Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Физический факультет. Кафедра математики

Внимание! Все утверждения необходимо доказывать

Вопросы, входящие в состав экзаменационных билетов по линейной алгебре, II, III потоки

1. Определение линейного пространства (аксиомы линейного пространства). Нулевой вектор (определение, единственность), противоположный вектор (определение, единственность), основные свойства линейных операций: $0x = \theta$, $(-1)x = -x$, $\lambda\theta = \theta$. Определение подпространства линейного пространства. Теорема о том, что подпространство само является линейным пространством. Теорема о пересечении подпространств. Примеры линейных пространств.

2. Определение линейной комбинации векторов, определение линейной оболочки векторов. Теорема о том, что линейная оболочка является подпространством. Определение линейно зависимых и линейно независимых векторов. Теоремы о линейно зависимых и линейно независимых векторах.

3. Определение базиса линейного пространства, определение координат вектора, основные свойства координат вектора. Определение размерности линейного пространства. Теорема о связи между длиной базиса и размерностью линейного пространства.

4. Определение ранга матрицы. Ранг матрицы как размерность линейной оболочки столбцов и строк. Теорема о том, что если определитель матрицы равен нулю, то столбцы матрицы линейно зависимы. Теорема об операциях, сохраняющих ранг матрицы. Теорема о достраивании базиса подпространства Q_1 до базиса подпространства Q_2 (здесь $Q_1 \subseteq Q_2$). Неравенства $\operatorname{rank}(AB) \leqslant \operatorname{rank}(A)$, $\operatorname{rank}(AB) \leqslant \operatorname{rank}(B)$.

5. Сумма подпространств, прямая сумма подпространств (определения, простейшие свойства). Размерность прямой суммы подпространств, размерность суммы подпространств. Линейно независимые подпространства.

6. Определение матрицы перехода от одного базиса к другому. Основные свойства матрицы перехода. Преобразование координат вектора при переходе от одного базиса к другому. Ориентированное пространство, правый базис, левый базис.

7. Определение тензора, примеры тензоров. Сумма тензоров, произведение числа и тензора, прямое произведение тензоров, свёртка тензоров. Доказательство факта, что свёртка тензора является тензором.

8. Определение линейного оператора, примеры линейных операторов. Ядро и образ линейного оператора $A\colon L_1 \to L_2$ (теоремы о том, что: $\ker(A)$ — подпространство пространства L_1, $\mathrm{R}(A)$ — подпространство пространства L_2, $\dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr) \leqslant \dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr)$; здесь: $\mathrm{D}(A)$ — область определения оператора A, $\mathrm{R}(A)$ — образ оператора A). Произведение линейных операторов. Критерий обратимости линейного оператора. Основные свойства обратимого линейного оператора: A^{-1} — линейный оператор, $\dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr) = \dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr)$.

9. Сумма линейных операторов, произведение числа и линейного оператора. Теорема о том, что $\dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr) = \dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) - \dim\bigl(\ker(A)\bigr)$ (здесь: $\mathrm{D}(A)$ — область определения оператора A, $\mathrm{R}(A)$ — образ оператора A). Первая теорема Фредгольма в операторной формулировке ($\mathrm{R}(A) = L$ тогда и только тогда, когда $\ker(A) = \{\theta\}$).

10. Матрица линейного оператора (определение, свойства). Матрица суммы линейных операторов, матрица произведения числа и линейного оператора, матрица произведения линейных операторов. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса.

11. Определение изоморфизма линейных пространств, примеры изоморфизмов. Произведение изоморфизмов, обратное отображение к изоморфизму, сохранение размерности при изоморфизме. Теорема об изоморфности линейных пространств одинаковой конечной размерности.

12. Инвариантное подпространство линейного оператора. Собственное значение, собственный вектор, собственное подпространство, геометрическая кратность собственного значения. Теорема о линейной независимости собственных подпространств, соответствующих различным собственным значениям.

13. Характеристический полином линейного оператора. Инвариантность характеристического полинома. Алгебраическая кратность собственного значения. Условие, при котором матрица линейного оператора диагональна. Условия, при которых матрицу линейного оператора можно привести к диагональному виду.

14. Линейная форма. Билинейная форма, симметричная билинейная форма. Квадратичная форма, теорема о восстановлении симметричной билинейной формы по квадратичной. Матрица билинейной формы (определение, свойства), преобразование матрицы билинейной формы при замене базиса.

15. Матрица квадратичной формы (определение, свойства). Приведение квадратичной (симметричной билинейной) формы к каноническому виду методом Лагранжа.

16. Закон инерции квадратичных форм.

17. Знакоопределённая квадратичная форма. Критерий Сильвестра (**если в доказательстве используется метод Якоби, необходимо привести обоснование метода Якоби**).

18. Определение линейного евклидова (унитарного) пространства, примеры линейных евклидовых (унитарных) пространств. Неравенство Коши—Буняковского. Норма вектора, ортогональность векторов. Ковариантный метрический тензор. Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому. Контравариантный метрический тензор. Подъём и опускание индексов.

19. Ортогональное дополнение подпространства, ортогональная проекция вектора на подпространство, оператор ортогонального проектирования на подпространство (определения, свойства). Свойства ортогонального дополнения. Выражение для оператора ортогонального проектирования. Процесс ортогонализации Грама—Шмидта.

20. Связь между векторами и линейными формами в линейном евклидовом пространстве. Связь между линейными операторами и билинейными формами в линейном евклидовом пространстве. Подъём и опускание индексов.

21. Ортогональный оператор в евклидовом пространстве (определение, свойства). Унитарный оператор в унитарном пространстве (определение, свойства). Матрицы ортогональных и унитарных операторов.

22. Сопряжённый оператор: определение; единственность; существование, линейность, выражение для матрицы (в произвольном базисе, в ортонормированном базисе). Вторая теорема Фредгольма в операторной формулировке ($\mathrm{R}(A) = \ker(A^*)^{\perp}$; здесь $\mathrm{R}(A)$ — образ оператора A).

23. Самосопряженный оператор (определение, критерии самосопряжённости). Матрица самосопряженного оператора в произвольном базисе и в ортонормированном базисе. Теорема о том, что оператор ортогонального проектирования является самосопряжённым оператором.

24. Самосопряженный оператор (определение). Теорема о вещественности собственных значений самосопряжённого оператора. Теорема об ортогональности собственных подпро-

странств. Теорема о вещественности корней характеристического полинома самосопряжённого оператора. Теорема о существовании ортогонального базиса, состоящего из собственных векторов самосопряжённого оператора.

25. Спектральное разложение самосопряжённого оператора. Одновременное приведение матриц двух симметричных билинейных форм в линейном пространстве к каноническому виду.

Теоретические задачи, входящие в состав экзаменационных билетов по линейной алгебре, II, III потоки

1. Доказать, что в линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{N\times N}$ (пространство всех матриц размера $N \times N$ с элементами из поля $\mathbb{R}$) подмножество, состоящее из симметричных матриц (т. е. матриц, удовлетворяющих условию $A^T = A$), является подпространством. Найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.

2. Доказать, что в линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{N\times N}$ (пространство всех матриц размера $N \times N$ с элементами из поля $\mathbb{R}$) подмножество, состоящее из антисимметричных матриц (т. е. матриц, удовлетворяющих условию $A^T = -A$), является подпространством. Найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.

3. Доказать, что в линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{N\times N}$ (пространство всех матриц размера $N\times N$ с элементами из поля $\mathbb{R}$) подмножество, состоящее из матриц с нулевым следом, является подпространством. Найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства. (След $\mathrm{tr}(A)$ квадратной матрицы A — это сумма её диагональных элементов.)

4. Доказать, что линейное вещественное пространство $\mathbb{R}^{N\times N}$ (пространство всех матриц размера $N \times N$ с элементами из поля $\mathbb{R}$) представляет собой прямую сумму двух своих подпространств: подпространства симметричных матриц (т. е. матриц, удовлетворяющих условию $A^T = A$) и подпространства антисимметричных матриц (т. е. матриц, удовлетворяющих условию $A^T = -A$).

5. Доказать, что линейное вещественное пространство $\mathbb{R}^{N\times N}$ (пространство всех матриц размера $N \times N$ с элементами из поля $\mathbb{R}$) представляет собой прямую сумму двух своих подпространств: подпространства матриц с нулевым следом и подпространства матриц вида λI, где: $\lambda \in \mathbb{R}$, I — единичная матрица.

6. Доказать, что линейное вещественное пространство $\mathbb{R}^N$ представляет собой прямую сумму двух своих подпространств: подпространства столбцов, сумма элементов которых равна нулю, и подпространства столбцов вида $\lambda \cdot (1, \ldots, 1)^T$, где $\lambda \in \mathbb{R}$.

7. Показать, что множество $\mathbb{C}^N$ является линейным пространством над полем вещественных чисел. Показать, что это же множество является линейным пространством над полем комплексных чисел. Найти размерность и указать какой-либо базис для каждого из указанных линейных пространств.

8. Рассматривается линейное вещественное пространство $P_{2N}(\mathbb{R})$ (пространство всех полиномов на вещественной оси степени не выше $2N$). Является ли подпространством пространства $P_{2N}(\mathbb{R})$ множество всех полиномов F, удовлетворяющих условиям: $F(-1) = 0$, $F(1) = 0$? В случае положительного ответа найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.

9. Рассматривается линейное пространство L, $\dim(L) = N \in \mathbb{N}$. Матрица C_1 является матрицей перехода от базиса e к базису e', а матрица C_2 — матрицей перехода от базиса e' к базису e''. Найти матрицу перехода от базиса e'' к базису e.

10. Доказать, что в линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{N_2\times N_1}$ (пространство всех матриц размера $N_2 \times N_1$ с элементами из поля $\mathbb{R}$) можно ввести скалярное произведение по формуле: $(X, Y) = \mathrm{tr}(X^TY)$ при $X, Y \in \mathbb{R}^{N_2\times N_1}$ (здесь $\mathrm{tr}(X^TY)$ — след матрицы X^TY).

11. Пусть f — линейная форма в линейном пространстве L, $\dim(L) \geqslant 2$. Рассмотрим выражение $A(x, y) = f(x) \cdot f(y)$. Является ли $A(x, y)$ билинейной формой? Если является, может ли эта билинейная форма задавать скалярное произведение в L?

12. Рассматривается линейное евклидово пространство H с ортонормированным базисом $e_1, \dots, e_N$. Пусть A — линейный оператор в пространстве H. Доказать равенство: $[A]^k_m = (e_k, Ae_m)$ при k, $m = \overline{1, N}$ (здесь $[A]$ — матрица оператора A в базисе e).

13. Рассматривается линейное евклидово пространство H с ортонормированным базисом $e_1, \dots, e_N$. Пусть A — линейный оператор в пространстве H. Доказать равенство $\mathrm{tr}(A) = \sum\limits_{k=1}^{N} (e_k, Ae_k)$ (здесь $\mathrm{tr}(A)$ — след оператора A).

14. Рассматривается линейное евклидово пространство H, $\dim(H) \in \mathbb{N}$. Пусть: P — линейный самосопряжённый оператор в пространстве H, $P^2 = P$. Доказать, что оператор P является оператором ортогонального проектирования на подпространство $\mathrm{R}(P)$ (здесь $\mathrm{R}(P)$ — образ оператора P).

15. Рассматривается линейное евклидово пространство H. Пусть A — линейный оператор в пространстве H. Доказать, что оператор A является ортогональным оператором тогда и только тогда, когда: $\|Ax\| = \|x\|$ при $x \in H$.

16. Рассматривается линейное евклидово пространство H. Пусть A, B — линейные самосопряжённые операторы в пространстве H. Доказать, что оператор AB является самосопряжённым оператором тогда и только тогда, когда $AB = BA$.

17. Рассматривается линейное пространство L. Пусть A — линейный оператор в пространстве L. Доказать, что сумма двух различных собственных подпространств оператора A является инвариантным подпространством оператора A. Является ли эта сумма собственным подпространством оператора A? **Ответ обосновать**.

18. Рассматривается ориентированное линейное евклидово пространство H с правым ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3. Пусть: $a \in H$; $Ax = [x, a]$ при $x \in H$ (здесь $[x, a]$ — векторное произведение векторов x, a). Доказать, что A — линейный оператор в пространстве H. Найти: матрицу оператора A в базисе e; ядро, образ, собственные значения, собственные векторы оператора A.

19. Рассматривается линейное унитарное пространство H. Пусть A — линейный оператор в пространстве H. Доказать, что $i(A - A^*)$ — самосопряжённый оператор.

20. Найти общий вид ортогональной матрицы размера 2×2. Найти общий вид преобразования Лоренца в пространстве $E^{1,1}$.

21. Рассматривается линейное пространство L над числовым полем $\mathbb{K}$, $\dim(L) \in \mathbb{N}$. Пусть A — линейный оператор в пространстве L. Найти все числа $\lambda \in \mathbb{K}$, для которых $\mathrm{R}(A - \lambda I) = L$ (здесь $\mathrm{R}(A - \lambda I)$ — образ оператора $A - \lambda I$).

22. Рассматривается линейное пространство L над числовым полем $\mathbb{K}$, $\dim(L) \in \mathbb{N}$. Пусть A — линейный оператор в пространстве L. Найти все числа $\lambda \in \mathbb{K}$, для которых $\mathrm{R}(A - \lambda I) \neq L$ (здесь $\mathrm{R}(A - \lambda I)$ — образ оператора $A - \lambda I$).

Образцы вычислительных задач, входящих в состав экзаменационных билетов по линейной алгебре, II, III потоки

1. В линейном вещественном пространстве $P_2(\mathbb{R})$ (пространство всех полиномов на вещественной оси степени не выше 2) заданы элементы: $x_1(t) = -1+3t+2t^2$, $x_2(t) = 2t+3t^2$, $x_3(t) = -1+7t+8t^2$ при $t \in \mathbb{R}$. **Используя метод Гаусса**, выполнить задания: найти базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3)$; найти размерность линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3)$; разложить элементы x_1, x_2, x_3 по найденному базису.

2. В линейном вещественном пространстве $P_2(\mathbb{R})$ (пространство всех полиномов на вещественной оси степени не выше 2) заданы элементы: $x_1(t) = 1+t^2$, $x_2(t) = 5+2t+3t^2$, $x_3(t) = 2+t+t^2$, $x_4(t) = 4+t+3t^2$ при $t \in \mathbb{R}$. **Используя метод Гаусса**, выполнить задания: найти базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; найти размерность линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; достроить найденный базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$ до базиса пространства $P_2(\mathbb{R})$.

3. В линейном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ (скалярное произведение определяется формулой $(x, y) = x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3$) заданы элементы: $x_1 = (1, 1, 1)^T$, $x_2 = (1, 0, 0)^T$, $x_3 = (0, 1, 0)^T$. Доказать, что элементы x_1, x_2, x_3 линейно независимы. Применить к последовательности x_1, x_2, x_3 процесс ортогонализации Грама—Шмидта (без нормировки).

4. В линейном евклидовом пространстве $P_2\big([-1, 1]\big)$ (пространство всех полиномов на сегменте $[-1, 1]$ степени не выше 2; скалярное произведение определяется формулой $(x, y) = \int\limits_{-1}^{1} x(t)y(t)\,dt$) заданы элементы: $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t$, $x_3(t) = t^2$ при $t \in [-1, 1]$. Доказать, что элементы x_1, x_2, x_3 линейно независимы. Применить к последовательности x_1, x_2, x_3 процесс ортогонализации Грама—Шмидта (без нормировки).

5. Рассматривается линейное евклидово пространство H с ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3, e_4. Заданы столбцы координат элементов x_1, x_2, x в базисе e: $[x_1] = (1, 0, 0, 1)^T$, $[x_2] = (1, 1, 0, 0)^T$, $[x] = (1, 0, 0, 0)^T$. Найти: проекцию элемента x на подпространство $L(x_1, x_2)$, перпендикуляр элемента x к подпространству $L(x_1, x_2)$.

6. В линейном евклидовом пространстве $P_1\big([-1, 1]\big)$ (пространство всех полиномов на сегменте $[-1, 1]$ степени не выше 1; скалярное произведение определяется формулой $(x, y) = \int\limits_{-1}^{1} x(t)y(t)\,dt$) заданы элементы: $e_1(t) = 1$, $e_2(t) = t$ при $t \in [-1, 1]$. Доказать, что элементы e_1, e_2 образуют базис пространства $P_1\big([-1, 1]\big)$. Найти ковариантный метрический тензор в базисе e.

7. Для каждого $p \in \mathbb{R}$ выполнить задания: найти базис линейной оболочки симметричных матриц: $X_{1,p} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X_{2,p} = \begin{pmatrix} 2p & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $X_{3,p} = \begin{pmatrix} -p & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; найти размерность линейной оболочки $L\big(X_{1,p}, X_{2,p}, X_{3,p}\big)$; разложить элементы $X_{1,p}$, $X_{2,p}$, $X_{3,p}$ по найденному базису.

8. В линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^2$ заданы элементы: $e_1 = (1, 2)^T$, $e_2 = (2, 5)^T$, $e'_1 = (2, 1)^T$, $e'_2 = (-1, 3)^T$. Доказать, что: элементы e_1, e_2 образуют базис пространства $\mathbb{R}^2$; элементы e'_1, e'_2 образуют базис пространства $\mathbb{R}^2$. Найти: матрицу перехода от базиса e к базису e'; матрицу перехода от базиса e' к базису e.

9. Рассматривается линейное евклидово пространство H с ортонормированным базисом e_1, e_2. Пусть: $x = 2e_1+e_2$, $y = e_1+3e_2$. Найти: нормы элементов x, y; угол между элементами x, y. Применить к последовательности x, y процесс ортогонализации Грама—Шмидта.

10. Рассматривается линейное евклидово пространство H с ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3. Подпространство Q задано уравнением $x^1 - 2x^2 + 3x^3 = 0$. Найти базис ортогонального дополнения к подпространству Q. **Ответ обосновать**.

11. В линейном вещественном пространстве $P_1\big([0,2]\big)$ (пространство всех полиномов на сегменте $[0,2]$ степени не выше 1) задан линейный оператор, действующий по правилу: $(Ax)(t) = \int\limits_0^2 (t-\tau)x(\tau)\,d\tau$ при: $x \in P_1\big([0,2]\big)$, $t \in [0,2]$. Найти матрицу оператора A в базисе: $e_1(t) = 1$, $e_2(t) = t$ при $t \in [0,2]$.

12. Рассматривается линейное евклидово пространство H с ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3, e_4. Заданы столбцы координат элементов x_1, x_2 в базисе e: $[x_1] = (1,0,0,1)^T$, $[x_2] = (1,1,0,0)^T$. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования P на подпространство $L(x_1, x_2)$ в базисе e.

13. Для каждого $p \in \mathbb{R}$ исследовать на совместность неоднородную СЛАУ, заданную расширенной матрицей $\left(\begin{array}{cc|c} 1+p & 1+p & 0 \\ p & 1 & -p \end{array}\right)$. Найти общее решение во всех случаях, когда система совместна.

14. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2, e_3. Заданы: матрица $[A](e)$ линейного оператора A в базисе e; матрица перехода $\alpha(e,e')$ от базиса e к базису e'. Найти матрицу оператора A в базисе e'. $[A](e) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha(e,e') = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

15. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2, e_3. Задана матрица линейного оператора A в базисе e: $[A] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти все собственные значения оператора A. Для каждого собственного значения найти: алгебраическую кратность собственного значения; базис собственного подпространства; геометрическую кратность собственного значения (размерность собственного подпространства); общий вид собственного вектора.

16. Рассматривается линейное евклидово пространство H с ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3. Задана матрица линейного самосопряжённого оператора A в базисе e: $[A](e) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Найти: ортонормированный базис e' из собственных векторов оператора A; матрицу перехода от базиса e к базису e'; матрицу перехода от базиса e' к базису e; матрицу оператора A в базисе e'.

17. Рассматривается линейное евклидово двумерное пространство H. Известно, что одна из двух данных матриц является матрицей некоторого линейного самосопряженного оператора в некотором (неортогональном) базисе. Установить, какая именно. $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -5 & -14 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$.

18. В линейной оболочке $L(\cos, \sin)$ задан линейный оператор, действующий по правилу: $(Ax)(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t)$ при: $x \in L(\cos, \sin)$, $t \in \mathbb{R}$. Найти: матрицу оператора A в базисе $\cos$, $\sin$; собственные значения и собственные векторы оператора A.

19. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2. Заданы выражения для билинейных форм F_1, F_2, F_3 в базисе e. Какие из этих билинейных форм можно принять за скалярное произведение в пространстве L? Какие из этих билинейных форм нельзя принять за скалярное произведение в пространстве L, но можно принять за псевдоскалярное произведение в пространстве L? **Ответ обосновать**. $F_1(x,y) = 3x^1y^1 + 2x^1y^2 + 2x^2y^1 + 2x^2y^2$, $F_2(x,y) = 2x^1y^1 + x^1y^2 - x^2y^1 + 3x^2y^2$, $F_3(x,y) = x^1y^1 + 3x^1y^2 + 3x^2y^1 + 4x^2y^2$.

20. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2. Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ задана матрица билинейной формы F_λ в базисе e: $[F_\lambda] = \begin{pmatrix} \lambda & -2\lambda \\ -2\lambda & 4 \end{pmatrix}$. При каких $\lambda \in \mathbb{R}$ билинейную форму F_λ можно принять за скалярное произведение в пространстве L? При каких $\lambda \in \mathbb{R}$ билинейную форму F_λ нельзя принять за скалярное произведение в пространстве L, но можно принять за псевдоскалярное произведение в пространстве L? **Ответ обосновать**.

21. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2. Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ задана матрица квадратичной формы Q_λ в базисе e: $[Q_\lambda] = \begin{pmatrix} \lambda & -2\lambda \\ -2\lambda & 4 \end{pmatrix}$. Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ исследовать квадратичную форму Q_λ на знакоопределённость и записать её канонический вид.

22. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2, e_3, e_4. Задано выражение для квадратичной формы Q в базисе e: $Q(x) = x^1x^2 + x^1x^3 + x^2x^3$. Найти матрицу квадратичной формы Q в базисе e. Используя метод Лагранжа, привести квадратичную форму Q к каноническому виду: найти матрицу квадратичной формы Q в каноническом базисе e'; найти матрицу перехода от базиса e к базису e'; найти матрицу перехода от базиса e' к базису e.

23. Рассматривается линейное евклидово пространство H с ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3. Задано выражение для квадратичной формы Q в базисе e: $Q(x) = 3(x^1)^2 - 4x^1x^3 + (x^2)^2 + 3(x^3)^2$. Найти: матрицу квадратичной формы Q в базисе e; ортонормированный базис e', в котором матрица квадратичной формы Q имеет диагональный вид; матрицу перехода от базиса e к базису e'; матрицу перехода от базиса e' к базису e; матрицу квадратичной формы Q в базисе e'.

24. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2, e_3. Заданы выражения для квадратичных форм Q_1, Q_2 в базисе e: $Q_1(x) = 2(x^1)^2 - 6x^1x^2 - 4x^1x^3 + 9(x^2)^2 + 8x^2x^3 + 2(x^3)^2$, $Q_2(x) = 3(x^1)^2 - 2x^1x^2 - 2x^1x^3 + 5(x^2)^2 + 4x^2x^3 + (x^3)^2$. Найти матрицы квадратичных форм Q_1, Q_2 в базисе e. Одновременно привести квадратичные формы Q_1, Q_2 к каноническому виду: найти матрицы квадратичных форм Q_1, Q_2 в каноническом базисе e'; найти матрицу перехода от базиса e к базису e'.

Структура экзаменационного билета по линейной алгебре, II, III потоки

1. Вычислительная задача.
2. Теоретическая задача.
3. Вопрос по линейной алгебре.
4. Вопрос по линейной алгебре.