Аналитическая геометрия

Бадьин А. В.

Лекция 13. Кривые второго порядка

13.1. Определение кривой второго порядка

Определение. Будем говорить, что l — кривая второго порядка в пространстве E^2, если: $l \subseteq E^2$; существуют объекты O, e, A, B, C, удовлетворяющие условиям: $O \in E^2$, e — базис пространства $\vec{E}^2$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A^T = A$, $A \neq \Theta$, $B \in \mathbb{R}^{1\times 2}$, $C \in \mathbb{R}$, $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений уравнения:

$$A_{k,m}x^k x^m + 2B_m x^m + C = 0,$$
$$x \in \mathbb{R}^2.$$

Утверждение (без доказательства)**.** *Пусть l — кривая второго порядка в пространстве E^2. Тогда l является одним из следующих множеств.*

1. *Эллипс.*
2. *Множество, состоящее из одной точки.*
3. *Пустое множество.*
4. *Гипербола.*
5. *Объединение двух прямых, имеющих одну общую точку.*
6. *Парабола.*
7. *Объединение двух прямых, не имеющих общих точек.*
8. *Прямая.*

13.2. Эллипс

Определение. Будем говорить, что l — эллипс в пространстве E^2, если: $l \subseteq E^2$; существуют объекты O, e, a, b, удовлетворяющие условиям: $O \in E^2$, e — правый ортонормированный базис пространства $\vec{E}^2$, a, $b \in \mathbb{R}$, $0 < b \leqslant a$, $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений уравнения:

$$\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} = 1,$$
$$x \in \mathbb{R}^2.$$

Пусть: $l \subseteq E^2$; $O \in E^2$, e — правый ортонормированный базис пространства $\vec{E}^2$, a, $b \in \mathbb{R}$, $0 < b \leqslant a$, $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений уравнения:

$$\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} = 1,$$
$$x \in \mathbb{R}^2.$$

Тогда l — эллипс в пространстве E^2.

Будем говорить, что: $h_{O,e}$ — каноническая система координат для эллипса l; a — большая полуось эллипса l; b — малая полуось эллипса l. Очевидно, $O \notin l$. Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$. Тогда: $h^{-1}_{O,e}(-x^1, x^2) \in l$, $h^{-1}_{O,e}(x^1, -x^2) \in l$, $h^{-1}_{O,e}(-x^1, -x^2) \in l$.

Утверждение. *Справедливо утверждение: $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений уравнения:*

$$|x^2| = b\sqrt{1 - \frac{(x^1)^2}{a^2}},$$
$$x \in \mathbb{R}^2,\ |x^1| \leqslant a.$$

Справедливо утверждение: $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений уравнения:

$$|x^1| = a\sqrt{1 - \frac{(x^2)^2}{b^2}},$$
$$x \in \mathbb{R}^2,\ |x^2| \leqslant b.$$

Обозначим, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Тогда $c \in [0, a)$. Пусть $a > b$. Тогда $c > 0$. Пусть $a = b$. Тогда $c = 0$.

Обозначим, $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Тогда $\varepsilon \in [0, 1)$. Будем говорить, что ε — эксцентриситет эллипса l. Пусть $a > b$. Тогда $\varepsilon > 0$. Пусть $a = b$. Тогда $\varepsilon = 0$.

Обозначим: $F_1 = h^{-1}_{O,e}(-c, 0)$, $F_2 = h^{-1}_{O,e}(c, 0)$. Тогда: F_1, $F_2 \in E^2$, F_1, $F_2 \notin l$, $\rho(F_1, F_2) = 2c$. Будем говорить, что: F_1, F_2 — фокусы эллипса l; $\rho(F_1, F_2)$ — фокусное расстояние эллипса l. Пусть $a > b$. Тогда: F_1, $F_2 \neq O$, $F_1 \neq F_2$. Пусть $a = b$. Тогда F_1, $F_2 = O$.

Пусть $M \in E^2$. Обозначим: $r_1(M) = \rho(M, F_1)$, $r_2(M) = \rho(M, F_2)$. Тогда $r_1(M)$, $r_2(M) \in [0, +\infty)$. Пусть $x = h_{O,e}(M)$. Тогда: $r_1(M) = \sqrt{(x^1 + c)^2 + (x^2)^2}$, $r_2(M) = \sqrt{(x^1 - c)^2 + (x^2)^2}$.

Замечание. Пусть $M \in l$. Так как $F_1 \notin l$, то $M \neq F_1$. Тогда: $\overrightarrow{F_1M} \neq \theta$, $r_1(M) = \rho(M, F_1) > 0$.

Пусть $M \in l$. Так как $F_2 \notin l$, то $M \neq F_2$. Тогда: $\overrightarrow{F_2M} \neq \theta$, $r_2(M) = \rho(M, F_2) > 0$.

Утверждение. *Пусть: $M \in E^2$, $x = h_{O,e}(M)$. Тогда:*

$$r_1(M) = \sqrt{b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} - 1\Big) + (a + \varepsilon x^1)^2},$$
$$r_2(M) = \sqrt{b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} - 1\Big) + (a - \varepsilon x^1)^2}.$$

Доказательство. Очевидно:

$$\sqrt{b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} - 1\Big) + (a + \varepsilon x^1)^2} = \sqrt{b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} - 1\Big) + \Big(a + \frac{c}{a}x^1\Big)^2} =$$
$$= \sqrt{b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} - 1\Big) + a^2 + 2cx^1 + \frac{c^2}{a^2}(x^1)^2} =$$
$$= \sqrt{b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} - 1\Big) + a^2 + 2cx^1 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}(x^1)^2} = \sqrt{(x^1)^2 + 2x^1c + c^2 + (x^2)^2} =$$
$$= \sqrt{(x^1 + c)^2 + (x^2)^2} = r_1(M);$$

$$\sqrt{b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}-1\Big)+(a-\varepsilon x^1)^2}=\sqrt{b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}-1\Big)+\Big(a-\frac{c}{a}x^1\Big)^2}=$$
$$=\sqrt{b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}-1\Big)+a^2-2cx^1+\frac{c^2}{a^2}(x^1)^2}=$$
$$=\sqrt{b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}-1\Big)+a^2-2cx^1+\frac{a^2-b^2}{a^2}(x^1)^2}=\sqrt{(x^1)^2-2x^1c+c^2+(x^2)^2}=$$
$$=\sqrt{(x^1-c)^2+(x^2)^2}=r_2(M).\quad\square$$

Утверждение (фокальные свойства эллипса)**.**
1. *Пусть:* $M\in l$, $x=h_{O,e}(M)$. *Тогда* $r_1(M)=|a+\varepsilon x^1|$.
2. *Пусть:* $M\in E^2$, $x=h_{O,e}(M)$, $r_1(M)=|a+\varepsilon x^1|$. *Тогда* $M\in l$.
3. *Пусть:* $M\in l$, $x=h_{O,e}(M)$. *Тогда* $r_2(M)=|a-\varepsilon x^1|$.
4. *Пусть:* $M\in E^2$, $x=h_{O,e}(M)$, $r_2(M)=|a-\varepsilon x^1|$. *Тогда* $M\in l$.

Доказательство.

1. Так как $M\in l$, то $\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}=1$. Тогда:

$$r_1(M)=\sqrt{b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}-1\Big)+(a+\varepsilon x^1)^2}=\sqrt{(a+\varepsilon x^1)^2}=|a+\varepsilon x^1|.$$

2. Очевидно:

$$r_1(M)=|a+\varepsilon x^1|,$$
$$\sqrt{b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}-1\Big)+(a+\varepsilon x^1)^2}=|a+\varepsilon x^1|,$$
$$b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}-1\Big)+(a+\varepsilon x^1)^2=(a+\varepsilon x^1)^2,$$
$$b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}-1\Big)=0,$$
$$\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}=1.$$

Тогда $M\in l$.

3. Так как $M\in l$, то $\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}=1$. Тогда:

$$r_2(M)=\sqrt{b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}-1\Big)+(a-\varepsilon x^1)^2}=\sqrt{(a-\varepsilon x^1)^2}=|a-\varepsilon x^1|.$$

4. Очевидно:

$$r_2(M)=|a-\varepsilon x^1|,$$
$$\sqrt{b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}-1\Big)+(a-\varepsilon x^1)^2}=|a-\varepsilon x^1|,$$
$$b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}-1\Big)+(a-\varepsilon x^1)^2=(a-\varepsilon x^1)^2,$$
$$b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}-1\Big)=0,$$
$$\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}=1.$$

Тогда $M\in l$. $\square$

Замечание. Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$. Тогда $|x^1| \leqslant a$. Так как: $a > 0$, $|\varepsilon| < 1$, то $a + \varepsilon x^1 > 0$.

Пусть: $M \in E^2$, $x = h_{O,e}(M)$, $r_1(M) = a + \varepsilon x^1$. Тогда $\bigl|r_1(M)\bigr| = |a + \varepsilon x^1|$. Так как $r_1(M) \geqslant 0$, то $r_1(M) = |a + \varepsilon x^1|$.

Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$. Тогда $|x^1| \leqslant a$. Так как: $a > 0$, $|\varepsilon| < 1$, то $a - \varepsilon x^1 > 0$.

Пусть: $M \in E^2$, $x = h_{O,e}(M)$, $r_2(M) = a - \varepsilon x^1$. Тогда $\bigl|r_2(M)\bigr| = |a - \varepsilon x^1|$. Так как $r_2(M) \geqslant 0$, то $r_2(M) = |a - \varepsilon x^1|$.

Замечание (фокальные свойства эллипса). Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$. Тогда: $r_1(M) = |a + \varepsilon x^1|$, $a + \varepsilon x^1 > 0$. Следовательно, $r_1(M) = a + \varepsilon x^1$.

Пусть: $M \in E^2$, $x = h_{O,e}(M)$, $r_1(M) = a + \varepsilon x^1$. Тогда $r_1(M) = |a + \varepsilon x^1|$. Следовательно, $M \in l$.

Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$. Тогда: $r_2(M) = |a - \varepsilon x^1|$, $a - \varepsilon x^1 > 0$. Следовательно, $r_2(M) = a - \varepsilon x^1$.

Пусть: $M \in E^2$, $x = h_{O,e}(M)$, $r_2(M) = a - \varepsilon x^1$. Тогда $r_2(M) = |a - \varepsilon x^1|$. Следовательно, $M \in l$.

Утверждение (фокальные свойства эллипса)**.**

1. Пусть $M \in l$. Тогда $r_1(M) + r_2(M) = 2a$.

2. Пусть: $M \in E^2$, $r_1(M) + r_2(M) = 2a$. Тогда $M \in l$.

Доказательство.

1. Обозначим, $x = h_{O,e}(M)$. Так как $M \in l$, то: $r_1(M) = a + \varepsilon x^1$, $r_2(M) = a - \varepsilon x^1$. Тогда $r_1(M) + r_2(M) = 2a$.

2. Обозначим, $x = h_{O,e}(M)$. Очевидно:

$$\bigl(r_1(M)\bigr)^2 = (x^1 + c)^2 + (x^2)^2 = (x^1)^2 + 2x^1c + c^2 + (x^2)^2,$$
$$\bigl(r_2(M)\bigr)^2 = (x^1 - c)^2 + (x^2)^2 = (x^1)^2 - 2x^1c + c^2 + (x^2)^2.$$

Тогда $\bigl(r_1(M)\bigr)^2 - \bigl(r_2(M)\bigr)^2 = 4x^1c$. Следовательно:

$$\bigl(r_1(M) - r_2(M)\bigr)\bigl(r_1(M) + r_2(M)\bigr) = \bigl(r_1(M)\bigr)^2 - \bigl(r_2(M)\bigr)^2 = 4x^1c.$$

Так как $r_1(M) + r_2(M) = 2a$, то:

$$r_1(M) - r_2(M) = \frac{1}{2a}4x^1c = 2\varepsilon x^1.$$

Так как $r_1(M) + r_2(M) = 2a$, то $r_1(M) = a + \varepsilon x^1$. Тогда $M \in l$. □

Пусть $a > b$. Пусть: $D_1 \subseteq E^2$, $h_{O,e}[D_1]$ — множество всех решений уравнения: $x^1 = -\frac{a}{\varepsilon}$, $x \in \mathbb{R}^2$; $D_2 \subseteq E^2$, $h_{O,e}[D_2]$ — множество всех решений уравнения: $x^1 = \frac{a}{\varepsilon}$, $x \in \mathbb{R}^2$. Тогда: D_1, D_2 — прямые в пространстве E^2, $O, F_1, F_2 \notin D_1$, $O, F_1, F_2 \notin D_2$, $D_1 \cap l = \varnothing$, $D_2 \cap l = \varnothing$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$. Будем говорить, что D_1, D_2 — директрисы эллипса l.

Пусть $M \in E^2$. Обозначим: $d_1(M) = \rho(M, D_1)$, $d_2(M) = \rho(M, D_2)$. Тогда $d_1(M), d_2(M) \in [0, +\infty)$. Пусть $x = h_{O,e}(M)$. Тогда: $d_1(M) = |x^1 + \frac{a}{\varepsilon}|$, $d_1(M) = |x^1 - \frac{a}{\varepsilon}|$.

Утверждение (фокально-директориальные свойства эллипса)**.**

1. Пусть $M \in l$. Тогда $r_1(M) = \varepsilon d_1(M)$.

2. Пусть: $M \in E^2$, $r_1(M) = \varepsilon d_1(M)$. Тогда $M \in l$.

3. Пусть $M \in l$. Тогда $r_2(M) = \varepsilon d_2(M)$.
4. Пусть: $M \in E^2$, $r_2(M) = \varepsilon d_2(M)$. Тогда $M \in l$.

Доказательство.
1. Обозначим, $x = h_{O,e}(M)$. Так как $M \in l$, то:

$$r_1(M) = |a + \varepsilon x^1| = \varepsilon\Big|x^1 + \frac{a}{\varepsilon}\Big| = \varepsilon d_1(M).$$

2. Обозначим, $x = h_{O,e}(M)$. Очевидно:

$$r_1(M) = \varepsilon d_1(M) = \varepsilon\Big|x^1 + \frac{a}{\varepsilon}\Big| = |a + \varepsilon x^1|.$$

Тогда $M \in l$.
3. Обозначим, $x = h_{O,e}(M)$. Так как $M \in l$, то:

$$r_2(M) = |a - \varepsilon x^1| = \varepsilon\Big|x^1 - \frac{a}{\varepsilon}\Big| = \varepsilon d_1(M).$$

4. Обозначим, $x = h_{O,e}(M)$. Очевидно:

$$r_1(M) = \varepsilon d_1(M) = \varepsilon\Big|x^1 - \frac{a}{\varepsilon}\Big| = |a - \varepsilon x^1|.$$

Тогда $M \in l$. □

Определение (нормальный вектор к эллипсу, касательный вектор к эллипсу, касательная прямая к эллипсу). Пусть: $M_0 \in l$, $x_0 = h_{O,e}(M_0)$.

Обозначим, $N_*(M_0) = \frac{x_0^1}{a^2}e_1 + \frac{x_0^2}{b^2}e_2$. Тогда: $N_*(M_0) \in \vec{E}^2$, $N_*(M_0) \neq \theta$. Будем говорить, что N — нормальный вектор к эллипсу l в точке M_0, если $N \in L\big(N_*(M_0)\big)$.

Обозначим, $\tau_*(M_0) = -\frac{x_0^2}{b^2}e_1 + \frac{x_0^1}{a^2}e_2$. Тогда: $\tau_*(M_0) \in \vec{E}^2$, $\tau_*(M_0) \perp N_*(M_0)$, $\tau_*(M_0) \neq \theta$. Будем говорить, что τ — касательный вектор к эллипсу l в точке M_0, если $\tau \in L\big(\tau_*(M_0)\big)$.

Обозначим через $l_*(M_0)$ прямую, удовлетворяющую условиям: $l_*(M_0)$ — прямая в пространстве E^2, $M_0 \in l_*(M_0)$, $N_*(M_0)$ — нормальный вектор к прямой $l_*(M_0)$. Будем говорить, что $l_*(M_0)$ — касательная прямая к эллипсу l в точке M_0.

Утверждение. *Пусть $\psi\colon \mathbb{R} \to l$. Обозначим: $\psi_1(t) = \overrightarrow{O\psi(t)}$ при $t \in \mathrm{D}(\psi)$; $\psi_2(t) = h_{O,e}\big(\psi(t)\big)$ при $t \in \mathrm{D}(\psi)$.*

Пусть: $t_0 \in \mathbb{R}$, ψ_1 — дифференцируемая функция в точке t_0. Обозначим: $M_0 = \psi(t_0)$, $x_0 = \psi_2(t_0)$. Тогда: $\dot{\psi}_1(t_0) \perp N_*(M_0)$, $\dot{\psi}_1(t_0)$ — касательный вектор к эллипсу l в точке M_0.

Доказательство. Пусть $t \in \mathrm{D}(\psi)$. Тогда $\psi(t) \in l$. Следовательно:

$$\frac{\big(\psi_2^1(t)\big)^2}{a^2} + \frac{\big(\psi_2^2(t)\big)^2}{b^2} = 1.$$

Так как ψ_1 — дифференцируемая функция в точке t_0, то:

$$\frac{2\psi_2^1(t_0)\dot{\psi}_2^1(t_0)}{a^2} + \frac{2\psi_2^2(t_0)\dot{\psi}_2^2(t_0)}{b^2} = 0,$$
$$\frac{x_0^1}{a^2}\dot{\psi}_2^1(t_0) + \frac{x_0^2}{b^2}\dot{\psi}_2^2(t_0) = 0,$$
$$\big(N_*(M_0), \dot{\psi}_1(t_0)\big) = 0.$$

Так как: $N_*(M_0) \neq \theta$, $\tau_*(M_0) \perp N_*(M_0)$, то $\tau_*(M_0)$, $\dot{\psi}_1(t_0)$ — линейно зависимые векторы. Так как $\tau_*(M_0) \neq \theta$, то $\dot{\psi}_1(t_0) \in L\big(\tau_*(M_0)\big)$. □

Замечание (уравнение касательной прямой к эллипсу). Пусть: $M_0 \in l$, $x_0 = h_{O,e}(M_0)$. Тогда $\frac{(x_0^1)^2}{a^2} + \frac{(x_0^2)^2}{b^2} = 1$.

Так как: $l_*(M_0)$ — прямая в пространстве E^2, $M_0 \in l_*(M_0)$, $N_*(M_0)$ — нормальный вектор к прямой $l_*(M_0)$, то $h_{O,e}\big[l_*(M_0)\big]$ — множество решений уравнения:

$$\frac{x_0^1}{a^2}(x^1 - x_0^1) + \frac{x_0^2}{b^2}(x^2 - x_0^2) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2;$$
$$\frac{x_0^1 x^1}{a^2} + \frac{x_0^2 x^2}{b^2} = \frac{(x_0^1)^2}{a^2} + \frac{(x_0^2)^2}{b^2}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Так как $\frac{(x_0^1)^2}{a^2} + \frac{(x_0^2)^2}{b^2} = 1$, то $h_{O,e}\big[l_*(M_0)\big]$ — множество решений уравнения:

$$\frac{x_0^1 x^1}{a^2} + \frac{x_0^2 x^2}{b^2} = 1, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Утверждение (оптическое свойство эллипса)**.** *Пусть $M_0 \in l$. Тогда $\varphi\big(N_*(M_0), \overrightarrow{F_1M_0}\big) = \varphi\big(N_*(M_0), \overrightarrow{F_2M_0}\big)$.*

Доказательство. Обозначим, $x_0 = h_{O,e}(M_0)$. Так как $M_0 \in l$, то $\frac{(x_0^1)^2}{a^2} + \frac{(x_0^2)^2}{b^2} = 1$.

Очевидно: $\|\overrightarrow{F_1M_0}\| = \rho(F_1, M_0) = \rho(M_0, F_1) = r_1(M_0)$.

Очевидно, $[\overrightarrow{F_1M_0}](e) = (x_0^1 + c, x_0^2)^T$. Так как $M_0 \in l$, то $r_1(M_0) = a + \varepsilon x_0^1$. Так как $\frac{(x_0^1)^2}{a^2} + \frac{(x_0^2)^2}{b^2} = 1$, то:

$$\big(N_*(M_0), \overrightarrow{F_1M_0}\big) = \frac{x_0^1}{a^2}(x_0^1 + c) + \frac{x_0^2}{b^2}x_0^2 = \frac{(x_0^1)^2}{a^2} + \frac{(x_0^2)^2}{b^2} + \frac{x_0^1}{a^2}c = 1 + \frac{1}{a}\varepsilon x_0^1 = \frac{1}{a}(a + \varepsilon x_0^1) = \\ = \frac{1}{a}r_1(M_0).$$

Так как $M_0 \in l$, то $\overrightarrow{F_1M_0} \neq \theta$. Так как $N_*(M_0) \neq \theta$, то:

$$\varphi\big(N_*(M_0), \overrightarrow{F_1M_0}\big) = \arccos\left(\frac{\big(N_*(M_0), \overrightarrow{F_1M_0}\big)}{\big\|N_*(M_0)\big\| \cdot \|\overrightarrow{F_1M_0}\|}\right) = \arccos\left(\frac{\frac{1}{a}r_1(M_0)}{\big\|N_*(M_0)\big\| r_1(M_0)}\right) = \\ = \arccos\left(\frac{1}{a\big\|N_*(M_0)\big\|}\right).$$

Очевидно: $\|\overrightarrow{F_2M_0}\| = \rho(F_2, M_0) = \rho(M_0, F_2) = r_2(M_0)$.

Очевидно, $[\overrightarrow{F_2M_0}](e) = (x_0^1 - c, x_0^2)^T$. Так как $M_0 \in l$, то $r_2(M_0) = a - \varepsilon x_0^1$. Так как $\frac{(x_0^1)^2}{a^2} + \frac{(x_0^2)^2}{b^2} = 1$, то:

$$\big(N_*(M_0), \overrightarrow{F_2M_0}\big) = \frac{x_0^1}{a^2}(x_0^1 - c) + \frac{x_0^2}{b^2}x_0^2 = \frac{(x_0^1)^2}{a^2} + \frac{(x_0^2)^2}{b^2} - \frac{x_0^1}{a^2}c = 1 - \frac{1}{a}\varepsilon x_0^1 = \frac{1}{a}(a - \varepsilon x_0^1) = \\ = \frac{1}{a}r_2(M_0).$$

Так как $M_0 \in l$, то $\overrightarrow{F_2M_0} \neq \theta$. Так как $N_*(M_0) \neq \theta$, то:

$$\varphi\big(N_*(M_0), \overrightarrow{F_2M_0}\big) = \arccos\left(\frac{\big(N_*(M_0), \overrightarrow{F_2M_0}\big)}{\big\|N_*(M_0)\big\| \cdot \|\overrightarrow{F_2M_0}\|}\right) = \arccos\left(\frac{\frac{1}{a}r_2(M_0)}{\big\|N_*(M_0)\big\| r_2(M_0)}\right) =$$

$$= \arccos\left(\frac{1}{a\big\|N_*(M_0)\big\|}\right).$$

Итак: $\varphi\big(N_*(M_0), \overrightarrow{F_1M_0}\big) = \arccos\big(\frac{1}{a|N_*(M_0)|}\big) = \varphi\big(N_*(M_0), \overrightarrow{F_2M_0}\big)$. $\square$

13.3. Гипербола

Определение. Будем говорить, что l — гипербола в пространстве E^2, если: $l \subseteq E^2$; существуют объекты O, e, a, b, удовлетворяющие условиям: $O \in E^2$, e — правый ортонормированный базис пространства $\vec{E}^2$, a, $b \in (0, +\infty)$, $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений уравнения:

$$\frac{(x^1)^2}{a^2} - \frac{(x^2)^2}{b^2} = 1,$$
$$x \in \mathbb{R}^2.$$

Пусть: $l \subseteq E^2$; $O \in E^2$, e — правый ортонормированный базис пространства $\vec{E}^2$, a, $b \in (0, +\infty)$, $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений уравнения:

$$\frac{(x^1)^2}{a^2} - \frac{(x^2)^2}{b^2} = 1,$$
$$x \in \mathbb{R}^2.$$

Тогда l — гипербола в пространстве E^2.

Будем говорить, что: $h_{O,e}$ — каноническая система координат для гиперболы l; a — вещественная полуось гиперболы l; b — мнимая полуось гиперболы l. Очевидно, $O \notin l$. Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$. Тогда: $h_{O,e}^{-1}(-x^1, x^2) \in l$, $h_{O,e}^{-1}(x^1, -x^2) \in l$, $h_{O,e}^{-1}(-x^1, -x^2) \in l$.

Утверждение. *Справедливо утверждение: $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений уравнения:*

$$|x^2| = b\sqrt{\frac{(x^1)^2}{a^2} - 1},$$
$$x \in \mathbb{R}^2,\ |x^1| \geqslant a.$$

Справедливо утверждение: $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений уравнения:

$$|x^1| = a\sqrt{1 + \frac{(x^2)^2}{b^2}},$$
$$x \in \mathbb{R}^2.$$

Замечание. Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$, $x^1 > -a$. Тогда: $|x^1| \geqslant a$, $x^1 > -a$. Следовательно, $x^1 \geqslant a$.

Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$, $x^1 < a$. Тогда: $|x^1| \geqslant a$, $x^1 < a$. Следовательно, $x^1 \leqslant -a$.

Пусть: $l_1 \subseteq E^2$, $h_{O,e}[l_1]$ — множество всех решений уравнения: $x^2 = \frac{b}{a}x^1$, $x \in \mathbb{R}^2$; $l_2 \subseteq E^2$, $h_{O,e}[l_2]$ — множество всех решений уравнения: $x^2 = -\frac{b}{a}x^1$, $x \in \mathbb{R}^2$. Тогда: l_1, l_2 — прямые в пространстве E^2, F_1, $F_2 \notin l_1$, F_1, $F_2 \notin l_2$, $l_1 \cap l = \varnothing$, $l_2 \cap l = \varnothing$, $l_1 \cap l_2 = \{O\}$. Будем говорить, что l_1, l_2 — асимптоты гиперболы l.

Утверждение. *Обозначим: $F_1(x^1) = b\sqrt{\frac{(x^1)^2}{a^2} - 1}$ при: $x^1 \in \mathbb{R}$, $|x^1| \geqslant a$. Тогда:*

1. $F_1(x^1) < \frac{b}{a}x^1$ при $x^1 \in [a, +\infty)$; $F_1(x^1) = \frac{b}{a}x^1 + o(1)$ при: $x^1 \in \mathbb{R}$, $x^1 \to +\infty$;
2. $F_1(x^1) < -\frac{b}{a}x^1$ при $x^1 \in (-\infty, -a]$; $F_1(x^1) = -\frac{b}{a}x^1 + o(1)$ при: $x^1 \in \mathbb{R}$, $x^1 \to -\infty$.

Обозначим: $F_2(x^1) = -b\sqrt{\frac{(x^1)^2}{a^2} - 1}$ при: $x^1 \in \mathbb{R}$, $|x^1| \geqslant a$. Тогда:
1. $F_2(x^1) > -\frac{b}{a}x^1$ при $x^1 \in [a, +\infty)$; $F_2(x^1) = -\frac{b}{a}x^1 + o(1)$ при: $x^1 \in \mathbb{R}$, $x^1 \to +\infty$;
2. $F_2(x^1) > \frac{b}{a}x^1$ при $x^1 \in (-\infty, -a]$; $F_2(x^1) = \frac{b}{a}x^1 + o(1)$ при: $x^1 \in \mathbb{R}$, $x^1 \to -\infty$.

Доказательство. Пусть $x^1 \in [a, +\infty)$. Так как a, b, $x^1 > 0$, то:

$$F_1(x^1) - \frac{b}{a}x^1 = b\sqrt{\frac{(x^1)^2}{a^2} - 1} - \frac{b}{a}x^1 = b\frac{x^1}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{(x^1)^2}} - \frac{b}{a}x^1 = \frac{b}{a}x^1\Bigg(\sqrt{1 - \frac{a^2}{(x^1)^2}} - 1\Bigg) =$$
$$= \frac{b}{a}x^1\frac{1 - \frac{a^2}{(x^1)^2} - 1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{(x^1)^2}} + 1} = -\frac{ab}{x^1}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{(x^1)^2}} + 1} < 0.$$

Тогда: $F_1(x^1) < \frac{b}{a}x^1$ при $x^1 \in [a, +\infty)$. Очевидно: $F_1(x^1) - \frac{b}{a}x^1 \to 0$ при $x^1 \to +\infty$. Тогда: $F_1(x^1) - \frac{b}{a}x^1 = o(1)$ при: $x^1 \in \mathbb{R}$, $x^1 \to +\infty$. Следовательно: $F_1(x^1) = \frac{b}{a}x^1 + o(1)$ при: $x^1 \in \mathbb{R}$, $x^1 \to +\infty$.

Так как: $F_1(-x^1) = F_1(x^1)$ при: $x^1 \in \mathbb{R}$, $|x^1| \geqslant a$, то: $F_1(x^1) < -\frac{b}{a}x^1$ при $x^1 \in (-\infty, -a]$; $F_1(x^1) = -\frac{b}{a}x^1 + o(1)$ при: $x^1 \in \mathbb{R}$, $x^1 \to -\infty$.

Так как: $-F_1(x^1) = F_2(x^1)$ при: $x^1 \in \mathbb{R}$, $|x^1| \geqslant a$, то: $F_2(x^1) > -\frac{b}{a}x^1$ при $x^1 \in [a, +\infty)$; $F_2(x^1) = -\frac{b}{a}x^1 + o(1)$ при: $x^1 \in \mathbb{R}$, $x^1 \to +\infty$.

Так как: $-F_1(x^1) = F_2(x^1)$ при: $x^1 \in \mathbb{R}$, $|x^1| \geqslant a$, то: $F_2(x^1) > \frac{b}{a}x^1$ при $x^1 \in (-\infty, -a]$; $F_2(x^1) = \frac{b}{a}x^1 + o(1)$ при: $x^1 \in \mathbb{R}$, $x^1 \to -\infty$. □

Обозначим, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Тогда $c \in (a, +\infty)$.

Обозначим, $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Тогда $\varepsilon \in (1, +\infty)$. Будем говорить, что ε — эксцентриситет гиперболы l.

Обозначим: $F_1 = h_{O,e}^{-1}(-c, 0)$, $F_2 = h_{O,e}^{-1}(c, 0)$. Тогда: F_1, $F_2 \in E^2$, F_1, $F_2 \neq O$, $F_1 \neq F_2$, F_1, $F_2 \notin l$, $\rho(F_1, F_2) = 2c$. Будем говорить, что: F_1, F_2 — фокусы гиперболы l; $\rho(F_1, F_2)$ — фокусное расстояние гиперболы l.

Пусть $M \in E^2$. Обозначим: $r_1(M) = \rho(M, F_1)$, $r_2(M) = \rho(M, F_2)$. Тогда $r_1(M)$, $r_2(M) \in [0, +\infty)$. Пусть $x = h_{O,e}(M)$. Тогда: $r_1(M) = \sqrt{(x^1 + c)^2 + (x^2)^2}$, $r_2(M) = \sqrt{(x^1 - c)^2 + (x^2)^2}$.

Замечание. Пусть $M \in l$. Так как $F_1 \notin l$, то $M \neq F_1$. Тогда: $\overrightarrow{F_1M} \neq \theta$, $r_1(M) = \rho(M, F_1) > 0$.

Пусть $M \in l$. Так как $F_2 \notin l$, то $M \neq F_2$. Тогда: $\overrightarrow{F_2M} \neq \theta$, $r_2(M) = \rho(M, F_2) > 0$.

Пусть $M \in E^2$. Так как $F_1 \neq F_2$, то $M \neq F_1 \vee M \neq F_2$. Тогда $r_1(M) > 0 \vee r_2(M) > 0$. Так как $r_1(M)$, $r_2(M) \geqslant 0$, то $r_1(M) + r_2(M) > 0$.

Утверждение. *Пусть: $M \in E^2$, $x = h_{O,e}(M)$. Тогда:*

$$r_1(M) = \sqrt{b^2\Big(1 - \frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2}\Big) + (a + \varepsilon x^1)^2},$$
$$r_2(M) = \sqrt{b^2\Big(1 - \frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2}\Big) + (a - \varepsilon x^1)^2}.$$

Доказательство. Очевидно:

$$\sqrt{b^2\Big(1-\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}\Big)+(a+\varepsilon x^1)^2}=\sqrt{b^2\Big(1-\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}\Big)+\Big(a+\frac{c}{a}x^1\Big)^2}=$$
$$=\sqrt{b^2\Big(1-\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}\Big)+a^2+2cx^1+\frac{c^2}{a^2}(x^1)^2}=$$
$$=\sqrt{b^2\Big(1-\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}\Big)+a^2+2cx^1+\frac{a^2+b^2}{a^2}(x^1)^2}=\sqrt{(x^1)^2+2x^1c+c^2+(x^2)^2}=$$
$$=\sqrt{(x^1+c)^2+(x^2)^2}=r_1(M);$$
$$\sqrt{b^2\Big(1-\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}\Big)+(a-\varepsilon x^1)^2}=\sqrt{b^2\Big(1-\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}\Big)+\Big(a-\frac{c}{a}x^1\Big)^2}=$$
$$=\sqrt{b^2\Big(1-\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}\Big)+a^2-2cx^1+\frac{c^2}{a^2}(x^1)^2}=$$
$$=\sqrt{b^2\Big(1-\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}\Big)+a^2-2cx^1+\frac{a^2+b^2}{a^2}(x^1)^2}=\sqrt{(x^1)^2-2x^1c+c^2+(x^2)^2}=$$
$$=\sqrt{(x^1-c)^2+(x^2)^2}=r_2(M).\quad\square$$

Утверждение (фокальные свойства гиперболы)**.**
1. *Пусть:* $M\in l$, $x=h_{O,e}(M)$*. Тогда* $r_1(M)=|a+\varepsilon x^1|$.
2. *Пусть:* $M\in E^2$, $x=h_{O,e}(M)$, $r_1(M)=|a+\varepsilon x^1|$*. Тогда* $M\in l$.
3. *Пусть:* $M\in l$, $x=h_{O,e}(M)$*. Тогда* $r_2(M)=|a-\varepsilon x^1|$.
4. *Пусть:* $M\in E^2$, $x=h_{O,e}(M)$, $r_2(M)=|a-\varepsilon x^1|$*. Тогда* $M\in l$.

Доказательство.
1. Так как $M\in l$, то $\frac{(x^1)^2}{a^2}-\frac{(x^2)^2}{b^2}=1$. Тогда:

$$r_1(M)=\sqrt{b^2\Big(1-\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}\Big)+(a+\varepsilon x^1)^2}=\sqrt{(a+\varepsilon x^1)^2}=|a+\varepsilon x^1|.$$

2. Очевидно:

$$r_1(M)=|a+\varepsilon x^1|,$$
$$\sqrt{b^2\Big(1-\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}\Big)+(a+\varepsilon x^1)^2}=|a+\varepsilon x^1|,$$
$$b^2\Big(1-\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}\Big)+(a+\varepsilon x^1)^2=(a+\varepsilon x^1)^2,$$
$$b^2\Big(1-\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}\Big)=0,$$
$$\frac{(x^1)^2}{a^2}-\frac{(x^2)^2}{b^2}=1.$$

Тогда $M\in l$.

3. Так как $M\in l$, то $\frac{(x^1)^2}{a^2}-\frac{(x^2)^2}{b^2}=1$. Тогда:

$$r_2(M)=\sqrt{b^2\Big(1-\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}\Big)+(a-\varepsilon x^1)^2}=\sqrt{(a-\varepsilon x^1)^2}=|a-\varepsilon x^1|.$$

4. Очевидно:

$$\begin{gathered}
r_2(M) = |a - \varepsilon x^1|,\\
\sqrt{b^2\Big(1 - \frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2}\Big) + (a - \varepsilon x^1)^2} = |a - \varepsilon x^1|,\\
b^2\Big(1 - \frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2}\Big) + (a - \varepsilon x^1)^2 = (a - \varepsilon x^1)^2,\\
b^2\Big(1 - \frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2}\Big) = 0,\\
\frac{(x^1)^2}{a^2} - \frac{(x^2)^2}{b^2} = 1.
\end{gathered}$$

Тогда $M \in l$. □

Замечание. Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$, $x^1 > -a$. Тогда $x^1 \geqslant a$. Так как: $a > 0$, $\varepsilon > 1$, то $a + \varepsilon x^1 > 2a$. Так как: $a + \varepsilon x^1 > 0$, $x^1 > 0$, то $\operatorname{sgn}(a + \varepsilon x^1) = \operatorname{sgn}(x^1)$.

Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$, $x^1 < a$. Тогда $x^1 \leqslant -a$. Так как: $a > 0$, $\varepsilon > 1$, то $a + \varepsilon x^1 < 0$. Так как $x^1 < 0$, то $\operatorname{sgn}(a + \varepsilon x^1) = \operatorname{sgn}(x^1)$.

Пусть: $M \in E^2$, $x = h_{O,e}(M)$, $r_1(M) = \pm(a + \varepsilon x^1)$. Тогда $\big|r_1(M)\big| = |a + \varepsilon x^1|$. Так как $r_1(M) \geqslant 0$, то $r_1(M) = |a + \varepsilon x^1|$.

Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$, $x^1 > -a$. Тогда $x^1 \geqslant a$. Так как: $a > 0$, $\varepsilon > 1$, то $a - \varepsilon x^1 < 0$. Так как $x^1 > 0$, то $\operatorname{sgn}(a - \varepsilon x^1) = -\operatorname{sgn}(x^1)$.

Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$, $x^1 < a$. Тогда $x^1 \leqslant -a$. Так как: $a > 0$, $\varepsilon > 1$, то $a - \varepsilon x^1 > 2a$. Так как: $a - \varepsilon x^1 > 0$, $x^1 < 0$, то $\operatorname{sgn}(a - \varepsilon x^1) = -\operatorname{sgn}(x^1)$.

Пусть: $M \in E^2$, $x = h_{O,e}(M)$, $r_2(M) = \pm(a - \varepsilon x^1)$. Тогда $\big|r_2(M)\big| = |a - \varepsilon x^1|$. Так как $r_2(M) \geqslant 0$, то $r_2(M) = |a - \varepsilon x^1|$.

Замечание (фокальные свойства гиперболы). Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$, $x^1 > -a$. Тогда: $r_1(M) = |a + \varepsilon x^1|$, $a + \varepsilon x^1 > 0$, $x^1 > 0$. Следовательно: $r_1(M) = a + \varepsilon x^1$, $x^1 > 0$. Тогда $r_1(M) = \operatorname{sgn}(x^1)(a + \varepsilon x^1)$.

Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$, $x^1 < a$. Тогда: $r_1(M) = |a + \varepsilon x^1|$, $a + \varepsilon x^1 < 0$, $x^1 < 0$. Следовательно: $r_1(M) = -(a + \varepsilon x^1)$, $x^1 < 0$. Тогда $r_1(M) = \operatorname{sgn}(x^1)(a + \varepsilon x^1)$.

Пусть: $M \in E^2$, $x = h_{O,e}(M)$, $r_1(M) = a + \varepsilon x^1$. Тогда $r_1(M) = |a + \varepsilon x^1|$. Следовательно, $M \in l$. Предположим, что $x^1 < a$. Так как $M \in l$, то $a + \varepsilon x^1 < 0$. Так как: $r_1(M) = a + \varepsilon x^1$, $r_1(M) \geqslant 0$, то $a + \varepsilon x^1 \geqslant 0$. Итак, $x^1 \geqslant a$.

Пусть: $M \in E^2$, $x = h_{O,e}(M)$, $r_1(M) = -(a + \varepsilon x^1)$. Тогда $r_1(M) = |a + \varepsilon x^1|$. Следовательно, $M \in l$. Предположим, что $x^1 > -a$. Так как $M \in l$, то $a + \varepsilon x^1 > 0$. Так как: $r_1(M) = -(a + \varepsilon x^1)$, $r_1(M) \geqslant 0$, то $a + \varepsilon x^1 \leqslant 0$. Итак, $x^1 \leqslant -a$.

Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$, $x^1 > -a$. Тогда: $r_2(M) = |a - \varepsilon x^1|$, $a - \varepsilon x^1 < 0$, $x^1 > 0$. Следовательно: $r_2(M) = -(a - \varepsilon x^1)$, $x^1 > 0$. Тогда $r_2(M) = -\operatorname{sgn}(x^1)(a - \varepsilon x^1)$.

Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$, $x^1 < a$. Тогда: $r_2(M) = |a - \varepsilon x^1|$, $a - \varepsilon x^1 > 0$, $x^1 < 0$. Следовательно: $r_2(M) = a - \varepsilon x^1$, $x^1 < 0$. Тогда $r_2(M) = -\operatorname{sgn}(x^1)(a - \varepsilon x^1)$.

Пусть: $M \in E^2$, $x = h_{O,e}(M)$, $r_2(M) = -(a - \varepsilon x^1)$. Тогда $r_2(M) = |a - \varepsilon x^1|$. Следовательно, $M \in l$. Предположим, что $x^1 < a$. Так как $M \in l$, то $a - \varepsilon x^1 > 0$. Так как: $r_2(M) = -(a - \varepsilon x^1)$, $r_2(M) \geqslant 0$, то $a - \varepsilon x^1 \leqslant 0$. Итак, $x^1 \geqslant a$.

Пусть: $M \in E^2$, $x = h_{O,e}(M)$, $r_2(M) = a - \varepsilon x^1$. Тогда $r_2(M) = |a - \varepsilon x^1|$. Следовательно, $M \in l$. Предположим, что $x^1 > -a$. Так как $M \in l$, то $a - \varepsilon x^1 < 0$. Так как: $r_2(M) = a - \varepsilon x^1$, $r_1(M) \geqslant 0$, то $a + \varepsilon x^1 \geqslant 0$. Итак, $x^1 \leqslant -a$.

Утверждение (фокальные свойства гиперболы)**.**

1. Пусть $M \in l$. Тогда $\bigl|r_1(M) - r_2(M)\bigr| = 2a$.

2. Пусть: $M \in E^2$, $\bigl|r_1(M) - r_2(M)\bigr| = 2a$. Тогда $M \in l$.

Доказательство.

1. Обозначим, $x = h_{O,e}(M)$. Так как $M \in l$, то: $r_1(M) = \operatorname{sgn}(x^1)(a + \varepsilon x^1)$, $r_2(M) = -\operatorname{sgn}(x^1)(a - \varepsilon x^1)$, $x^1 \neq 0$. Так как $a > 0$, то: $\bigl|r_1(M) - r_2(M)\bigr| = |2\operatorname{sgn}(x^1)a| = 2a$.

2. Обозначим, $x = h_{O,e}(M)$. Очевидно:

$$\bigl(r_1(M)\bigr)^2 = (x^1 + c)^2 + (x^2)^2 = (x^1)^2 + 2x^1c + c^2 + (x^2)^2,$$
$$\bigl(r_2(M)\bigr)^2 = (x^1 - c)^2 + (x^2)^2 = (x^1)^2 - 2x^1c + c^2 + (x^2)^2.$$

Тогда $\bigl(r_1(M)\bigr)^2 - \bigl(r_2(M)\bigr)^2 = 4x^1c$. Следовательно:

$$\bigl(r_1(M) - r_2(M)\bigr)\bigl(r_1(M) + r_2(M)\bigr) = \bigl(r_1(M)\bigr)^2 - \bigl(r_2(M)\bigr)^2 = 4x^1c.$$

Пусть $x^1 \geqslant 0$. Так как: $c > 0$, $r_1(M) + r_2(M) > 0$, то $r_1(M) - r_2(M) \geqslant 0$. Так как $\bigl|r_1(M) - r_2(M)\bigr| = 2a$, то $r_1(M) - r_2(M) = 2a$. Тогда:

$$r_1(M) + r_2(M) = \frac{1}{2a}4x^1c = 2\varepsilon x^1.$$

Так как $r_1(M) - r_2(M) = 2a$, то $r_1(M) = a + \varepsilon x^1$. Тогда $M \in l$.

Пусть $x^1 < 0$. Так как: $c > 0$, $r_1(M) + r_2(M) > 0$, то $r_1(M) - r_2(M) < 0$. Так как $\bigl|r_1(M) - r_2(M)\bigr| = 2a$, то $r_1(M) - r_2(M) = -2a$. Тогда:

$$r_1(M) + r_2(M) = \frac{1}{-2a}4x^1c = -2\varepsilon x^1.$$

Так как $r_1(M) - r_2(M) = -2a$, то $r_1(M) = -(a + \varepsilon x^1)$. Тогда $M \in l$. □

Пусть: $D_1 \subseteq E^2$, $h_{O,e}[D_1]$ — множество всех решений уравнения: $x^1 = -\frac{a}{\varepsilon}$, $x \in \mathbb{R}^2$; $D_2 \subseteq E^2$, $h_{O,e}[D_2]$ — множество всех решений уравнения: $x^1 = \frac{a}{\varepsilon}$, $x \in \mathbb{R}^2$. Тогда: D_1, D_2 — прямые в пространстве E^2, O, F_1, $F_2 \notin D_1$, O, F_1, $F_2 \notin D_2$, $D_1 \cap l = \varnothing$, $D_2 \cap l = \varnothing$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$. Будем говорить, что D_1, D_2 — директрисы гиперболы l.

Пусть $M \in E^2$. Обозначим: $d_1(M) = \rho(M, D_1)$, $d_2(M) = \rho(M, D_2)$. Тогда $d_1(M), d_2(M) \in [0, +\infty)$. Пусть $x = h_{O,e}(M)$. Тогда: $d_1(M) = |x^1 + \frac{a}{\varepsilon}|$, $d_1(M) = |x^1 - \frac{a}{\varepsilon}|$.

Утверждение (фокально-директориальные свойства гиперболы)**.**

1. Пусть $M \in l$. Тогда $r_1(M) = \varepsilon d_1(M)$.

2. Пусть: $M \in E^2$, $r_1(M) = \varepsilon d_1(M)$. Тогда $M \in l$.

3. Пусть $M \in l$. Тогда $r_2(M) = \varepsilon d_2(M)$.

4. Пусть: $M \in E^2$, $r_2(M) = \varepsilon d_2(M)$. Тогда $M \in l$.

Доказательство.

1. Обозначим, $x = h_{O,e}(M)$. Так как $M \in l$, то:

$$r_1(M) = |a + \varepsilon x^1| = \varepsilon\Bigl|x^1 + \frac{a}{\varepsilon}\Bigr| = \varepsilon d_1(M).$$

2. Обозначим, $x = h_{O,e}(M)$. Очевидно:

$$r_1(M) = \varepsilon d_1(M) = \varepsilon \Big| x^1 + \frac{a}{\varepsilon} \Big| = |a + \varepsilon x^1|.$$

Тогда $M \in l$.

3. Обозначим, $x = h_{O,e}(M)$. Так как $M \in l$, то:

$$r_2(M) = |a - \varepsilon x^1| = \varepsilon \Big| x^1 - \frac{a}{\varepsilon} \Big| = \varepsilon d_1(M).$$

4. Обозначим, $x = h_{O,e}(M)$. Очевидно:

$$r_1(M) = \varepsilon d_1(M) = \varepsilon \Big| x^1 - \frac{a}{\varepsilon} \Big| = |a - \varepsilon x^1|.$$

Тогда $M \in l$. □

Определение (нормальный вектор к гиперболе, касательный вектор к гиперболе, касательная прямая к гиперболе). Пусть: $M_0 \in l$, $x_0 = h_{O,e}(M_0)$.

Обозначим, $N_*(M_0) = \frac{x_0^1}{a^2} e_1 - \frac{x_0^2}{b^2} e_2$. Тогда: $N_*(M_0) \in \vec{E}^2$, $N_*(M_0) \neq \theta$. Будем говорить, что N — нормальный вектор к гиперболе l в точке M_0, если $N \in L\big(N_*(M_0)\big)$.

Обозначим, $\tau_*(M_0) = \frac{x_0^2}{b^2} e_1 + \frac{x_0^1}{a^2} e_2$. Тогда: $\tau_*(M_0) \in \vec{E}^2$, $\tau_*(M_0) \perp N_*(M_0)$, $\tau_*(M_0) \neq \theta$. Будем говорить, что τ — касательный вектор к гиперболе l в точке M_0, если $\tau \in L\big(\tau_*(M_0)\big)$.

Обозначим через $l_*(M_0)$ прямую, удовлетворяющую условиям: $l_*(M_0)$ — прямая в пространстве E^2, $M_0 \in l_*(M_0)$, $N_*(M_0)$ — нормальный вектор к прямой $l_*(M_0)$. Будем говорить, что $l_*(M_0)$ — касательная прямая к гиперболе l в точке M_0.

Утверждение. *Пусть $\psi \colon \mathbb{R} \to l$. Обозначим: $\psi_1(t) = \overrightarrow{O\psi(t)}$ при $t \in \mathrm{D}(\psi)$; $\psi_2(t) = h_{O,e}\big(\psi(t)\big)$ при $t \in \mathrm{D}(\psi)$.*

Пусть: $t_0 \in \mathbb{R}$, ψ_1 — дифференцируемая функция в точке t_0. Обозначим: $M_0 = \psi(t_0)$, $x_0 = \psi_2(t_0)$. Тогда: $\dot{\psi}_1(t_0) \perp N_*(M_0)$, $\dot{\psi}_1(t_0)$ — касательный вектор к гиперболе l в точке M_0.

Доказательство. Пусть $t \in \mathrm{D}(\psi)$. Тогда $\psi(t) \in l$. Следовательно:

$$\frac{\big(\psi_2^1(t)\big)^2}{a^2} - \frac{\big(\psi_2^2(t)\big)^2}{b^2} = 1.$$

Так как ψ_1 — дифференцируемая функция в точке t_0, то:

$$\frac{2\psi_2^1(t_0)\dot{\psi}_2^1(t_0)}{a^2} - \frac{2\psi_2^2(t_0)\dot{\psi}_2^2(t_0)}{b^2} = 0,$$
$$\frac{x_0^1}{a^2}\dot{\psi}_2^1(t_0) - \frac{x_0^2}{b^2}\dot{\psi}_2^2(t_0) = 0,$$
$$\big(N_*(M_0), \dot{\psi}_1(t_0)\big) = 0.$$

Так как: $N_*(M_0) \neq \theta$, $\tau_*(M_0) \perp N_*(M_0)$, то $\tau_*(M_0)$, $\dot{\psi}_1(t_0)$ — линейно зависимые векторы. Так как $\tau_*(M_0) \neq \theta$, то $\dot{\psi}_1(t_0) \in L\big(\tau_*(M_0)\big)$. □

Замечание (уравнение касательной прямой к гиперболе). Пусть: $M_0 \in l$, $x_0 = h_{O,e}(M_0)$. Тогда $\frac{(x_0^1)^2}{a^2} - \frac{(x_0^2)^2}{b^2} = 1$.

Так как: $l_*(M_0)$ — прямая в пространстве E^2, $M_0 \in l_*(M_0)$, $N_*(M_0)$ — нормальный вектор к прямой $l_*(M_0)$, то $h_{O,e}\big[l_*(M_0)\big]$ — множество решений уравнения:

$$\frac{x_0^1}{a^2}(x^1 - x_0^1) - \frac{x_0^2}{b^2}(x^2 - x_0^2) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2;$$
$$\frac{x_0^1 x^1}{a^2} - \frac{x_0^2 x^2}{b^2} = \frac{(x_0^1)^2}{a^2} - \frac{(x_0^2)^2}{b^2}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Так как $\frac{(x_0^1)^2}{a^2} - \frac{(x_0^2)^2}{b^2} = 1$, то $h_{O,e}\big[l_*(M_0)\big]$ — множество решений уравнения:

$$\frac{x_0^1 x^1}{a^2} - \frac{x_0^2 x^2}{b^2} = 1, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Утверждение (оптическое свойство гиперболы). *Пусть* $M_0 \in l$. *Тогда* $\varphi\big(N_*(M_0), \overrightarrow{F_1M_0}\big) = \varphi\big(N_*(M_0), \overrightarrow{M_0F_2}\big)$.

Доказательство. Обозначим, $x_0 = h_{O,e}(M_0)$. Так как $M_0 \in l$, то: $\frac{(x_0^1)^2}{a^2} - \frac{(x_0^2)^2}{b^2} = 1$, $x_0^1 \neq 0$.

Очевидно: $\|\overrightarrow{F_1M_0}\| = \rho(F_1, M_0) = \rho(M_0, F_1) = r_1(M_0)$.

Очевидно, $[\overrightarrow{F_1M_0}](e) = (x_0^1 + c, x_0^2)^T$. Так как $M_0 \in l$, то $r_1(M_0) = \operatorname{sgn}(x_0^1)(a + \varepsilon x_0^1)$. Так как: $\frac{(x_0^1)^2}{a^2} - \frac{(x_0^2)^2}{b^2} = 1$, $x_0^1 \neq 0$, то:

$$\big(N_*(M_0), \overrightarrow{F_1M_0}\big) = \frac{x_0^1}{a^2}(x_0^1 + c) - \frac{x_0^2}{b^2}x_0^2 = \frac{(x_0^1)^2}{a^2} - \frac{(x_0^2)^2}{b^2} + \frac{x_0^1}{a^2}c = 1 + \frac{1}{a}\varepsilon x_0^1 = \frac{1}{a}(a + \varepsilon x_0^1) =$$
$$= \frac{1}{a}\operatorname{sgn}(x_0^1) r_1(M_0).$$

Так как $M_0 \in l$, то $\overrightarrow{F_1M_0} \neq \theta$. Так как $N_*(M_0) \neq \theta$, то:

$$\varphi\big(N_*(M_0), \overrightarrow{F_1M_0}\big) = \arccos\left(\frac{\big(N_*(M_0), \overrightarrow{F_1M_0}\big)}{\big\|N_*(M_0)\big\| \cdot \|\overrightarrow{F_1M_0}\|}\right) = \arccos\left(\frac{\frac{1}{a}\operatorname{sgn}(x_0^1) r_1(M_0)}{\big\|N_*(M_0)\big\| r_1(M_0)}\right) =$$
$$= \arccos\left(\frac{\operatorname{sgn}(x_0^1)}{a\big\|N_*(M_0)\big\|}\right).$$

Очевидно: $\|\overrightarrow{M_0F_2}\| = \rho(M_0, F_2) = r_2(M_0)$.

Очевидно, $[\overrightarrow{M_0F_2}](e) = \big(-(x_0^1 - c), -x_0^2\big)^T$. Так как $M_0 \in l$, то $r_2(M_0) = -\operatorname{sgn}(x_0^1)(a - \varepsilon x_0^1)$. Так как: $\frac{(x_0^1)^2}{a^2} - \frac{(x_0^2)^2}{b^2} = 1$, $x_0^1 \neq 0$, то:

$$\big(N_*(M_0), \overrightarrow{F_2M_0}\big) = \frac{x_0^1}{a^2}\big(-(x_0^1 - c)\big) - \frac{x_0^2}{b^2}(-x_0^2) = -\frac{(x_0^1)^2}{a^2} + \frac{(x_0^2)^2}{b^2} + \frac{x_0^1}{a^2}c =$$
$$= -1 + \frac{1}{a}\varepsilon x_0^1 = -\frac{1}{a}(a - \varepsilon x_0^1) = \frac{1}{a}\operatorname{sgn}(x_0^1) r_2(M_0).$$

Так как $M_0 \in l$, то $\overrightarrow{M_0F_2} \neq \theta$. Так как $N_*(M_0) \neq \theta$, то:

$$\varphi\big(N_*(M_0), \overrightarrow{M_0F_2}\big) = \arccos\left(\frac{\big(N_*(M_0), \overrightarrow{F_2M_0}\big)}{\big\|N_*(M_0)\big\| \cdot \|\overrightarrow{F_2M_0}\|}\right) = \arccos\left(\frac{\frac{1}{a}\operatorname{sgn}(x_0^1) r_2(M_0)}{\big\|N_*(M_0)\big\| r_2(M_0)}\right) =$$
$$= \arccos\left(\frac{\operatorname{sgn}(x_0^1)}{a\big\|N_*(M_0)\big\|}\right).$$

Итак: $\varphi\big(N_*(M_0), \overrightarrow{F_1M_0}\big) = \arccos\big(\frac{\operatorname{sgn}(x_0^1)}{a\|N_*(M_0)\|}\big) = \varphi\big(N_*(M_0), \overrightarrow{M_0F_2}\big)$. □

13.4. Парабола

Определение. Будем говорить, что l — парабола в пространстве E^2, если: $l \subseteq E^2$; существуют объекты O, e, p, удовлетворяющие условиям: $O \in E^2$, e — правый ортонормированный базис пространства $\vec{E}^2$, $p \in (0, +\infty)$, $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений уравнения:

$$\begin{gathered}(x^2)^2 = 2px^1,\\ x \in \mathbb{R}^2.\end{gathered}$$

Пусть: $l \subseteq E^2$; $O \in E^2$, e — правый ортонормированный базис пространства $\vec{E}^2$, $p \in (0, +\infty)$, $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений уравнения:

$$\begin{gathered}(x^2)^2 = 2px^1,\\ x \in \mathbb{R}^2.\end{gathered}$$

Тогда l — парабола в пространстве E^2.

Будем говорить, что $h_{O,e}$ — каноническая система координат для параболы l. Очевидно, $O \in l$. Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$. Тогда $h^{-1}_{O,e}(x^1, -x^2) \in l$.

Утверждение. *Справедливо утверждение: $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений уравнения:*

$$\begin{gathered}|x^2| = \sqrt{2px^1},\\ x \in \mathbb{R}^2,\ x^1 \geqslant 0.\end{gathered}$$

Справедливо утверждение: $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений уравнения:

$$\begin{gathered}x^1 = \frac{1}{2p}(x^2)^2,\\ x \in \mathbb{R}^2.\end{gathered}$$

Обозначим, $\varepsilon = 1$. Будем говорить, что ε — эксцентриситет параболы l.

Обозначим, $F = h^{-1}_{O,e}(p/2, 0)$. Тогда: $F \in E^2$, $F \neq O$, $F \notin l$. Будем говорить, что F — фокус параболы l.

Пусть $M \in E^2$. Обозначим, $r(M) = \rho(M, F)$. Тогда $r(M) \in [0, +\infty)$. Пусть $x = h_{O,e}(M)$. Тогда $r(M) = \sqrt{(x^1 - p/2)^2 + (x^2)^2}$.

Замечание. Пусть $M \in l$. Так как $F \notin l$, то $M \neq F$. Тогда: $\overrightarrow{FM} \neq \theta$, $r(M) = \rho(M, F) > 0$.

Утверждение. *Пусть: $M \in E^2$, $x = h_{O,e}(M)$. Тогда:*

$$r(M) = \sqrt{(x^2)^2 - 2px^1 + (p/2 + x^1)^2}.$$

Доказательство. Очевидно:

$$\begin{gathered}\sqrt{(x^2)^2 - 2px^1 + (p/2 + x^1)^2} = \sqrt{(x^2)^2 - 2px^1 + p^2/4 + px^1 + (x^1)^2} =\\ = \sqrt{(x^1)^2 - px^1 + p^2/4 + (x^2)^2} = \sqrt{(x^1 - p/2)^2 + (x^2)^2} = r(M). \quad \square\end{gathered}$$

Утверждение (фокальные свойства параболы)**.**

1. *Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$. Тогда $r(M) = |p/2 + x^1|$.*
2. *Пусть: $M \in E^2$, $x = h_{O,e}(M)$, $r(M) = |p/2 + x^1|$. Тогда $M \in l$.*

Доказательство.

1. Так как $M \in l$, то $(x^2)^2 = 2px^1$. Тогда:

$$r(M) = \sqrt{(x^2)^2 - 2px^1 + (p/2 + x^1)^2} = \sqrt{(p/2 + x^1)^2} = |p/2 + x^1|.$$

2. Очевидно:

$$r(M) = |p/2 + x^1|,$$
$$\sqrt{(x^2)^2 - 2px^1 + (p/2 + x^1)^2} = |p/2 + x^1|,$$
$$(x^2)^2 - 2px^1 + (p/2 + x^1)^2 = (p/2 + x^1)^2,$$
$$(x^2)^2 - 2px^1 = 0,$$
$$(x^2)^2 = 2px^1.$$

Тогда $M \in l$. □

Замечание. Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$. Тогда $x^1 \geqslant 0$. Так как $p > 0$, то $p/2 + x^1 > 0$.

Пусть: $M \in E^2$, $x = h_{O,e}(M)$, $r(M) = p/2 + x^1$. Тогда $\bigl|r(M)\bigr| = |p/2 + x^1|$. Так как $r(M) \geqslant 0$, то $r(M) = |p/2 + x^1|$.

Замечание (фокальные свойства параболы). Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$. Тогда: $r(M) = |p/2 + x^1|$, $p/2 + x^1 > 0$. Следовательно, $r(M) = p/2 + x^1$.

Пусть: $M \in E^2$, $x = h_{O,e}(M)$, $r(M) = p/2 + x^1$. Тогда $r(M) = |p/2 + x^1|$. Следовательно, $M \in l$.

Пусть: $D \subseteq E^2$, $h_{O,e}[D]$ — множество всех решений уравнения: $x^1 = -p/2$, $x \in \mathbb{R}^2$. Тогда: D — прямая в пространстве E^2, O, $F \notin D$, $D \cap l = \varnothing$. Будем говорить, что D — директриса параболы l.

Пусть $M \in E^2$. Обозначим, $d(M) = \rho(M, D)$. Тогда $d(M) \in [0, +\infty)$. Пусть $x = h_{O,e}(M)$. Тогда $d(M) = |x^1 + p/2|$.

Утверждение (фокально-директориальные свойства параболы)**.**

1. *Пусть $M \in l$. Тогда $r(M) = \varepsilon d(M)$.*
2. *Пусть: $M \in E^2$, $r(M) = \varepsilon d(M)$. Тогда $M \in l$.*

Доказательство.

1. Обозначим, $x = h_{O,e}(M)$. Так как $M \in l$, то:

$$r(M) = |p/2 + x^1| = \varepsilon |x^1 + p/2| = \varepsilon d(M).$$

2. Обозначим, $x = h_{O,e}(M)$. Очевидно:

$$r(M) = \varepsilon d(M) = \varepsilon |x^1 + p/2| = |p/2 + x^1|.$$

Тогда $M \in l$. □

Определение (нормальный вектор к параболе, касательный вектор к параболе, касательная прямая к параболе). Пусть: $M_0 \in l$, $x_0 = h_{O,e}(M_0)$.

Обозначим, $N_*(M_0) = -pe_1 + x_0^2 e_2$. Тогда: $N_*(M_0) \in \vec{E}^2$, $N_*(M_0) \neq \theta$. Будем говорить, что N — нормальный вектор к параболе l в точке M_0, если $N \in L\bigl(N_*(M_0)\bigr)$.

Обозначим, $\tau_*(M_0) = x_0^2 e_1 + pe_2$. Тогда: $\tau_*(M_0) \in \vec{E}^2$, $\tau_*(M_0) \perp N_*(M_0)$, $\tau_*(M_0) \neq \theta$. Будем говорить, что τ — касательный вектор к параболе l в точке M_0, если $\tau \in L\bigl(\tau_*(M_0)\bigr)$.

Обозначим через $l_*(M_0)$ прямую, удовлетворяющую условиям: $l_*(M_0)$ — прямая в пространстве E^2, $M_0 \in l_*(M_0)$, $N_*(M_0)$ — нормальный вектор к прямой $l_*(M_0)$. Будем говорить, что $l_*(M_0)$ — касательная прямая к параболе l в точке M_0.

Утверждение. *Пусть* $\psi\colon \mathbb{R} \to l$. *Обозначим:* $\psi_1(t) = \overrightarrow{O\psi(t)}$ *при* $t \in \mathrm{D}(\psi)$; $\psi_2(t) = h_{O,e}\bigl(\psi(t)\bigr)$ *при* $t \in \mathrm{D}(\psi)$.

Пусть: $t_0 \in \mathbb{R}$, ψ_1 *— дифференцируемая функция в точке* t_0. *Обозначим:* $M_0 = \psi(t_0)$, $x_0 = \psi_2(t_0)$. *Тогда:* $\dot{\psi}_1(t_0) \perp N_*(M_0)$, $\dot{\psi}_1(t_0)$ *— касательный вектор к параболе* l *в точке* M_0.

Доказательство. Пусть $t \in \mathrm{D}(\psi)$. Тогда $\psi(t) \in l$. Следовательно:

$$\bigl(\psi_2^2(t)\bigr)^2 = 2p\psi_2^1(t).$$

Так как ψ_1 — дифференцируемая функция в точке t_0, то:

$$\begin{gathered}
2\psi_2^2(t_0)\dot{\psi}_2^2(t_0) = 2p\dot{\psi}_2^1(t_0),\\
-p\dot{\psi}_2^1(t_0) + x_0^2\dot{\psi}_2^2(t_0) = 0,\\
\bigl(N_*(M_0), \dot{\psi}_1(t_0)\bigr) = 0.
\end{gathered}$$

Так как: $N_*(M_0) \neq \theta$, $\tau_*(M_0) \perp N_*(M_0)$, то $\tau_*(M_0)$, $\dot{\psi}_1(t_0)$ — линейно зависимые векторы. Так как $\tau_*(M_0) \neq \theta$, то $\dot{\psi}_1(t_0) \in L\bigl(\tau_*(M_0)\bigr)$. □

Замечание (уравнение касательной прямой к параболе). Пусть: $M_0 \in l$, $x_0 = h_{O,e}(M_0)$. Тогда $(x_0^2)^2 = 2px_0^1$.

Так как: $l_*(M_0)$ — прямая в пространстве E^2, $M_0 \in l_*(M_0)$, $N_*(M_0)$ — нормальный вектор к прямой $l_*(M_0)$, то $h_{O,e}\bigl[l_*(M_0)\bigr]$ — множество решений уравнения:

$$\begin{gathered}
-p(x^1 - x_0^1) + x_0^2(x^2 - x_0^2) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2;\\
x_0^2x^2 = p(-x_0^1 + x^1) + (x_0^2)^2, \quad x \in \mathbb{R}^2;\\
x_0^2x^2 = p(x_0^1 + x^1) + (x_0^2)^2 - 2px_0^1, \quad x \in \mathbb{R}^2.
\end{gathered}$$

Так как $(x_0^2)^2 = 2px_0^1$, то $h_{O,e}\bigl[l_*(M_0)\bigr]$ — множество решений уравнения:

$$x_0^2x^2 = p(x_0^1 + x^1), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Утверждение (оптическое свойство параболы). *Пусть* $M_0 \in l$. *Тогда* $\varphi\bigl(N_*(M_0), \overrightarrow{FM_0}\bigr) = \varphi\bigl(N_*(M_0), -e_1\bigr)$.

Доказательство. Обозначим, $x_0 = h_{O,e}(M_0)$. Так как $M_0 \in l$, то: $(x_0^2)^2 = 2px_0^1$, $r(M_0) = p/2 + x_0^1$.

Очевидно: $\|\overrightarrow{FM_0}\| = \rho(F, M_0) = \rho(M_0, F) = r(M_0)$.

Очевидно, $[\overrightarrow{FM_0}](e) = (x_0^1 - p/2, x_0^2)^T$. Так как: $(x_0^2)^2 = 2px_0^1$, $r(M_0) = p/2 + x_0^1$, то:

$$\bigl(N_*(M_0), \overrightarrow{FM_0}\bigr) = -p(x_0^1 - p/2) + x_0^2x_0^2 = (x_0^2)^2 + p(p/2 - x_0^1) = (x_0^2)^2 - 2px_0^1 + p(p/2 + x_0^1) = \\ = pr(M_0).$$

Так как $M_0 \in l$, то $\overrightarrow{FM_0} \neq \theta$. Так как $N_*(M_0) \neq \theta$, то:

$$\varphi\bigl(N_*(M_0), \overrightarrow{FM_0}\bigr) = \arccos\left(\frac{\bigl(N_*(M_0), \overrightarrow{FM_0}\bigr)}{\bigl\|N_*(M_0)\bigr\| \cdot \|\overrightarrow{FM_0}\|}\right) = \arccos\left(\frac{pr(M_0)}{\bigl\|N_*(M_0)\bigr\| r(M_0)}\right) =$$

$$= \arccos\left(\frac{p}{\big\|N_*(M_0)\big\|}\right).$$

Очевидно: $\|-e_1\| = \|e_1\| = 1$.
Очевидно, $[-e_1](e) = (-1, 0)^T$. Тогда:

$$\big(N_*(M_0), -e_1\big) = -p(-1) + x_0^2 0 = p.$$

Так как: $N_*(M_0) \neq \theta$, $-e_1 \neq \theta$, то:

$$\varphi\big(N_*(M_0), -e_1\big) = \arccos\left(\frac{\big(N_*(M_0), -e_1\big)}{\big\|N_*(M_0)\big\| \cdot \|-e_1\|}\right) = \arccos\left(\frac{p}{\big\|N_*(M_0)\big\|}\right).$$

Итак: $\varphi\big(N_*(M_0), \overrightarrow{FM_0}\big) = \arccos\big(\frac{p}{|N_*(M_0)|}\big) = \varphi\big(N_*(M_0), -e_1\big)$. $\square$

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Крутицкая Н. Ч., Тихонравов А. В., Шишкин А. А.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра с приложениями.

[4] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[5] *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия.

[6] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[7] *Клетеник Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии.