

3. Вейвлет – анализ

1. Вейвлеты

Слово «вейвлет» (wavelet – маленькая волна или рябь) введено А.Гроссманом и Ж.Морле в 1982 году в работе, посвященной проблеме анализа сейсмических сигналов, в которых требуется выделить и время (положение) всплеска в сигнале и его спектральный состав (масштаб).

К началу 90 – х годов вейвлет – анализ нашел широкое применение в задачах анализа временных сигналов, распознавания образов и синтеза изображений, шифровки и дешифровки информации и многих других областях.

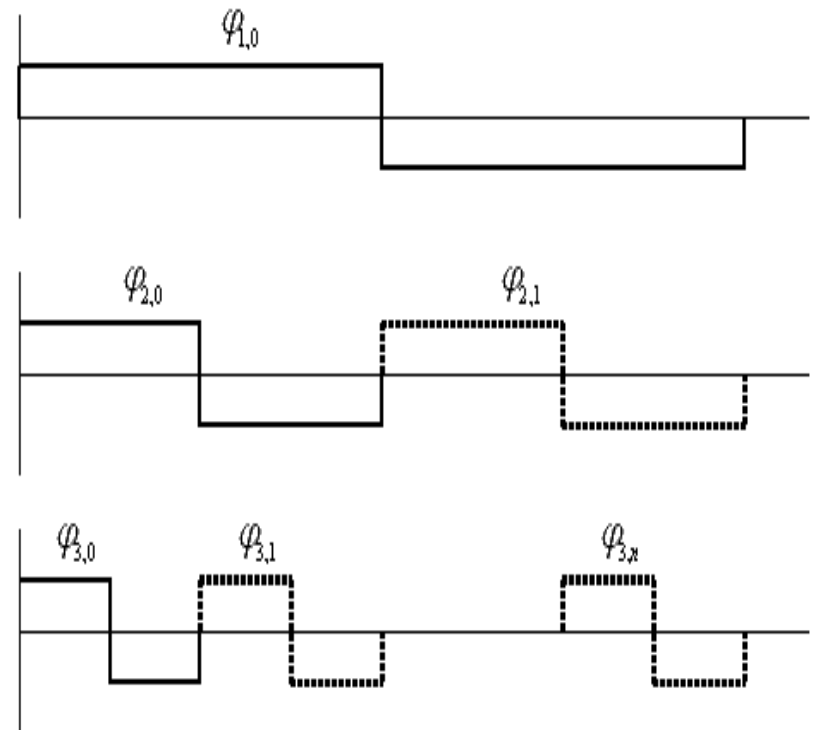
Вейвлет – анализ используется в задачах, связанных с анализом пространственных полей со сложной многомасштабной структурой (турбулентное течение), либо временных сигналов с меняющимся со временем спектральным составом (сейсмические сигналы).

Основная идея: использование базиса, каждая функция которого характеризует как определенную пространственную (временную) частоту, так и место ее локализации в физическом пространстве (во времени).

а) Система Хаара (1909г.)

Совокупность функций Хаара образует полный ортонормированный базис.

Каждая функция строго локализована в физическом пространстве (во времени), но характеризуется медленно спадающим спектром частот (как $1/\nu$).

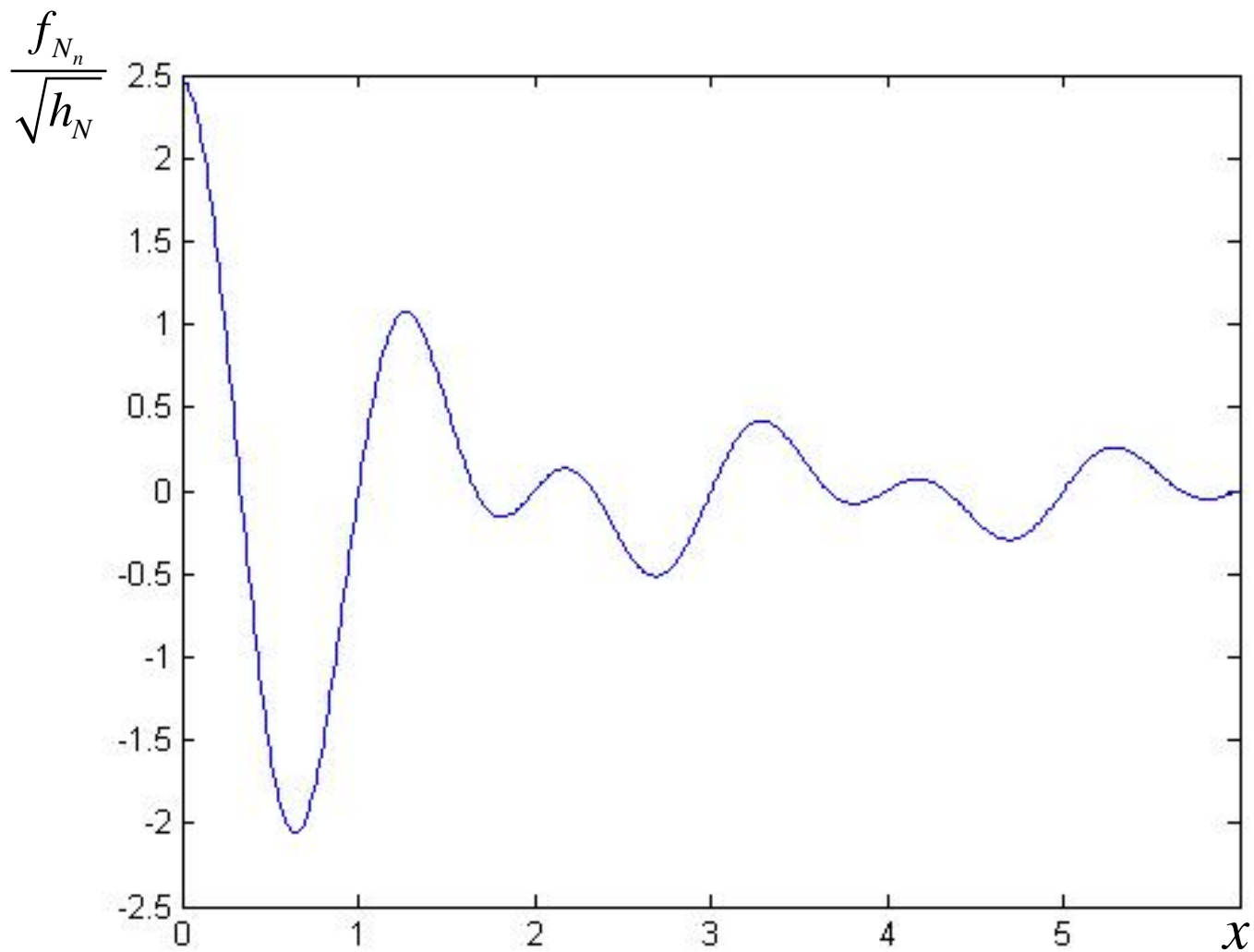


б) Функции Литлвуда – Пелли (1937г.)

Строятся путем вырезания полосы частот в пространстве Фурье.

$$f_{N_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{h_N}} \frac{\sin \left[\frac{\pi}{2h_N} (x - h_N n) \right]}{\frac{\pi}{2} (x - h_N n)} \cos \left[\frac{3\pi}{2h_N} (x - h_N n) \right]$$

Каждая функция **строго локализована в пространстве частот, но медленно затухает в физическом пространстве (во времени)** функции описывают осцилляции, амплитуда которых падает как $1/t$.



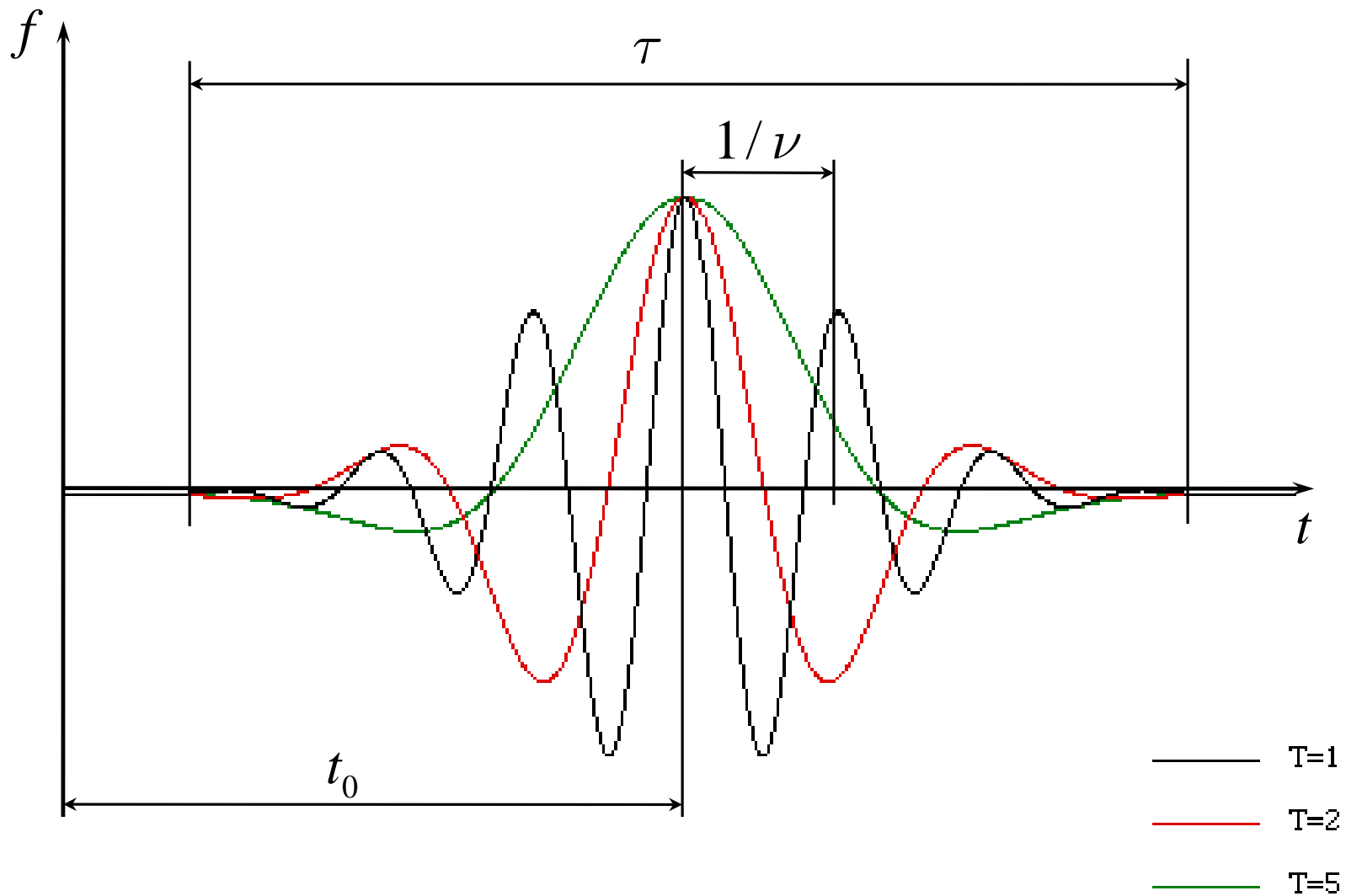
Функция Литлвуда-Пелли для $n=0$.

**в) Преобразование Габора (Фурье – преобразование в окнах)
(1946г.)**

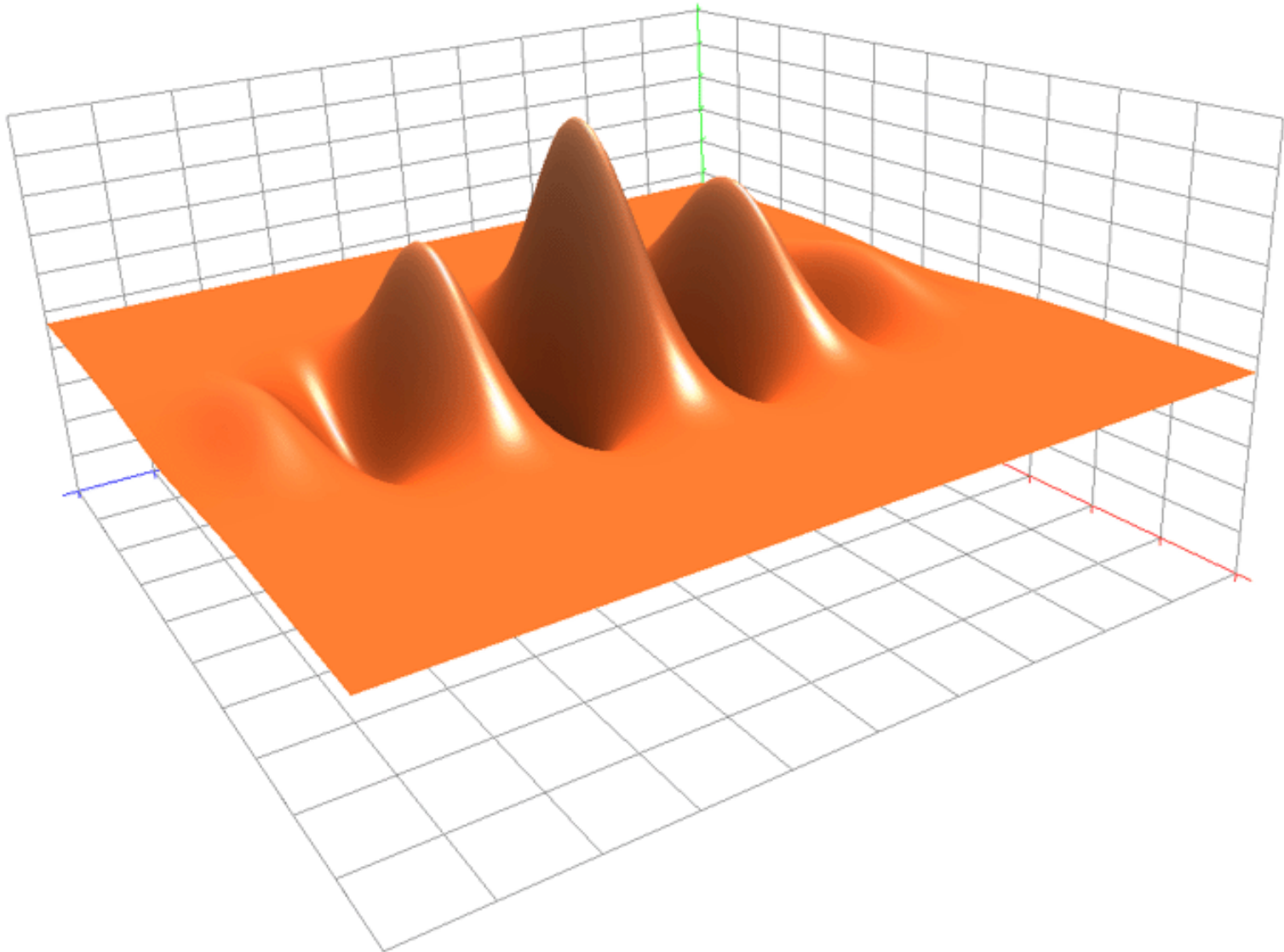
Функция Габора: гармонический сигнал, модулированный функцией Гаусса. Хорошо локализованы и в физическом пространстве (времени) и в пространстве частот. Характеризуются тремя параметрами: положением центра окна t_0 , шириной окна τ и частотой осцилляций ν .

Функции различного масштаба не являются подобными – имеют различное число осцилляций.

1-мерный случай



2-мерный случай



г) Вейвлеты

Объединяют в себе два важных свойства **подобия** и **выраженную локализацию в пространстве и времени.**

Чтобы быть вейвлетами семейство функций должно удовлетворять следующим требованиям:

1) Допустимость. Анализирующий вейвлет $\psi(t)$, называемый также материнским вейвлетом, должен иметь нулевое среднее значение:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (1)$$

2) Подобие. Все функции семейства получаются из **анализирующего вейвлета** путем масштабного преобразования и

сдвига:

$$\psi_{a,b}(t) = \psi\left(\frac{t-b}{a}\right). \quad (2)$$

Получается **двухпараметрическое семейство функций**:
параметр a – масштаб (растяжение) функции, параметр b – положение (сдвиг) функции.

3) Обратимость. Существование обратного преобразования, однозначно восстанавливающее исходную функцию по ее вейвлет – преобразованию.

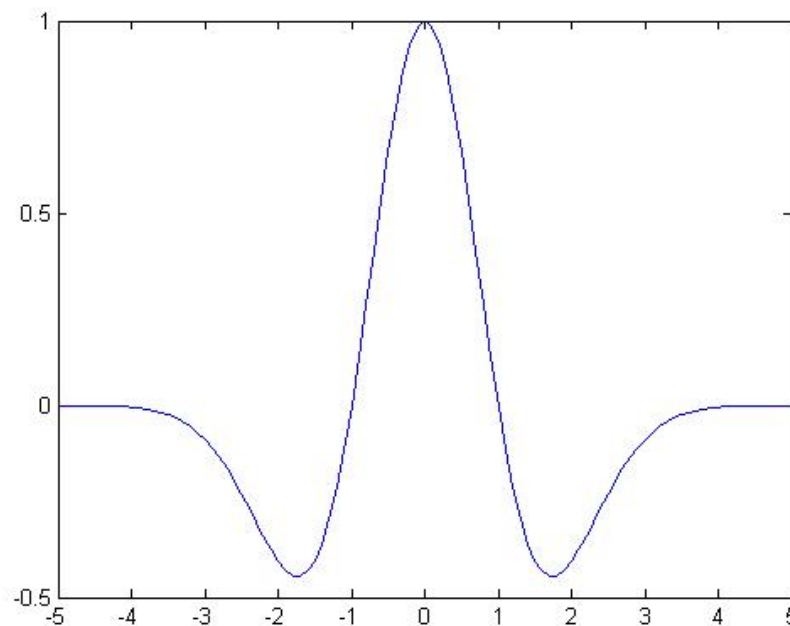
4) Регулярность. Функция $\psi(t)$ должна быть хорошо локализована и в физическом пространстве и в пространстве Фурье.

Выбор конкретного вида вейвлета зависит от целей проведенного анализа.

а) Вещественный вейвлет «мексиканская шляпа»:

$$\psi(t) = (1 - t^2)e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (3)$$

Задачи, требующие хорошего пространственного разрешения и не требовательные к спектральному разрешению.



б) Комплексный вейвлет Морле:

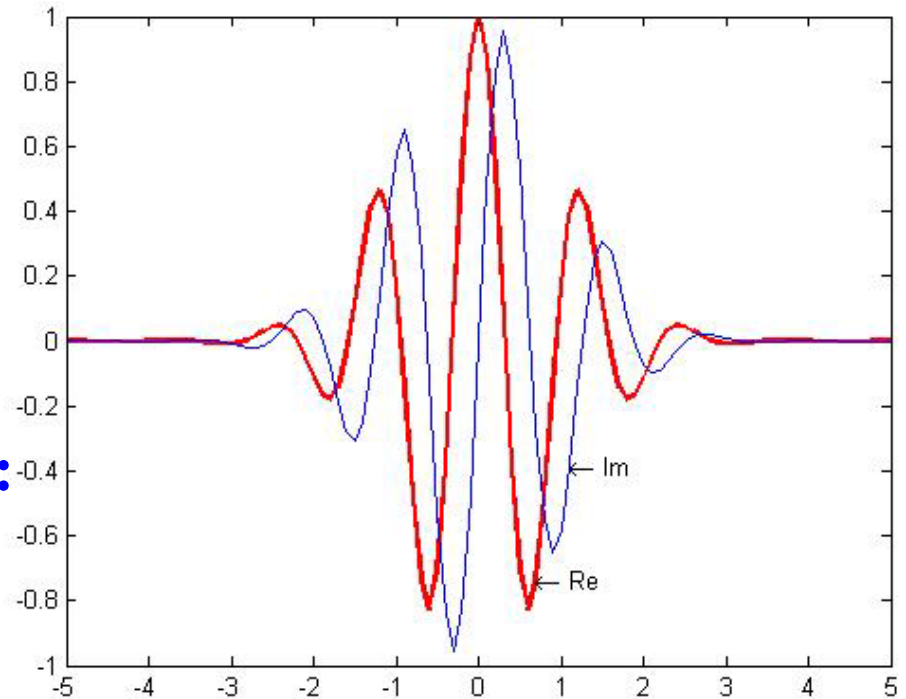
$$\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} e^{i\omega_0 t}, \quad (4)$$

Задачи, требующие лучшего
спектрального разрешения.

Отличие от функций Габора:

выбрав частоту для
анализирующего вейвлета

(задав число осцилляций), сжимаем или растягиваем
функцию как целое, не нарушая подобия отдельных
функций семейства.



Преимущество вейвлет – преобразования перед преобразованием Фурье состоит в том, что оно позволяет проследить за изменением спектральных свойств сигнала со временем и указать, какие частоты (масштабы) доминируют в сигнале.

2. Непрерывное вейвлет – преобразование

Непрерывное вейвлет – преобразование одномерной функции:

$$W(a, b) = a^k \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt, \quad (5)$$

где $\psi(t)$ - вещественная или комплексная функция удовлетворяющая условиям 1) – 4).

Если выполняется условие:

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty, \quad (6)$$

где $\hat{\psi}(\omega)$ - фурье – образ анализирующего вейвлета:

$$\hat{\psi}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (7)$$

то для преобразования (5) справедлива **формула обращения**

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) W(a,b) \frac{dad b}{a^{3+k}}. \quad (8)$$

Показатель степени масштабного множителя k выбирается в зависимости от целей анализа. При $k=-1$ равные значения вейвлет - коэффициентов $W(a,b)$ соответствуют равным амплитудам пульсаций сигнала, независимо от масштаба пульсаций.

На рисунках 1) и 2) показаны два примера вейвлет – разложения простых временных сигналов с помощью вейвлета Морле:

сигнал;

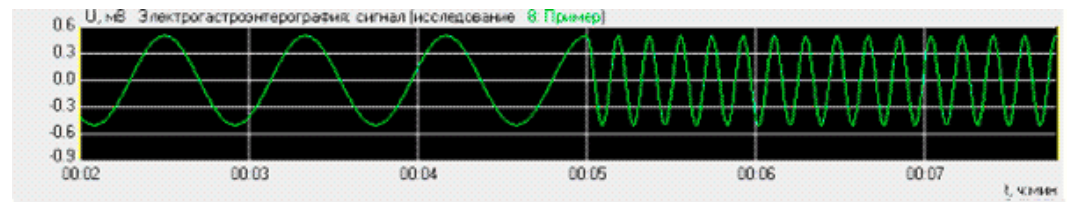
вейвлет преобразование сигнала, полученное с помощью синфазной составляющей вейвлета Морле;

вейвлет преобразование сигнала, полученное с помощью комплексного вейвлета Морле;

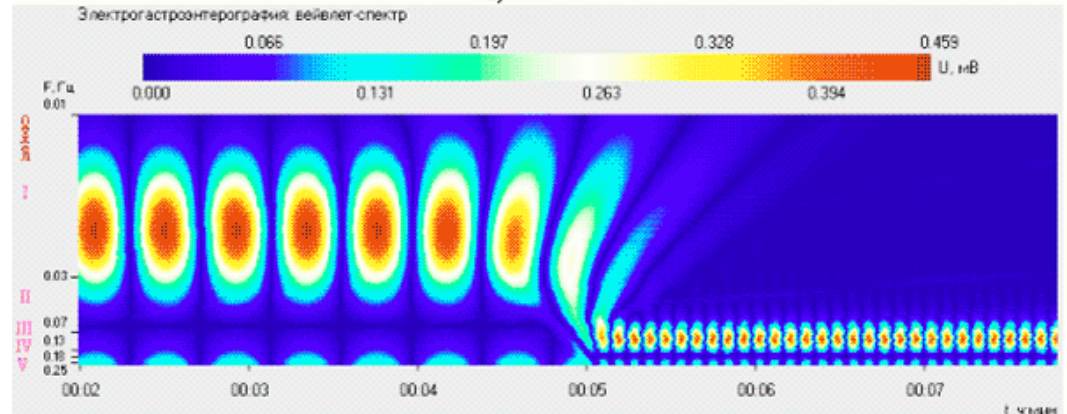
спектр сигнала, полученный с помощью преобразования Фурье.

Фурье – преобразование сигналов 1) и 2) практически не отличаются друг от друга, а вейвлет – анализ позволяет восстановить полную эволюцию спектрального сигнала во времени.

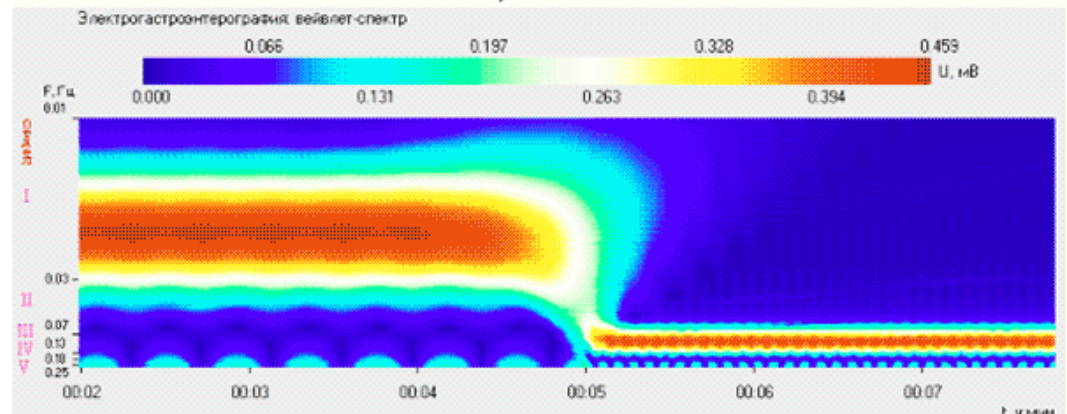
1) сигнал, состоящий из двух гармонических составляющих с разными частотами, следующие друг за другом и его спектр.



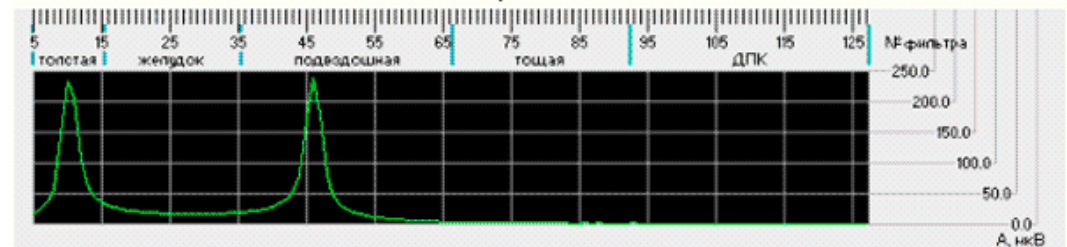
а)



б)

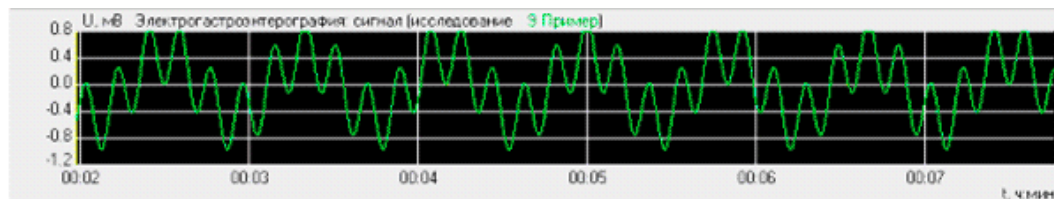


в)

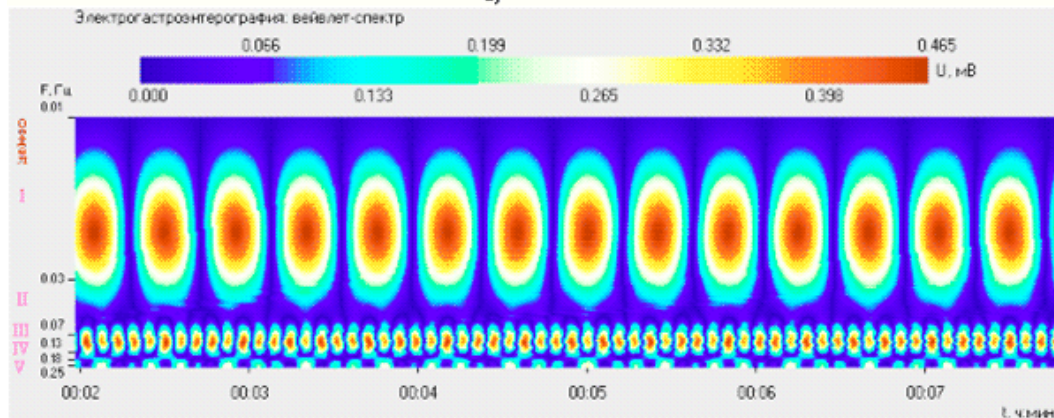


г)

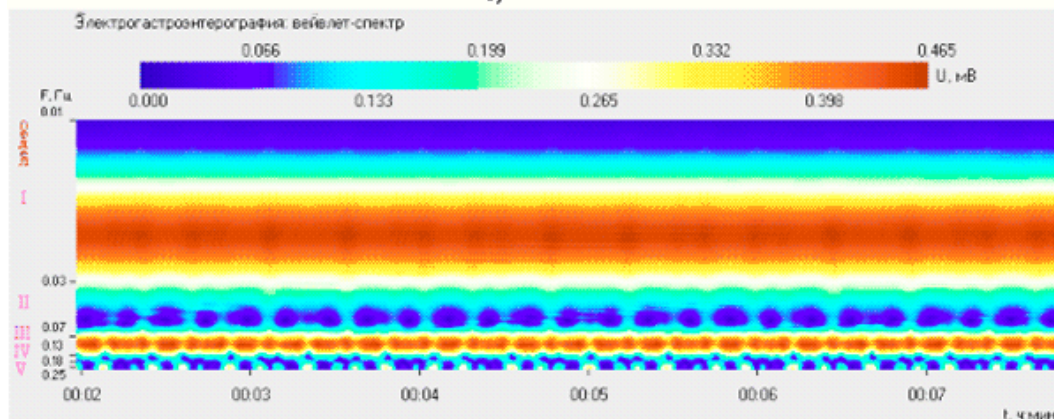
2) сигнал, состоящий из суммы двух гармонических составляющих тех же частот, что и сигнал, представленный на рис. 1), и его аналогичные вейвлеты и спектр.



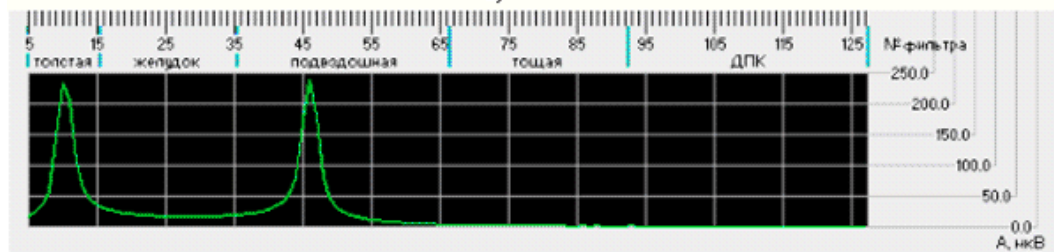
а)



б)

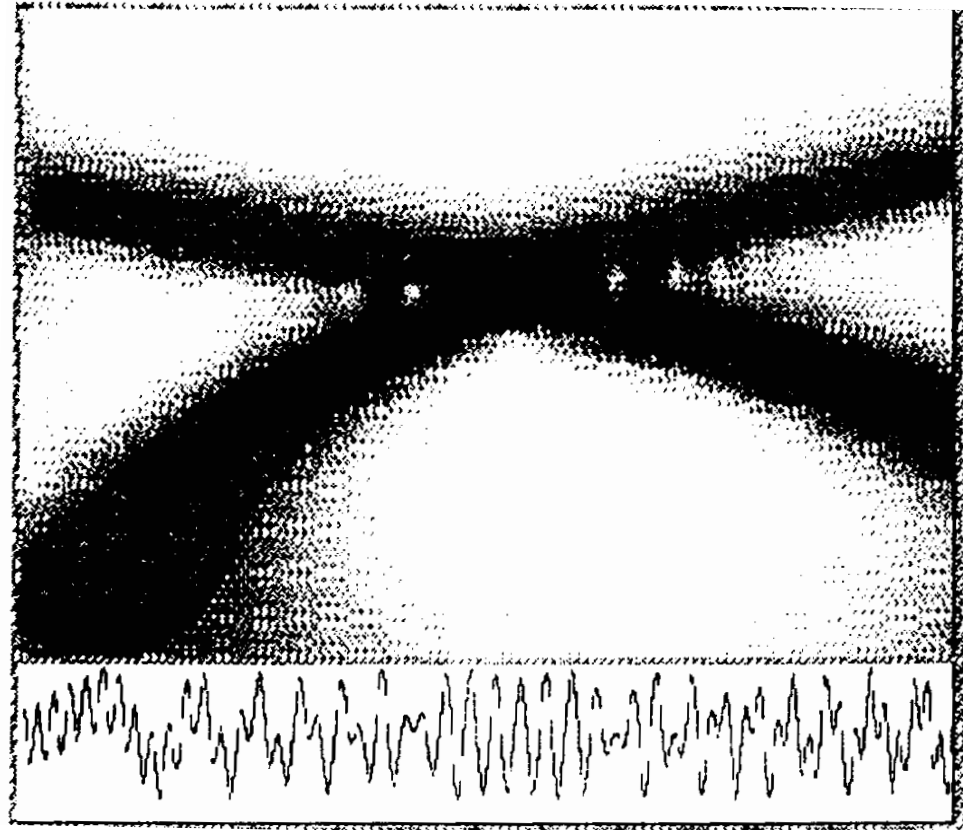


в)



г)

На рисунке 3) показан результат вейвлет – разложения сигнала, представляющего собой суперпозицию двух гармонических составляющих с непрерывно меняющимися частотами (использовался вейвлет



Морле). Вейвлет – представление позволяет получить точный вид эволюции частоты каждого из двух сигналов.

Важное свойство вейвлет – представления функций: на этапе разложения сигнала по вейвлетам и на этапе восстановления исходного сигнала по его вейвлет образу **можно использовать различные свойства вейвлетов.** Условие (6) заменяется на более мягкое условие (9):

$$C_{\phi\psi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)\hat{\phi}^*(\omega)|}{|\omega|} d\omega < \infty, \quad (9)$$

поскольку теперь один из двух вейвлетов может не удовлетворять (6), при условии, что второй вейвлет компенсирует его «недостатки». В этом случае вместо одного из вейвлетов можно использовать **сингулярную функцию** (например, δ – функцию), **не являющуюся вейвлетом.**

3 . Вейвлет – анализ временных колебаний

Рассмотрим вейвлет – анализ солнечной активности.

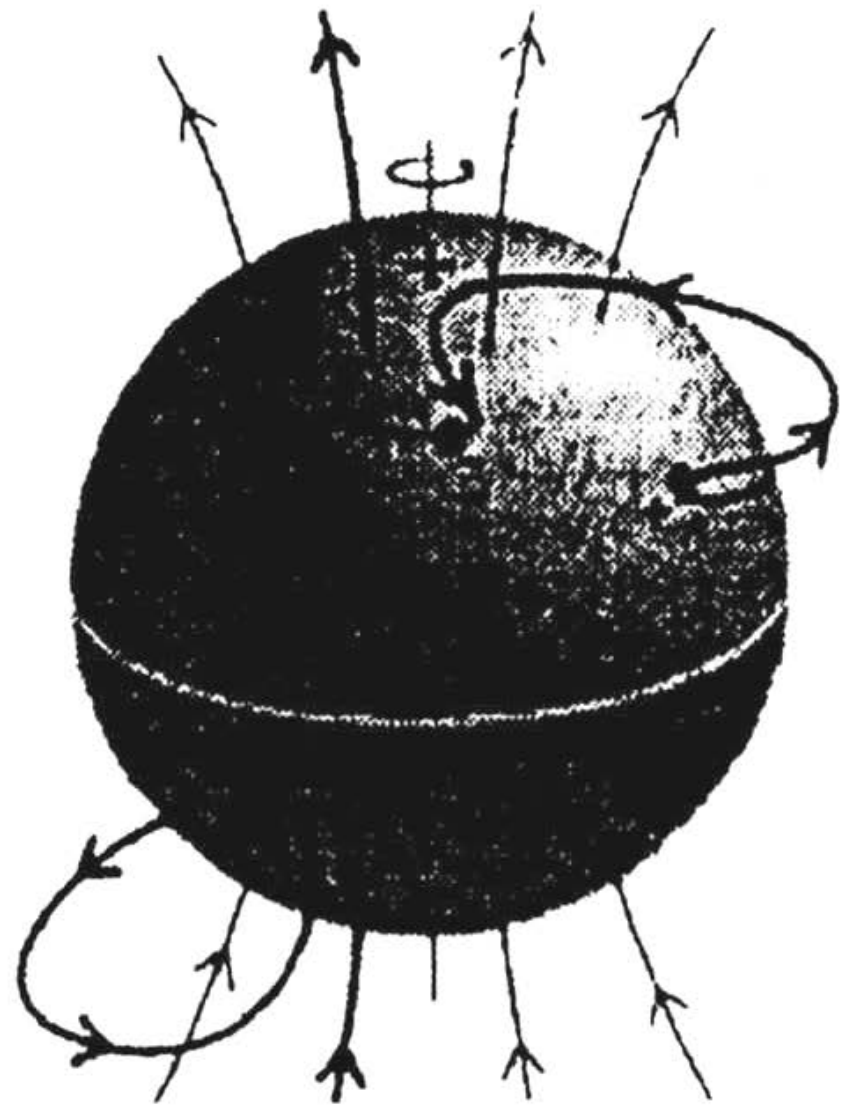
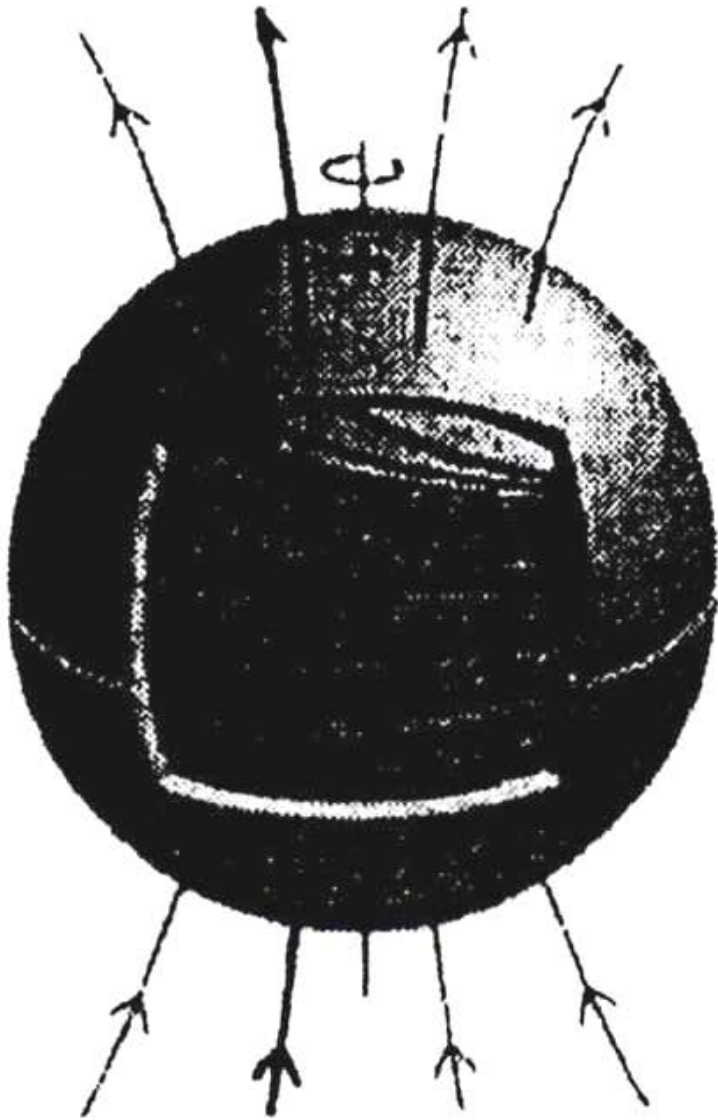
Долговременная запись среднемесячных чисел солнечных пятен начинается с наблюдений Галилея в феврале 1610 года, а с октября 1611 года наблюдения становятся довольно регулярными. Существующий в настоящее время ряд данных не имеет в астрономии аналогов по регулярности и продолжительности наблюдений.

Число пятен связано с интенсивностью магнитного поля Солнца, которое имеет полоидальную компоненту и более мощную азимутальную, образующие замкнутые кольца силовых линий внутри конвективной оболочки Солнца.

Когда напряженность магнитного поля растет, на этих магнитных линиях возникают **гигантские петли**, выходящие за пределы конвективной оболочки. В местах выхода магнитное поле направлено вертикально и подавляет конвективное течение, приносящее горячую плазму из недр Солнца. **В результате температура оказывается ниже, чем на остальной поверхности, и область видна как темное пятно.** Чем сильнее магнитное поле, тем больше петель и тем больше пятен видно на поверхности.

Северный полюс

Северный полюс



Компоненты силовых линий магнитного поля Солнца

График изменения числа пятен – это череда пиков, каждый из которых охватывает приблизительно 11 лет.

Одиннадцатилетний солнечный цикл характеризует работу солнечного динамо – магнитогидродинамического генератора поля.

Амплитуда циклов непрерывно меняется, а временами возникают сбои. Самый заметный сбой – минимум Маундера – имел место в конце 17 – начале 18 веков. Другое заметное ослабление солнечной активности было отмечено в начале 19 века – минимум Дальтона.

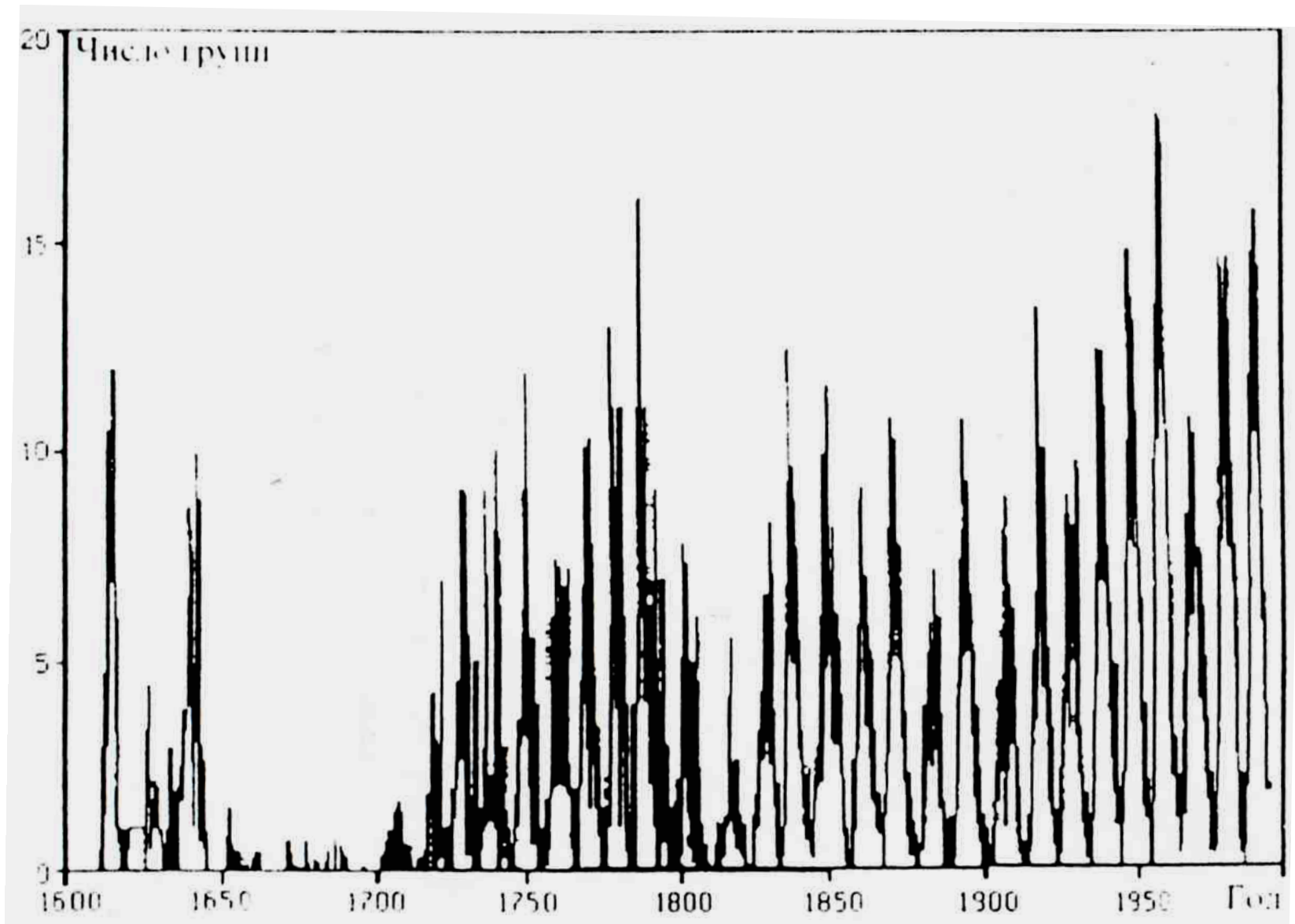
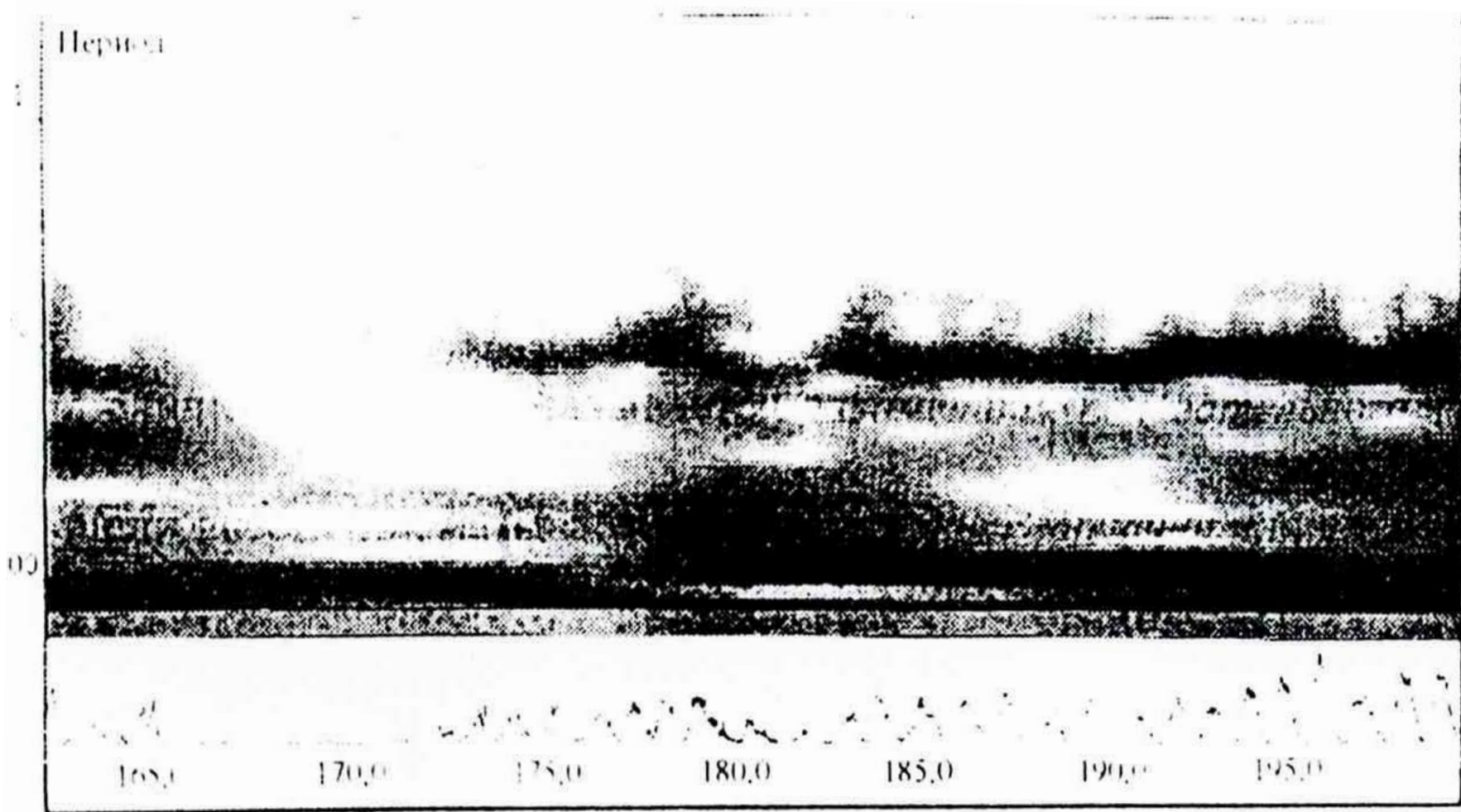


График изменения числа солнечных пятен во времени

Вейвлет – представление проектирует одномерный сигнал (который был функцией только времени) на плоскость время – частота и позволяет увидеть изменение во времени спектральных свойств сигнала. На вейвлет – плоскости одиннадцатилетнему циклу соответствует темная горизонтальная полоса (идеально ровная горизонтальная полоса соответствовала бы чисто гармоническому колебанию). Кроме основного цикла, длительностью около одиннадцати лет, отмечен еще один – приблизительно со столетней периодичностью.



**Модуль вейвлет - преобразования Морле данных графика
изменения числа солнечных пятен**

При изучении графика ранее, без использования вейвлет – метода, предполагалось наличие большого количества циклов с другой периодичностью. Все они оказались артефактами, то есть необоснованными показаниями методов, не очень хорошо приспособленных к рассматриваемой задаче. Вейвлет – анализ позволяет проследить, как меняется длительность номинального одиннадцатилетнего цикла со временем, показывая, что столетний цикл фиксирует периодические попытки механизма генерации солнечного магнитного поля дать сбой и свернуть с обычных одиннадцатилетних колебаний в новый эпизод типа минимума Маундера.

В Парижской обсерватории с 1683 года по 1718 год непрерывно регистрировались вариации видимого солнечного диаметра. Эти измерения были возобновлены в 1978 году.

В результате вейвлет – анализа данных был получен неожиданный результат, состоящий в том , что одиннадцатилетние вариации солнечного диаметра имели наибольшую амплитуду как раз во время глубокого минимума солнечной активности. По мере выхода из минимума вариации числа пятен начинают нарастать, а вариации диаметра спадать