Семинар–Лекция 5

ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА

§ 1. Полнота пространств Лебега

Мы рассматриваем пространства $L^p(\Omega)$, где Ω есть некоторое измеримое пространство (конечной или бесконечной, но σ-конечной меры), $p \in [1; +\infty]$.

Теорема 1. *Пространства* $L^p(\Omega)$ *полны.*

Доказательство.

Пусть дана последовательность $\{f_n\}$, фундаментальная по норме пространства $L^p(\Omega)$. Мы докажем, что существует элемент $f \in L^p(\Omega)$ такой, что $f_n \to f$ в $L^p(\Omega)$.

Шаг I. $p = 1$.

1. Следует начать с выбора представителей элементов f_n. Сделаем этот выбор произвольным образом. Из дальнейшего будет ясно, что результат не зависит от конкретного выбора. Теперь будем считать, что $f_n(x)$ суть не что иное, как выбранные представители элементов f_n. По определению фундаментальной последовательности имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geqslant N(\varepsilon) \ \ \|f_n(x) - f_m(x))\|_1 < \varepsilon. \tag{1.1}$$

2. Положим $N_0 = 0$. Далее при каждом $k \in \mathbb{N}$ положим $N_k = N\left(\frac{1}{2^k}\right)$ в смысле (1.1). Нетрудно видеть, что при каждом $k \in \mathbb{N}$

$$f_{N_k} = f_{N_0} + (f_{N_1} - f_{N_0}) + \ldots + \left(f_{N_k} - f_{N_{k-1}}\right). \tag{1.2}$$

С другой стороны, в силу выбора N_k имеем при всех $k \in \mathbb{N}$

$$\|f_{N_0}\|_1 + \|f_{N_1} - f_{N_0}\|_1 + \ldots + \left\|f_{N_k} - f_{N_{k-1}}\right\|_1 \leqslant \|f_{N_0}\|_1 + \|f_{N_1} - f_{N_0}\|_1 + 1,$$

откуда

$$\int\limits_{\Omega} \left(|f_{N_0}| + |f_{N_1} - f_{N_0}| + \ldots + \left|f_{N_k} - f_{N_{k-1}}\right|\right) d\mu < C.$$

3. Тогда по теореме Беппо Леви ряд

$$|f_{N_0}| + |f_{N_1} - f_{N_0}| + \ldots + \left|f_{N_k} - f_{N_{k-1}}\right| + \ldots$$

сходится почти всюду на Ω к некоторой функции $\widetilde{f}(x)$, причём $\int_\Omega \widetilde{f}(x)\,d\mu \leqslant C$. Следовательно, то же верно для ряда

$$f_{N_0} + (f_{N_1} - f_{N_0}) + \ldots + \left(f_{N_k} - f_{N_{k-1}}\right) + \ldots . \tag{1.3}$$

Обозначив сумму последнего через $f(x)$, с учётом (1.2) мы можем написать, что

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{N_k}(x), \tag{1.4}$$

где предел существует почти всюду. (В остальных точках доопределим функцию $f(x)$ нулём.) Тогда функция $f(x)$ измерима как предел почти всюду последовательности измеримых функций, а в силу очевидной оценки $|f(x)| \leqslant \widetilde{f}(x)$ и свойств интеграла Лебега получаем, что $\int_\Omega |f(x)|\,d\mu \leqslant C$ и $f(x) \in L^1(\Omega)$.

4. Итак, мы построили подпоследовательность $\{f_{N_k}\}$ исходной последовательности $\{f_n\}$, сходящуюся почти всюду к некоторой функции $f(x) \in L^1(\Omega)$. Теперь наша задача показать, что $f_n \to f$ по норме пространства $L^1(\Omega)$. Очевидно, достаточно доказать лишь, что $f_{N_k} \to f$ в $L^1(\Omega)$, поскольку для фундаментальной последовательности сходимость некоторой её подпоследовательности гарантирует сходимость всех последовательности к тому же пределу.

5. Заметим, что в силу фундаментальности последовательности $\{f_n\}$, а следовательно, и её подпоследовательности $\{f_{N_k}\}$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \ \forall m, n \geqslant K(\varepsilon) \int\limits_\Omega |f_{N_m} - f_{N_l}|\,d\mu < \varepsilon. \tag{1.5}$$

Воспользовавшись теоремой Фату, перейдём в (1.5) к пределу при $l \to \infty$. Тогда получим, что при всех $m > K(\varepsilon)$ в смысле (1.5)

$$\int\limits_\Omega |f_{N_m} - f|\,d\mu \leqslant \varepsilon. \tag{1.6}$$

А это означает не что иное, как сходимость $f_{N_k} \to f$ в $L^1(\Omega)$.

6. Теперь ясно, что исходный выбор представителей не мог повлиять на сходимость почти всюду ряда (1.3); соотношение (1.4) также выполнялось бы почти всюду; наконец, в соотношениях (1.5) и (1.6) также ничего бы не поменялось, кроме значений подынтегральных функций на множествах меры нуль.

Итак, для случая $p = 1$ теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. 1. В данной ситуации нам было безразлично, конечна или бесконечна мера множества Ω. 2. Попутно мы доказали, что из последовательности, фундаментальной по норме $L^1(\Omega)$, можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся почти всюду в Ω.

Шаг II. $p = \infty$.

1. По-прежнему начнём с выбора функций $f_n(x)$ — представителей элементов $f_n \in L^\infty(\Omega)$. Далее, вспомним, что если $g \in L^\infty(\Omega)$, то

$$\mu\left(\{x \in \Omega \mid |g(x)| > \|g\|_\infty\}\right) = 0.$$

С учётом этого можно утверждать, что $\mu(\Omega_{nm}) = 0$, где

$$\Omega_{nm} = \{x \in \Omega \mid |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}.$$

2. Положим теперь $\Omega^* = \Omega \setminus \cup_{n,m=1}^\infty \Omega_{nm}$. Очевидно, что $\mu\left(\cup_{n,m=1}^\infty \Omega_{nm}\right) = 0$ и что на множестве Ω^* последовательность функций $\{f_n(x)\}$ равномерно фундаментальна, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geqslant N(\varepsilon), \forall x \in \Omega^*\ \ |f_n(x) - f_m(x))| < \varepsilon. \qquad (1.7)$$

3. Но из (1.7) следует равномерная сходимость последовательности функций $\{f_n(x)\}$ на Ω^*, причём для предельной функции $f(x)$ верно: $\sup_{x\in\Omega^*} |f(x)| \leqslant \sup_{n\in N} \|f_n\|_\infty$, поэтому $f(x) \in L^\infty(\Omega)$. Далее, переходя в (1.7) к пределу при $m \to \infty$ при фиксированном n, получим:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > N(\varepsilon), \forall x \in \Omega^*\ \ |f_n(x) - f(x))| \leqslant \varepsilon. \qquad (1.8)$$

4. Поскольку после доопределения функции $f(x)$ на $\Omega \setminus \Omega^*$ произвольным образом условие (1.8) не нарушается, мы получаем, что $f_n \to$ $\to f$ в $L^\infty(\Omega)$.

Осталось лишь заметить, что любой другой выбор представителей не повлияет на результат.

Теперь теорема доказана и для случая $p = \infty$.

Шаг III. $p \in (1; +\infty)$.

1. В этом случае, в отличие от предыдущих, придётся рассмотреть отдельно множества Ω конечной и бесконечной меры.

2. $\mu(\Omega) < +\infty$. Тогда для всех $g \in L^p(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\int\limits_\Omega |g|\, d\mu = \int\limits_\Omega |g| \cdot 1\, d\mu \leqslant \|g\|_p \cdot \left(\int\limits_\Omega 1\, d\mu\right)^{\frac{1}{p'}} = \|g\|_p \cdot (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p'}},$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Следовательно, все элементы $f_n \in L^p(\Omega)$ принадлежат также пространству $L^1(\Omega)$ и, более того, из фундаментальности последовательности $\{f_n\}$ по норме пространства $L^p(\Omega)$ следует её фундаментельность по норме $L^1(\Omega)$. Поэтому (как и прежде, начав с выбора представителей), в силу доказанного в I мы получим функцию $f(x) \in$ $\in L^1(\Omega)$ такую, что $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

3. Заметим теперь, что полученная функция принадлежит также пространству $L^p(\Omega)$. Действительно, поскольку фундаментальная последовательность ограничена, то для $C \equiv \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|^p \geqslant 0$ имеем

$$\int\limits_\Omega |f_{N_k}|^p\, d\mu \leqslant C,$$

где $\{f_{N_k}\}$ — почти всюду сходящаяся к f подпоследовательность, выбранная из $\{f_n\}$ согласно I. Но тогда по теореме Фату получаем $\int_\Omega |f|^p\,d\mu \leqslant C$, т. е. $f \in L^p(\Omega)$. Осталось лишь доказать, что $\|f_n - f\|_p \to 0$. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Тогда в силу фундаментельности последовательности $\{f_{N_k}\}$ получаем, что

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists K(\varepsilon) > 0\ \ \forall l, m > K(\varepsilon) \int\limits_\Omega |f_{N_l} - f_{N_m}|^p\,d\mu < \varepsilon.$$

4. Устремляя m к бесконечности, по теореме Фату получаем, что при тех же $l > K(\varepsilon)$ верно неравенство $\int_\Omega |f_{N_l} - f|^p\,d\mu \leqslant \varepsilon$. Поскольку это рассуждение можно провести для произвольного $\varepsilon > 0$, получаем

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists K(\varepsilon) > 0\,\forall l > K(\varepsilon) \int\limits_\Omega |f_{N_l} - f|^p\,d\mu \leqslant \varepsilon,$$

т. е. $\|f_{N_k} - f\|_p \to 0$. Очевидно, вся исходная последовательность также стремится к f в $L^p(\Omega)$.

5. Пусть $\mu(\Omega) = +\infty$ (но при этом мера на Ω σ-конечна). По определению σ-конечности меры на Ω получаем, что Ω может быть представлено в виде объединения измеримых подмножеств конечной меры:

$$\Omega = \sqcup_{q=1}^{\infty}\Omega_q, \quad \text{где} \quad \mu(\Omega_q) < +\infty, \quad q \in \mathbb{N}.$$

6. Как обычно, выберем представителей каждого элемента f_n и заметим к тому же, что сужения выбранных функций на каждое из Ω_q измеримы и принадлежат $L^p(\Omega_q)$. Более того, если $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ таково, что

$$\forall l, m > K(\varepsilon) \int\limits_\Omega |f_l - f_m|^p\,d\mu < \varepsilon,$$

то очевидным образом при всех $l, m > K(\varepsilon)$ (где $K(\varepsilon)$ то же)

$$\forall l, m > K(\varepsilon),\ \forall q \in \mathbb{N} \int\limits_{\Omega_q} |f_l - f_m|^p\,d\mu < \varepsilon.$$

7. Поэтому согласно пункту 1. из $\{f_n(x)\}$ можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся почти всюду на Ω_1. Из неё можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся почти всюду на Ω_2. Продолжим этот процесс, а затем с помощью диагонального процесса выберем подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, сходящуюся почти всюду на всех Ω_q, т. е. сходящуюся почти всюду на Ω. Обозначим соответствующую предельную функцию через $f(x)$. Из пункта A следует, что $\|f_{n_k} - f\|_{L^p(\Omega_q)} \to 0$ при всех $q \in \mathbb{N}$. Тогда имеем при всех $k \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_\Omega |f_{n_k}|^p\,d\mu \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|^p_{L^p(\Omega)},$$

откуда по теореме Фату

$$\int\limits_{\Omega} |f|^p \, d\mu \leqslant \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|^p_{L^p(\Omega)},$$

т. е. $f \in L^p(\Omega)$.

8. Осталось доказать, что $\|f_{n_k} - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ (как и прежде, из этого будет следовать аналогичное утверждение для всей последовательности). Но это вытекает из теоремы Фату совершенно аналогично предыдущему случаю.

Замечание 1. Мы и для случая σ-конечной меры построили подпоследовательность, сходящуюся почти всюду.

Замечание 2. Полезно сравнить ход доказательства полноты в случае пространств Лебега и в случае пространств $C(M_1, M_2)$ ограниченных непрерывных функций со значениями в полном метрическом пространстве M_2. В обоих случаях мы действуем в три этапа: 1) строим некоторый предельный объект, 2) доказываем, что он принадлежит нужному пространству, 3) доказываем, что исходная фундаментальная последовательность действительно к нему сходится, причём на последнем этапе мы с помощью некоторых соображений (в данном случае – теоремы Фату) совершаем предельный переход в условии фундаментальности.

Теорема доказана.

Неравенства Кларксона и равномерная выпуклость пространств Лебега.

Неравенства Кларксона для функций $f, g \in L^p(X)$ имеют вид (с $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_p^p \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p, \quad p \in [2; +\infty),$$

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^q + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_p^q \leqslant \left(\frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p \right)^{q-1}, \quad p \in (1; 2].$$

Мы приведём полный вывод первого неравенства.

0. Заметим, что для любых $a, b \geqslant 0$, $r \geqslant 1$ верны неравенства

$$a^r + b^r \leqslant (a+b)^r \leqslant 2^{r-1}(a^r + b^r), \tag{0a; 0b}$$

откуда для $s \leqslant 1$

$$a^s + b^s \geqslant (a+b)^s. \tag{1.9}$$

Для доказательства неравенств (0a) и (0b) мы воспользуемся их однородностью и разделим все три выражения на a^r. (Случай $a = 0$ тривиален.) Отношение $\frac{b}{a}$ снова обозначим символом b. С учётом этих рассуждений нам остаётся доказать неравенства

$$1 + b^r \leqslant (1+b)^r \leqslant 2^{r-1}(1 + b^r). \tag{0a'; 0b'}$$

Очевидно, что неравенство $(0a')$ обращается в равенство при $b = 0$ (найти эту точку можно, например, с помощью дифференцирования). Возьмём производные от левой и правой частей этого неравенства:

$$\frac{d}{db}(1 + b^r) = rb^{r-1}, \quad \frac{d}{db}(1 + b)^r = r(1 + b)^{r-1}.$$

Очевидно, что при $b \geqslant 0$, $r - 1 \geqslant 0$ имеет место следующее неравенство, связывающее указанные производные:

$$rb^{r-1} \leqslant r(1 + b)^{r-1}. \tag{1.10}$$

Поскольку при $b = 0$ в $(0a')$ достигается равенство, то из (1.10) получаем неравенство $(0a')$ при всех $b \geqslant 0$.

Чтобы теперь доказать $(0b')$, заметим, что это неравенство обращается в равенство при $b = 1$. Далее,

$$\frac{d}{db}(1 + b)^r = r(1 + b)^{r-1}, \quad \frac{d}{db}2^{r-1}(1 + b^r) = 2^{r-1}rb^{r-1}.$$

Достаточно показать, что

$$\begin{aligned} r(1 + b)^{r-1} &\geqslant 2^{r-1}rb^{r-1} \quad \text{при} \quad b \leqslant 1, \\ r(1 + b)^{r-1} &\leqslant 2^{r-1}rb^{r-1} \quad \text{при} \quad b \geqslant 1. \end{aligned}$$

Но это очевидно, если разделить обе части неравенств на положительное число $r2^{r-1}$ и представить их в виде соответственно

$$\left(\frac{1 + b}{2}\right)^{r-1} \quad \text{и} \quad b^{r-1}.$$

Таким образом, неравенства $(0a; 0b)$ полностью доказаны.

Далее, неравенство (1.9) следует из $(0a)$, если в последнем в качестве a, b, r взять соответственно a^s, b^s, $\frac{1}{s}$.

1. Теперь докажем, что для всех комплексных α, β и всех $p \geqslant 2$ верно неравенство

$$(|\alpha + \beta|^p + |\alpha - \beta|^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant \sqrt{2}\,\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.11}$$

Это имеет место в силу легко проверяемого равенства параллелограмма

$$\left(|\alpha + \beta|^2 + |\alpha - \beta|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\,\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

и неравенства

$$(|\alpha + \beta|^p + |\alpha - \beta|^p)^{\frac{2}{p}} \leqslant |\alpha + \beta|^2 + |\alpha - \beta|^2,$$

которое получается, если положить в (1.9) $a = |\alpha + \beta|^p$, $b = |\alpha - \beta|^p$, $s = \frac{2}{p}$.

2. Возводя (1.11) в положительную степень p и пользуясь далее (0b) с $r = \frac{p}{2} \geqslant 1$, имеем:

$$|\alpha+\beta|^p+|\alpha-\beta|^p \leqslant 2^{\frac{p}{2}}\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)^{\frac{p}{2}} \leqslant \\ \leqslant 2^{\frac{p}{2}}\cdot 2^{\frac{p}{2}-1}\left(|\alpha|^p+|\beta|^p\right)=2^{p-1}\left(|\alpha|^p+|\beta|^p\right),$$

откуда следует

$$|\alpha+\beta|^p+|\alpha-\beta|^p \leqslant 2^{p-1}\left(|\alpha|^p+|\beta|^p\right), \tag{1.12}$$

где, напоминаем, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, $p\geqslant 2$.

3. Переписав теперь только что полученное числовое неравенство (1.12) в виде

$$\left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right|^p+\left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|^p \leqslant \frac{1}{2}|\alpha|^p+\frac{1}{2}|\beta|^p, \tag{1.13}$$

положив при каждом $x\in X$ $\alpha=f(x)$, $\beta=g(x)$ и проинтегрировав по области X, получим первое неравенство Кларксона.

Для вывода второго неравенства Кларксона используется обратное неравенство Минковского (см., напр.: С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, М.: Наука, 1988, с. 17) и следующее числовое неравенство, доказательство которого мы здесь не приводим (см. там же, с. 31—32):

$$\left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right|^q+\left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|^q \leqslant \left(\frac{1}{2}|\alpha|^p+\frac{1}{2}|\beta|^p\right)^{\frac{1}{p-1}}, \tag{1.14}$$

где по-прежнему $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, но теперь $p\in(1;2]$.

В целях удобства записи будем пользоваться стандартным обозначением

$$\|f\|_u \equiv \left(\int\limits_X |f(x)|^u\,d\mu\right)^{\frac{1}{u}}$$

даже при $u\in(0;1)$, хотя в последнем случае эта величина, конечно, нормой не является (см. обратное неравенство Минковского). Тогда для любой функции $h\in L^p(X)$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$\||h|^q\|_{p-1}=\left(\int\limits_X |h(x)|^{q(p-1)}\,d\mu\right)^{\frac{1}{p-1}}=\left(\int\limits_X |h(x)|^p\,d\mu\right)^{\frac{q}{p}}=\|h\|_p^q. \tag{1.15}$$

В силу (1.15), обратного неравенства Минковского и (1.14) получим:

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^q + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^q = \left\|\left|\frac{f+g}{2}\right|^q\right\|_{p-1} + \left\|\left|\frac{f-g}{2}\right|^q\right\|_{p-1} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_X \left[\left|\frac{f+g}{2}\right|^q + \left|\frac{f-g}{2}\right|^q\right]^{p-1} d\mu\right)^{\frac{1}{p-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_X \left[\frac{1}{2}|f(x)|^p + \frac{1}{2}|g(x)|^p\right] d\mu\right)^{\frac{1}{p-1}} = \left(\frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p\right)^{q-1},$$

что и доказывает второе неравенство Кларксона.

4. Теперь убедимся в том, что из неравенств Кларксона следует равномерная выпуклость пространств $L^p(X)$ при $p > 1$.

Вначале напомним определение равномерной выпуклости. Банахово пространство B называется равномерно выпуклым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенств $\|u\| \leqslant 1$, $\|v\| \leqslant 1$ и $\|u - v\| \geqslant \varepsilon > 0$ следует

$$\|u + v\| \leqslant 2(1 - \delta(\varepsilon)). \tag{1.16}$$

Легко видеть, что при $p \geqslant 2$ из первого неравенства Кларксона, записанного в виде

$$\|f + g\|_p^p \leqslant 2^{p-1}\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right) - \|f - g\|_p^p,$$

при $\|f\|_p \leqslant 1$, $\|g\|_p \leqslant 1$, $\|f - g\|_p \geqslant \varepsilon > 0$ имеем

$$\|f + g\|_p \leqslant 2\left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}} = 2(1 - \delta_1(\varepsilon))$$

при $\delta_1(\varepsilon) = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}} > 0$, т. е. (1.16). Далее, при $p \leqslant 2$ из второго неравенства получаем при $\|f\|_p \leqslant 1$, $\|g\|_p \leqslant 1$, $\|f - g\|_p \geqslant \varepsilon > 0$

$$\|f + g\|_p \leqslant 2\left(1 - \frac{\varepsilon^q}{2^q}\right)^{\frac{1}{q}} = 2(1 - \delta_2(\varepsilon))$$

с $\delta_2(\varepsilon) = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^q}{2^q}\right)^{\frac{1}{q}} > 0$, т. е. (1.16).

§ 2. Нелинейный сжимающий оператор

Рассмотрим в области Ω с $\mu(\Omega) < +\infty$ интегральное уравнение вида

$$u(x) = u_0(x) + \lambda \int\limits_\Omega K(x, s)\frac{|u(s)|}{1 + |u(s)|}\, ds, \tag{2.1}$$

где $K(x,s)$ ограничена в $\Omega\times\Omega$ и измерима по s при всех $x\in\Omega$, $u_0(x)\in \in L^1(\Omega)$.

Существование и единственность его решения в $L^1(\Omega)$ «при малых» λ легко доказать, воспользовавшись принципом сжимающих отображений. Действительно, если

$$(Au)(x)\equiv u_0(x)+\lambda\int\limits_\Omega K(x,s)\frac{|u(s)|}{1+|u(s)|}\,ds,$$

то при $z_i(x)=(Au_i)(x)$, $i=1,2$, $K_0=\sup_{\Omega\times\Omega}|K(x,s)|$ имеем

$$\begin{aligned}\|z_1-z_2\|_1&=\int\limits_\Omega dx\left|\lambda\int\limits_\Omega K(x,s)\frac{|u_1(s)|}{1+|u_1(s)|}\,ds-\lambda\int\limits_\Omega K(x,s)\frac{|u_2(s)|}{1+|u_2(s)|}\,ds\right|=\\ &=|\lambda|\int\limits_\Omega dx\left|\int\limits_\Omega K(x,s)\left(\frac{|u_1(s)|}{1+|u_1(s)|}-\frac{|u_2(s)|}{1+|u_2(s)|}\right)ds\right|\leqslant\\ &\leqslant|\lambda|\int\limits_\Omega dx\int\limits_\Omega|K(x,s)|\left|\frac{|u_1(s)|}{1+|u_1(s)|}-\frac{|u_2(s)|}{1+|u_2(s)|}\right|ds\leqslant\\ &\leqslant|\lambda|K_0\int\limits_\Omega dx\int\limits_\Omega|u_1(s)-u_2(s)|\,ds=|\lambda|K_0\|u_1-u_2\|_1\mu(\Omega).\end{aligned}$$

Мы использовали здесь легко проверяемое непосредственно неравенство

$$\left|\frac{|a|}{1+|a|}-\frac{|b|}{1+|b|}\right|\leqslant|a-b|.$$

Очевидно, при

$$|\lambda|<\frac{1}{K_0\mu(\Omega)}$$

отображение A является сжимающим, что гарантирует существование и единственность решения $u(x)\in L^1(\Omega)$ уравнения (2.1) при каждом из указанных λ.

§ 3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Показать, что всякое гильбертово пространство является равномерно выпуклым.

Задача 2. Показать (на контрпримерах), что пространства $L^1(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$, $C(\Omega)$ не являются строго выпуклыми (и тем более равномерно выпуклыми).

Задача 3*. Пусть K — замкнутое выпуклое множество в равномерно выпуклом банаховом пространстве. Показать, что тогда функция $f(x)=\|x\|$ достигает своего минимума на K, и притом ровно в одной точке. Замечание. Вот, наряду с критерием сильной сходимости, ещё одно полезное свойство равномерно выпуклых пространств. Как мы теперь знаем, пространства Лебега $L^p(\Omega)$ с $1 < p < +\infty$ таковыми являются.