ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Профессор А.Н.Боголюбов

Введение

Метод математического моделирования, представляющий собой количественное описание изучаемых явлений на языке математики, широко применяется для исследования всевозможных явлений природы и общественной жизни. Этот «третий путь познания» сочетает в себе достоинства как теории, так и эксперимента. С одной стороны, работая не с самим объектом, а с ее моделью, мы можем относительно быстро и без существенных затрат исследовать его свойства и поведение в любых мыслимых ситуациях (преимущества теории). С другой стороны, вычислительные эксперименты с моделями объектов позволяют, опираясь на мощь современных вычислительных методов и вычислительной техники, подробно и глубоко изучать объекты в достаточной полноте, недоступной чисто теоретическим исследованиям (преимущества эксперимента).

Элементы математического моделирования использовались с самого начала появления точных наук: слово «алгоритм» происходит от имени средневекового арабского ученого Аль-Хорезми (аль Хорезми Абу Абдала Мухамед бен Мусса аль Маджуси, 787 г. – ок. 850 г.). Второе рождение математического моделирования пришлось на конец 40-х – начало 50-х годов XX века и было обусловлено в основном двумя причинами.

беспрец

Первая из них – появление первых компьютеров. Вторая – социальный заказ – выполнение национальных программ СССР и США по созданию ракетно-ядерного щита, который не мог быть выполнен традиционными методами. Математическое моделирование блестяще справилось с этой задачей: ядерные взрывы и полеты ракет и спутников были предварительно осуществлены в недрах ЭВМ с помощью математических моделей и лишь затем претворены на практике.

Сейчас математическое моделирование вступает в третий принципиально важный этап своего развития, встраиваясь в структуру информационного общества. «Сырая информация» обычно мало что дает для анализа и прогноза, для принятия решений и контроля за их исполнением. Нужны надежные способы переработки информационного сырья в готовый продукт – точные знания.

История и методология математического моделирования убеждает: оно может и должно стать интеллектуальным ядром информационных технологий, всего процесса информатизации общества.

Глава 1. Основные понятия и принципы математического моделирования

1. Математика и математическое моделирование

Основные этапы метода математического моделирования

1. Создание качественной модели

Выясняется характер законов и связей, действующих в системе. В зависимости от природы модели эти законы могут быть физическими, химическими, биологическими, экономическими.

Задача моделирования-выявить главные, характерные черты явления или процесса, его определяющие особенности.

Применительно к исследованию физических явлений создание качественной модели – это формулировка физических закономерностей явления или процесса на основании эксперимента.

2. Создание математической модели (постановка математической задачи)

Если модель описывается некоторыми уравнениями, то она называется детерминированной. Начально-краевые задачи математической физики являются примерами детерминированных дифференциальных моделей.

Если модель описывается вероятностными законами, то она называется стохастической.

1) Выделение существенных факторов

Основной принцип: если в системе действует несколько факторов одного порядка, то все они должны быть учтены, или отброшены.

2) Выделение дополнительных условий (начальных, граничных, условий сопряжения и т.п.)

3. Изучение математической модели

1) <u>Математическое обоснование модели</u>. Исследование внутренней непротиворечивости модели. Обоснование корректности дифференциальной модели. Доказательство теорем существования, единственности и устойчивости решения.

2) <u>Качественное исследование модели.</u> Выяснение поведения модели в крайних и предельных ситуациях.

3) <u>Численное исследование модели</u>. а) Разработка алгоритма. б) Разработка численных методов исследования модели. Разрабатываемые методы должны быть достаточно общими, алгоритмичными и допускающими возможность распараллеливания. в) Создание и реализация программы. Компьютерный эксперимент.

Лабораторный эксперимент	Компьютерный эксперимент
Образец	Математическая модель
Физический прибор	Программа
Калибровка	Тестирование программы
Измерения	Расчеты
Анализ данных	Анализ данных

По сравнению с лабораторным (натурным) экспериментом компьютерный эксперимент дешевле, безопасней, может проводиться в тех случаях, когда натурный эксперимент принципиально невозможен.

4. Получение результатов и их интерпретация

Сопоставление полученных данных с результатами качественного анализа, натурного эксперимента и данными, полученными с помощью других численных алгоритмов. Уточнение и модификация модели и методов её исследования.

5. Использование полученных результатов

Предсказание новых явлений и закономерностей. Предсказание Полем Дираком открытия античастиц на основе исследования построенной им модели квантовой теории поля.

2. Прямые и обратные задачи математического моделирования

1. Прямая задача: все параметры исследуемой задачи известны и изучается поведение модели в различных условиях.

2. Обратные задачи:

а) Задача распознавания: определение параметров модели путем сопоставления наблюдаемых данных и результатов моделирования. По результатам наблюдений пытаются выяснить, какие процессы управляют поведением объекта и находят определяющие параметры модели. В обратной задаче распознавания требуется определить значение параметров модели по известному поведению системы как целого.

Примеры задач распознавания: -**Задача электроразведки:** **определение подземных структур при помощи измерения на поверхности.** -**Задача магнитной дефектоскопии:** **определение дефекта в детали, помещённой между полюсами магнита, по возмущению магнитного поля на поверхности детали.**

б) Задача синтеза (задача математического проектирования): построение математических моделей систем и устройств, которые должны обладать заданными техническими характеристиками. В отличие от задач распознавания в задачах синтеза отсутствует требование единственности решения («веер решений»). Отсутствие единственности решения позволяет выбрать технологически наиболее приемлемый результат.

Примеры задач синтеза: а) Синтез диаграммы направленности антенны: определение распределения токов, создающих заданную диаграмму направленности антенны. б) Синтез градиентных световодов: определение профиля функции диэлектрической проницаемости, при котором световод обладает заданными характеристиками.

3. Задача проектирования управляющих систем: особая область математического моделирования, связанная с автоматизированными информационными системами и автоматизированными системами управления.

Типичные примеры обратных задач распознавания

1. Задача электроразведки. Для изучения неоднородностей земной коры в целях разведки полезных ископаемых широко применяются электрические методы. Основная схема электроразведки постоянных током заключается в следующем.

При помощи заземленных электродов в землю пропускается ток от питающей батареи. На поверхности земли измеряется напряжение созданного таким образом поля постоянного тока. При помощи измерений на поверхности определяют подземную структуру. Методы определения подземных структур (интерпретация наблюдений) основывается на математическом решении соответствующих задач.

2. Задача магнитной дефектоскопии. Для определения дефекта

(наличие пустот) металлическую деталь помещают между полюсами магнита и измеряют магнитное поле на ее поверхности.

По возмущениям магнитного поля требуется определить наличие дефекта, а также, его размеры, глубину залегания и т.д.

3. Универсальность математических моделей. Принцип аналогий

Универсальность математических моделей есть отражение принципа материального единства мира. Математическая модель должна описывать не только конкретные отдельные явления или объекты, но достаточно широкий круг разнородных явлений и объектов.

Одним из плодотворных подходов к моделированию сложных объектов является использование аналогий с уже изученными явлениями.

Пример: процессы колебаний в объектах различной природы.

1. Колебательный электрический контур, состоящий из конденсатора и катушки индуктивности. Сопротивление проводов считаем равным нулю, q(t) –заряд на обкладках конденсатора, u(t) –напряжение на обкладках конденсатора, С – ёмкость конденсатора, L – индуктивность катушки, E – э.д.с. самоиндукции, i – ток.

$$u(t) = \frac{1}{C} q(t), E = -L\frac{di}{dt}, i = -\frac{dq}{dt}, u(t) = -E(t) \rightarrow L\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = -\frac{1}{C} q \rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \frac{1}{CL} q = 0$$

2. Малые колебания при взаимодействии двух биологических популяций

N(t)-численность растительноядной популяции 1; M(t)- численность плотоядной популяции 2. Пренебрегаем естественной смертностью популяции N и рождаемостью популяции M.

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = (a_1 - b_1 M)N, \ a_1 > 0, \ b_1 > 0, \\ \dfrac{dM}{dt} = (-a_2 + b_2 N)M, \ a_2 > 0, \ b_2 > 0. \end{cases}$$

Система находится в равновесии, если $\frac{dN}{dt} = \frac{dM}{dt} = 0.$ **Линеаризованная система имеет вид:**

$$\begin{cases} \dfrac{dn}{dt} = -b_1 N_0 m \\ \dfrac{dm}{dt} = b_2 M_0 n \end{cases} \rightarrow \quad \frac{\partial^2 n}{\partial t^2} + a_1 a_2 n = 0, \ n = N - N_0, \ m = M - M_0,$$

где $$M_0 = \frac{a_1}{b_1}, \ N_0 = \frac{a_2}{b_2}.$$

Рассмотрим более подробно процесс линеаризации.

$$N = N_0 + n,\ \ M = M_0 + m \Rightarrow \frac{d\left(N_0 + n\right)}{dt} = \left(a_1 - b_1\left(M_0 + m\right)\right)\left(N_0 + n\right) \Rightarrow$$

$$\frac{dN_0}{dt} + \frac{dn}{dt} = a_1 N_0 + a_1 n - b_1 M_0 N_0 - b_1 N_0 m - b_1 M_0 n - b_1 mn$$

$$N_0 = \frac{a_2}{b_2};\ M_0 = \frac{a_1}{b_1};\ \frac{dN_0}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{a_2}{b_2}\right);\ b_1 M_0 N_0 = \frac{a_1 a_2}{b_2};\ b_1 N_0 m = \frac{a_2 b_1}{b_2} m;\ b_1 M_0 n = \frac{a_1 b_1}{b_1} n$$

$$mn \ll 1 \Rightarrow \frac{dn}{dt} = a_1 N_0 + a_1 n - \frac{a_1 a_2}{b_2} - b_1 \frac{a_2}{b_2} m - a_1 n =$$

$$= \frac{a_1 a_2}{b_2} + a_1 n - \frac{a_1 a_2}{b_2} - b_1 N_0 m - a_1 n = - \Rightarrow \frac{dn}{dt} = -b_1 N_0 m$$

Аналогично получаем:

$$\frac{d\left(M_0+m\right)}{dt}=\left(-a_2+b_2\left(N_0+n\right)\right)\left(M_0+m\right)=-a_2M_0-a_2m+b_2M_0N_0+b_2N_0m+$$

$$+b_2M_0n+b_2mn; \quad mn\ll 1 \Rightarrow$$

$$N_0=\frac{a_2}{b_2};\ M_0=\frac{a_1}{b_1} \Rightarrow \frac{dM_0}{dt}=0 \Rightarrow \frac{dm}{dt}=-\frac{a_1a_2}{b_1}-a_2m+\frac{a_1a_2}{b_1}+a_2m+b_2M_0n=b_2M_0n\Rightarrow$$

$$\frac{dm}{dt}=b_2M_0n$$

3. Простейшая модель изменения зарплаты и занятости: p(t) –зарплата, N(t)-число занятых работников. Равновесие рынка труда: за плату $p_0>0$ согласны работать $N_0>0$ человек.

Предполагается, что

а) работодатель изменяет зарплату пропорционально отклонению численности занятых работников от равновесного;

б) численность работников изменяется пропорционально изменению зарплаты относительно p_0.

Система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -a_1(N - N_0),\ a_1 > 0, \\ \dfrac{dN}{dt} = a_2(p - p_0),\ a_2 > 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем уравнение $$\frac{d^2(p-p_0)}{dt^2} + a_1 a_2 (p - p_0) = 0.$$

Вывод уравнения:

$$\frac{dp_0}{dt}=0 \;\Rightarrow\; \frac{dp_0}{dt}=\frac{d\left(p-p_0\right)}{dt};$$

$$\frac{dN_0}{dt}=0 \;\Rightarrow\; \frac{d\left(N-N_0\right)}{dt}=\frac{dN}{dt} \;\Rightarrow$$

$$\frac{d\left(p-p_0\right)}{dt}=-a_1\left(N-N_0\right) \;\Rightarrow\; \frac{d^2\left(p-p_0\right)}{dt^2}=-\frac{d\left(N-N_0\right)}{dt}=-a_1\frac{dN}{dt}=-a_1a_2\left(p-p_0\right) \;\Rightarrow$$

$$\frac{d^2\left(p-p_0\right)}{dt^2}+a_1a_2\left(p-p_0\right)=0$$

Вывод. Построенные в пунктах 1-3 модели в одних случаях основаны на точно известных законах (задача 1 о колебательном контуре), в других – на наблюдаемых фактах (задача 2 о двух популяциях), в третьих – на правдоподобных представлениях о характере объекта (задача 3 о простейшей модели заработной платы).

Хотя и сущность рассматриваемых явлений, и подходы к получению описывающих их моделей совершенно различны, построенные модели оказались идентичными друг другу.

Это свидетельствует о важнейшем свойстве математических моделей – их универсальности.

Свойство универсальности математических моделей широко используется при изучении объектов самой разнообразной природы.

4. Иерархия моделей

Принцип «от простого к сложному»: построение цепочки (иерархии) все более полных моделей, каждая их которых обобщает предыдущую, включая её в качестве составного случая.

Модель многоступенчатой ракеты. Пренебрегаем сопротивлением воздуха, гравитацией.

а) Одноступенчатая ракета. *u*=3-5 км/с – скорость истечения продуктов сгорания топлива (относительно Земли), *V*(*t*) – скорость ракеты (относительно Земли); *m*(*t*) – масса ракеты. Закон сохранения импульса:

$$m(t)V(t) = m(t+dt)V(t+dt) - dm(V(t+\theta dt) - u),\ 0<\theta<1.$$

Линеаризация:

$$m(t+dt) = m(t) + \frac{dm}{dt}dt + O(dt^2) \ \rightarrow \ m\frac{dV}{dt} = -\frac{dm}{dt}u \ \rightarrow \ \frac{dV}{dt} = -u\frac{d(\ln m)}{dt} \ \rightarrow$$

$$V(t) = V_0 + u\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right),\ \ V_0 = V(0),\ m_0 = m(0).$$

Максимальная скорость при полном сгорании топлива и нулевой начальной скорости *V_0=0* (формула Циолковского):

$$V = u\ln\left(\frac{m_0}{m_p + m_s}\right).$$

Здесь *m_p* - полезная масса (масса спутника), *m_s* – структурная масса (топливных баков, двигателей, систем управления ракетой т.д.). Введем

параметр $\lambda = \dfrac{m_s}{m_0 - m_p}$. **Обычное значение** λ **= 0.1. При этом**

получается, что при *u*=3 км/с и и *m_p=0 V=7* км/с. Одноступенчатая ракета не сможет поднять полезный груз!

б) Многоступенчатая ракета: основная идея – избавление от балласта.

***m_i* - общая масса i-ой ступени; λ *m_i* – структурная масса i- ой ступени;**

(1-λ)*m_i* – масса топлива i - ой ступени. Считаем, что λ и u одинаковы

для всех ступеней. Пусть n=3; *m_0=m_p+m_1+m_2+m_3*. По формуле Циолковского скорость равна:

$$V_1 = u\ln\left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3}\right).$$

После отброса структурной массы λ m_1 включается вторая ступень. Масса ракеты в этот момент $m_p + m_2 + m_3$. После выгорания топлива второй ступени скорость равна

$$V_2 = V_1 + u \ln\left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3}\right),$$

а после отброса структурной массы λ m_2 и включения двигателя третьей ступени равна

$$V_3 = V_2 + u \ln\left(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3}\right).$$

При n=3 получим

$$\frac{V_3}{u} = \ln\left\{\left(\frac{a_1}{1+\lambda(a_1-1)}\right)\left(\frac{a_2}{1+\lambda(a_2-1)}\right)\left(\frac{a_3}{1+\lambda(a_3-1)}\right)\right\} = f(a_1, a_2, a_3),$$

где

$$a_1 = \frac{m_0}{m_p + m_2 + m_3},\; a_2 = \frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + m_3},\; a_3 = \frac{m_p + m_3}{m_p}.$$

В самом деле из предыдущих формул мы получаем:

$$V_3 = V_2 + u\ln\left(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3}\right),\ V_2 = V_1 + u\ln\left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3}\right),\ \ V_1 = u\ln\left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{V_3}{u} = \ln\left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3}\right) + \ln\left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3}\right) + \ln\left(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3}\right) =$$

$$= \ln(\left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3}\right)\left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3}\right)\left(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3}\right)) =$$

$$= \ln\left(\left(\frac{\dfrac{m_0}{m_p + m_2 + m_3}}{1 + \lambda\dfrac{m_1}{m_p + m_2 + m_3}}\right)\left(\frac{\dfrac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + m_3}}{1 + \lambda\dfrac{m_2}{m_p + m_3}}\right)\left(\frac{\dfrac{m_p + m_3}{m_p}}{1 + \lambda\dfrac{m_3}{m_p}}\right)\right)$$

Введем следующие обозначения:

$$a_1 = \frac{m_0}{m_p + m_2 + m_3} = \frac{m_p + m_1 + m_2 + m_3}{m_p + m_2 + m_3} \Rightarrow a_1 - 1 = \frac{m_1}{m_p + m_2 + m_3};$$

$$a_2 = \frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + m_3} \Rightarrow a_2 - 1 = \frac{m_2}{m_p + m_3};$$

$$a_3 = \frac{m_p + m_3}{m_p} \Rightarrow a_3 - 1 = \frac{m_3}{m_p} \Rightarrow$$

$$\frac{V_3}{u} = \ln\left\{\left(\frac{a_1}{1+\lambda(a_1-1)}\right)\left(\frac{a_2}{1+\lambda(a_2-1)}\right)\left(\frac{a_3}{1+\lambda(a_3-1)}\right)\right\} = f(a_1, a_2, a_3),$$

Максимум функцией *f(a1,a2,a3)* достигается в симметричном случае при *a1=a2=a3=a*. Для *n*=3 получим:

$$\frac{V_3}{u}=\ln\left(\frac{a}{1+\lambda(a-1)}\right)^3=-3\ln\frac{1+\lambda a-\lambda}{a}\;\Rightarrow\;\frac{1-\lambda+a\lambda}{a}=e^{\frac{-V_3}{3u}}=P\;\Rightarrow$$

$$1-\lambda+\grave{a}\lambda=aP\;\Rightarrow\;1-\lambda=a\left(P-\lambda\right)\;\Rightarrow\;a=\frac{1-\lambda}{P-\lambda}$$

Легко проверить, что

$$a_1a_2a_3=a^3=\frac{m_0}{m_p}=\left(\frac{1-\lambda}{p-\lambda}\right)^3.$$

В общем случае для n ступеней имеем:

$$\frac{m_o}{m_p}=\left(\frac{1-\lambda}{p-\lambda}\right)^n,\;p=e^{\frac{-V_n}{nu}}. \qquad (1)$$

Проанализируем формулу (1). Примем V_n=10,5 км/с, λ=0,1. Тогда для n=2,3,4 получаем:

$$n = 2 \qquad m_0 = 149 m_p$$

$$n = 3 \qquad m_0 = 77 m_p$$

$$n = 4 \qquad m_0 = 65 m_p$$

Двухступенчатая ракета пригодна для вывода на орбиту полезной массы, но при одной тонны полезного груза необходимо иметь ракету весом 149 тонн.

Переход к трехступенчатой ракете уменьшает ее массу почти в два раза, но конечно усложняет ее конструкцию.

Четырехступенчатая ракета не дает заметного выигрыша по сравнению с трехступенчатой.

Вывод: наиболее выгодна трехступенчатая ракета.

Первой космической скоростью называется наименьшая скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно могло стать искусственным спутником Земли. Она равна скорости искусственного спутника, обращающегося по круговой орбите вокруг Земля в отсутствии сопротивления атмосферы.

Первая космическая скорость равна у поверхности Земли V=7,9 км/с.

Второй космической скоростью называется наименьшая скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно могло без воздействия каких-либо дополнительных сил преодолеть земное притяжение и превратиться в искусственный спутник Солнца.

Вторая космическая скорость равна у поверхности Земли V=11,2 км/с.

Третьей космической скоростью называется наименьшая скорость, которую нужно сообщить космическому аппарату, запускаемому с поверхности Земли, для того, тчтобы он преодолел притяжение Солнца и покинул Солнечную систему.

Третья космическая скорость равна у поверхности Земли V=16,7 км/с.