Лекция 4. Вариационные методы. Полуограниченные функционалы.

Корпусов Максим Олегович

Курс лекций по нелинейному функциональному анализу

19 сентября 2012 г.

Обозначения

пусть $\mathbb{B}$ — это некоторое банахово пространство относительно нормы $\|\quad\|$ и скобками двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$ между $\mathbb{B}$ и его сопряженным $\mathbb{B}^*$. Пусть на этом банаховом пространстве $\mathbb{B}$ задан некоторый (нелинейный) функционал

$$\psi : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1.$$

Будем как и в предыдущей лекции обозначать символом $\psi'_f(u)$ производную Фреше.

Обозначения

Определение 1. *Градиентом функционала ψ в некоторой точке $u \in \mathbb{B}$ назовем его производную Фреше в этой точке*:

$$\psi'_f(u) = \mathbf{grad}_f\, \psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^* \tag{1}$$

Определение 2. *Оператор*

$$\mathbb{F} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$$

называется потенциальным, если найдется такой дифференцируемый по Фреше функционал

$$\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1,$$

что

$$\mathbb{F}(u) = \mathbf{grad}_f\, \psi(u). \tag{2}$$

Потенциальные операторы.

Естественно, возникает вопрос о достаточных условиях потенциальности заданного оператора $\mathbb{F}$:

$$\mathbb{F} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*.$$

Для ответа на этот вопрос нам необходимо ввести понятие *локальной непрерывности* по Липшицу. Дадим определение.

Определение 3. *Оператор* $\mathbb{F}$, *действующий из одного банахова пространства* $\mathbb{B}_1$ *в другое банахово пространство* $\mathbb{B}_2$, *называется локально по Липшицу непрерывным, если для каждого* $R > 0$ *имеет место следующее неравенство*:

$$\|\mathbb{F}(u_1) - \mathbb{F}(u_2)\|_2 \leqslant c(R)\|u_1 - u_2\|_1 \quad \text{для всех} \quad u_1, u_2 \in \mathbb{B}_1 \quad (3)$$

таких, что

$$\|u_k\|_1 \leqslant R \quad \text{при} \quad k = 1, 2.$$

Теорема о потенциальном операторе

Теорема

Локально непрерывный по Липшицу оператор $\mathbb{F} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$, *потенциален тогда и только тогда, когда для всех* $u, v \in \mathbb{B}$ *имеет место равенство*

$$\int_0^1 \langle \mathbb{F}(tu), u \rangle \, dt - \int_0^1 \langle \mathbb{F}(tv), v \rangle \, dt =$$

$$= \int_0^1 \langle \mathbb{F}(tu + (1-t)v), u - v \rangle \, dt \quad \textit{при} \quad u, v \in \mathbb{B}. \qquad (4)$$

$$\psi(u) = \psi(\theta) + \int_0^1 \langle \mathbb{F}(tu), u \rangle \, dt \quad \textit{для всех} \quad u \in \mathbb{B}. \qquad (5)$$

Доказательство теоремы

Итак, пусть оператор $\mathbb{F}$ сильно потенциален, тогда найдется дифференцируемый по Фреше функционал

$$\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$$

такой, что

$$\mathbb{F}(u) = \mathbf{grad}_f \, \psi(u).$$

В этом случае справедлива следующая формула:

$$\psi(u) - \psi(v) = \int\limits_0^1 \frac{d}{dt} \psi(tu + (1-t)v) \, dt = \int\limits_0^1 \left\langle \psi'_f(tu + (1-t)v), u - v \right\rangle$$

$$= \int\limits_0^1 \langle \mathbb{F}(tu + (1-t)v), u - v \rangle \; dt \quad (6)$$

Доказательство теоремы

Положим в равенстве (6) сначала $v = \theta \in \mathbb{B}$, тогда получим следующее равенство:

$$\psi(u) = \psi(\theta) + \int\limits_0^1 \langle \mathbb{F}(tu), u\rangle \; dt. \tag{7}$$

Теперь положим в равенстве (6) $u = \theta$ и получим тогда следующее равенство:

$$\psi(v) = \psi(\theta) + \int\limits_0^1 \langle \mathbb{F}(tv), v\rangle \; dt. \tag{8}$$

С учетом равенств (7) и (8) получим следующее выражение:

$$\psi(u) - \psi(v) = \int\limits_0^1 \langle \mathbb{F}(tu), u\rangle \; dt - \int\limits_0^1 \langle \mathbb{F}(tv), v\rangle \; dt. \quad \boxtimes$$

Доказательство теоремы

Пусть теперь для оператора $\mathbb{F}$ выполнено равенство (4). Определим функционал $\psi(u)$ равенством

$$\psi(u) = \psi(\theta) + \int\limits_0^1 \langle \mathbb{F}(tu), u \rangle \, dt. \tag{9}$$

Докажем, что функционал $\psi(u)$ дифференцируем по Фреше и его производная Фреше равна $\mathbb{F}(u)$. Действительно, имеет место цепочка следующих равенств:

$$\psi(u+h)-\psi(u) = \int\limits_0^1 \langle \mathbb{F}(t(u+h)), u+h \rangle \, dt - \int\limits_0^1 \langle \mathbb{F}(tu), u \rangle \, dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \langle \mathbb{F}(t(u+h)+(1-t)u), h \rangle \, dt. \tag{10}$$

Доказательство теоремы

Введем следующее обозначение:

$$\omega(u,h) \equiv \psi(u+h) - \psi(u) - \langle \mathbb{F}(u), h \rangle .$$

Но тогда для $\omega(u,h)$ справедливо неравенство:

$$|\omega(u,h)| \leqslant \int\limits_0^1 |\langle \mathbb{F}(t(u+h)+(1-t)u) - \mathbb{F}(u), h\rangle| \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^1 \|\mathbb{F}(t(u+h)+(1-t)u) - \mathbb{F}(u)\|_* \|h\| \, dt \leqslant$$

$$\leqslant c(R) \int\limits_0^1 \|t(u+h)+(1-t)u - u\| \|h\| \, dt = c(R)\|h\|^2 \frac{1}{2}$$

для всех $u, h \in \mathbb{B}$, для которых

$$\|u\| \leqslant R \quad \text{и} \quad \|h\| \leqslant R.$$

Доказательство теоремы

Следовательно, приходим к выводу, что

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{|\omega(u,h)|}{\|h\|} = 0.$$

Тем самым, функционал $\psi(u)$ дифференцируем по Фреше на каждом шаре $\|u\| \leqslant R$ и его производная Фреше равна

$$\psi'_f(u) = \mathbb{F}(u).$$

ТЕОРЕМА ДОКАЗАНА.

Вариационная постановка операторных уравнений-1

Давайте зададимся вопросом о нахождении решений следующего операторного уравнения:

$$\mathbb{F}(u) = \theta \in \mathbb{B}^*, \quad u \in \mathbb{B}. \tag{11}$$

Предположим, что оператор $\mathbb{F}$ потенциален и его потенциал — это функционал $\psi(u)$. Дадим определение.

Определение 4. *Пусть* $\mathrm{M} \subset \mathbb{B}$ *— некоторое непустое и замкнутое подмножество. Точка* $\hat{u} \in \mathrm{M}$ *называется точкой экстремума функционала* $\psi(u)$ *на* M, *если*

$$\inf_{u \in \mathrm{M}} \psi(u) = \psi(\hat{u}) \quad \textit{либо} \quad \sup_{u \in \mathrm{M}} \psi(u) = \psi(\hat{u}).$$

Вариационная постановка операторных уравнений-2

Теперь рассмотрим следующую функцию

$$\varphi(t) = \psi(\hat{u} + th) \quad \text{при} \quad t \in (-1, 1),$$

где $\hat{u}$ — это точка экстремума функционала $\psi(\cdot)$ на множестве $\mathrm{M} = \mathbb{B}$. Тогда функция $\varphi(t)$ достигает экстремума в точке $t = 0$. В силу дифференцируемости функционала $\psi(u)$ по Фреше в точке $\hat{u} \in \mathbb{B}$ приходим к выводу, что $\varphi(t)$ дифференцируема в точке $t = 0$. Но тогда необходимым условием экстремума является следующее

$$\varphi'(0) = 0 \Rightarrow \left\langle \psi'_f(\hat{u}), h \right\rangle = 0 \;\forall\, h \in \mathbb{B} \Rightarrow \psi'_f(\hat{u}) = \theta \in \mathbb{B}^* \Rightarrow \mathbb{F}(\hat{u}) = \theta.$$

Лемма

Пусть функционал $\psi(u)$ дважды непрерывно дифференцируем по Фреше для каждого $u \in \mathrm{M}$ и для каждого $h \in \mathbb{B}$ такого, что $u + th \in \mathrm{M}$ для всех $t \in [0,1]$ имеет место следующее выражение:

$$\psi(u+h) = \psi(u) + \left\langle \psi'_f(u), h \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \psi''_{ff}(u)h, h \right\rangle + \omega_2(u,h), \quad (12)$$

где для $\omega_2(u,h)$ выполнено следующее предельное равенство:

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{|\omega_2(u,h)|}{\|h\|^2} = 0. \quad (13)$$

Доказательство леммы-1

Итак, пусть

$$\psi''_{ff}(u)$$

существует и равномерно непрерывна на $\mathbb{M} \subset \mathbb{B}$. Заметим, что для $\psi'_f(u)$ в силу дифференцируемости по Фреше справедливо следующее равенство:

$$\psi'_f(u+h) = \psi'_f(u) + \psi''_{ff}(u)h + \omega_1(u,h),$$

где

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|\omega_1(u,h)\|_*}{\|h\|} = 0$$

при $u \in \mathbb{M}$ и любом $h \in \mathbb{B}$ таком, что $u + h \in \mathbb{M}$ при достаточно малых по норме h.

Доказательство леммы-2

Поэтому справедлива следующая цепочка равенств:

$$\psi(u+h)-\psi(u)=\int\limits_0^1 \frac{d}{dt}\psi(u+th)=\int\limits_0^1 \left\langle \psi'_f(u+th),h\right\rangle\,dt=$$

$$=\int\limits_0^1 \left\langle \psi'_f(u)+t\psi''_{ff}(u)h,h\right\rangle\,dt+\omega_2(u,h),$$

где

$$\omega_2(u,h)=\int\limits_0^1 \langle\omega_1(u,th),h\rangle\,dt.$$

Доказательство леммы-3

Значит, отсюда приходим к следующему равенству:

$$\psi(u+h)-\psi(u) = \left\langle \psi'_f(u), h \right\rangle + \left\langle \psi''_{ff}(u)h, h \right\rangle \int\limits_0^1 t\,dt + \omega_2(u,h) =$$

$$= \left\langle \psi'_f(u), h \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \psi''_{ff}(u)h, h \right\rangle + \omega_2(u,h),$$

где для $\omega_2(u,h)$ справедливо следующее представление:

$$\omega_2(u,h) = \int\limits_0^1 \langle \omega_1(u,th), h \rangle \, dt.$$

Стало быть, приходим к неравенству

$$|\omega_2(u,h)| \leqslant \int\limits_0^1 \|\omega_1(u,th)\|_* \, \|h\| \, dt.$$

Доказательство леммы-4

Поэтому справедливо следующее предельное неравенство:

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{|\omega_2(u,h)|}{\|h\|^2} \leqslant \lim_{\|h\|\to 0} \int\limits_0^1 \frac{\|\omega_1(u,th)\|_*}{\|h\|}\, dt = 0.$$

Тем самым, лемма доказана.

Необходимое условие экстремума

Лемма

Пусть функционал $\psi(u)$, дважды дифференцируемый по Фреше в некоторой окрестности точки $\hat{u} \in \mathbb{B}$, имеет равномерно непрерывную в этой окрестности точки $\hat{u}$ вторую производную Фреше, тогда необходимыми условиями минимума(максимума) в этой точке $\hat{u}$ являются следующие

$$\psi'_f(\hat{u}) = 0 \quad \text{и} \quad \left\langle \psi''_f(\hat{u})h, h \right\rangle \geqslant 0 \ \ (\leqslant 0) \quad \forall\, h \in \mathbb{B}. \tag{14}$$

Доказательство леммы-1

Рассмотрим разложение функционала $\psi(u)$ в окрестности точки экстремума $\hat{u} \in \mathbb{B}$:

$$\psi(\hat{u}+h) = \psi(\hat{u}) + \left\langle \psi'_f(\hat{u}), h \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \psi''_{ff}(\hat{u})h, h \right\rangle + \omega_2(\hat{u}, h).$$

Но как мы доказали ранее в точке $\hat{u}$ имеет место равенство

$$\psi'_f(\hat{u}) = 0,$$

поэтому приходим к следующему равенству:

$$\psi(\hat{u}+h) - \psi(\hat{u}) = \frac{1}{2} \left\langle \psi''_{ff}(\hat{u})h, h \right\rangle + \omega_2(\hat{u}, h). \qquad (15)$$

Доказательство леммы-2

Предположим, что $\hat{u}$ — это точка локального минимума (максимума), но для некоторого $h_1 \in \mathbb{B}$ имеет место следующее неравенство:

$$\left\langle \psi''_{ff}(\hat{u}) h_1, h_1 \right\rangle < 0 \ (> 0).$$

Тогда для $h = \varepsilon h_1$ при $\varepsilon > 0$ имеет место следующее выражение:

$$\left\langle \psi''_{ff}(\hat{u}) h, h \right\rangle = \varepsilon^2 \left\langle \psi''_{ff}(\hat{u}) h_1, h_1 \right\rangle < 0 \ (> 0).$$

Теперь, выбирая $\varepsilon > 0$ сколь угодно малым, получим, что в любой окрестности точки $\hat{u} \in \mathbb{B}$ найдется точка $\varepsilon h_1 \in \mathbb{B}$, что

$$\psi(\hat{u} + \varepsilon h_1) - \psi(\hat{u}) < 0 \ (> 0),$$

т. е. в точке $\hat{u} \in \mathbb{B}$ нет минимума (максимума).

Доказательство леммы-3

Следовательно, необходимым условием минимума (максимума) в точке $\hat{u} \in \mathbb{B}$ есть условие

$$\left\langle \psi''_{ff}(\hat{u})h, h \right\rangle \geqslant 0 \ (\leqslant 0) \quad \text{для всех} \quad h \in \mathbb{B}.$$

Лемма доказана.

Один пример

Рассмотрим следующий функционал на банаховом пространстве $\mathbb{C}[0,1]$ относительно стандартной $\mathrm{supremum}$–нормы:

$$\psi(u) = \int\limits_0^1 u^2(x)(x - u(x))\, dx.$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\psi(u+h) = \int\limits_0^1 (u+h)^2(x-u-h)\, dx = \int\limits_0^1 u^2(x-u)\, dx +$$
$$+ \int\limits_0^1 \left(2ux - 3u^2\right) h\, dx + \int\limits_0^1 (x-3u)h^2\, dx - \int\limits_0^1 h^3\, dx.$$

Один пример. Продолжение 1.

Из этого равенства приходим к выводу, что

$$\psi'_f(u) = 0$$

на двух функциях

$$u(x) = 0 \quad \text{и} \quad u(x) = \frac{2}{3}x.$$

Заметим теперь, что

$$\left\langle \psi''_{ff}(0)h, h \right\rangle = 2\int\limits_0^1 h^2(x)x\,dx \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad h(x) \in \mathbb{C}[0,1],$$

причем,

$$\psi(0) = 0,$$

т. е. на функции $u(x) = 0$ выполнены все необходимые условия локального минимума, но, тем не менее, на функции $u(x) = 0$ функционал не достигает локального минимума.

Один пример. Продолжение 2.

Действительно, рассмотрим следующее однопараметрическое семейство функций:

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon - x, & \text{при} \quad x \in [0, \varepsilon]; \\ 0, & \text{при} \quad x \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Очевидно, что функция $u_\varepsilon(x) \in \mathbb{C}[0,1]$ для всех $\varepsilon \in (0,1)$. Теперь вычислим норму этой функции

$$\sup_{x\in[0,1]} |u_\varepsilon(x)| = \varepsilon \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

т. е. в любой окрестности функции $u(x) = 0 \in \mathbb{C}[0,1]$ содержится функция $u_\varepsilon(x) \in \mathbb{C}[0,1]$ при некотором $\varepsilon > 0$.

Один пример. Продолжение 3.

Теперь вычислим значение функционала $\psi(\cdot)$ на функции $u_\varepsilon(x)$. Действительно, имеем

$$\psi(u_\varepsilon(x)) = \int\limits_0^1 u_\varepsilon^2(x)\,(x - u_\varepsilon(x)) = -\frac{\varepsilon^4}{6} < 0 = \psi(0).$$

Тем самым, минимум у функционала $\psi(u)$ на функции $u(x) = 0$ не достигается.

Достаточное условие

Теорема

Пусть $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ — это дважды дифференцируемый по Фреше в некоторой окрестности точки $\hat{u} \in \mathbb{B}$ функционал, причем вторая производная Фреше равномерно непрерывна в этой окрестности точки $\hat{u}$. Тогда при условиях

(I) $\psi'_f(\hat{u}) = 0$;

(II) $\left\langle \psi''_{ff}(\hat{u})h, h \right\rangle \geqslant c\|h\|^2$ *($\leqslant -c\|h\|^2$) для всех* $h \in \mathbb{B}$ *и* $c = c(\hat{u}) > 0$

в точке $\hat{u} \in \mathbb{B}$ у функционала $\psi(\hat{u})$ достигается минимум (максимум).

Доказательство теоремы-1

Докажем достаточность условий для минимума функционала $\psi(u)$ в точке $\hat{u}$, поскольку достаточность условий для максимума проверяется аналогичным образом. Действительно, с одной стороны, в силу условий теоремы имеет место представление в окрестности точки $\hat{u} \in \mathbb{B}$:

$$\psi(\hat{u}+h)-\psi(\hat{u}) = \left\langle \psi'_f(\hat{u}), h \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \psi''_{ff}(\hat{u})h, h \right\rangle + \omega_2(u,h). \quad (16)$$

Доказательство теоремы-2

Кроме того, поскольку имеет место предельное равенство

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{|\omega_2(u,h)|}{\|h\|^2} = 0,$$

то при достаточно малом $\|h\|$ для заданного $c > 0$ будет иметь место неравенство

$$|\omega_2(u,h)| < \frac{c}{4}\|h\|^2.$$

Тогда из (16) получим неравенство для таких $h \in \mathbb{B}$:

$$\psi(\hat{u}+h)-\psi(\hat{u}) \geqslant \frac{1}{2}\left\langle \psi''_{ff}(\hat{u})h, h\right\rangle - \frac{c}{4}\|h\|^2 \geqslant \frac{c}{2}\|h\|^2 - \frac{c}{4}\|h\|^2 = \frac{c}{4}\|h\|^2,$$

т. е. в точке $\hat{u} \in \mathbb{B}$ достигается минимум у функционала ψ.

Полунепрерывные функционалы. Определения

Определение 5. *Подмножество* $\mathrm{M} \subset \mathbb{B}$ *банахова пространства называется выпуклым, если для любых* $u, v \in \mathrm{M}$ *и всех* $t \in [0, 1]$ *имеет место вложение* $tu + (1-t)v \in \mathrm{M}$.

Определение 6. *Функционал* $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ *называется выпуклым на выпуклом множестве* $\mathrm{M} \subset \mathbb{B}$, *если для всех* $u, v \in \mathrm{M}$ *и всех* $t \in [0, 1]$ *имеет место неравенство*:

$$\psi(tu + (1-t)v) \leqslant t\psi(u) + (1-t)\psi(v).$$

Полунепрерывные функционалы. Определения

Теперь дадим определение *слабо секвенциально полунепрерывного снизу* функционала:

Определение 7. *Будем говорить, что функционал* $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ *является слабо секвенциально полунепрерывным снизу в точке* $u_0 \in \mathrm{M} \subset \mathbb{B}$ *по отношению к* $\mathrm{M} \subset \mathbb{B}$, *если для любой последовательности* $\{u_n\} \subset \mathrm{M}$ *такой, что*

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad \textit{слабо в} \quad \mathbb{B}$$

вытекает, что

$$\psi(u_0) \leqslant \liminf_{n \to +\infty} \psi(u_n).$$

Полунепрерывные функционалы. Определения

Определение 8. *Будем говорить, что функционал* $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ *является слабо секвенциально полунепрерывным снизу на* $\mathrm{M} \subset \mathbb{B}$, *если он является слабо секвенциально полунепрерывным снизу в каждой точке* $u \in \mathrm{M}$.

Напомним определение слабо секвенциально компактного множества M.

Определение 9. *Подмножество* M *банахова пространства* $\mathbb{B}$ *называется слабо секвенциально компактным, если из каждой последовательности* $\{u_n\} \subset \mathrm{M}$ *можно выделить слабо сходящуюся на* M *подпоследовательность* $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$:

$$u_{n_k} \rightharpoonup u_0 \in \mathrm{M} \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}.$$

Полунепрерывные функционалы. Теорема

Теорема

Пусть M *— это слабо секвенциально компактное подмножество банахова пространства* $\mathbb{B}$ *и* $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ *является слабо секвенциально полунепрерывным снизу функционалом на* M. *Тогда функционал* ψ *ограничен снизу на* M *и достигает в некоторой точке* $u_0 \in \mathrm{M}$ *свой минимум на* M :

$$\psi(u_0) = \inf_{u \in \mathrm{M}} \psi(u).$$

Доказательство теоремы-1

Итак, пусть $\{u_n\} \subset \mathrm{M}$ — это минимизирующая последовательность функционала ψ по отношению к $\mathrm{M} \subset \mathbb{B}$. Тогда

$$\psi(u_n) \to \inf_{u \in \mathrm{M}} \psi(u) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Поскольку M слабо секвенциально компактно, то найдется такая подпоследовательность $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$, что

$$u_{n_k} \rightharpoonup u_0 \in \mathrm{M} \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}.$$

Но тогда в силу слабой секвенциальной полунепрерывности снизу функционала ψ на M имеет место неравенство

$$\psi(u_0) \leqslant \liminf_{k \to +\infty} \psi(u_{n_k}).$$

Доказательство теоремы-2

Тогда справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\inf_{u \in \mathrm{M}} \psi(u) \leqslant \psi(u_0) \leqslant \liminf_{k \to +\infty} \psi(u_{n_k}) = \lim_{n \to +\infty} \psi(u_n) = \inf_{u \in \mathrm{M}} \psi(u),$$

из которой следует, что

$$\psi(u_0) = \inf_{u \in \mathrm{M}} \psi(u) > -\infty.$$

Теорема доказана.

Слабо коэрцитивные функционалы

Определение 10. *Функционал* $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$, *удовлетворяющий условию*

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} \psi(u) = \infty,$$

называется слабо коэрцитивным.

Справедлива следующая важная теорема.

Теорема

Пусть $\mathbb{B}$ *— это рефлексивное банахово пространство, а* $\mathrm{M} \subset \mathbb{B}$ *— это слабо секвенциально замкнутое подмножество, тогда если функционал* $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ *является слабо коэрцитивным на* M *и секвенциально слабо полунепрерывным снизу функционалом на* M, *то он ограничен снизу на* M *и достигает своего минимума на* M :

$$\psi(u_0) = \inf_{u \in \mathrm{M}} \psi(u) > -\infty.$$

Доказательство теоремы-1

Пусть
$$\alpha_0 = \inf_{u \in \mathrm{M}} \psi(u)$$
и $\{u_n\} \subset \mathrm{M}$ — это минимизирующая последовательность для функционала ψ :
$$\psi(u_n) \to \alpha_0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$
Поскольку числовая последовательность $\{\psi(u_n)\}$ является сходящейся, то она ограничена, но в силу слабой коэрцитивности функционала ψ на M имеем
$$\psi(u) \to \infty \quad \text{при} \quad \|u\| \to +\infty.$$
Следовательно, $\|u_n\| \leqslant R$ при некотором $R > 0$, не зависящем от $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство теоремы-2

Поскольку банахово пространство $\mathbb{B}$ является рефлексивным, то по теореме 4 Лекции 1 каждое ограниченное по норме множество слабо секвенциально относительно компактно. Поэтому без ограничения общности можно считать, что последовательность

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}.$$

Но $\{u_n\} \subset \mathrm{M}$ и M слабо замкнуто, поэтому $u_0 \in \mathrm{M}$. С другой стороны, в силу слабой секвенциальной полунепрерывности снизу функционала ψ на M приходим к выводу, что

$$\psi(u_0) \leqslant \liminf_{n \to +\infty} \psi(u_n).$$

Доказательство теоремы-3

Таким образом, приходим к выводу, что имеет место цепочка неравенств:

$$\inf_{u \in \mathrm{M}} \psi(u) \leqslant \psi(u_0) \leqslant \liminf_{k \to +\infty} \psi(u_{n_k}) = \lim_{n \to +\infty} \psi(u_n) = \inf_{u \in \mathrm{M}} \psi(u),$$

из которой следует, что

$$\psi(u_0) = \inf_{u \in \mathrm{M}} \psi(u) > -\infty.$$

Теорема доказана.

Необходимое и достаточное условие слабой секвенциальной полунепрерывности функционала

Лемма

Пусть $\mathrm{M} \subset \mathbb{B}$, *тогда для того чтобы функционал* ψ *был слабо секвенциально полунепрерывным снизу, необходимо и достаточно, чтобы для каждого* $a \in \mathbb{R}^1$ *множество*

$$\mathrm{E}(a) \equiv \{u \in \mathrm{M} : \ \psi(u) \leqslant a\}$$

было слабо секвенциально замкнуто в M.

Доказательство леммы-1

Итак, пусть $\psi(u)$ является слабо секвенциально полунепрерывным снизу на $\mathrm{M} \subset \mathbb{B}$. Пусть $\{u_n\} \subset \mathrm{E}(a)$ при некотором $a \in \mathbb{R}^1$. Тогда из условия, что

$$u_n \rightharpoonup u_0 \in \mathrm{M} \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}$$

вытекает, что

$$\psi(u_0) \leqslant \liminf_{n \to +\infty} \psi(u_n) \leqslant a,$$

т. е. $u_0 \in \mathrm{E}(a)$ и, следовательно, множество $\mathrm{E}(a)$ является слабо секвенциально замкнутым в M.

Доказательство леммы-2

Пусть теперь для каждого $a \in \mathbb{R}^1$ множество $\mathrm{E}(a)$ слабо секвенциально замкнуто в M и пусть $\{u_n\} \subset \mathrm{M}$, причем

$$u_n \rightharpoonup u_0 \in \mathrm{M} \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}.$$

Тогда введем обозначение

$$\gamma = \liminf_{n \to +\infty} \psi(u_n).$$

Но тогда существует такая подпоследовательность $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$, что

$$\lim_{k \to +\infty} \psi(u_{n_k}) = \gamma.$$

Доказательство леммы-3

Стало быть, при достаточно большом $k \in \mathbb{N}$

$$u_{n_k} \in \mathrm{E}(\gamma + \varepsilon) \quad \text{для всех} \quad \varepsilon > 0,$$

но

$$u_{n_k} \rightharpoonup u_0 \in \mathrm{M} \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B},$$

поэтому в силу слабой секвенциальной замкнутости $\mathrm{E}(a)$ для каждого $a \in \mathbb{R}^1$ приходим к выводу, что

$$u_0 \in \mathrm{E}(\gamma + \varepsilon) \quad \text{для каждого} \quad \varepsilon > 0.$$

Значит, $u_0 \in \mathrm{E}(\gamma)$, т. е.

$$\psi(u_0) \leqslant \gamma = \liminf_{n \to +\infty} \psi(u_n),$$

т. е. ψ — это слабо секвенциально полунепрерывный снизу функционал на M.

Важная теорема, доказанная нами

Напомним теорему.

Теорема

Пусть $\mathbb{B}$ *— это рефлексивное банахово пространство, а* $\mathrm{M} \subset \mathbb{B}$ *— это слабо секвенциально замкнутое подмножество, тогда если функционал* $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ *является слабо коэрцитивным на* M *и секвенциально слабо полунепрерывным снизу функционалом на* M*, то он ограничен снизу на* M *и достигает своего минимума на* M *:*

$$\psi(u_0) = \inf_{u \in \mathrm{M}} \psi(u) > -\infty.$$

Краевая задача для p-лапласиана. Постановка

ПРИМЕР 2. Рассмотрим следующую нелинейную краевую задачу:

$$\begin{cases} \triangle_p u = f(x) \in \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega), & p \in (2, +\infty), \ p' = p/(p-1), \\ u|_{\partial\Omega} = 0 & u(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega), \end{cases} \tag{17}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0,1)$, а символом $\triangle_p u$ обозначен следующий нелинейный при $p > 2$ оператор:

$$\triangle_p u(x) \equiv \operatorname{div}(|\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x)).$$

Краевая задача для p-лапласиана. Слабое решение

Определение 11. *Слабым решением задачи* (17) *назовем решение класса* $u(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, *удовлетворяющее равенству*

$$\langle -\triangle_p u(x) + f(x), \varphi(x) \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega), \qquad (18)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *— это скобки двойственности между банаховыми пространствами* $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ *и* $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$.

Краевая задача для p-лапласиана. Слабая производная

Определение 12. *Слабой производной функции* $v \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ *в смысле скобок двойственности* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *между банаховыми пространствами* $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ *и* $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$, *называется следующая величина*:

$$\left\langle \frac{\partial v}{\partial x_i}, w \right\rangle \equiv \left\langle v, -\frac{\partial w}{\partial x_i} \right\rangle = -\int\limits_{\Omega} v(x) \frac{\partial w}{\partial x_i}\, dx \ \ \forall\, w \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega), \ i = \overline{1, N}.$$

В дальнейшем мы будем пользоваться данным определением слабой производной и говорить об интегрировании «по частям» в указанном смысле.

Краевая задача для p-лапласиана. Свойства p-лапласиана

Прежде чем переходить к исследованию соответствующей вариационной задачи рассмотрим оператор $\triangle_p$. Докажем, что он удовлетворяет следующему свойству:

$$\triangle_p : \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega) \quad \text{при} \quad p \geqslant 2. \tag{19}$$

Действительно, этот оператор можно представить как композицию трех операторов:

$$\xi = \nabla u, \quad \eta = |\xi|^{p-2}\xi, \quad w = \operatorname{div} \eta.$$

Краевая задача для p-лапласиана. Свойства p-лапласиана

Итак, пусть $u \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, тогда

$$\xi = \nabla u : \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{L}^p(\Omega) \times \cdots \times \mathbb{L}^p(\Omega),$$

$$\eta = |\xi|^{p-2}\xi : \mathbb{L}^p(\Omega)\times\cdots\times\mathbb{L}^p(\Omega) \to \mathbb{L}^{p'}(\Omega)\times\cdots\times\mathbb{L}^{p'}(\Omega), \quad p' = \frac{p}{p-1},$$

$$w = \operatorname{div} \eta : \mathbb{L}^{p'}(\Omega) \times \cdots \times \mathbb{L}^{p'}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega).$$

Тем самым, свойство (19) доказано.

Краевая задача для p-лапласиана. Вариационная постановка

Сопоставим задаче (17) следующий функционал:

$$\psi(u) \equiv \psi_1(u) + \psi_2(u) = \frac{1}{p} \int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^p \, dx + \langle f, u \rangle \qquad (20)$$

Найдем производную Фреше этого функционала. Производная Фреше второго слагаемого вычисляется элементарно:

$$\psi_2(u+h) - \psi_2(u) = \langle f, u+h \rangle - \langle f, u \rangle = \langle f, h \rangle$$

т. е.

$$\psi'_{2f}(u) = f \in \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega).$$

Краевая задача для p-лапласиана. Производная Фреше-1

Вычислим теперь производную Фреше функционала

$$\psi_1(u) = \frac{1}{p} \int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^p \, dx : \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}^1.$$

Действительно, заметим, что справедлива следующая формула

$$|\xi + \eta|^p = \left(|\xi + \eta|^2\right)^{p/2} = \left(|\xi|^2 + 2(\xi, \eta) + |\eta^2|\right)^{p/2} =$$

$$= |\xi|^p \left(1 + \frac{2(\xi, \eta) + |\eta|^2}{|\xi|^2}\right)^{p/2} = |\xi|^p + \frac{p}{2}|\xi|^{p-2} 2(\xi, \eta) + \overline{\overline{o}}(|\eta|)$$

для всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ и малых $|\eta|$.

Краевая задача для p-лапласиана. Производная Фреше-2

Из этой формулы вытекает, что если положить

$$\xi = \nabla u \quad \text{и} \quad \eta = \nabla h,$$

то справедливо следующее равенство:

$$\psi_1(u+h) - \psi_1(u) = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} (\nabla u, \nabla h)\, dx + \omega_1(u,h),$$

где

$$\lim_{\|\nabla h\|_2 \to 0} \frac{|\omega_1(u,h)|}{\|\nabla h\|_2} = 0.$$

Заметим, что поскольку $u \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, то

$$|\nabla u|^{p-2}\nabla u \in \mathbb{L}^{p'}(\Omega) \times \mathbb{L}^{p'}(\Omega) \times \cdots \times \mathbb{L}^{p'}(\Omega)$$

и поэтому имеет место равенство

$$\int\limits_{\Omega} \left(|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x), \nabla h(x)\right) \, dx = \langle -\Delta_p u, h\rangle \, .$$

Таким образом, производная Фреше функционала $\psi(u)$ равна

$$\psi_f^{'}(u) = -\Delta_p u + f,$$

т. е. оператор

$$\mathbb{F}(u) \equiv -\Delta_p u + f : \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$$

является потенциальным.

Краевая задача для p-лапласиана. Проверка условий основной теоремы: слабая коэрцитивность

Теперь заметим, что по условию $f \in \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$, поэтому имеет место неравенство

$$|\langle f, u\rangle| \leqslant \|f\|_{-1,p'} \|\nabla u\|_p.$$

Следовательно, для функционала (20) справедлива следующая оценка снизу:

$$\psi(u) \geqslant \frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p - \|f\|_{-1,p'} \|\nabla u\|_p.$$

Введем обозначение

$$c = \|f\|_{-1,p'},$$

тогда имеем

$$\psi(u) \geqslant \frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p - c\|\nabla u\|_p. \tag{21}$$

Краевая задача для p-лапласиана. Проверка условий основной теоремы: слабая коэрцитивность

Пусть $\varepsilon \in (0,1)$, тогда используя неравенство Юнга получим цепочку неравенств

$$c\|\nabla u\|_p = \frac{c}{\varepsilon^{1/p}}\varepsilon^{1/p}\|\nabla u\|_p \leqslant \frac{1}{p'}\left(\frac{c}{\varepsilon^{1/p}}\right)^{p'} + \frac{\varepsilon}{p}\|\nabla u\|_p^p.$$

Поэтому продолжим неравенство (21)

$$\psi(u) \geqslant \frac{1-\varepsilon}{p}\|\nabla u\|_p^p - c_1, \quad c_1 = \frac{1}{p'}\left(\frac{c}{\varepsilon^{1/p}}\right)^{p'}.$$

Следовательно,

$$\psi(u) \to +\infty \quad \text{при} \quad \|\nabla u\|_p \to +\infty$$

и поэтому функционал (20) является слабо коэрцитивным.

Краевая задача для p-лапласиана. Проверка условий основной теоремы: слабая секвенциальная полунепрерывность

Теперь докажем слабую секвенциальную полунепрерывность снизу функционала $\psi(u)$ на $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Действительно, пусть

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega),$$

тогда в силу слабой секвенциальной полунепрерывности снизу нормы банахова пространства $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ приходим к выводу, что

$$\liminf_{n\to+\infty} \int\limits_{\Omega} |\nabla u_n|^p \, dx \geqslant \int\limits_{\Omega} |\nabla u_0|^p \, dx.$$

Кроме того, поскольку $f \in \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$ имеет место предельное равенство

$$\langle f, u_n \rangle \to \langle f, u_0 \rangle \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Краевая задача для p-лапласиана. Проверка условий основной теоремы: слабая секвенциальная полунепрерывность

Тем самым,

$$\psi(u_0) \leqslant \liminf_{n \to +\infty} \psi(u_n).$$

Теперь можно воспользоваться теоремой 4, в которой следует взять $\mathrm{M} = \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ при $p \geqslant 2$.

Существование слабого решения доказана.

Краевая задача для p-лапласиана. Единственность

Для полноты изложения докажем теперь единственность слабого решения рассматриваемой краевой задачи. Пусть единственности нет и u_1, u_2 — это какие-то два разных решения задачи (17). Тогда согласно определению 13 слабого решения имеют место следующие два равенства:

$$\langle -\triangle_p u_k(x) + f(x), \varphi(x)\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega),\ k = 1, 2.$$

Тогда, вычитая одно равенство из другого, получим следующее выражение

$$\langle -\triangle_p u_1 + \triangle_p u_2, \varphi\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

Теперь возьмем в качестве функции $\varphi(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ следующее выражение

$$\varphi(x) = u_1(x) - u_2(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega),$$

тогда сразу же получим равенство

$$\langle -\triangle_p u_1 + \triangle_p u_2, u_1 - u_2\rangle = 0.$$

Откуда интегрируя по «частям», т. е. «перебрасывая» производную ∇ оператора $\triangle_p$, которая понимается в слабом смысле, получим следующее равенство

$$\int\limits_{\Omega} \left(|\nabla u_1(x)|^{p-2} \nabla u_1(x) - |\nabla u_2(x)|^{p-2} \nabla u_2(x), \nabla u_1(x) - \nabla u_2(x) \right) dx =$$

Теперь заметим, что для произвольных векторов $a, b \in \mathbb{R}^N$ имеет место цепочка следующих неравенств:

$$(|b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a, b - a) \geqslant 2^{-1} \left(|b|^{p-2} + |a|^{p-2} \right) |b - a|^2 \geqslant$$
$$\geqslant 2^{2-p}|b - a|^p \quad \text{при} \quad p \geqslant 2.$$

Краевая задача для p-лапласиана. Единственность

Следовательно, приходим к неравенству

$$0 = \int\limits_{\Omega} \Big(|\nabla u_1(x)|^{p-2} \nabla u_1(x) -$$

$$- |\nabla u_2(x)|^{p-2} \nabla u_2(x), \nabla u_1(x) - \nabla u_2(x) \Big) \, dx \geqslant$$

$$\geqslant 2^{2-p} \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_p^p.$$

Откуда легко следует, что $u_1(x) = u_2(x)$ почти всюду на Ω.