97-108.

# ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С РЕГУЛЯРНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

В.А. Юрко

Саратовский Государственный Университет, Саратов, Россия

e-mail: yurkova@info.sgu.ru

**Аннотация.** Исследуется обратная задача спектрального анализа для дифференциальных систем произвольного порядка на полуоси с регулярными неинтегрируемыми особенностями.

**Ключевые слова:** дифференциальные системы; регулярные особенности; обратные спектральные задачи

## INVERSE PROBLEM FOR DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH REGULAR SINGULARITIES

**Abstract.** We study inverse problems of spectral analysis for arbitrary order differential systems on the half-line with regular non-integrable singularities.

**Key words:** differential systems; regular singularities; inverse spectral problems

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений на полуоси:

$$Y'(x) - B(x)Y(x) = \rho B_0 Y(x), \quad B(x) = \frac{1}{x} A + A^0(x), \quad x > 0. \quad (1)$$

Здесь  $Y = [y_k]_{k=\overline{1,n}}^T$  – вектор-столбец ( $T$ – знак транспонирования),  $\rho$ – спектральный параметр,

$$B_0 = \text{diag}[b_k]_{k=\overline{1,n}}, \quad B(x) = [B_{kj}(x)]_{k,j=\overline{1,n}}, \\ A = [A_{kj}]_{k,j=\overline{1,n}}, \quad A^0(x) = [A_{kj}^0(x)]_{k,j=\overline{1,n}}, \quad A_{kk} = 0, \quad A_{kk}^0(x) \equiv 0,$$

где  $b_k, A_{kj}$ – комплексные числа,  $A_{kj}^0(x)$ – комплекснозначные функции. Матрица  $B(x)$  называется потенциалом.

Обозначим  $\varepsilon := \exp(2\pi i/n)$ ,  $\varepsilon_k = \varepsilon^{k-1}$ ,  $k = \overline{1,n}$ . Пусть для простоты  $b_k = \varepsilon_k$  (общий случай требует очевидных технических изменений). Пусть  $\{\mu_k\}_{k=\overline{1,n}}$  – корни характеристического многочлена  $\Delta(\mu) := \det[\mu I - A]$  ( $I$  – единичная матрица), т.е.  $\{\mu_k\}_{k=\overline{1,n}}$  – собственные значения матрицы  $A$ . Ясно, что  $\mu_1 + \dots + \mu_n = 0$ . Для определенности будем рассматривать случай, когда  $\mu_j \neq 0$ ,  $\mu_j - \mu_k \neq sn$ ,  $s \in \mathbf{Z}$ ,  $\text{Re } \mu_1 < \dots < \text{Re } \mu_n$ . Обозначим  $A_{kj}^1(x) := A_{kj}^0(x)$  при  $x \geq 1$ , и  $A_{kj}^1(x) := A_{kj}^0(x)x^{n-1-\text{Re}(\mu_n-\mu_1)}$  при  $x \leq 1$ , и предположим, что  $A_{kj}^1(x) \in L(0, \infty)$ . Пусть  $D_j^0 = [d_{kj}^0]_{k,j=\overline{1,n}}^T$  – собственные векторы матрицы  $A$  для собственных значений  $\mu_j$ , и  $\det[d_{kj}^0]_{k,j=\overline{1,n}} = 1$ .

В каждом секторе  $S_m := (\rho : \arg \rho \in (\pi m/n, \pi(m+1)/n))$ , корни  $R_1, \dots, R_n$  уравнения  $R^n - 1 = 0$  можно занумеровать так, что  $\text{Re}(\rho R_1), \dots < \text{Re}(\rho R_n)$ ,  $\rho \in S_m$ . Пусть  $\Phi_k(x, \rho) = [\Phi_{\nu k}(x, \rho)]_{\nu=\overline{1,n}}^T$ ,  $k = \overline{1,n}$  – решения системы (1) при условиях

$$\Phi_k(x, \rho) \sim D_k^0 x^{\mu_k}, \quad x \rightarrow 0, \quad \Phi_k(x, \rho) = O(\exp(\rho R_k x)), \quad x \rightarrow \infty, \quad \rho \in S_m.$$

Тогда

$$\Phi_k(x, \rho) = C_k(x, \rho) + \sum_{j=k+1}^n M_{kj}(\rho) C_j(x, \rho),$$



где функции  $C_j(x, \rho)$  – целые по  $\rho$  решения системы (1) и  $C_j^0(x, \rho) \sim D_j^0 x^{\mu_j}$  при  $x \rightarrow 0$ . Матрица  $M(\rho) = [M_{kj}(\rho)]_{k,j=1,\overline{n}}$ , где  $M_{kj}(\rho) := \delta_{kj}$  при  $k \geq j$ , называется матрицей Вейля для системы (1).

**Обратная задача.** Дана матрица Вейля  $M(\rho)$ , построить потенциал  $B(x)$ .

**Теорема 1.** *Задание матрицы Вейля однозначно определяет потенциал  $B(x)$ .*

Методом спектральных отображений [1] получен также алгоритм построения решения рассматриваемой обратной задачи.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проект 1.1436.2014К) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13-01-00134).

### Литература

1. Yurko V.A. Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. VSP, Utrecht, 2002, 303 с.

# ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ДАННЫМИ

В.И. Заляпин<sup>1</sup>, Е.В. Харитонова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Южно-Уральский государственный университет, Челябинск

<sup>2</sup>Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, Москва  
e-mail: vladimzal@gmail.com, alena@math.susu.ac.ru

**Аннотация.** В докладе рассмотрена процедура обращения обыкновенного дифференциального оператора, порожденного краевой задачей с распределенными данными. Исследованы условия однозначной разрешимости этой задачи и построена функция Грина.

*Ключевые слова* Функция Грина, задача Валле-Пуассена, интегральные уравнения.

## An inverse boundary value problem with distributed data

**Abstract.** The inversion method of the ordinary differential operator was considered in the report. The operator was generated by the boundary value problem with distributed data. Conditions of the unique solvability of this problem was analyzed and the Green functions was build.

*Key words:* Green function, Valee-Poussin problem, integral equations.

### 1. Постановка задачи

Пусть  $L(x) = x^{(n)} + p_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + p_1(t)x' + p_0(t)x$  — линейное дифференциальное выражение,  $U_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  — линейные функционалы, задаваемые соотношениями

$$U_i(x) = \int_a^b x(t)g_i(t)dt, i = 1, 2, \dots, n.$$

Рассматриваемая краевая задача имеет вид:

$$\begin{cases} L[x] = u(t), & t \in [a; b], \\ U_j(x) = X_j, & j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (1)$$

Не ограничивая общности рассмотрений, можно считать, что все  $X_j = 0$  и  $p_{n-1}(t) \equiv 0$ .

Известно [1], что задача (1) однозначно разрешима при любой правой части  $u(t)$  тогда и только тогда, когда существует однозначно определяемая функция Грина  $G(t, \tau)$  такая, что:

$$x(t) = \int_a^b G(t, \tau)u(\tau)d\tau \quad (2)$$

Это справедливо в случае невырожденности матрицы  $\gamma(g, \varphi) = (\gamma_{ij})$ , где

$$\gamma_{ij} = \int_a^b \varphi_j(t)g_i(t)dt,$$

а  $\varphi_j(t)$  — фундаментальная система решений однородного уравнения  $L(x) = 0$ .

Пусть  $\tilde{x}(t)$  — экспериментально полученное решение рассматриваемой задачи. Требуется восстановить правую часть уравнения  $u(t)$  по имеющимся экспериментальным данным.

Традиционно, решение этой задачи находится восстановлением всех производных  $x^{(s)}$ ,  $s = 1, 2, \dots, n$  по экспериментальным данным  $\tilde{x}(t)$  и последующей подстановкой полученных значений в левую часть уравнения. Ясно, что с ростом порядка уравнения подобный подход приводит к росту объема вычислений и падению точности восстановления функции  $u(t)$ .

В настоящей работе предлагается способ численного восстановления  $u(t)$ , лишенный перечисленных недостатков.

## 2. Интегральное соотношение

Наряду с задачей (1) рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$\begin{cases} x^{(n)} = u(t), & t \in [a; b], \\ U_j(x) = 0, & j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (3)$$

Пусть  $\Gamma(t, \tau)$  — функция Грина задачи (3). Если  $G(t, \tau)$  — функция Грина задачи (1), то разность  $\Delta G = G(t, \tau) - \Gamma(t, \tau)$   $n$  раз непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^n \Delta G}{dt^n} = - \sum_{s=0}^{n-2} p_s(t) \Gamma^{(s)}(t, \tau) = V(t, \tau).$$

Отсюда легко установить справедливость теоремы:

**Теорема.** *Если функции Грина  $G(t, \tau)$  и  $\Gamma(t, \tau)$  существуют, то справедливо интегральное соотношение*

$$G(t, \tau) - \Gamma(t, \tau) = \int_a^b G(t, s) V(s, \tau) ds. \quad (4)$$

## 3. Обращение

Функция Грина вспомогательной задачи (3) легко может быть найдена по определению, т.к. фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения известна. При известной  $\Gamma(t, \tau)$  интегральное соотношение (4) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма II-го рода, которое эффективно разрешимо численно.

Правая часть  $u(t)$  уравнения (1) теперь может быть восстановлена регуляризацией уравнения (2).

## Литература

1. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.:МИР, 1970

# Mathematical Models and Regularizing Algorithms for Inverse Magnetoencephalography Problems

Y. Zhang\*, Z. Yao<sup>†</sup>, M. Gulliksson\*

\* *Department of Mathematics, School of Science and Technology, Örebro University, Örebro, Sweden.*

*e-mail: ye.zhang@oru.se, marten.gulliksson@oru.se*

<sup>†</sup> *Department of Statistics and Applied Probability, National University of Singapore, Singapore.*

*e-mail: zhigang.yao@nus.edu.sg*

## Abstract.

Scientists have been intensively studying the human brain on the level of cerebral anatomy for millennia, yet how the brain functions is still a complete mystery. The neurons in the brain produce macroscopic electrical currents when the brain functions, and those synchronized neuronal currents in the gray matter of the brain induce extremely weak magnetic fields (10 – 100 femto-Tesla) outside the head. The recent development of superconducting quantum interference devices (SQUIDs) makes it possible to detect those extremely weak magnetic signals. Magnetoencephalography (MEG) is a non-invasive imaging technique using SQUIDs to measure the magnetic signals outside of the head produced by the electrical activity inside the brain [1]. To use MEG as functional brain 3D imaging techniques, identifiable distributed source models are required. The reconstruction of MEG sources rests on inverting these models and is ill-posed because the solution does not depend continuously on the data and there is no unique solution in the absence of prior information or constraints.

In this work, we will design several novel mathematical models of the following four inverse MEG problems: determining the number of sources, localizing the positions of sources, calculating the moments of sources and recovering the primary current distribution function in the head. For each problems we will develop two groups of mathematical models – finite model and infinite model. In each type of model we will study quasi-static approach, semi-dynamical approach and dynamical approach respectively. Moreover, we will study statistical models for inverse MEG problems [2].

Furthermore, for each mathematical model we will develop the corresponding regularizing algorithms. These algorithms are constructed based on the strategy of using a *priori* information of the solution. Specifically, we will investigate following regularizing strategies: boundedness of the solution, sparsity of the solution, minimal moments principle, position stability strategy, adaptive regularization strategy, and self-consistent strategy. Error estimation is also discussed in this work [3-5]. Our numerical tests for both the synthetic problem and practical problem are given to show the efficiency and feasibility of the proposed algorithms.

*Key words:* Magnetoencephalography, inverse problem, ill-posedness, regularization

## Bibliography

1. M. Hamalainen, R. Hari, R. Ilmoniemi, J. Knuutila, O. Lounasmaa. Magnetoencephalography – theory, instrumentation, and applications to noninvasive studies of the working human brain // *Reviews of Modern Physics*, V. 65, 1993, p. 413-497.
2. Z. Yao, W. Eddy. A statistical approach to the inverse problem in Magnetoencephalography // *Annals of Applied Statistics*, V. 8, 2015, p. 1119-1144.

3. Y. Zhang, D. Lukyanenko, A. Yagola. Using Lagrange principle for solving linear ill-posed problems with a priori information // Numerical Methods and Programming, V. 14, 2013, p. 468-482.

4. Y. Zhang, D. Lukyanenko, A. Yagola. An optimal regularization method for convolution equations on the sourcewise represented set // Journal of Inverse and Ill-posed Problems, V. 23, 2015, DOI: 10.1515/jiip-2014-0047.

5. Y. Zhang, D. Lukyanenko, A. Yagola. Using Lagrange principle for solving two-dimensional integral equation with a positive kernel // Inverse Problems in Science and Engineering, 2015, DOI: 10.1080/17415977.2015.1077445.

# СПЕЦИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Ж.К. Жэнтаева

Кыргызско-Узбекский университет, г. Ош, Кыргызстан

e-mail: jjk\_kuu@mail.ru

**Аннотация.** По аналогии с известными результатами для решений начальных задач для линейных дифференциальных уравнений с ограниченным запаздыванием аргумента, найдены достаточные условия наличия асимптотического разложения решений систем двух разностных уравнений на «специальное» и затухающее решения.

**Ключевые слова:** разностные уравнения, дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, начальная задача, асимптотика

## SPECIAL SOLUTIONS OF SYSTEMS OF DIFFERENCE EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS

**Abstract.** By analogy with well-known results for solutions of initial value problems for linear differential equations with bounded delay, sufficient conditions for existence of asymptotical expansion of solutions of systems of two difference equations into “special” and fading ones.

**Key words:** difference equation, delay-differential equation, initial value problem, asymptotic

Рассмотрим линейный непрерывный оператор  $W(t, \varphi): Q_+ \times \Phi \rightarrow R^k$ , где  $\Phi$  - некоторое (многомерное) линейное пространство,  $Q_+$  - неограниченное справа упорядоченное множество,  $k$  - натуральное число. Для случая, когда  $Q_+ = R_+ := [0, \infty)$ ,  $W(t, \varphi)$  – решение начальной задачи с начальным условием  $\varphi \in C[-h, 0]$  для линейного дифференциального уравнения с ограниченным запаздыванием аргумента, в ряде работ (см. обзор в [1], [2]) были найдены условия, когда существует такое подпространство  $\Phi_0 \subset \Phi$ , что

$$(\forall \varphi \in \Phi)(\exists \varphi_0 \in \Phi_0)(\lim_{t \rightarrow \infty} \|W(t, \varphi) - W(t, \varphi_0)\|) = 0. \quad (1)$$

Решения  $W(t, \varphi_0)$  ( $\varphi_0 \in \Phi_0$ ) были названы специальными.

В [3] был построен пример, показывающий, что найденные условия являются существенными. В [4] нами показано, что для поиска более широких условий, при которых выполняется (1), можно использовать численные эксперименты на компьютере. В связи с этими результатами мы выдвинули гипотезу о том, что аналогичные результаты должны иметь место для более фундаментальных – разностных уравнений, и что результаты, полученные для разностных уравнений, могут улучшить известные для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. В [5] построены решения, «не обращающиеся в нуль». Здесь показано, что они могут использоваться, как специальные.

Рассматривается система разностных уравнений

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a_n x_n + b_n y_n, \\ y_{n+1} &= c_n x_n + d_n y_n, n=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

с ограничениями

$$a_n \in A = [a_-, a_+]; b_n \in B = [b_-, b_+]; c_n \in C = [c_-, c_+]; d_n \in D = [d_-, d_+]. \quad (3)$$

Требуется найти такие условия на интервальные числа  $A, B, C, D$ , что имеет место (1).

**Теорема 1.** Если существует такое число  $w$ , что

1)  $q_- := [A + B[-w, w]]_- > 0$ ; 2)  $|C + [-w, w]D| \leq wq_-$ ,

то существует такое решение  $\{X, Y\}$ , что

$$(\forall n \in \mathbb{N})(X_n \geq q_-^n; |Y_n| \leq wX_n). \quad (4)$$

(Такие решения с одной знакопостоянной компонентой соответствуют решениям, называемым специальными, в теории дифференциальных уравнений с запаздыванием).

Обозначим  $b := |B|$ ,  $c := |C|$ ,  $d := |D|$ , тогда условия Теоремы 1 переписываются в виде 1)  $q_- := a_- - wb > 0$ ; 2)  $c + wd \leq wq_-$ .

**Теорема 2.** Если 1)  $d < a_-$ ; 2)  $(a_- - d)^2 > 4bc$ , то выполняются условия 1), 2) Теоремы 1. Можно взять

$$w = (a_- - d - ((a_- - d)^2 - 4bc)^{1/2}) / (2b).$$

**Теорема 3.** Если  $\omega := |AD - BC| q_-^{-2} < 1$ , то для любого решения  $\{x, y\}$  и специального решения  $\{X, Y\}$ , определенного в Теореме 1, существует предел

$$\gamma\{x, y\} := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n / X_n.$$

**Теорема 4.** Если выполняются условия Теорем 2 и 3, то для любого решения  $\{x, y\}$  и специального решения  $\{X, Y\}$ , определенного в Теореме 1,

$$|x_n - \gamma\{x, y\} X_n| \leq \text{const } \omega^n (a_+ + bw)^n.$$

**Теорема 5.** Если выполняются условия Теорем 2 и 3 и  $\omega(a_+ + bw) < 1$ , то для любого решения  $\{x, y\}$  и специального решения  $\{X, Y\}$ , определенного в Теореме 1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - \gamma\{x, y\} X_n) = 0.$$

Таким образом, пространство решений системы (2) асимптотически одномерно.

## Литература

1. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972, 352 с.
2. Панков П.С. Асимптотическая конечномерность пространства решений одного класса систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1977, т. 13, № 4. С. 455-462.
3. Панков П.С. Пример линейного однородного дифференциального уравнения с запаздыванием, не имеющего конечномерного экспоненциально устойчивого при  $t \rightarrow \infty$  пространства решений // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Фрунзе: Илим, 1977. - С.117-125.
4. Жэнтаева Ж.К. Алгоритмы для экспериментального исследования асимптотики решений линейных уравнений с запаздывающим аргументом и их использование // Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования: сборник статей Международной конференции 15-18 декабря 2014 г. - М.: РУДН, 2015. - С. 219-223.
5. Zheentaeva Zh. Investigation of asymptotics of solutions of difference equations with variable coefficients // Abstracts of the Issyk-Kul International Mathematical Forum. Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2015. P. 36.

*Научное издание*

**ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ  
МЕЖДУНАРОДНОГО НАУЧНОГО СЕМИНАРА  
ПО ОБРАТНЫМ И НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫМ  
ЗАДАЧАМ**

Подписано в печать 05.11.2015 г. Формат 60×84/8.  
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.  
Усл. печ. л. 27,5. Тираж 500 экз. Заказ 519.

---

Российский университет дружбы народов  
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

---

Типография РУДН  
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, тел. 952-04-41