

## ЛЕКЦИЯ 6

### Различные обобщения и границы применимости

#### § 10. Непродолжаемое решение интегрального уравнения Вольтерра

**1. Существование и единственность непродолжаемого решения интегрального уравнения.** Рассмотрим в банаховом пространстве  $B$  с нормой  $\|\cdot\|$  интегральное уравнение

$$u(t) = \bar{u}(t) + \int_0^t K(t, \tau) A(\tau, u(\tau)) d\tau. \quad (1)$$

Условия на ядро  $K(t, \tau) : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow L(B, B)^1$  и функции  $A(t, u) : \mathbb{R}_+ \times B \rightarrow B$ ,  $\bar{u}(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow B$  будут сформулированы ниже. Интегралы здесь и далее понимаются в смысле Римана см. лекцию 1).

**Определение 1.** Назовём функцию  $u(t)$  *решением уравнения (1) на промежутке*  $\mathcal{T} \equiv [0; T]^2$ , если  $u(t) \in C(\mathcal{T}, B)$  и  $u(t)$  удовлетворяет уравнению (1) при всех  $t \in \mathcal{T}$ .

*Замечание 1.* В дальнейшем слова «уравнения (1)» будем часто опускать.

*Замечание 2.* Как видно, мы используем не понятие «решение», а понятие «решение на промежутке». Если  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  — решения соответственно на промежутках  $\mathcal{T}_1$  и  $\mathcal{T}_2$  и  $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$ , то они считаются *разными* решениями независимо от совпадения значений функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  на  $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ .

**Определение 2.** Назовём решение  $u_2$  на промежутке  $\mathcal{T}_2$  *продолжением* решения  $u_1(t)$  на промежутке  $\mathcal{T}_1$ , если

$$1) \mathcal{T}_2 \supseteq \mathcal{T}_1 \text{ и } 2) u_2(t) = u_1(t) \text{ на } \mathcal{T}_1.$$

*Замечание 3.* Нам удобно использовать такую терминологию, в которой решение является своим собственным продолжением.

**Определение 3.** Решение  $u_2$  на промежутке  $\mathcal{T}$  назовём *непродолжаемым*, если оно не имеет продолжения, отличного от него самого, т. е. если не существует такого решения  $\tilde{u}(t)$  на промежутке  $\tilde{\mathcal{T}}$ , что

$$1) \tilde{u}(t) \text{ — продолжение решения } u(t), 2) \tilde{\mathcal{T}} \supsetneq \mathcal{T}.$$

Если же такое решение  $\tilde{u}(t)$  существует, то решение  $u(t)$  назовём *продолжаемым*.

Для формулировки условий на функцию  $A(t, u)$  рассмотрим метрическое пространство  $\mathbb{R}_+ \times B$  с расстоянием

$$\rho((t_1, u_1), (t_2, u_2)) = \max(|t_1 - t_2|, \|u_1 - u_2\|). \quad (2)$$

Очевидно, это пространство полно. Пусть отображение

$$A(t, u) : \mathbb{R}_+ \times B \rightarrow B$$

<sup>1</sup>Здесь и далее  $\mathbb{R}_+ \equiv [0; +\infty)$ .

<sup>2</sup>Т. е.  $\mathcal{T} = [0; T]$  или  $\mathcal{T} = [0; T)$ , причём в последнем случае допускается  $T = +\infty$ . Если не оговорено иное, промежуток  $\mathcal{T}$  всегда начинается с 0 и  $0 \in \mathcal{T}$ .

обладает свойствами  $(A_1)$  и  $(A_2)$ :

$(A_1)$  оно непрерывно в смысле метрики (2);

$(A_2)$  существует такая функция

$$\mu(t, s) : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

ограниченная на каждом прямоугольнике  $[0; T] \times [0; S]$  ( $T, S > 0$ ), что

$$\forall t \geq 0, \forall u_1, u_2 \in B \quad \|A(t, u_1) - A(t, u_2)\| \leq \mu(t, \max(\|u_1\|, \|u_2\|)) \|u_1 - u_2\|.$$

Сразу отметим, что из  $(A_1)$  вытекает свойство  $(A_3)$ :

$(A_3)$  функция  $\nu(t) \equiv \|A(t, \theta)\|$  (где  $\theta$  — нулевой элемент пространства  $B$ ) ограничена на каждом отрезке  $[0; T]$ . Действительно, в силу  $(A_1)$  числовая функция  $\|A(t, \theta)\|$  непрерывна при всех  $t \geq 0$ .

Далее, из  $(A_2)$  и  $(A_3)$  следует свойство

$(A_4)$  существует такая функция

$$\lambda(t, s) : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

ограниченная на каждом прямоугольнике  $[0; T] \times [0; S]$  ( $T, S > 0$ ), что

$$\forall t \geq 0, \forall u \in B \quad \|A(t, u)\| \leq \lambda(t, \|u\|).$$

Действительно, имеем

$$\|A(t, u)\| \leq \|A(t, \theta)\| + \|A(t, u) - A(t, \theta)\| \leq \nu(t) + \mu(t, \|u\|) \|u\| =: \lambda(t, \|u\|),$$

причём

$$\sup_{\substack{t \in [0; T] \\ s \in [0; S]}} \lambda(t, s) \leq \sup_{t \in [0; T]} \nu(t) + S \sup_{t \in [0; T] \\ s \in [0; S]} \mu(t, s).$$

Нам понадобится лемма, доказанная в лекции 3. Для удобства напомним её формулировку.

**Лемма 1.** Пусть  $u(t) \in C([a; b], B)$ ,  $[a; b] \subset \mathbb{R}_+$ . Тогда сложная функция  $f(t) \equiv A(t, u(t))$  (где  $A$  — введённое выше отображение) непрерывна:  $f(t) \in C([a; b], B)$ .

Теперь сформулируем и докажем основную теорему.

**Теорема 1.** Пусть

- 1)  $\bar{u}(t) \in C(\mathbb{R}_+, B)$ ;
- 2) ядро  $K(t, \tau)$  непрерывно по совокупности переменных на  $\mathbb{R}_+^2$  (в равномерной операторной топологии, т. е. по норме банаховой алгебры  $L(B, B)$ );
- 3) функция  $A(t, u)$  обладает свойствами  $(A_1)$  и  $(A_2)$ .

Тогда верны следующие утверждения.

1. Существует хотя бы одно решение  $u(t)$  на промежутке  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{T} \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{T} \neq \{0\}$ .

2. Из любых двух решений  $u_1, u_2$  одно является продолжением другого. (В частности, совпадающие решения являются продолжениями друг друга.)
3. Если  $u(t)$  — решение на отрезке  $[0; T]$ , то решение  $u(t)$  продолжаемо. (В частности, «решение»  $\bar{u}(0)$  продолжаемо с «отрезка»  $\{0\}$ , как следует из п. 1.)
4. Существует такое  $T_0 > 0$  и такое решение  $u_0(t)$  на промежутке  $\mathcal{T}_0 = [0; T_0)$ , что  $u_0(t)$  — непродолжаемое решение.
5. Непродолжаемое решение единственно.
6. Для непродолжаемого решения верно, что если  $T_0 < +\infty$ , то

$$\limsup_{t \rightarrow T_0 - 0} \|u(t)\| = +\infty. \quad (3)$$

При этом если  $K(t, \tau) \equiv I$  (единичный оператор), то непродолжаемое решение является не просто неограниченным, но бесконечно большим:

$$\lim_{t \rightarrow T_0 - 0} \|u(t)\| = +\infty. \quad (4)$$

В случае  $T_0 = +\infty$  соотношение (3) (соответственно (4)) может как выполняться, так и не выполняться.

*Замечание 4.* В частности, можно рассматривать числовые ядра  $K(t, \tau) : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ : банахова алгебра  $\mathbb{R}$  изометрически изоморфна подалгебре скалярных операторов в  $L(B, B)$ .

*Доказательство.*

1. Для каждого  $T > 0$  рассмотрим банахово пространство

$$\mathbb{B}_T := C([0; T], B), \quad \|u\|_{\mathbb{B}_T} \equiv \sup_{t \in [0; T]} \|u(t)\|,$$

и оператор  $\mathbb{A}_T : \mathbb{B}_T \rightarrow \mathbb{B}_T$ ,

$$\mathbb{A}_T(u) := \bar{u}(t) + \int_0^t K(t, \tau) A(\tau, u(\tau)) d\tau.$$

Заметим, что при условии непрерывности функции  $u(t)$  интеграл в правой части последней формулы непрерывен. (Это следует из леммы 1 и стандартных оценок, использующих равномерную непрерывность ядра  $K(t, \tau)$  на любом прямоугольнике  $[0; T_1] \times [0; T_2]$ ). Поэтому функция  $u(t) \in C([0; T], B)$  будет решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда она является решением уравнения

$$u = \mathbb{A}_T(u) \quad (5)$$

в банаховом пространстве  $\mathbb{B}_T$ .

Сейчас мы укажем, как выбрать  $T > 0$  таким образом, чтобы доказать однозначную разрешимость уравнения (5) методом сжимающих отображений. Для этого зафиксируем некоторое произвольно выбранное  $R > 0$  и рассмотрим замкнутое подмножество

$$\mathbb{B}_T^R = \left\{ u(t) \in \mathbb{B}_T \mid \sup_{t \in [0; T]} \|u(t) - \bar{u}(t)\| \equiv \|u - \bar{u}\|_{\mathbb{B}_T} \leq R \right\}.$$

В силу общих свойств метрических пространств множество  $\mathbb{B}_T^R$  само является полным метрическим пространством относительно расстояния, порождённого нормой пространства  $\mathbb{B}_T$ . Итак, нам требуется, чтобы оператор  $\mathbb{A}_T$  а) не выводил из множества  $\mathbb{B}_T^R$ ; б) являлся в нём сжимающим.

Для а) проведём оценку

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t K(t, \tau) A(\tau, u(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbb{B}_T} &\equiv \sup_{t \in [0; T]} \left\| \int_0^t K(t, \tau) A(\tau, u(\tau)) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \int_0^T \|K(t, \tau)\| \|A(\tau, u(\tau))\| d\tau \leq T \sup_{t, \tau \in [0; T]} \|K(t, \tau)\| \sup_{\substack{t \in [0; T] \\ s \in [0; \|\bar{u}(t)\|_{\mathbb{B}_T} + R]}} \lambda(t, s). \end{aligned} \quad (6)$$

Для б) — оценку

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t K(t, \tau) A(\tau, u_1(\tau)) d\tau - \int_0^t K(t, \tau) A(\tau, u_2(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbb{B}_T} &\leq \\ &\leq \int_0^T \|K(t, \tau)\| \|A(\tau, u_1(\tau)) - A(\tau, u_2(\tau))\| d\tau \leq \\ &\leq \sup_{t, \tau \in [0; T]} \|K(t, \tau)\| \sup_{\substack{t \in [0; T] \\ s \in [0; \|\bar{u}(t)\|_{\mathbb{B}_T} + R]}} \mu(t, s) \int_0^T \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq T \sup_{t, \tau \in [0; T]} \|K(t, \tau)\| \sup_{\substack{t \in [0; T] \\ s \in [0; \|\bar{u}(t)\|_{\mathbb{B}_T} + R]}} \mu(t, s) \|u_1 - u_2\|_{\mathbb{B}_T}. \end{aligned} \quad (7)$$

Заметим, что в силу свойств функций  $\mu$  и  $\lambda$ , а также непрерывности функций  $\bar{u}(t)$  и  $K(t, \tau)$  точные верхние грани в (6) и (7) конечны (и, очевидно, не возрастают при уменьшении  $T$ ). Поэтому существует такое  $T > 0$ , что выполняются условия

$$\left\{ \begin{array}{l} T \sup_{t, \tau \in [0; T]} \|K(t, \tau)\| \sup_{\substack{t \in [0; T] \\ s \in [0; \|\bar{u}(t)\|_{\mathbb{B}_T} + R]}} \lambda(t, s) \leq R, \\ T \sup_{t, \tau \in [0; T]} \|K(t, \tau)\| \sup_{\substack{t \in [0; T] \\ s \in [0; \|\bar{u}(t)\|_{\mathbb{B}_T} + R]}} \mu(t, s) \leq \frac{1}{2}. \end{array} \right.$$

В этом случае в силу принципа сжимающих отображений уравнение (5) однозначно разрешимо, а поэтому и исходное уравнение (1) имеет единственное решение на промежутке  $[0; T]$ .

2. Рассмотрим сначала случай, когда  $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 =: \mathcal{T}$ . Предположим, что  $u_1(t) \neq u_2(t)$  на  $\mathcal{T}$ . Заметим, что множество точек  $t$ , где  $u_1(t) = u_2(t)$ , является замкнутым подмножеством промежутка  $\mathcal{T}$  как прообраз замкнутого множества  $\{\theta\}$  при непрерывном отображении  $u_2 - u_1$ , а

поэтому множество  $\mathfrak{I}$ , где равенство решений нарушается, открыто в  $\mathcal{T}$ . Следовательно, имеется точка  $T^* = \inf \mathfrak{I}$ , причём  $u_1(T^*) = u_2(T^*) =: u^*$ , и такое  $T^{**}$ , что  $(T^*; T^{**}] \subset \mathfrak{I}$ . Но тогда каждая из функций  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  является решением уравнения

$$u(t) = \bar{u}(t) + u^* - \bar{u}(T^*) + \int_{T^*}^t K(t, \tau) A(\tau, u(\tau)) d\tau$$

на отрезке  $[T^*; T^{**}]$ . Уменьшив, если потребуется, величину  $T^{**}$ , мы с помощью рассуждений, аналогичных п. 1, сможем доказать единственность решения этого уравнения на отрезке  $[T^*; T^{**}]$  и прийти к противоречию.

Теперь рассмотрим случай, когда промежутки  $\mathcal{T}_1$  и  $\mathcal{T}_2$  различны. Пусть для определённости  $\mathcal{T}_2 \supsetneq \mathcal{T}_1$ . Тогда, перейдя к функциям  $u_1(t)$  и  $u_2|_{\mathcal{T}_1}(t)$ , мы получаем предыдущий случай, невозможность которого уже доказана.

3. Для доказательства достаточно перейти к рассмотрению уравнения

$$u(t) = \bar{u}(t) + u(T) - \bar{u}(T) + \int_T^t K(t, \tau) A(\tau, u(\tau)) d\tau$$

при  $t \geq T$  и применить рассуждения, аналогичные п. 1. Очевидно, что полученные решения будут «сшиваться» непрерывно и дадут продолжение решения  $u(t)$ .

4. Пусть

$$\mathfrak{I} = \{T > 0 : \text{существует решение задачи (1) на промежутке } [0; T]\}, \quad T_0 = \sup \mathfrak{I} \leq +\infty.$$

В силу п. 1 множество  $\mathfrak{I}$  непусто и содержит некоторый отрезок ненулевой длины. Поэтому  $T_0 > 0$  и существует такая последовательность решений  $\{u_n(t)\}_{n=1}^\infty$  на промежутках  $[0; T_n]$ , что  $T_n > 0$ ,  $T_n \uparrow T_0$ . В силу п. 2 любые два решения уравнения (1) совпадают на их общей области определения. Поэтому при всех  $n \in \mathbb{N}$  решение  $u_{n+1}(t)$  есть продолжение решения  $u_n(t)$ . Тогда можно построить функцию

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), & t \in [0; T_1], \\ u_{n+1}(t), & t \in (T_n; T_{n+1}], \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Эта функция будет решением уравнения (1) на промежутке  $[0; T_0)$ . Если  $T_0 = +\infty$ , то  $u(t)$  будет очевидным образом непродолжаемым. Если  $T_0 < +\infty$ , то по самому определению  $T_0$  максимально возможный промежуток существования решения — это либо полуинтервал  $[0; T_0)$ , либо отрезок  $[0; T_0]$ . Однако последнее исключается в силу п. 3, ведь тогда существовало бы некоторое решение на промежутке, большем отрезка  $[0; T_0]$ , а следовательно, и на некотором отрезке  $[0; T_1]$  с  $T_1 > T_0$ . Следовательно, решение  $u(t)$ ,  $t \in [0; T_0)$ , непродолжаемо.

Итак, существует непродолжаемое решение, определённое на полуоткрытом промежутке  $[0; T_0)$  с  $T_0 \leq +\infty$ .

5. Пусть  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  — два непродолжаемых решения. Тогда в силу п. 2 одно из них является продолжением другого. Следовательно, или они совпадают, или одно из них является продолжаемым.

6. Пусть  $u(t)$  — решение на  $[0; T_0)$ ,  $T_0 < +\infty$  и  $u(t)$  — непродолжаемое решение. Будем доказывать от противного. Предположим, что решение  $u(t)$  ограничено, т. е. существует число  $C_0$  такое, что

$$\|u(t)\| \leq C_0, \quad t \in [0; T_0).$$

Но интеграл в правой части уравнения (1) удовлетворяет в левой полуокрестности точки  $T_0$  условию Коши. Это вытекает из неравенства (где  $0 < t_1 < t_2 < T_0$ )

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{t_2} K(t_2, \tau) A(\tau, u(\tau)) d\tau - \int_0^{t_1} K(t_1, \tau) A(\tau, u(\tau)) d\tau \right\| &\leq \\ &\leq \int_0^{t_1} \|K(t_2, \tau) - K(t_1, \tau)\| \|A(\tau, u(\tau))\| d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \|K(t_2, \tau)\| \|A(\tau, u(\tau))\| d\tau \end{aligned} \quad (8)$$

с использованием равномерной непрерывности ядра  $K(t, \tau)$  на любом прямоугольнике и свойства  $(A_4)$ . С другой стороны, функция  $\bar{u}(t)$  непрерывна всюду по условию. Следовательно, функция  $u(t)$  непрерывно продолжима в точку  $T_0$ . Обозначим продолженную функцию через  $\tilde{u}(t)$ . Тогда функция

$$\bar{u}(t) + \int_0^t K(t, \tau) A(\tau, \tilde{u}(\tau)) d\tau,$$

заведомо совпадающая с  $u(t) = \bar{u}(t) + \int_0^t K(t, \tau) A(\tau, u(\tau)) d\tau$  на  $[0; T_0)$ , существует и непрерывна на  $[0; T_0]$ , а следовательно, её значение в точке  $T_0$  совпадает с  $\tilde{u}(T_0)$  в силу единственности непрерывного продолжения на замыкание. Следовательно, функция  $\tilde{u}(t)$  является решением уравнения (1) на отрезке  $[0; T_0]$ , что противоречит условию непродолжаемости решения  $u(t)$  на промежутке  $[0; T_0)$ . Таким образом, соотношение (3) доказано.

*Замечание 5.* Дальнейшие рассуждения аналогичны проведённым в лекции 3 для дифференциального уравнения.

Покажем теперь, что в случае  $K(t, \tau) \equiv I$  выполняется предельное соотношение (4). Надо доказать:

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 \forall t \in (T_0 - \delta; T_0) \cap [0; T_0) \quad \|u(t)\| > M.$$

Предположим противное:

$$\exists M > 0 \forall \delta > 0 \exists t \in (T_0 - \delta; T_0) \cap [0; T_0) \quad \|u(t)\| \leq M. \quad (9)$$

Зафиксируем  $M$  из (9). В силу свойства  $(A_4)$  будем иметь

$$\forall t \in [0; T_0), \forall z \in B \quad (\|z\| \leq 2M \Rightarrow \|A(t, z)\| \leq \sup_{\substack{t \in [0; T_0] \\ s \in [0; 2M]}} \lambda(t, s) =: E). \quad (10)$$

Выберем  $\delta \leq \frac{M}{4E}$  из условия

$$\|\bar{u}(t'') - \bar{u}(t')\| < \frac{M}{4} \quad \text{при} \quad |t'' - t'| < \delta.$$

(Это возможно, поскольку функция  $\bar{u}(t)$ , как непрерывная на  $\mathbb{R}_+$ , равномерно непрерывна на отрезке  $[0; T_0]$ .) Возьмём из (9) такое  $t = t^*$ , что  $T_0 - \delta < t^* < T_0$ ,  $\|u(t^*)\| \leq M$ . В силу (3) существует такое  $t^{**}$ , что  $T_0 - \delta < t^* < t^{**} < T_0$  и  $\|u(t^{**})\| \geq 2M$ . Но тогда в силу непрерывности функции  $u(t)$  существует такое  $t^{***} \in (t^*; t^{**}]$ , что

$$\|u(t^{***})\| = 2M, \quad \|u(t)\| < 2M \quad \text{при всех} \quad t \in (t^*; t^{***}). \quad (11)$$

Имеем тогда, с одной стороны,

$$\|u(t^{***}) - u(t^*)\| \geq \|u(t^{***})\| - \|u(t^*)\| = M,$$

а с другой, в силу уравнения (1), утверждений (11) и (10), а также выбора  $\delta$ :

$$\begin{aligned} \|u(t^{***}) - u(t^*)\| &\leq \|\bar{u}(t^{***}) - \bar{u}(t^*)\| + \int_{t^*}^{t^{***}} \|A(\tau, u(\tau))\| d\tau < \\ &< \frac{M}{4} + |t^{***} - t^*|E \leq \frac{M}{4} + \delta E \leq \frac{M}{2}. \end{aligned}$$

Полученное противоречие завершает доказательство п. 6 и всей теоремы.

*Теорема доказана.*

*Замечание 6.* Легко видеть, что в случае, когда ядро  $K$  не зависит от  $t$  и является непрерывной функцией аргумента  $\tau$ , оно может быть «включено» в  $A(t, u)$ , и поэтому соотношение (4) верно и в этом случае.

**2. Пример непродолжаемого решения, не имеющего предела.** В случае ядра, зависящего от  $t$  и удовлетворяющего условиям теоремы 1, соотношение (4) может не выполняться. Приведём один из возможных примеров. Для этого рассмотрим функцию

$$u(t) = 1 + \frac{1}{T_0 - t} \cos^2 \frac{1}{T_0 - t} \in C[0; T_0), \quad T_0 = \frac{2}{\pi}, \quad (12)$$

и построим интегральное уравнение вида (1), решением которого является функция (12), причём его ядро будет зависеть лишь от переменной  $t$ . Легко видеть, что при  $t \rightarrow T_0 - 0$  функция (12) предела не имеет (потому что она принимает значение 1 сколь угодно близко к точке  $T_0$ ), но

$$\limsup_{t \rightarrow T_0 - 0} u(t) = +\infty.$$

Таким образом, функция (12) удовлетворяет соотношению (3), но не соотношению (4). Нужно найти такую функцию  $K(t) \in C[0; +\infty)$ , чтобы при  $t \in [0; T_0)$  выполнялось тождество

$$u(t) = u(0) + K(t) \int_0^t (u(s))^k ds.$$

Натуральное  $k$  будет выбрано ниже. Поскольку  $u(0) = 1$ , имеем

$$1 + \frac{1}{T_0 - t} \cos^2 \frac{1}{T_0 - t} = 1 + K(t) \int_0^t \left( 1 + \frac{1}{T_0 - s} \cos^2 \frac{1}{T_0 - s} \right)^k ds,$$

или

$$K(t) = \frac{\frac{1}{T_0 - t} \cos^2 \frac{1}{T_0 - t}}{\int_0^t \left( 1 + \frac{1}{T_0 - s} \cos^2 \frac{1}{T_0 - s} \right)^k ds}, \quad T_0 = \frac{2}{\pi}. \quad (13)$$

При всех натуральных  $k$  дробь в правой части доставляет непрерывную на интервале  $t \in (0; T_0)$  функцию. С помощью правила Лопиталья нетрудно получить, что  $K(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +0$ . Если к тому же

$$K(t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow T_0 - 0, \quad (14)$$

то функция  $K(t)$  может быть продолжена до непрерывной функции аргумента  $t \in [0; +\infty)$  и, тем самым, будет удовлетворять условию теоремы 1. Будем добиваться выполнения условия (14).

В силу бинорма Ньютона с учётом неотрицательности второго слагаемого имеем при всех  $k \geq 3$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $s \in [0; T_0)$

$$\left( 1 + \frac{1}{T_0 - s} \cos^2 \frac{1}{T_0 - s} \right)^k \geq \frac{k(k-1)(k-2)}{6} \frac{1}{(T_0 - s)^3} \cos^6 \frac{1}{T_0 - s}, \quad (15)$$

откуда при всех  $t \in [0; T_0)$

$$\int_0^t \left( 1 + \frac{1}{T_0 - s} \cos^2 \frac{1}{T_0 - s} \right)^k ds \geq \frac{k(k-1)(k-2)}{6} \int_0^t \frac{1}{(T_0 - s)^3} \cos^6 \frac{1}{T_0 - s} ds. \quad (16)$$

Вычислим интеграл в правой части последней формулы:

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{1}{(T_0 - s)^3} \cos^6 \frac{1}{T_0 - s} ds &= \left\{ y = \frac{1}{T_0 - s} \right\} = \int_{\frac{1}{T_0}}^{\frac{1}{T_0 - t}} y \cos^6 y dy = \\ &= \frac{5}{32} y^2 + \frac{15}{32} \left( \frac{y \sin 2y}{2} + \frac{\cos 2y}{4} \right) + \frac{6}{32} \left( \frac{y \sin 4y}{4} + \frac{\cos 4y}{16} \right) + \frac{1}{32} \left( \frac{y \sin 6y}{6} + \frac{\cos 6y}{36} \right) \Big|_{\frac{1}{T_0}}^{\frac{1}{T_0 - t}} = \\ &= \frac{5}{32} \frac{1}{(T_0 - t)^2} + O\left( \frac{1}{T_0 - t} \right) \quad \text{при} \quad t \rightarrow T_0 - 0. \quad (17) \end{aligned}$$

Из (13), (15)–(17) получаем

$$\begin{aligned} 0 \leq K(t) &\leq \frac{6}{k(k-1)(k-2)} \frac{\frac{1}{T_0 - t} \cos^2 \frac{1}{T_0 - t}}{\frac{5}{32} \frac{1}{(T_0 - t)^2} + O\left( \frac{1}{T_0 - t} \right)} = \\ &= \frac{32 \cdot 6}{5k(k-1)(k-2)} \frac{\cos^2 \frac{1}{T_0 - t}}{\frac{1}{T_0 - t} + O(1)} \rightarrow +0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow T_0 - 0. \end{aligned}$$

Это и доказывает предельное соотношение (14) в случае выбора, например,  $k = 3$ .



Итак, уравнение имеет вид

$$u(t) = 1 + \int_0^t K(t)(u(s))^3 ds,$$

где

$$K(t) = \begin{cases} \frac{\frac{1}{T_0-t} \cos^2 \frac{1}{T_0-t}}{\int_0^t \left(1 + \frac{1}{T_0-s} \cos^2 \frac{1}{T_0-s}\right)^3 ds}, & t \in (0; T_0), \\ 0, & t \in \{0\} \cup [T_0; +\infty), \end{cases}$$

$T_0 = \frac{2}{\pi}$ , а соответствующее решение —

$$u(t) = 1 + \frac{1}{T_0 - t} \cos^2 \frac{1}{T_0 - t}.$$

*Замечание 7.* К данному результату примыкает результат работы

V. Komornik, P. Martinez, M. Pierre, J. Vanconsonoble. “Blow-up” of bounded solutions of differential equations.

Acta Sci. Math. (Szeged). Vol. 69. Pp. 651–657 (2003),

где показано, что непродолжаемое решение задачи Коши для автономного абстрактного дифференциального уравнения

$$u' = f(u)$$

с локально липшицевой правой частью  $f(u)$  в произвольном бесконечномерном банаховом пространстве  $B$  может (в отличие от случаев (3) и (4)) быть даже ограниченным, если  $f(u)$ , являясь локально липшиц-непрерывной, не является ограниченной на каждом ограниченном подмножестве пространства  $B$ .

*Замечание 8.* Важно различать *ограниченно липшиц-непрерывные* и *локально липшиц-непрерывные* функции. Последние – это такие, что для любой точки найдётся окрестность, в которой такая функция липшиц-непрерывна. В бесконечномерном банаховом пространстве эти условия не равносильны.

## § 11. Теорема Пеано

*Замечание 9.* См. лекцию 12 основного курса.

**Теорема 2. (Пеано.)** Рассмотрим дифференциальное уравнение относительно скалярной функции  $u(t)$

$$u' = f(t, u). \tag{18}$$

Если правая часть  $f(t, u)$  непрерывна в некоторой ограниченной замкнутой области  $G$ , то через каждую внутреннюю точку  $(t_0, u_0)$  этой области проходит *хотя бы одна* интегральная кривая этого уравнения.

Легко видеть, что единственность не гарантируется этой теоремой не случайно: достаточно рассмотреть задачу Коши

$$\begin{cases} u' = 3u^{\frac{2}{3}}, \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Задача (19) имеет как тривиальное решение  $u = 0$ , так и решение  $u = t^3$ . Кроме того, при любом  $t_0$  функция  $(t - t_0)^3$  также является решением уравнения задачи (19), причём

$$\left. \frac{d}{dt}(t - t_0)^3 \right|_{t=t_0} = 0.$$

Следовательно, решения  $u = 0$  и  $u = (t - t_0)^3$  можно гладко сшить и получить (при произвольном  $t_0 > 0$ ) решение

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, t_0), \\ (t - t_0)^3, & t \in [t_0, +\infty), \end{cases} \quad (20)$$

также являющееся решением задачи (19). Итак, задача (19) имеет не два, а бесконечно много решений, определённых на всей полупрямой  $t \geq 0$ .

Оказывается, существуют и более «патологические» примеры. Не будем приводить их ввиду громоздкости построения, но отметим лишь, что существует такая функция  $f(t, u)$ , непрерывная на всей плоскости  $(t, u)$ , что для любой пары  $(t_0, u_0)$  задача Коши

$$\begin{cases} u' = f(t, u), \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

имеет более одного решения на любом отрезке  $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ . (Задача (19) обладает таким свойством лишь при  $u_0 = 0$ .)

Не случайно мы сформулировали теорему Пеано для скалярной функции. Дело в том, что теорема Пеано верна только для конечномерных линейных пространств. Напротив, в любом бесконечномерном банаховом пространстве задача (18) может не иметь ни одного (даже локального по времени) решения. Этот результат был получен в

А. Н. Годунов, О теореме Пеано в банаховых пространствах.

Функц. анализ и его прил., 1975, том 9, выпуск 1, 59–60.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Опираясь на задачу (19) (или подобные ей), построить задачу Коши со следующими свойствами:

- 1) её тривиальное решение  $u = 0$  существует на полупрямой;
- 2) для любого  $T > 0$  существует нетривиальное решение на промежутке  $[0, T)$  (возможно, продолжаемое),
- 3) никакое её нетривиальное решение не продолжаемо на всю полупрямую.

2\*. Привести пример локально липшиц-непрерывной, но не ограничено липшиц-непрерывной функции.