

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

## ВСЕ ПОТОКИ

2015-2016 учебный год

### Список вопросов к первой части экзамена

#### 1.1. Векторы.

1. Сформулируйте определение линейных операций над векторами. Перечислите свойства линейных операций над векторами.
2. Сформулируйте определение коллинеарных (компланарных) векторов. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие коллинеарности (компланарности) векторов.
3. Сформулируйте определения базиса на плоскости (в пространстве), разложения вектора по базису, координат вектора в базисе. Сформулируйте и докажите теорему о единственности разложения по базису.
4. В треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $AD$ . Найдите координаты вектора  $\overrightarrow{AD}$  в базисе, образованном векторами  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ .
5. Сформулируйте определение скалярного произведения векторов. Сформулируйте его свойства.
6. Выведите формулу для вычисления скалярного произведения векторов, заданных своими координатами в ортонормированном базисе.
7. Сформулируйте определение векторного произведения векторов. Запишите формулу для вычисления векторного произведения векторов, заданных своими координатами в ортонормированном базисе.
8. Сформулируйте свойства векторного произведения векторов.
9. Запишите формулу для двойного векторного произведения.
10. Упростите выражения: (а)  $[\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}]$ ; (б)  $[\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}]$ .

11. Сформулируйте определение смешанного произведения векторов. Каков геометрический смысл смешанного произведения векторов? Сформулируйте свойства смешанного произведения.
12. Выведите формулу для вычисления смешанного произведения векторов, заданных своими координатами в ортонормированном базисе.
13. Что такое правая (левая) тройка векторов? Как определить ориентацию тройки векторов, заданных своими координатами?
14. Докажите тождество

$$([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]) = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{c}) & (\mathbf{a}, \mathbf{d}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{c}) & (\mathbf{b}, \mathbf{d}) \end{vmatrix}.$$

### 1.2. Матрицы.

1. Сформулируйте определение линейных операций над матрицами. Перечислите свойства линейных операций над матрицами.
2. Сформулируйте определение линейной комбинации столбцов. Приведите примеры.
3. Сформулируйте определение линейно зависимых и линейно независимых столбцов. Приведите примеры.
4. Сформулируйте и докажите теорему о свойствах линейно зависимых столбцов.
5. Сформулируйте определение следа матрицы. Докажите равенство  $\text{tr}(A + B) = \text{tr} A + \text{tr} B$ .
6. Сформулируйте определение произведения матриц. Приведите примеры.
7. Известно, что произведение двух матриц равно нулевой матрице. Следует ли отсюда, что один из сомножителей представляет собой нулевую матрицу? Ответ обоснуйте.
8. На какую матрицу нужно умножить матрицу  $A$ , чтобы в результате получить (а) первый столбец  $A$ ; (б) первую строку  $A$ ?
9. Перечислите свойства операции умножения матриц.
10. Пусть  $A, B$  — матрицы, для которых определено произведение  $C = AB$ . Докажите, что  $i$ -й столбец матрицы  $C$  представляет собой линейную комбинацию столбцов матрицы  $A$  с коэффициентами, равными элементам  $i$ -го столбца матрицы  $B$ .
11. Пусть  $A, B$  — матрицы, для которых определено произведение  $C = AB$ . Докажите, что  $i$ -й столбец матрицы  $C$  представляет собой произведение матрицы  $A$  на  $i$ -й столбец матрицы  $B$ .
12. Пусть  $A, B$  — матрицы, для которых определено произведение  $C = AB$ . Докажите, что  $i$ -я строка матрицы  $C$  представляет собой линейную комбинацию строк матрицы  $B$  с коэффициентами, равными элементам  $i$ -й строки матрицы  $A$ .

13. Пусть  $A, B$  — матрицы, для которых определено произведение  $C = AB$ . Докажите, что  $i$ -я строка матрицы  $C$  представляет собой произведение  $i$ -й строки матрицы  $A$  на матрицу  $B$ .
14. Сформулируйте определение операции транспонирования матриц. Перечислите свойства операции транспонирования.
15. Сформулируйте определение обратной матрицы. Всегда ли существует обратная матрица? Докажите, что если обратная матрица существует, то она единственна.
16. Перечислите свойства обратной матрицы.
17. Докажите формулу  $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$ , где  $A, P$  — квадратные матрицы.

### 1.3. Определители второго и третьего порядков.

1. Сформулируйте определение определителя второго порядка. Сформулируйте и докажите основные свойства определителя второго порядка.
2. Докажите формулы Крамера для системы двух уравнений с двумя неизвестными.
3. Сформулируйте и докажите критерий равенства нулю определителя второго порядка.
4. Сформулируйте определение определителя третьего порядка. Сформулируйте и докажите основные свойства определителя третьего порядка.
5. Запишите формулы разложения определителя третьего порядка по любому столбцу. Запишите полное разложение определителя третьего порядка.
6. Что такое минор элемента определителя? Что такое алгебраическое дополнение элемента определителя? В чём различие между этими понятиями?
7. Сформулируйте теорему о фальшивом разложении определителя.
8. Сформулируйте критерий равенства нулю определителя.
9. Сформулируйте теорему об определителе произведения матриц.
10. Сформулируйте теорему о существовании обратной матрицы.

### 1.4. Уравнения прямых и плоскостей.

1. Запишите известные вам виды уравнений прямой на плоскости и объясните геометрический смысл всех входящих в них величин.
2. Выведите формулу для вычисления расстояния от точки до прямой.
3. Выведите формулу для нахождения точки, являющейся проекцией данной точки на данную прямую (на плоскости).

4. Выведите формулу для нахождения точки, симметричной данной точке относительно данную прямую (на плоскости).
5. Запишите известные вам виды уравнений плоскости и объясните геометрический смысл всех входящих в них величин.
6. Выведите формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости.
7. Выведите формулу для нахождения точки, являющейся проекцией данной точки на данную плоскость.
8. Выведите формулу для нахождения точки, симметричной данной точке относительно данную плоскости.
9. Запишите векторное параметрическое уравнение прямой в пространстве; параметрическое уравнение прямой в пространстве в координатном виде; каноническое уравнение прямой в пространстве. Опишите геометрический смысл всех входящих в уравнение постоянных величин.

### 1.5. Составление уравнений прямых и плоскостей.

1. Составьте каноническое уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  перпендикулярно плоскости  $Ax + By + Cz = D$ .
2. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  перпендикулярно прямой  $\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$ .
3. Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую, заданную каноническим уравнением  $\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$ , и точку  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ , не лежащую на этой прямой.
4. Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую, заданную каноническим уравнением  $\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$ , перпендикулярно плоскости  $Ax + By + Cz = D$ .
5. Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую, заданную каноническим уравнением  $\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$ , параллельно прямой  $\frac{x - x_1}{b_1} = \frac{y - y_1}{b_2} = \frac{z - z_1}{b_3}$  при условии, что прямые не параллельны.

### 1.6. Линии второго порядка.

1. Сформулируйте определение эллипса и выведите его каноническое уравнение. Что такое эксцентриситет эллипса?
2. Выведите формулы, выражающие фокальные радиусы произвольной точки эллипса через её абсциссу. Сформулируйте и докажите фокальное свойство эллипса.
3. Выведите уравнение касательной к эллипсу.

4. Сформулируйте и докажите оптическое свойство эллипса.
5. Сформулируйте определение гиперболы и выведите её каноническое уравнение.
6. Докажите, что гипербола в канонической системе координат имеет наклонные асимптоты.
7. Выведите формулы, выражающие фокальные радиусы произвольной точки гиперболы через её абсциссу. Сформулируйте и докажите директориальное свойство гиперболы.
8. Выведите уравнение касательной к гиперболе.
9. Сформулируйте и докажите оптическое свойство гиперболы.
10. Что такое взаимно сопряженные гиперболы? Найдите соотношение, связывающее эксцентриситеты двух взаимно сопряженных гипербол.
11. Сформулируйте определение параболы и выведите её каноническое уравнение.
12. Выведите уравнение касательной к параболе.
13. Сформулируйте и докажите оптическое свойство параболы.
14. Запишите уравнение эллипса, гиперболы, параболы в полярной системе координат и объясните смысл всех входящих в эти уравнения величин.

### 1.7. Поверхности второго порядка.

1. Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением  $\lambda x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , содержащим параметр  $\lambda$ . Определите тип поверхности при всевозможных значениях  $\lambda$ .
2. Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением  $\lambda x^2 + y^2 + z^2 = \lambda$ , содержащим параметр  $\lambda$ . Определите тип поверхности при всевозможных значениях  $\lambda$ .
3. Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением  $x^2 + y^2 - z^2 = \lambda$ , содержащим параметр  $\lambda$ . Определите тип поверхности при всевозможных значениях  $\lambda$ .
4. Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением  $x^2 + \lambda(y^2 + z^2) = 1$ , содержащим параметр  $\lambda$ . Определите тип поверхности при всевозможных значениях  $\lambda$ .
5. Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением  $x^2 + \lambda(y^2 + z^2) = \lambda$ , содержащим параметр  $\lambda$ . Определите тип поверхности при всевозможных значениях  $\lambda$ .
6. Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением  $\lambda x^2 + y^2 = z$ , содержащим параметр  $\lambda$ . Определите тип поверхности при всевозможных значениях  $\lambda$ .

7. Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением  $\lambda(x^2 + y^2) = z$ , содержащим параметр  $\lambda$ . Определите тип поверхности при всевозможных значениях  $\lambda$ .
8. Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением  $x^2 + y^2 = \lambda$ , содержащим параметр  $\lambda$ . Определите тип поверхности при всевозможных значениях  $\lambda$ .
9. Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением  $x^2 - y^2 = \lambda$ , содержащим параметр  $\lambda$ . Определите тип поверхности при всевозможных значениях  $\lambda$ .
10. Сечения поверхности  $x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 1 = 0$  плоскостями  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$  спроектированы на плоскость  $Oyz$ . Как называется поверхность? Изобразите поверхность и указанные проекции.
11. Сечения поверхности  $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0$  плоскостями  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$  спроектированы на плоскость  $Oyz$ . Как называется поверхность? Изобразите поверхность и указанные проекции.
12. Сечения поверхности  $2x^2 - y^2 = 2z$  плоскостями  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$  спроектированы на плоскость  $Oyz$ . Как называется поверхность? Изобразите поверхность и указанные проекции.
13. Сечения поверхности  $2x^2 - y^2 = 2z$  плоскостями  $y = 0$ ,  $y = 1$ ,  $y = 2$  спроектированы на плоскость  $Oxz$ . Как называется поверхность? Изобразите поверхность и указанные проекции.
14. Сечения поверхности  $2x^2 - y^2 = 2z$  плоскостями  $z = -1$ ,  $z = 0$ ,  $z = 1$  спроектированы на плоскость  $Oxy$ . Как называется поверхность? Изобразите поверхность и указанные проекции.

### 1.8. Системы линейных уравнений. Ранг матрицы.

1. Докажите, что однородная система линейных уравнений имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда столбцы её основной матрицы линейно зависимы.
2. Докажите, что если  $X_1, X_2$  — два решения однородной системы линейных уравнений  $AX = 0$ , то любая их линейная комбинация также является решением этой системы.
3. Сформулируйте определение фундаментальной совокупности решений (ФСР) однородной системы линейных уравнений. Найдите ФСР системы  $x^1 + x^2 + x^3 = 0$  и запишите общее решение системы с помощью ФСР.
4. Докажите следующее утверждение: если  $X_1, X_2$  — решения неоднородной системы линейных уравнений  $AX = B$ , то  $X_1 - X_2$  — решение соответствующей однородной системы  $AX = 0$ .

5. Найдите общее решение неоднородной системы  $x^1 + x^2 + x^3 = 1$ . Ответ представьте в виде суммы частного решения неоднородной системы и общего решения соответствующей однородной системы.
6. Сформулируйте определение ранга матрицы.
7. Сформулируйте и докажите теорему Кронекера—Капелли.
8. Докажите, что ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях строк.
9. На плоскости заданы две прямые  $A_1x + B_1y = C_1$ ,  $A_2x + B_2y = C_2$ . Сформулируйте в терминах рангов условия на коэффициенты уравнений прямых, необходимые и достаточные для того, чтобы эти прямые 1) совпадали; 2) были параллельны, но не совпадали; 3) пересекались в единственной точке.
10. В пространстве заданы две плоскости  $A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ ,  $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$ . Сформулируйте в терминах рангов условия на коэффициенты уравнений плоскостей, необходимые и достаточные для того, чтобы эти плоскости 1) совпадали; 2) были параллельны, но не совпадали; 3) имели единственную общую прямую.
11. Сформулируйте теорему о базисном миноре.

### 1.9. Линии второго порядка, II.

1. Выведите формулы преобразования коэффициентов уравнения линии второго порядка при повороте системы координат и переносе начала координат.
2. Что такое центральная линия второго порядка? Перечислите типы центральных линий. При каком условии линия второго порядка  $X^TAX + 2BX + c = 0$  является центральной?
3. Что такое нецентральная линия второго порядка? Перечислите типы нецентральных линий. При каком условии кривая второго порядка  $X^TAX + 2BX + c = 0$  является нецентральной?
4. Перечислите основные ортогональные инварианты линий второго порядка и докажите их инвариантность.
5. Используя ортогональные инварианты, определите тип кривой, заданной уравнением  $2x^2 - 4xy + 5y^2 + 8x - 2y + 9 = 0$ . Каноническое уравнение кривой находить не требуется.
6. Используя ортогональные инварианты, определите тип кривой, заданной уравнением  $4xy - 3y^2 - 4x + 10y - 6 = 0$ . Каноническое уравнение кривой находить не требуется.
7. Используя ортогональные инварианты, определите тип кривой, заданной уравнением  $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 8x + 19y + 4 = 0$ . Каноническое уравнение кривой находить не требуется.

8. Используя ортогональные инварианты, определите тип кривой, заданной уравнением  $x^2 - xy + y^2 + x + y = 0$ . Каноническое уравнение кривой находить не требуется.
9. Используя ортогональные инварианты, определите тип кривой, заданной уравнением  $xy + 2x + y = 0$ . Каноническое уравнение кривой находить не требуется.
10. Используя ортогональные инварианты, определите тип кривой, заданной уравнением  $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$ . Каноническое уравнение кривой находить не требуется.
11. Используя ортогональные инварианты, определите тип кривой, заданной уравнением  $5x^2 + 12xy + 10y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$ . Каноническое уравнение кривой находить не требуется.
12. Используя ортогональные инварианты, определите тип кривой, заданной уравнением  $8x^2 + 6xy + 6x + 3y + 1 = 0$ . Каноническое уравнение кривой находить не требуется.
13. Используя ортогональные инварианты, определите тип кривой, заданной уравнением  $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 8x - 12y - 5 = 0$ . Каноническое уравнение кривой находить не требуется.
14. Используя ортогональные инварианты, определите тип кривой, заданной уравнением  $x^2 + 2xy + y^2 - 5x - 5y + 4 = 0$ . Каноническое уравнение кривой находить не требуется.
15. Используя ортогональные инварианты, определите тип кривой, заданной уравнением  $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 2x - 14y + 13 = 0$ . Каноническое уравнение кривой находить не требуется.
16. Используя ортогональные инварианты, определите тип кривой, заданной уравнением  $x^2 - 2xy + y^2 + 8x - 8y + 22 = 0$ . Каноническое уравнение кривой находить не требуется.
17. Используя ортогональные инварианты, определите тип кривой, заданной уравнением  $15x^2 + 24xy + 15y^2 + 30x - 24y + 20 = 0$ . Каноническое уравнение кривой находить не требуется.
18. Используя ортогональные инварианты, определите тип кривой, заданной уравнением  $15x^2 - 16xy + 15y^2 - 62x - 44y - 13 = 0$ . Каноническое уравнение кривой находить не требуется.



## Список вопросов и задач ко второй части экзамена

### 2.1. Векторы.

1. Выведите формулу для вычисления векторного произведения векторов в ортонормированном базисе.
2. Выведите формулу двойного векторного произведения.
3. Докажите, что три отрезка, соединяющие середины скрещивающихся рёбер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.
4. Разложите вектор  $\mathbf{a}$  на две составляющие, одна из которых лежит в плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{n}$ , а другая перпендикулярна этой плоскости.
5. Докажите тождество  $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{b}, \mathbf{c}], [\mathbf{c}, \mathbf{a}]) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^2$ .
6. Докажите тождество

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ (\mathbf{a}, \mathbf{x}) & (\mathbf{b}, \mathbf{x}) & (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{y}) & (\mathbf{b}, \mathbf{y}) & (\mathbf{c}, \mathbf{y}) \end{vmatrix}.$$

7. Докажите тождество

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} (\mathbf{x}, \mathbf{a}) & (\mathbf{x}, \mathbf{b}) & (\mathbf{x}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{y}, \mathbf{a}) & (\mathbf{y}, \mathbf{b}) & (\mathbf{y}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{z}, \mathbf{a}) & (\mathbf{z}, \mathbf{b}) & (\mathbf{z}, \mathbf{c}) \end{vmatrix}.$$

8. В треугольнике  $ABC$  точка  $D$  делит сторону  $AB$  в отношении  $\lambda$  (т.е.  $|AD| : |DB| = \lambda$ ). Выразите длину отрезка  $[CD]$  через длины сторон треугольника ( $a = |BC|$ ,  $b = |AC|$ ,  $c = |AB|$ ) и число  $\lambda$ .
9. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  опущен перпендикуляр  $CH$  на гипотенузу  $AB$ . Выразите вектор  $\overrightarrow{CH}$  через векторы  $\mathbf{a} = \overrightarrow{CB}$  и  $\mathbf{b} = \overrightarrow{CA}$ .
10. В треугольнике  $ABC$  проведена высота  $AH$ . Выразите вектор  $\overrightarrow{AH}$  через векторы  $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$  и  $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$ .

### 2.2. Матрицы.

1. Пусть матрицы  $A$  и  $B$  таковы, что оба произведения  $AB$  и  $BA$  существуют, т.е.  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  и  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Докажите, что  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .
2. Найдите все матрицы второго порядка, квадраты которых равны (а) нулевой матрице; (б) единичной матрице.
3. Пусть  $A^k = O$ . Докажите, что  $(\mathbb{I} - A)^{-1} = \mathbb{I} + A + A^2 + \dots + A^{k-1}$ .

4. Матрица  $A$  такова, что  $A^2 + A + \mathbb{I} = O$ . Докажите, что  $A$  обратима, и найдите  $A^{-1}$ .
5. Известно, что матрицы  $A$  и  $B$  обратимы и коммутируют. Докажите, что  $A^{-1}$  и  $B^{-1}$  также коммутируют.
6. Пусть  $X, Y$  — столбцы одинаковой высоты и  $A = XY^T$ . Докажите, что существует такое число  $p$ , что  $A^2 = pA$ .
7. Матрицы  $A$  и  $B$  симметричны. Докажите, что матрица  $AB$  симметрична тогда и только тогда, когда  $A$  и  $B$  коммутируют.
8. Пусть  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (т.е.  $A$  — вещественная квадратная матрица). Докажите, что из равенства  $\text{tr}(A^T A) = 0$  вытекает, что матрица  $A$  нулевая.
9. Докажите, что равенство  $AB - BA = \mathbb{I}$  невозможно.

### 2.3. Определители второго и третьего порядка.

1. Докажите, что площадь параллелограмма, сторонами которого являются векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  с координатами  $(a_1, a_2)$  и  $(b_1, b_2)$  (относительно некоторого ортонормированного базиса) соответственно, равна

$$S = \pm \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

2. Докажите, что площадь треугольника с вершинами в точках  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$  равна

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Пусть все элементы матрицы  $A$  второго порядка являются дифференцируемыми функциями одной переменной  $x$ , так что определитель  $\det A$  этой матрицы также является функцией от  $x$ . Докажите, что  $\det A$  — дифференцируемая функция, причём имеет место формула

$$\begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} a'(x) & b'(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c'(x) & d'(x) \end{vmatrix}.$$

4. Для всех значений параметра  $p$  решите систему уравнений

$$\begin{cases} (p+3)x + 15y = p, \\ px + (p+4)y = p-2. \end{cases}$$

5. Для всех значений параметра  $p$  решите систему уравнений

$$\begin{cases} (p+2)x + 2py = 4, \\ 5x + (p+3)y = 5. \end{cases}$$

6. Пусть  $A$  — квадратная матрица порядка 3,  $B$  — её присоединённая матрица. Выразите  $\det B$  через  $\det A$ .
7. Докажите теорему о фальшивом разложении определителя.
8. Докажите критерий равенства нулю определителя.
9. Докажите теорему об определителе произведения матриц.
10. Докажите теорему о существовании обратной матрицы.

#### 2.4. Линии второго порядка.

1. Докажите, что произведение расстояний от фокусов эллипса до любой касательной к нему есть величина постоянная, и найдите её.
2. Докажите, что касательные к эллипсу отсекают на двух касательных к нему, проведённых в концах большой оси, отрезки, произведение которых равно квадрату малой полуоси эллипса.
3. Получите параметрические уравнения гиперболы.
4. Составьте уравнение гиперболы в системе координат, осями которой являются асимптоты гиперболы.
5. Докажите, что эллипс и гипербола, имеющие общие фокусы, пересекаются под прямым углом (т.е. их касательные в точке пересечения перпендикулярны).
6. Докажите, что отрезок любой касательной к эллипсу, заключённый между касательными, проведёнными в концах большой оси, виден из любого фокуса под прямым углом.
7. Докажите, что для данной гиперболы произведение расстояний от любой точки гиперболы до её асимптот есть величина постоянная, и найдите эту величину.
8. Докажите, что отрезок касательной к гиперболе, заключённый между её асимптотами, делится точкой касания пополам.
9. Докажите, что две параболы с общим фокусом и противоположно направленными осями пересекаются под прямым углом (т.е. касательные в точке пересечения взаимно перпендикулярны).
10. Докажите, что сумма обратных величин отрезков, на которые фокус параболы делит проходящую через него хорду, постоянна. Докажите, что отношение произведения длин этих отрезков к длине хорды также постоянно.
11. Выведите формулы преобразования декартовых координат на плоскости при повороте и сдвиге системы координат.
12. Выведите формулы преобразования коэффициентов уравнения линии второго порядка при повороте системы координат и переносе начала координат.

13. Опишите алгоритм приведения уравнения кривой второго порядка к каноническому виду с помощью поворота и сдвига системы координат.
14. Перечислите основные ортогональные инварианты линий второго порядка и докажите их инвариантность.