ОГЛАВЛЕНИЕ

Тематическая лекция 3

ПРОСТРАНСТВА ГЕЛЬДЕРА

В этой лекции мы рассмотрим параболические пространства Гельдера, априорные оценки решений первой краевой задачи в пространствах Гельдера, называемые априорными оценками Шаудера, и, наконец, используя метод продолжения по параметру, мы докажем существование единственного в силу принципа максимума решения первой краевой задачи в параболических пространствах Гельдера.

§ 1. Параболические пространства Гельдера

В пространстве $(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}$ эвклидово расстояние между точками $z_1 = (x_1, t_1)$ и $z_2 = (x_2, t_2)$ имеет вид

$$d(z_1, z_2) = |x_1 - x_2| + |t_1 - t_2|. \tag{1.1}$$

Однако, для наших дальнейших целей метрическое пространство $(\mathbb{R}^{N+1}, d)$ не удобно. Поэтому введем так называемое *параболическое расстояние*

$$\rho(z_1, z_2) = |x_1 - x_2| + |t_1 - t_2|^{1/2}. \tag{1.2}$$

Нужно только проверить, что $\rho(z_1, z_2)$ удовлетворяет аксиомам расстояния. Докажем неравенство треугольника

$$\rho(z_1, z_2) \leqslant \rho(z_1, z_3) + \rho(z_3, z_2). \tag{1.3}$$

Для этого заметим, что имеет место следующая цепочка неравенств:

$$|t_1 - t_2| \leqslant |t_1 - t_3| + |t_3 - t_2| \Rightarrow \\ \Rightarrow |t_1 - t_2|^{1/2} \leqslant (|t_1 - t_3| + |t_3 - t_2|)^{1/2} \leqslant |t_1 - t_3|^{1/2} + |t_3 - t_2|^{1/2}.$$

Из этой цепочки неравенств сразу же вытекает неравенство треугольника (1.3).

Замечание 1. Отметим, что параболическое расстояние $\rho(z_1, z_2)$ обладает следующим важным свойством — если $z_1 = (rx_1, r^2 t)$ и $z_2 = (rx_2, r^2 t)$, то

$$\rho(z_1, z_2) = r\left(|x_1 - x_2| + |t_2 - t_1|^{1/2}\right).$$

Это свойство инвариантности относительно указанного растяжения важно для параболических уравнений.

Для функции $u(x,t)$, определенной в области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, введем следующие обозначения:

$$[u]_{\delta/2,\delta;D} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{z_1 \neq z_2, z_1, z_2 \in D} \frac{|u(z_1) - u(z_2)|}{\rho^\delta(z_1, z_2)}, \tag{1.4}$$

$$|u|_{\delta/2,\delta;D} \stackrel{\text{def}}{=} |u|_{0;D} + [u]_{\delta/2,\delta;D}, \quad |u|_{0;D} = \sup_{(x,t)\in D} |u(x,t)| \tag{1.5}$$

для $\delta \in (0,1]$. Через $\mathbb{C}^{\delta/2,\delta}(D)$ мы обозначаем линейное пространство всех функций $u(x,t)$, для которых конечна *норма* $|u|_{\delta/2,\delta;D} < +\infty$.

Параболическое пространство Гельдера $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$ определим как множество всех вещественнозначных функций $u(x,t)$, заданных в D и таких, что

$$|u|_{1+\delta/2,2+\delta;D} \stackrel{\text{def}}{=} |u|_{0;D} + \sum_{i=1}^{N} |u_{x_i}|_{0;D} + |u_t|_{0;D} + \\ + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} |u_{x_i x_j}|_{0;D} + [u]_{1+\delta/2;2+\delta;D} < +\infty, \tag{1.6}$$

где

$$[u]_{1+\delta/2,2+\delta;D} \stackrel{\text{def}}{=} [u_t]_{\delta/2,\delta;D} + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} [u_{x_i x_j}]_{\delta/2,\delta;D}. \tag{1.7}$$

Можно доказать, что пространства $\mathbb{C}^{\delta/2,\delta}(D)$ и $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$ являются банаховыми, т. е. полными нормированными пространствами относительно норм (1.5) и (1.6). Действительно, справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Пространства $\mathbb{C}^{\delta/2,\delta}(D)$ и $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$ являются банаховыми относительно норм $|\cdot|_{\delta/2,\delta;D}$ и $|\cdot|_{1+\delta/2,2+\delta;D}$, соответственно.*

Доказательство. Доказательство проведем для пространства $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$.

То, что величина $|\cdot|_{1+\delta/2,2+\delta;D}$ является нормой очевидно. Поэтому нам нужно доказать полноту пространства $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$.

Шаг 1. Пусть $\{u_m\}$ — фундаментальная последовательность в $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$, т. е.

$$|u_m - u_k|_{1+\delta/2,2+\delta;D} \to +0 \quad \text{при} \quad m,k \to +\infty. \tag{1.8}$$

Отсюда сразу же имеем, что числовая последовательность $|u_m - u_{k_1}|_{1+\delta/2,2+\delta;D}$ является ограниченной для каждого фиксированного $k_1 \in \mathbb{N}$, поэтому в силу неравенства треугольника справедливо следующее неравенство:

$$|u_m|_{1+\delta/2,2+\delta;D} \leqslant |u_m - u_{k_1}|_{1+\delta/2,2+\delta;D} + |u_{k_1}|_{1+\delta/2,2+\delta;D} \leqslant K, \tag{1.9}$$

где $K > 0$ и не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Шаг 2. В частности, справедливы следующие неравенства [1]:

$$\sup_{(x,t)\in D}\left|D^2_{x_ix_j}u_m\right| \leqslant K, \quad [D^2_{x_ix_j}u_m]_{\delta/2,\delta;D} \leqslant K. \tag{1.10}$$

Из первого неравенства получим, что последовательность $\{D^2_{x_ix_j}u_m\}$ является равномерно ограниченной, а из второго неравенства имеем

$$\left|D^2_{x_ix_j}u_m(x_1,t_1) - D^2_{x_ix_j}u_m(x_2,t_2)\right| \leqslant K\left[|x_1 - x_2| + |t_1 - t_2|^{1/2}\right]^{\delta},$$

но это означает, что последовательность $\{D^2_{x_ix_j}u_m\}$ является равностепенно непрерывной. По теореме Арцела существует такая подпоследовательность $\{D^2_{x_ix_j}u_{m'}\}$, которая равномерно сходится в $\mathbb{C}(\overline{D})$, т. е. существует такая функция $v_{ij}(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$, что

$$\sup_{(x,t)\in D}\left|D^2_{x_ix_j}u_{m'} - v_{ij}(x,t)\right| \to +0 \quad \text{при} \quad m^{'} \to +\infty. \tag{1.11}$$

Аналогичным образом, доказываются аналогичные результаты для самой последовательности $\{u_m\}$, последовательностей $\{D_t u_m\}$ и $\{D_{x_i}u_m\}$.

Шаг 3. Нам нужно доказать, что если $\{u_{m''}\}$ — это итоговая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$ и при этом

$$u_{m''}(x,t) \rightrightarrows u(x,t) \quad \text{равномерно в} \quad (x,t)\in D \quad \text{при} \quad m^{''} \to +\infty, \tag{1.12}$$

то

$$D_{x_i}u_{m''}(x,t) \rightrightarrows D_{x_i}u(x,t), \quad D^2_{x_ix_j}u_{m''}(x,t) \rightrightarrows D^2_{x_ix_j}u(x,t), \tag{1.13}$$

$$D_t u_{m''}(x,t) \rightrightarrows D_t u(x,t) \tag{1.14}$$

равномерно в D. Но это следствие того, что из фундаментальности последовательности $\{u_m\}$ в $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$ вытекает ее фундаментальность в $\mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \supset \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$, которое является банаховым пространством.

Шаг 4. Докажем теперь, что $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$. Для этого достаточно доказать, что

$$[D_t u(x,t)]_{\delta/2,\delta;D} < +\infty, \quad [D^2_{x_ix_j}u(x,t)]_{\delta/2,\delta;D} < +\infty.$$

Докажем, например, второе неравенство. Действительно, имеем

$$\frac{\left|D^2_{x_ix_j}u_m(P) - D^2_{x_ix_j}u_m(Q)\right|}{\rho^{\delta}(P,Q)} \leqslant K.$$

[1] Здесь мы используем обозначение $D^2_{x_ix_j}u$ для согответствующей частной производной второго порядка от функции u по переменным x_i и x_j.

Возьмем в этом неравенстве $m = m''$ и устремим $m'' \to +\infty$. В результате получим, что

$$\frac{\left|D^2_{x_i x_j} u(P) - D^2_{x_i x_j} u(Q)\right|}{\rho^\delta(P,Q)} \leqslant K.$$

Итак, $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$.

Шаг 5. Осталось доказать, что $\{u_m\}$ сходится по норме к $u(x,t)$. Заметим, что справедливо неравенство

$$|u_m - u|_{1+\delta/2,2+\delta;D} \leqslant \\ \leqslant |u_{m''} - u|_{1+\delta/2,2+\delta;D} + |u_m - u_{m''}|_{1+\delta/2,2+\delta;D}, \quad (1.15)$$

а поскольку в силу фундаментальности $\{u_m\}$ имеем

$$|u_m - u_{m''}|_{1+\delta/2,2+\delta;D} \to +0 \quad \text{при} \quad m, m'' \to +\infty, \quad (1.16)$$

то нам достаточно доказать, что

$$|u_{m''} - u|_{1+\delta/2,2+\delta;D} \to +0 \quad \text{при} \quad m'' \to +\infty. \quad (1.17)$$

В силу фундаментальности $\{u_m\}$ имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие достаточно большие m'' и k'', что

$$\left[D^2_{x_i x_j} u_{m''} - D^2_{x_i x_j} u_{k''}\right]_{\delta/2,\delta;D} \leqslant \varepsilon. \quad (1.18)$$

Отсюда получаем, что для любых $P, Q \in D$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{\rho^\delta(P,Q)} \Big| D^2_{x_i x_j} u_{m''}(P) - D^2_{x_i x_j} u_{k''}(P) - \\ - D^2_{x_i x_j} u_{m''}(Q) + D^2_{x_i x_j} u_{k''}(Q) \Big| \leqslant \varepsilon. \quad (1.19)$$

стремим в этом неравенстве $k'' \to +\infty$ и получим, что имеет место следующее неравенство:

$$\frac{1}{\rho^\delta(P,Q)} \left| D^2_{x_i x_j} u_{m''}(P) - D^2_{x_i x_j} u(P) - D^2_{x_i x_j} u_{m''}(Q) + D^2_{x_i x_j} u(Q) \right| \leqslant \varepsilon. \quad (1.20)$$

Взяв supremum от обеих частей этого неравенства $P, Q \in D$, $P \neq Q$, в результате мы получим, что

$$\left[D^2_{x_i x_j} u_{m''} - D^2_{x_i x_j} u\right]_{\delta/2,\delta;D} \leqslant \varepsilon \Rightarrow \\ \Rightarrow \left[D^2_{x_i x_j} u_{m''} - D^2_{x_i x_j} u\right]_{\delta/2,\delta;D} \to +0 \quad (1.21)$$

при $m'' \to +\infty$. Аналогичным образом можно рассмотреть все слагаемые в выражении (1.17) и доказать его справедливость.

Т е о р е м а д о к а з а н а.

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что если область D достаточно «хорошая», например, если область D выпуклая, то рассматриваемые банаховы пространства совпадают с банаховыми пространствами $\mathbb{C}^{\delta/2,\delta}(\overline{D})$ и $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{D})$.

Справедливы следующие неравенства:

$$[uv]_{\delta/2,\delta;D} \leqslant |u|_{0;D}[v]_{\delta/2,\delta;D} + |v|_{0;D}[u]_{\delta/2,\delta;D}, \tag{1.22}$$

$$|uv|_{\delta/2,\delta;D} \leqslant |u|_{\delta/2,\delta;D}|v|_{\delta/2,\delta;D} \tag{1.23}$$

для всех $u, v \in \mathbb{C}^{\delta/2,\delta}(D)$.

$\square$ Действительно, прежде всего справедливо следующее элементарное неравенство:

$$|u(z_1)v(z_1) - u(z_2)v(z_2)| \leqslant |u(z_1)||v(z_1) - v(z_2)| + |v(z_2)||u(z_1) - u(z_2)|,$$

из которого разделив обе части на $\rho^\delta(z_1, z_2)$ и взяв supremum по $z_1, z_2 \in \in D$, мы получим следующее неравенство:

$$[uv]_{\delta/2,\delta;D} \leqslant |u|_{0;D}[v]_{\delta/2,\delta;D} + |v|_{0;D}[u]_{\delta/2,\delta;D}. \tag{1.24}$$

Теперь заметим, что справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{gathered}|uv|_{\delta/2,\delta;D} = |uv|_{0;D} + [uv]_{\delta/2,\delta;D} \leqslant \\ \leqslant |u|_{0;D}|v|_{0;D} + |u|_{0;D}[v]_{\delta/2,\delta;D} + |v|_{0;D}[u]_{\delta/2,\delta;D} \leqslant \\ \leqslant |u|_{0;D}|v|_{0;D} + |u|_{0;D}[v]_{\delta/2,\delta;D} + |v|_{0;D}[u]_{\delta/2,\delta;D} + [u]_{\delta/2,\delta;D}[v]_{\delta/2,\delta;D} = \\ = |u|_{\delta/2,\delta;D}|v|_{\delta/2,\delta;D}. \quad \boxtimes \end{gathered} \tag{1.25}$$

Справедливо следующее важное утверждение:

Л е м м а 1. *Для всякой функции* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$ *и для всех* $a_{ij}(x,t), c(x,t) \in \mathbb{C}^{\delta/2,\delta}(D)$ *найдется такая постоянная* $M > 0$, *не зависящая от* u, *что имеет место следующее неравенство*:

$$|Lu|_{\delta/2,\delta;D} \leqslant M|u|_{1+\delta/2,2+\delta;D}, \tag{1.26}$$

$$Lu(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + c(x,t)u(x,t) - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t},$$

где $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ — *это ограниченная область.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 1. Прежде всего заметим, что в силу неравенства (1.25) имеем

$$\left| a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\delta/2,\delta;D} \leqslant |a_{ij}|_{\delta/2,\delta;D}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\delta/2,\delta;D} \leqslant M_1|u|_{1+\delta/2,2+\delta;D}. \tag{1.27}$$

Шаг 2. В силу неравенства (1.25) и формулы Тейлора имеем

$$|cu|_{\delta/2,\delta;D} \leqslant |c|_{\delta/2,\delta;D}|u|_{\delta/2,\delta;D} \leqslant$$

$$\leqslant M_2 \left[|u_t|_{0;D} + \sum_{i=1}^{N} |u_{x_i}|_{0;D} \right] \leqslant M_2 |u|_{1+\delta/2,2+\delta;D}. \quad (1.28)$$

Шаг 3. Справедливо неравенство

$$|u_t|_{\delta/2,\delta;D} \leqslant |u|_{1+\delta/2,2+\delta;D}. \quad (1.29)$$

Из неравенств (1.27)–(1.27) вытекает оценка (1.26).
Лемма доказана.

§ 2. Эквивалентные полунормы

Отметим, что величины $[u]_{1+\delta/2;2+\delta;D}$ и $[u]_{\delta/2,\delta;D}$ являются *полунормами*, т. е. функциями для которых выполнены все свойства нормы за исключением того свойства, что

$$\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0,$$

поскольку, например, из равенства $[u]_{\delta/2,\delta;D} = 0$ вытекает, что $u = const$. В дальнейшем при выводе априорной оценки Шаудера в $\mathbb{R}^{N+1}$ по методу Сафонова нам нужно ввести эквивалентную полунорму $[u]'_{1+\delta/2;2+\delta;D}$.

Итак, пусть $\mathcal{P}_2$ — это множество всех полиномов не выше второго порядка вида

$$\mathcal{P}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \alpha t + \sum_{i=1}^{N} \alpha^i x_i + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \alpha^{ij} x_i x_j + \beta \right\} \quad (2.1)$$

с вещественными коэффициентами относительно переменных $t, x_1, ..., x_N$. Пусть

$$B_\rho(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^N : |x-y| < \rho \right\}, \quad Q_\rho(z) = (t-\rho^2, t) \otimes B_\rho(x) \subset \mathbb{R}^{N+1}$$

при $z = (t,x) \in \mathbb{R}^{N+1}$. Определим следующую полунорму:

$$[u]'_{1+\delta/2,2+\delta} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{z=(x,t)\in\mathbb{R}^{N+1}} \sup_{\rho>0} \frac{1}{\rho^{2+\delta}} \inf_{p(z)\in\mathcal{P}_2} |u(z) - p(z)|_{0;Q_\rho(z)}. \quad (2.2)$$

Справедлива следующая теорема:
Теорема 2. *Существует константа $c_1 = c_1(N) > 0$ такая, что для любой функции $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(\mathbb{R}^{N+1})$ справедливы оценки*

$$[u]'_{1+\delta/2,2+\delta} \leqslant c_1 [u]_{1+\delta/2,2+\delta}, \quad [u]_{1+\delta/2,2+\delta} \leqslant c_1 [u]'_{1+\delta/2,2+\delta}. \quad (2.3)$$

Доказательство.
Шаг 1. Сначала докажем первое неравенство в (2.3). С одной стороны, согласно формуле Тейлора для любых точек $z = (t,x)$, $z_0 = (t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{N+1}$ имеет место следующее равенство:

$$u(z) = u(t_0,x) + (t-t_0)u_t(\vartheta,x) = \\ = u(z_0) + (t-t_0)u_t(\vartheta,x) + \sum_{i=1}^{N} u_{x_i}(z_0)(x_i - x_{0i}) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} u_{x_ix_j}(t_0,\xi)(x_i-x_{0i})(x_j-x_{0j}), \quad (2.4)$$

где $\vartheta \in [t,t_0]$ и $\xi \in [x,x_0]$. С другой стороны, для полинома Тейлора по определению имеем

$$T_{z_0}u(z) \stackrel{\text{def}}{=} u(z_0) + (t-t_0)u_t(z_0) + \\ + \sum_{i=1}^{N} u_{x_i}(z_0)(x_i-x_{0i}) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} u_{x_ix_j}(z_0)(x_i-x_{0i})(x_j-x_{0j}). \quad (2.5)$$

Пусть $\rho(z,z_0) \leqslant \rho$, где

$$\rho(z,z_0) = |x-x_0| + |t-t_0|^{1/2}.$$

Тогда, в частности, получим

$$|t-t_0| \leqslant \rho^2, \quad |x-x_0| \leqslant \rho.$$

Из (2.4) и (2.5) получим следующую цепочку неравенств:

$$|u(z) - T_{z_0}u(z)| \leqslant |t-t_0|\,|u_t(\vartheta,x) - u_t(z_0)| + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} \left|u_{x_ix_j}(z_0) - u_{x_ix_j}(t_0,\xi)\right| |x_i-x_{0i}||x_j-x_{0j}| \leqslant \\ \leqslant \rho^2\,|u_t(\vartheta,x) - u_t(z_0)| + \rho^2\frac{1}{2}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} \left|u_{x_ix_j}(z_0) - u_{x_ix_j}(t_0,\xi)\right| \leqslant \\ \leqslant c_1\rho^2[u]_{1+\delta/2,2+\delta}\left(\rho^\delta\left((\vartheta,x),z_0\right) + \rho^\delta\left((t_0,\xi),z_0\right)\right) \leqslant \\ \leqslant c_1\rho^{2+\delta}[u]_{1+\delta/2,2+\delta}. \quad (2.6)$$

Из этого неравенства вытекает цепочка неравенств

$$\inf_{p(z)\in\mathcal{P}_2} |u(z)-p(z)| \leqslant c_1\rho^{2+\delta}[u]_{1+\delta/2,2+\delta} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sup_{\rho>0}\frac{1}{\rho^{2+\delta}}\inf_{p(z)\in\mathcal{P}_2}|u(z)-p(z)| \leqslant c_1[u]_{1+\delta/2,2+\delta} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sup_{z\in\mathbb{R}^{N+1}}\sup_{\rho>0}\frac{1}{\rho^{2+\delta}}\inf_{p(z)\in\mathcal{P}_2}|u(z)-p(z)| \leqslant c_1[u]_{1+\delta/2,2+\delta} \Rightarrow \\ \Rightarrow [u]'_{1+\delta/2,2+\delta} \leqslant c_1[u]_{1+\delta/2,2+\delta}. \quad (2.7)$$

Шаг 2. Докажем [1]) теперь второе неравенство в (2.3). Прежде всего обозначим через D один из операторов

$$D_t := \frac{\partial}{\partial t}, \quad D^2_{x_i x_j} := \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Стандартным образом сопоставим этим операторам следующие конечно–разностные операторы σ_h при $h > 0$:

$$u(t,x) \to \frac{1}{h^2}\left[u(t,x) - u(t-h^2,x)\right], \tag{2.8}$$

$$u(t,x) \to \frac{1}{h^2}\Big[u(t,x+he_i+he_j) - \\ - u(t,x+he_i) - u(t,x+he_j) + u(t,x)\Big]. \tag{2.9}$$

Кроме того, введем операторы σ'_h, следующего вида:

$$u(t,x) \to u_t(t-h^2,x), \tag{2.10}$$

$$u(t,x) \to \frac{1}{2}\Big[u_{x_i x_i}(t,x+he_i+he_j) + u_{x_j x_j}(t,x+he_i+he_j) + \\ + 2u_{x_i x_j}(t,x+he_i+he_j) - u_{x_i x_i}(t,x+he_i) - u_{x_j x_j}(t,x+he_j)\Big] \tag{2.11}$$

Используя формулу Тейлора в выражениях (2.8) и (2.9) мы получим следующее равенство:

$$\sigma_h u(z) = \sigma'_{h'} u(z) \quad \text{при} \quad h' = h'(z) \leqslant h. \tag{2.12}$$

□ Действительно, докажем сначала равенство (2.12) для $D = D_t$. Справедливо равенство

$$u(t,x) = u(t-h^2,x) + u_t(t-h'^2,x)h^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sigma_h u(z) := \frac{1}{h^2}\left[u(t,x) - u(t-h^2,x)\right] = \\ = u_t(t-h'^2,x) =: \sigma'_{h'} u(z) \quad \text{при некотором} \quad 0 \leqslant h'(z) \leqslant h. \tag{2.13}$$

Теперь мы докажем равенство (2.12) для случая $D = D^2_{x_i x_j}$. Справедливы следующие равенства:

$$u(t,x+he_i+he_j) = u(t,x) + u_{x_i}(t,x)h + u_{x_j}(t,x)h + \\ + \frac{1}{2}u_{x_i x_i}(t,x+h'e_i+h'e_j)h^2 + \frac{1}{2}u_{x_j x_j}(t,x+h'e_i+h'e_j)h^2 +$$

[1]) Эта часть доказательства в силу его сложности доказывается в курсе в том случае, если имеется дополнительное время.

$$+ u_{x_i x_j}(t, x + h' e_i + h' e_j) h^2, \quad (2.14)$$

$$u(t + h e_i, x) = u(t, x) + u_{x_i}(t, x) h + \frac{1}{2} u_{x_i x_i}(t + h' e_i, x) h^2, \quad (2.15)$$

$$u(t + h e_j, x) = u(t, x) + u_{x_j}(t, x) h + \frac{1}{2} u_{x_j x_j}(t + h' e_j, x) h^2 \quad (2.16)$$

при некотором $h' \in [0, h]$. В силу равенств (2.14)–(2.16) мы получим равенство

$$\begin{aligned} \sigma_h u(z) :=& \\ =& \frac{1}{h^2}\Big[u(t, x + h e_i + h e_j) - u(t, x + h e_i) - u(t, x + h e_j) + u(t, x)\Big] = \\ &= \frac{1}{2}\Big[u_{x_i x_i}(t, x + h' e_i + h' e_j) + u_{x_j x_j}(t, x + h' e_i + h' e_j) + \\ &+ 2u_{x_i x_j}(t, x + h' e_i + h' e_j) - u_{x_i x_i}(t + h' e_i, x) - u_{x_j x_j}(t + h' e_j, x)\Big] = \\ &=: \sigma'_{h'} u(z). \quad \boxtimes \quad (2.17) \end{aligned}$$

В частности, для любого $p(z) \in \mathcal{P}_2$ выражение $\sigma_h p(z)$ — это константа, не зависящая от h и z.

$\square$ Действительно, рассмотрим сначала $D = D_t$. Справедлива цепочка равенств

$$\sigma_h p(z) = \sigma'_{h'} p(z) = \alpha, \quad p(z) := \alpha t + \sum_{i=1}^{N} \alpha^i x_i + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \alpha^{ij} x_i x_j + \beta.$$

Теперь рассмотрим случай оператора $D = D^2_{x_i x_j}$.

$$\sigma_h p(z) = \sigma'_{h'} p(z) = \frac{1}{2}\left[\alpha^{ii} + \alpha^{jj} + 2\alpha^{ij} - \alpha^{ii} - \alpha^{jj}\right] = \alpha^{ij}. \quad \boxtimes$$

Кроме того, если $u(z) \in \mathbb{C}^{1+\delta/2, 2+\delta}(\mathbb{R}^{N+1})$, то справедлива цепочка равенств

$$|\sigma_h u(z) - Du(z)| = \left|\sigma'_{h'} u(z) - Du(z)\right| \leqslant c_2 h^\delta [u]_{1+\delta/2, 2+\delta}, \quad (2.18)$$

где c_2 — это абсолютная постоянная.

$\square$ Действительно, в случае $D = D_t$ имеет место цепочка выражений

$$\begin{aligned} \left|\sigma'_{h'} u(z) - u_t(z)\right| = |u_t(t - h'^2, x) - u_t(t, x)| \leqslant& \\ \leqslant h'^\delta [u_t]_{\delta/2, \delta} \leqslant h^\delta [u]_{1+\delta/2, 2+\delta}&. \end{aligned}$$

В случае $D = D^2_{x_i x_j}$ имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\left|\sigma'_{h'} u(z) - u_{x_i x_j}(z)\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|u_{x_i x_i}(t, x + h' e_i + h' e_j) - u_{x_i x_i}(t, x + h' e_i)\right| +$$

$$+\frac{1}{2}\left|u_{x_jx_j}(t,x+h^{'}e_i+h^{'}e_j)-u_{x_jx_j}(t,x+h^{'}e_j)\right|+$$
$$+\left|u_{x_ix_j}(t,x+h^{'}e_i+h^{'}e_j)-u_{x_ix_j}(t,x)\right|\leqslant$$
$$\leqslant [D^2_{x_ix_i}u]_{\delta/2,\delta}\frac{1}{2}h^{'\delta}+[D^2_{x_jx_j}u]_{\delta/2,\delta}\frac{1}{2}h^{'\delta}+[D^2_{x_ix_j}u]_{\delta/2,\delta}\sqrt{2}\,h^{'\delta}\leqslant$$
$$\leqslant c_2h^{\delta}[u]_{1+\delta/2,2+\delta}. \quad \boxtimes$$

Шаг 3. Теперь возьмем z_1, z_2 и обозначим $\rho=\rho(z_1,z_2)$ и выберем $h=\varepsilon\rho$, где константу $\varepsilon\in(0,1)$ мы выберем позже. Без ограничения общности будем считать, что $t_1\leqslant t_2$. Тогда все точки

$$(t_n-h^2,t_n),\quad (t_n,x_n+he_i+he_j)\in Q_{3\rho}(z_2),\quad n=1,2.$$

Следовательно, для любого $p(z)\in\mathcal{P}_2$ имеем

$$|Du(z_1)-Du(z_2)|\leqslant|Du(z_1)-\sigma_hu(z_1)|+|Du(z_2)-\sigma_hu(z_2)|+$$
$$+|\sigma_h(u-p)(z_1)-\sigma_h(u-p)(z_2)|\leqslant 2c_2h^{\delta}[u]_{1+\delta/2,2+\delta}+$$
$$+|\sigma_h(u-p)(z_1)|+|\sigma_h(u-p)(z_2)|,$$

причем

$$|\sigma_h(u-p)(z_i)|\leqslant\frac{4}{h^2}|u-p|_{0;Q_{3\rho}(z_2)}.$$

$\square$ Действительно, имеем в случае $D=D_t$ цепочку неравенств

$$|\sigma_hu(z_i)-\sigma_hp(z_i)|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{h^2}\left|u(z_i)-p(z_i)\right|+\frac{1}{h^2}\left|u(t_i-h^2,x_i)-p(t_i-h^2,x_i)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2}{h^2}\left|u-p\right|_{0;Q_{3\rho}(z_2)}.$$

Совершенно аналогичным образом получаем в случае $D=D^2_{x_ix_j}$ неравенство

$$|\sigma_hu(z_i)-\sigma_hp(z_i)|\leqslant\frac{4}{h^2}\left|u-p\right|_{0;Q_{3\rho}(z_2)}. \quad \boxtimes$$

Заметим, что согласно определению полунормы $[\cdot]^{'}_{1+\delta/2,2+\delta}$ получим неравенство

$$\frac{4}{h^2}|u-p|_{0;Q_{3\rho}(z_2)}\leqslant c_3\varepsilon^{-2}\rho^{\delta}[u]^{'}_{1+\delta/2,2+\delta},$$

поскольку $h=\varepsilon\rho$.

Шаг 4. Итак, получаем

$$|Du(z_1)-Du(z_2)|\leqslant 2c_2\varepsilon^{\delta}\rho^{\delta}[u]_{1+\delta/2,2+\delta}+c_3\varepsilon^{-2}\rho^{\delta}[u]^{'}_{1+\delta/2,2+\delta}.$$

Отсюда разделив обе части на ρ^{δ} и взяв supremum от обеих частей неравенства, приходим к следующему неравенству:

$$[u]_{1+\delta/2,2+\delta}\leqslant 2c_2\varepsilon^{\delta}[u]_{1+\delta/2,2+\delta}+c_3\varepsilon^{-2}[u]^{'}_{1+\delta/2,2+\delta}.$$

Осталось выбрать величину $\varepsilon \in (0,1)$ настолько малым, чтобы

$$2c_2\varepsilon^\delta \leqslant \frac{1}{2}$$

и получим требуемое неравенство.

Теорема доказана.

§ 3. Оценки Бернштейна

В этом параграфе мы рассмотрим очень важные для дальнейших рассмотрений так называемые оценки, полученные методом Бернштейна. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 3. *Пусть* $R > 0$ *и* $Q_R = B_R \otimes (-R^2, 0)$, $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$. *Предположим, что функция* $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{Q}_R)$ *и бесконечное число раз дифференцируема в* Q_R *и удовлетворяет уравнению*

$$\Delta u - u_t = 0 \quad \textit{в} \quad Q_R.$$

Тогда при любом мультииндексе $\alpha \in \mathbb{N}$ *и целом* $n \geqslant 0$ *справедлива оценка*

$$|D_t^n D_x^\alpha u(0)| \leqslant \frac{M^{|\alpha|+2n}(|\alpha|+2n)^{|\alpha|+2n}}{R^{|\alpha|+2n}}|u|_{0;Q_R}. \tag{3.1}$$

Доказательство.

Шаг 1. Прежде всего заметим, что уравнение $\Delta u - u_t = 0$ инвариантно при замене $u(x,t)$ на $u(Rx, R^2t.)$ Следовательно, достаточно доказать (3.1) только для $R = 1$, а затем сделать параболическое растяжение, т. е. замену переменных

$$(x,t) \to (Rx, R^2t).$$

Шаг 2. Теперь мы применим метод Бернштейна. Возьмем функцию $\varphi(x,t) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ с носителем в $B_R \otimes (-R^2, R^2)$, предположим, что $\varphi(0,0) = 1$ и рассмотрим функцию

$$w(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi^2(x,t)|D_x u|^2 + \mu^2|u|^2, \quad \mu > 0, \tag{3.2}$$

причем выбор постоянной μ будет сделан ниже. Тогда, поскольку

$$\Delta u - u_t = 0, \quad \Delta u_{x_i} - u_{x_i t} = 0,$$

то имеет место следующая цепочка выражений:

$$\Delta w - w_t = |D_x u|^2 \Delta(\varphi^2) + \varphi^2 \left[2u_{x_i}\Delta u_{x_i} + 2\sum_{i,j=1,1}^{N,N} u^2_{x_i x_j}\right] +$$
$$+ 8\varphi\varphi_{x_i}u_{x_j}u_{x_i x_j} + 2\mu|D_x u|^2 + 2\mu u\Delta u - 2\varphi\varphi_t|D_x u|^2 - 2\varphi^2 u_{x_i}u_{x_i t} -$$
$$- 2\mu u u_t = |D_x u|^2[2\mu + \Delta(\varphi^2) - 2\varphi\varphi_t] +$$

$$+ 2\varphi^2 \sum_{i,j=1,1}^{N,N} u_{x_i x_j}^2 + 8[\varphi_{x_i} u_{x_j}][\varphi u_{x_i x_j}] \geqslant$$
$$\geqslant |D_x u|^2 \left[2\mu + \Delta(\varphi^2) - 8|D_x \varphi|^2 - 2\varphi\varphi_t\right], \quad (3.3)$$

где мы воспользовались следующими неравенствами:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij} b_{ij} \leqslant \left(\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i,j=1,1}^{N,N} b_{ij}^2\right)^{1/2}, \quad a_{ij}, b_{ij} \geqslant 0,$$

$$\left(\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i,j=1,1}^{N,N} b_{ij}^2\right)^{1/2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} b_{ij}^2, \quad \varepsilon > 0.$$

Взяв
$$a_{ij} = \varphi_{x_i} u_{x_j}, \quad b_{ij} = -\varphi u_{x_i x_j}, \quad \varepsilon = 2,$$

мы получим следующую оценку:

$$2\varphi^2 \sum_{i,j=1,1}^{N,N} u_{x_i x_j}^2 + 8\varphi_{x_i} u_{x_j} \varphi u_{x_i x_j} \geqslant -8|D_x u|^2 |D_x \varphi|^2.$$

Шаг 3. Выбирая $\mu > 0$ достаточно большим, из цепочки выражений (3.3) получим неравенство

$$\Delta w - w_t \geqslant 0. \quad (3.4)$$

Согласно принципу максимума имеем следующую цепочку выражений:

$$|D_x u|^2(0) \leqslant \sup_{(x,t)\in Q_1} w(x,t) \leqslant \sup_{(x,t)\in\partial' Q_1} w(x,t) = \mu \sup_{(x,t)\in\partial' Q_1} |u|^2. \quad (3.5)$$

Отсюда получаем (3.1) для $|\alpha| = 1$, $n = 0$ и $R = 1$ и, следовательно, для всех $R > 0$.

Отметим, что выбор начала координат в оценке Бернштейна несущественен [1]. Поэтому справедлива следующая оценка:

$$|D_x u(z_0)| \leqslant \frac{M(N)}{R} |u|_{0;z_0+Q_R}. \quad (3.6)$$

Шаг 4. Для доказательства утверждения теоремы при $|\alpha| = 2$ и $n = 0$ заметим, что

$$\Delta D_j u - (D_j u)_t = 0,$$

поэтому заменой R на $R/2$ в силу неравенства (3.6) имеем

$$|D_i D_j u(0)| \leqslant \frac{M(N)}{R/2} |D_i u|_{0;Q_{R/2}} \leqslant \frac{M(N)}{R/2} \frac{M(N)}{R/2} |u|_{0;Q_R}.$$

[1] Смотри замечание 3.

Те же рассуждения справедливы при любом $|\alpha|$. Так что неравенство (3.1) доказано при $n = 0$. При $n \geqslant 1$ достаточно заметить, что

$$\Delta(D_t u) - (D_t u)_t = 0,$$

откуда получаем (3.1) для $n = 1$ и $|\alpha| = 1$. В общем случае $n \geqslant 1$ и $|\alpha| \geqslant 1$ заметим, что

$$\Delta(D_x^\alpha D_t u) - (D_x^\alpha D_t u)_t = 0.$$

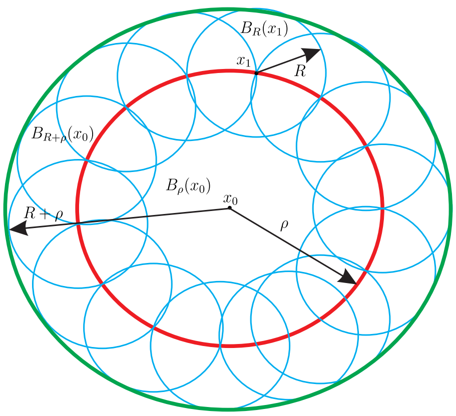
Теорема доказана.

Замечание 3. Отметим, что выбор начала координат является несущественным. Тогда при любом мультииндексе $\alpha \in \mathbb{N}$ и целом $n \geqslant 0$ справедлива оценка

$$|D_t^n D_x^\alpha u(z)| \leqslant \frac{M^{|\alpha|+2n}(|\alpha| + 2n)^{|\alpha|+2n}}{R^{|\alpha|+2n}} |u|_{0;Q_R(z)}, \tag{3.7}$$

где $Q_R(z) = z + Q_R$. Более того, из оценки (3.7) вытекает следующая оценка:

$$|D_t^n D_x^\alpha u(z)|_{0;Q_\rho(z_0)} \leqslant \frac{M^{|\alpha|+2n}(|\alpha| + 2n)^{|\alpha|+2n}}{R^{|\alpha|+2n}} |u|_{0;Q_{R+\rho}(z_0)}, \tag{3.8}$$



$$\sup_{x_1 \in B_\rho(x_0)} |u|_{0;B_R(x_1)} = |u|_{0;B_{\rho+R}(x_0)}$$

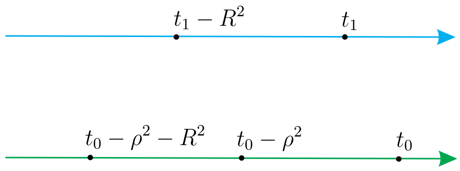
Рис. 1. К формуле (3.8) «x переменная».

Теорема типа Лиувилля. *Решение* $u = u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^{N+1})$ *уравнения*

$$\Delta u - u_t = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^{N+1},$$

удовлетворяющая условию $|u(x,t)| \leqslant M_1$ $(M_1 > 0)$, *является постоянной*

$$u(x,t) = const.$$



$$\sup_{t_1 \in (t_0 - \rho^2, t_0)} |u|_{0;(t_1 - R^2, t_1)} = |u|_{0;(t_0 - \rho^2 - R^2, t_0)}$$

Рис. 2. К формуле (3.8) «t переменная».

Доказательство.

В силу неравенства (3.7) и условия $|u(x,t)| \leqslant M$ мы получим два неравенства

$$|D_t u(z)| \leqslant \frac{M_2}{R^2}, \quad |D_x^\alpha u(z)| \leqslant \frac{M_3}{R}, \quad |\alpha| = 1, \tag{3.9}$$

где постоянные $M_2 > 0$ и $M_3 > 0$ не зависят от $R > 0$. Устремим теперь $R \to +\infty$ в неравенствах (3.9) и получим следующие равенства:

$$|D_t u(z)| = 0, \quad |D_x^\alpha u(z)| = 0, \quad |\alpha| = 1 \Rightarrow u(z) = const$$

для всех $z = (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}$.

Теорема доказана.

§ 4. Априорная оценка Шаудера

Прежде чем формулировать теорему об априорных оценках Шаудера нам нужно напомнить некоторые обозначения. Предположим, что $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ — ограниченная область. Область D ограничивается областью $B \in \mathbb{R}^N \otimes \{t = 0\}$, областью $B_T \subset \mathbb{R}^N \otimes \{t = T\}$ и многообразием $S = \partial D \backslash (B \cup B_T)$ (не обязательно связным). Положим

$$B_\tau = D \cap \{t = \tau\}, \quad S_\tau = S \cap \{t \leqslant \tau\}, \quad D_\tau = D \cap \{t < \tau\}.$$

Предположим, что B_τ является областью в $\mathbb{R}^N$ для любого $\tau \in (0, T)$. Кроме того, предположим, что существуют некоторая точка Q_1 на нижней крышке B и некоторая точка Q_2 на верхней крышке B_T, которые можно соединить простой непрерывной кривой γ, вдоль которой от Q_1 к Q_2 координата t не убывает.

Определение 1. *Мы скажем, что область D обладает свойством* (E), *если для каждой точки $Q \in S$ существует $(N+1)$–мерная окрестность V, такая, что $V \cap S$ может быть представлено в виде*

$$x_i = h(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_N, t), \tag{4.1}$$

где h, $D_{x_k} h$, $D^2_{x_k x_l} h$, $D_t h$ — непрерывны по Гельдеру с показателем $\alpha \in (0, 1]$ относительно параболического расстояния (1.2).

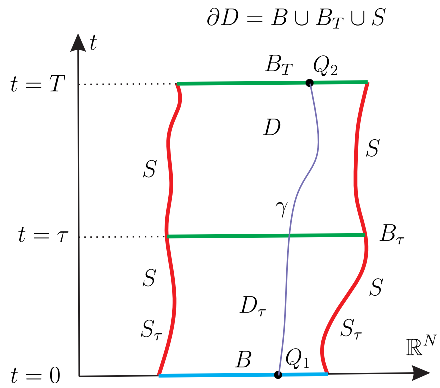


Рис. 3. Область D и некоторые множества.

Замечание 4. Отметим, что из этого определения вытекает, что касательные гиперплоскости к S ни в одной из точек S не могут иметь вида $t = const$. Смотри рисунок 43.

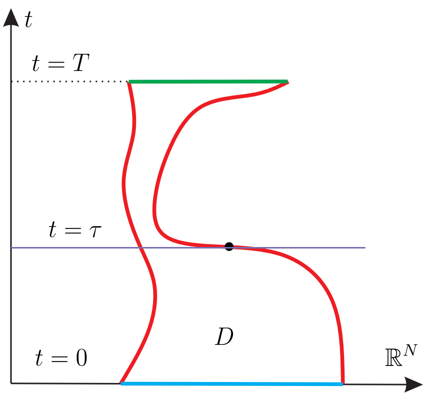


Рис. 4. Область D с точкой касания гиперплоскостью $t = const$.

Теперь нам следует изучить вопрос о возможности существования функции $\Psi(x,t)$, определенной на замыкании $\overline{D}$ всей области D, являющейся продолжением функции $\psi(x,t)$, определенной на параболической границе $\partial^{'} D = B \cup S$ области D. Эта функция напомним возникает при рассмотрении первой краевой задачи при задании граничного условия

$$u(x,t) = \psi(x,t) \quad \text{на} \quad \partial^{'} D.$$

Дадим следующее определение:

Определение 2. *Говорят, что функция $\psi(x,t)$, определенная на параболической границе $\partial^{'} D = B \cup S$ принадлежит классу*

$\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, *если в* $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$ *существует хотя бы одна функция* $\Psi(x,t)$, *такая, что* $\Psi = \psi$ *на* $\partial' D$.

При этом введем следующую величину:

$$|\psi|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\Psi} |\Psi|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}, \quad \Psi(x,t)|_{(x,t)\in\partial' D} = \psi(x,t). \quad (4.2)$$

Наконец, сделаем следующие предположения:

$(\overline{\mathrm{A}})$ Коэффициенты $a_{ij}(x,t)$, $b_i(x,t)$ и $c(x,t)$ параболического оператора L принадлежат классу $\mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(D)$, причем

$$|a_{ij}|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant K_1, \quad |b_i|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant K_1, \quad |c|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant K_1. \quad (4.3)$$

$(\overline{\mathrm{B}})$ Для любой точки $(x,t) \in D$ и любого действительного вектора ξ выполняется следующее неравенство:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant K_2|\xi|^2, \quad K_2 > 0. \quad (4.4)$$

$(\overline{\mathrm{C}})$ Функция $f(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(D)$.

Теперь мы в состоянии рассмотреть вопрос об априорных оценках вблизи границы для решения $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$ первой краевой задачи следующего вида:

$$Lu(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + c(x,t)u(x,t) - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = f(x,t), \quad (4.5)$$

при $(x,t) \in D \cup B_T$,

$$u(x,t) = \psi(x,t) \quad \text{на нормальной границе} \quad \partial' D = B \cup S. \quad (4.6)$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 4. *Если выполняются условия* $(\overline{\mathrm{A}})$, $(\overline{\mathrm{B}})$ *и* $(\overline{\mathrm{C}})$, *область* D *удовлетворяет свойству* (E) *и* $\psi \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, *то существует постоянная* $K_3 = K_3(K_1,K_2,\alpha,D)$, *такая, что для решения* $u(x,t)$ *класса* $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$ *первой краевой задачи* (4.5), (4.6) *имеет место следующая априорная оценка Шаудера*:

$$|u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant K_3\left(|\psi|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} + |f|_{\alpha/2,\alpha;D}\right). \quad (4.7)$$

Доказательство.

Доказательство этой сложной теоремы будет частично доказано в следующем параграфе.

Теорема доказана.

§ 5. Априорная оценка Шаудера в $\mathbb{R}^{N+1}$

В этом разделе мы приведем доказательство основной априорной оценки в параболических пространствах Гельдера, доказанная оригинальным методом Сафоновым примерно в 1984 г. Пусть $\delta \in (0,1)$.

Теорема 5. *Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$. Положим $f = \Delta u - u_t$. Тогда существует константа $M = M(N,\delta)$ такая, что*

$$[u]_{1+\delta/2,2+\delta} \leqslant M[f]_{\delta/2,\delta}. \tag{5.1}$$

Доказательство.

Шаг 1. Возьмем $z_0 = (x_0, t_0) \in \mathbb{R}^{N+1}$, $\rho > 0$ и константу $K \geqslant 1$, которую уточним ниже. Выберем также функцию $\varphi(z) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ такую, что

$$\varphi(z) = 1 \quad \text{при} \quad z = (x,t) \in Q_{(K+1)\rho}(z_0) := B_R(x_0) \otimes (t_0 - (K+1)^2\rho^2, t_0).$$

Определим теперь следующую величину:

$$\begin{aligned} T_{z_0}u(z) &\overset{\text{def}}{=} u(z_0) + (t-t_0)u_t(z_0) + \\ &+ u_{x_i}(z_0)(x_i - x_{0i}) + \frac{1}{2}u_{x_ix_j}(z_0)(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}), \end{aligned} \tag{5.2}$$

где $\rho(z, z_0) \leqslant \rho$ и поэтому, в частности, $|t - t_0| \leqslant \rho^2$ и $|x - x_0| \leqslant \rho$. Пусть

$$g(z) \overset{\text{def}}{=} \Delta\left(\varphi(z)T_{z_0}u(z)\right) - \left(\varphi(z)T_{z_0}u(z)\right)_t, \quad z = (x,t). \tag{5.3}$$

Справедливо следующее равенство:

$$g(z) = \Delta\left(T_{z_0}u(z)\right) - \left(T_{z_0}u(z)\right)_t = f(z_0) \tag{5.4}$$

при $z = (x,t) \in Q_{(K+1)\rho}(z_0)$.

□ Действительно, непосредственным вычислением с учетом определения (5.2) величины $T_{z_0}u(z)$ получим равенство

$$\begin{aligned} &\Delta\left(T_{z_0}u(z)\right) = \Delta u(z_0), \quad \left(T_{z_0}u(z)\right)_t = u_t(z_0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Delta\left(T_{z_0}u(z)\right) - \left(T_{z_0}u(z)\right)_t = \Delta u(z_0) - u_t(z_0) = f(z_0). \quad \boxtimes \end{aligned}$$

Шаг 2. Прежде всего заметим, что в силу того, что $u(x,t) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$, то имеет место следующее равенство:

$$u(x,t) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N} G_0(t-s, x-y)f(y,s)\,dy\,ds = -G_0 * f, \tag{5.5}$$

$$f = \Delta u - u_t,$$

где

$$G_0(x,t) = \frac{\vartheta(t)}{(4\pi t)^{N/2}}\exp\left[-\frac{|x|^2}{4t}\right].$$

И, аналогично, в силу (5.3) имеем

$$\varphi(z)T_{z_0}u(z) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N} G_0(t-s, x-y)g(y,s)\,dy\,ds = -G_0 * g. \quad (5.6)$$

Поэтому при $z = (x,t) \in Q_{(K+1)\rho}(z_0)$ в силу (5.4) имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} &u(z) - T_{z_0}u(z) = u(z) - \varphi(z)T_{z_0}u(z) = G_0 * (g - f) = \\ &\quad = G_0 * \left[(f(z_0) - f(z))I_{Q_{(K+1)\rho}(z_0)}\right] + G_0 * [(g-f)I_{Q^c_{(K+1)\rho}(z_0)}] = \\ &\qquad\qquad =: r(z) + h(z), \end{aligned} \quad (5.7)$$

где

$$I_D(z) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{если} \quad z \in D; \\ 0, & \text{если} \quad z \notin D, \end{cases} \qquad D^c := \mathbb{R}^N \backslash D.$$

Шаг 3. Прежде всего заметим, что

$$\begin{aligned} h(z) &= G_0 * [(g-f)I_{Q^c_{(K+1)\rho}(z_0)}] = \\ &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N} G_0(t-s, x-y)\left[(g(y,s) - f(y,s))I_{Q^c_{(K+1)\rho}(z_0)}(y,s)\right]\,dy\,ds, \end{aligned} \quad (5.8)$$

то при $z = (x,t) \in Q_{(K+1)\rho}(z_0)$ особенности у подынтегрального выражения нет — оно просто равно нулю при $(y,s) \in Q_{(K+1)\rho}(z_0)$, а особенность фундаментального решения $G(t-s, x-y)$ имеется как раз при $t = s$ и $x = y$, а при $t > s$ и $x \neq y$ фундаментальное решение бесконечное число раз дифференцируемо по (x,t). Следовательно,

$$h(z) \in \mathbb{C}^\infty(Q_{(K+1)\rho}(z_0)), \quad (5.9)$$

$$\Delta h(z) - (h(z))_t = 0 \quad \text{при} \quad z = (x,t) \in Q_{(K+1)\rho}(z_0), \quad (5.10)$$

потому что

$$\frac{\partial G_0(t-s, x-y)}{\partial t} = \Delta_x G_0(t-s, x-y) \quad \text{при} \quad t \neq s.$$

Шаг 4. Заметим, что для $z = (x,t) \in Q_\rho(z_0)$ в силу формулы Тейлора имеет место следующее неравенство:

$$|h_t(\vartheta, x) - h_t(z_0)| \leqslant \rho^2 \left|D_t^2 h\right|_{0;Q_\rho(z_0)} + \rho\,|D_x D_t h|_{0;Q_\rho(z_0)}\,. \quad (5.11)$$

Наконец, в силу (2.6) и оценок Бернштейна (3.8) справедлива цепочка неравенств

$$|h(z) - T_{z_0}h(z)| \leqslant |t - t_0|\,|h_t(\vartheta, x) - h_t(z_0)| +$$

$$
\begin{gathered}
+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1,1}^{N,N}\left|h_{x_ix_j}(z_0)-h_{x_ix_j}(t_0,\xi)\right||x_i-x_{0i}||x_j-x_{0j}| \leqslant \\
\leqslant \rho^4\left|D_t^2 h\right|_{0;Q_\rho(z_0)}+\rho^3\left|D_x D_t h\right|_{0;Q_\rho(z_0)}+ \\
+\rho^3\sum_{i,j,k=1,1,1}^{N,N,N}\left|D_iD_jD_kh(z)\right|_{0;Q_\rho(z_0)} \leqslant \\
\leqslant M\left(K^{-4}+K^{-3}\right)|h|_{0;Q_{(K+1)\rho}(z_0)} \leqslant MK^{-3}|h|_{0;Q_{(K+1)\rho}(z_0)}. \quad (5.12)
\end{gathered}
$$

Шаг 5. Теперь оценим функцию $r(z)$ из (5.7). Действительно,

$$
\begin{gathered}
|r(z)|=\left|G_0*\left[(f(z_0)-f(z))I_{Q_{(K+1)\rho}(z_0)}(z)\right]\right|= \\
=\left|G_0*\left[\left(\frac{f(z_0)-f(z)}{\rho^\delta(z,z_0)}\right)I_{Q_{(K+1)\rho}(z_0)}(z)\rho^\delta(z,z_0)\right]\right| \leqslant \\
\leqslant [f]_{\delta/2,\delta}\left[(K+1)\rho\right]^\delta\left|G_0*I_{Q_{(K+1)\rho}(z_0)}(z)\right| \leqslant \\
\leqslant [f]_{\delta/2,\delta}\left[(K+1)\rho\right]^{2+\delta}, \quad (5.13)
\end{gathered}
$$

где мы воспользовались неравенством

$$|G_0*I_{Q_R}| \leqslant R^2,$$

которое мы докажем.

□ Действительно,

$$
\begin{gathered}
G_0*I_{Q_R(z_0)}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}ds\int\limits_{\mathbb{R}^N}dy\,G_0(x-y,t-s)I_{Q_R(z_0)}(y,s)= \\
=\int\limits_{t_0-R^2}^{t_0}ds\int\limits_{B_R(x_0)}dy\,\frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}}\exp\left[-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right] \leqslant \\
\leqslant \int\limits_{t_0-R^2}^{t_0}ds\int\limits_{\mathbb{R}^N}dy\,\frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}}\exp\left[-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right]=R^2, \quad (5.14)
\end{gathered}
$$

где мы воспользовались легко проверяемым равенством

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}dy\,\frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}}\exp\left[-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right]=1 \quad \text{при} \quad t>s. \quad \boxtimes$$

Теперь мы можем воспользоваться неравенством (2.6), которое имеет следующий вид:

$$\left|u(z)-T_{z_0}u(z)\right|_{0;Q_{(K+1)\rho}(z_0)} \leqslant M[(K+1)\rho]^{2+\delta}[u]_{1+\delta/2,2+\delta}. \quad (5.15)$$

Наконец, в силу (5.13) и (5.15) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$
\begin{aligned}
|h|_{0;Q_{(K+1)\rho}(z_0)} = |u - T_{z_0}u - r|_{0;Q_{(K+1)\rho}(z_0)} \leqslant \\
\leqslant |u - T_{z_0}u|_{0;Q_{(K+1)\rho}(z_0)} + |r|_{0;Q_{(K+1)\rho}(z_0)} \leqslant \\
\leqslant M(K+1)^{2+\delta}\rho^{2+\delta}\left([u]_{1+\delta/2,2+\delta} + [f]_{\delta/2,\delta}\right) \quad (5.16)
\end{aligned}
$$

Шаг 6. В силу неравенств (5.12), (5.13) и (5.16) имеем

$$
\begin{aligned}
\inf_{p(z)\in\mathcal{P}_2} |u(z) - p(z)|_{0;Q_\rho(z_0)} \leqslant |u(z) - T_{z_0}u(z) - T_{z_0}h(z)|_{0;Q_\rho(z_0)} \leqslant \\
\leqslant |u(z) - T_{z_0}u(z) - h(z)|_{0;Q_\rho(z_0)} + |h(z) - T_{z_0}h(z)|_{0;Q_\rho(z_0)} = \\
= |r|_{0;Q_\rho(z_0)} + |h(z) - T_{z_0}h(z)|_{0;Q_\rho(z_0)} \leqslant \\
\leqslant M[f]_{\delta/2,\delta}\,[(K+1)\rho]^{2+\delta} + \\
+ K^{-3}M(K+1)^{2+\delta}\rho^{2+\delta}\left([u]_{1+\delta/2,2+\delta} + [f]_{\delta/2,\delta}\right). \quad (5.17)
\end{aligned}
$$

Разделим обе части последнего неравенства на $\rho^{2+\delta}$ и взяв supremum от обеих частей по всем $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$ и $\rho > 0$ в силу эквивалентности полунорм $[u]'_{1+\delta/2,2+\delta}$ и $[u]_{1+\delta/2,2+\delta}$ получим следующее неравенство:

$$
\begin{aligned}
[u]_{1+\delta/2,2+\delta} \leqslant MK^{-3}(K+1)^{2+\delta}[u]_{1+\delta/2,2+\delta} + \\
+ M(K+1)^{2+\delta}\left(1 + K^{-3}\right)[f]_{\delta/2,\delta}. \quad (5.18)
\end{aligned}
$$

Осталось выбрать $K > 0$ настолько большим, чтобы величина

$$MK^{-3}(K+1)^{2+\delta} \leqslant \frac{1}{2},$$

поскольку по условию $\delta \in (0, 1)$.

Теорема доказана.

§ 6. Решение первой краевой задачи

Для того чтобы провести редукцию первой краевой задачи (4.5), (4.6) к случаю $\psi(x,t) \equiv 0$ нужно в дополнение привести следующее определение:

Определение 3. *Если область D обладает свойством* (E) *и, кроме того, производные $\partial_x\partial_t h$ и $\partial_t^2 h$ от функций h, локально представляющих S, являются непрерывными, то мы скажем, что D обладает свойством* ($\overline{\mathrm{E}}$).

Теорема 6. *Если выполняются условия* ($\overline{\mathrm{A}}$), ($\overline{\mathrm{B}}$), ($\overline{\mathrm{C}}$), *область D обладает свойством* ($\overline{\mathrm{E}}$), $\psi(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, $L\psi = f$ *на* ∂B, [1])

[1]) Это естественное условие согласования.

то существует единственное решение $u(x,t)$ *первой краевой задачи* (4.5), (4.6) *класса* $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$.

Доказательство.

Шаг 1. Единственность была ранее доказана с помощью принципа максимума.

Шаг 2. Проведем редукцию исходной задачи (4.5), (4.6) к случаю $\psi(x,t) \equiv 0$. Если $\Psi \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, то в силу свойства $(\overline{\mathrm{A}})$ получим, что

$$|L\Psi|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant c_1 |\Psi|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}.$$

Таким образом, мы можем ввести новую функцию

$$v(x,t) = u(x,t) - \Psi(x,t)$$

с какой–нибудь функцией $\Psi(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, совпадающей с ψ на нормальной границе $\partial' D = B \cup S$ и учесть, что

$$|Lv|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant |f|_{\alpha/2,\alpha;D} + |L\Psi|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant \\ \leqslant |f|_{\alpha/2,\alpha;D} + c_1|\Psi|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant |f|_{\alpha/2,\alpha;D} + 2c_1|\psi|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}$$

А далее нужно использовать эту априорную оценку вместо (4.7).

Шаг 3. Изложим схему доказательства *метода продолжения по параметру*. Рассмотрим однопараметрическое семейство параболических операторов

$$L_\lambda = \lambda L + (1-\lambda)L_0, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \tag{6.1}$$

где

$$L_0 \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\partial}{\partial t}.$$

Обозначим через Σ множество всех значений λ, для которых задача

$$L_\lambda u_\lambda(x,t) = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{6.2}$$

$$u_\lambda(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad B \cup S \tag{6.3}$$

имеет единственное решение $u_\lambda(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$ для любой $f(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(D)$ такой, что $f(x,t) = 0$ на ∂B. Последнее равенство следствие того, что $\psi(x,t) = 0$ на ∂B. Стало быть, условие согласования

$$0 = L\psi(x,t) = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial B.$$

Нам нужно доказать следующие свойства:

(i) Σ содержит $\lambda = 0$, т. е. множество Σ не пусто;

(ii) Σ — открытое множество в сегменте $[0,1]$, т. е. если $\lambda_0 \in \Sigma$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что все λ такие, что $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ содержатся в Σ;

(iii) Σ — замкнутое множество, т. е. для любой последовательности $\{\lambda_n\} \subset \Sigma$ таких, что $\lambda_n \to \overline{\lambda}$ следует, что $\overline{\lambda} \in \Sigma$.

Если $\Sigma \subset [0,1]$ удовлетворяет свойствам (i)–(iii), то это множество является непустым открыто–замкнутым множеством в метрическом пространстве $([0,1], d(a,b) = |a-b|)$. Но известно, что в этом метрическом пространстве имеется только два открыто–замкнутых множества — это пустое множество $\varnothing$ и сам отрезок $[0,1]$. Поскольку в силу (i) множество $\Sigma \neq \varnothing$, то следовательно $\Sigma = [0,1]$, а, значит, краевая задача

$$L_1 u_1(x,t) = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{6.4}$$

$$u_1(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad B \cup S \tag{6.5}$$

имеет единственное решение $u_1(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$ для любой $f(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(D)$ такой, что $f(x,t) = 0$ на ∂B. Это и есть решение первой краевой задачи для параболического оператора L.

Теперь приступим к реализации этой схемы.

Шаг 4. Прежде всего заметим, что доказательство свойства (i) довольно сложное, однако гораздо проще, чем непосредственное доказательство однозначной разрешимости первой краевой задачи для общего параболического уравнения. Тем самым, считаем результат (i) известным.

Шаг 5. Запишем $L_\lambda u_\lambda = f$ в следующем эквивалентном виде:

$$L_{\lambda_0} u_\lambda = (L_{\lambda_0} u_\lambda - L_\lambda u_\lambda) + f = F(u_\lambda). \tag{6.6}$$

Рассмотрим линейное преобразование

$$v = A(u),$$

определенное следующим образом: для функции $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, равной нулю на $B \cup S$, возьмем в качестве $A(u)$ (единственное) решение задачи

$$L_{\lambda_0} v = F(u) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \quad v = 0 \quad \text{на} \quad B \cup S. \tag{6.7}$$

Так как $\lambda_0 \in \Sigma$ и $F(u) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, $F = 0$ на ∂B, то преобразование $v = Au$ определено для всех $u \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, равных нулю на $B \cup S$.

Если мы докажем, что для некоторой функции $u(x,t)$ выполняется равенство $Au = u$, то u будет единственным решением задачи (6.2), (6.3) и, следовательно, $\lambda \in \Sigma$.

Заметим, что имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} F(u) &= f + [\lambda_0 L + (1-\lambda_0) L_0]\, u - [\lambda L + (1-\lambda) L_0]\, u = \\ &= f + (\lambda_0 - \lambda) L u + (\lambda - \lambda_0) L_0 u, \end{aligned} \tag{6.8}$$

из которой вытекает следующая оценка:

$$|F(u)|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant K_4 |\lambda - \lambda_0| |u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} + |f|_{\alpha/2,\alpha;D}, \tag{6.9}$$

где K_4 — это постоянная, не зависящая от λ, u и f. Здесь мы воспользовались следующими неравенствами:

$$|Lu|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant M|u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}, \quad |L_0u|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant M_0|u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D},$$

справедливость которых вытекает из оценки (1.26).

Применяя априорную оценку Шаудера (4.7), получим из (6.7 и (6.9) следующее неравенство:

$$|v|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant K_3K_4|\lambda - \lambda_0||u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} + K_3|f|_{\alpha/2,\alpha;D}, \tag{6.10}$$

где K_3 не зависит от λ, u и f. Теперь воспользуемся снова априорной оценкой Шаудера (4.7) и получим, что, в частности,

$$|u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant 2K_3|f|_{\alpha/2,\alpha;D}. \tag{6.11}$$

С другой стороны, если потребовать, чтобы

$$K_3K_4|\lambda - \lambda_0| \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow |v|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant 2K_3|f|_{\alpha/2,\alpha;D}. \tag{6.12}$$

Обозначая теперь через X_0 замкнутое в $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$ множество, определенное следующим образом:

$$X_0 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D) : \ |u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant 2K_3|f|_{\alpha/2,\alpha;D}\right\} \cap \\ \cap \{u(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad (x,t) \in B \cup S\}. \tag{6.13}$$

Из (6.11) и (6.12) приходим к выводу о том, что линейный оператор A отображает X_0 в X_0.

Докажем, что оператор A сжимающий на X_0. Действительно, пусть

$$v_1 = Au_1, \quad v_2 = Au_2, \quad u_1, u_2 \in X_0.$$

Тогда

$$L_{\lambda_0}(v_1 - v_2) = L_{\lambda_0}(u_1 - u_2) - L_{\lambda}(u_1 - u_2) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \\ v_1 - v_2 = 0 \quad \text{на} \quad B \cup S.$$

Аналогичными рассуждениями при помощи априорной оценки Шаудера (4.7) получим неравенство

$$|v_1 - v_2|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant \\ \leqslant K_3K_4|\lambda - \lambda_0||u_1 - u_2|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant \frac{1}{2}|u_1 - u_2|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}$$

при условии

$$K_3K_4|\lambda - \lambda_0| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Таким образом, оператор при таких λ является сжимающим на X_0 —замкнутом, выпуклом и ограниченном множестве из $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$. Следовательно, в силу теоремы о сжимающем отображении мы приходим к выводу о существовании единственной неподвижной точки $u(x,t) \in X_0$.

Шаг 6. Пусть $\lambda_m \in \Sigma$ и

$$\lambda_m \to \sigma \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Нам нужно доказать, что $\sigma \in \Sigma$, т. е. для любой $f(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(D)$, равной нулю на ∂B, существует функция $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, такая, что

$$L_\sigma u = f \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{6.14}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad B \cup S. \tag{6.15}$$

По предположению для каждого m существует функция $u_m(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, такая, что

$$L_{\lambda_m} u_m = f \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{6.16}$$

$$u_m = 0 \quad \text{на} \quad B \cup S. \tag{6.17}$$

Заметим, что коэффициенты семейства операторов L_λ удовлетворяют условиям $(\overline{\text{A}})$ и $(\overline{\text{B}})$ с константами K_1 и K_2, не зависящими от λ. Поэтому применяя априорную оценку Шаудера (4.7), мы получим следующее неравенство

$$|u_m|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant K_3 |f|_{\alpha/2,\alpha;D}, \tag{6.18}$$

где K_3 не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Далее используя теорему Асколи–Арцела, как при доказательстве теоремы 1, докажем, что существует подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$, которую мы снова обозначим через $\{u_m\}$, такая, что

$$\{u_m\}, \quad \{D_{x_i} u_m\}, \quad \{D^2_{x_i x_j} u_m\}, \quad \{D_t u_m\} \tag{6.19}$$

равномерно сходятся в D. Кроме того, если $u_m \to u$ равномерно в D, то соответствующие последовательности производных сходится равномерно к соответствующим производным u, причем

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D).$$

Переходя к пределу при $m \to +\infty$ в равенствах (6.16) и (6.17), записанных для соответствующей подпоследовательности $\{u_m\}$, получим равенства

$$L_\sigma u = f \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{6.20}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad B \cup S. \tag{6.21}$$

Следовательно, $\sigma \in \Sigma$ — множество Σ замкнуто.

Теорема доказана.

Список литературы

1. *Боголюбов А. Н., Кравцов В. В., Свешников А. Г.* Лекции по математической физике. М.: Издательство МГУ; Наука, 2004.— 416 с.
2. *Вентцель Т. Д., Горицкий А. Ю., Капустина Т. О. и др.* Сборник задач по уравнениям с частными производными. Под редакцией А. С. Шамаева. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005, 158 с.
3. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа// УМН, 17:3(105), 1962, 3–146 с.
4. *Крылов Н. В.* Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гельдера. Новосибирск: Научная книга, 1998, 178 с.
5. *Крылов Н. В.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. Москва: Наука, 1985, 376 с.
6. *Кудряшов Н. А.* Методы нелинейной математической физики. Издательский дом «Интеллект», 2010.– 368 с.
7. *Ландис Е. М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. Москва: Наука, 1971, 288 с.
8. *Нефедов Н. Н.* Дополнительные главы к курсу Методы математической физики. "Нелинейные эллиптические уравнения. Метод дифференциальных неравенств.". Москва: Изд-во физического факультета МГУ, 1998.
9. *Олейник О. А.* Лекции об уравнениях с частными производными. I часть. Москва: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2005. – 252 с.
10. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. Москва: Наука, 1987, 480 с.
11. *Тихонов А. Н.* Теорема единственности для уравнения теплопроводности// Мат. сборник.— 1935.– т. 42, N 2, – с. 189–216.
12. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. Москва: Мир, 1968, 428 с.
13. *Эванс Л. К.* Уравнения с частными производными. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003, 562 с. — (Университетская серия; Т. 7).
14. *Hu Bei* Blow-up theories for semilinear parabolic equations. Lecture Notes in Mathematics, 2018. Springer, Heidelberg, 2011. 125 pp.
15. *Krylov N. V.* Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Sobolev Spaces. Graduate Studies in Mathematics Volume 96 American Mathematical Society. 2000, 374 pp.
16. *Patrizia Pucci, James Serrin* The Maximum Principle. Birkhauser, Basel–Boston–Berlin. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Volume 73. 2007, 240 pp.
17. *Protter M. H., Weinberger H. F.* Maximum principles in differential equations. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1967, 261 pp.

18. *Vicentiu D. Radulescu* Qualitative Analysis of Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations: Monotonicity, Analytic, and Variational Methods. Hindawi Publishing Corporation. 2008, 205 pp.
19. *Vazquez J. L.* The porous medium equation. Mathematical theory. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2007, 624 pp.
20. *Zhuoqun Wu, Jingxue Yin, Chunpeng Wang* Elliptic and Parabolic Equations. World Scientific. 2006, 425 pp.