

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В.ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

А.Г. Свешников, И.Е. Могилевский

Пособие по курсу

Математические задачи теории дифракции



Москва 2012

Свешников А. Г., Могилевский И. Е.

Математические задачи теории дифракции / Учебное пособие.
М.: Физический факультет МГУ, 2010.

Пособие по курсу «Математические задачи теории дифракции» написано на основе специального курса лекций, который авторы в течение ряда последних лет читают на физическом факультете МГУ. В книге рассматривается применение методов математического моделирования к задачам распространения и дифракции установившихся колебаний в сплошных средах. Основное внимание уделено так называемому «резонансному» случаю, когда длина возбуждаемых волн имеет тот же порядок, что и характерные размеры неоднородностей.

Данный курс входит в учебный план кафедры математики физического факультета МГУ, но может представлять интерес и для более широкого круга студентов, аспирантов и научных работников, специализирующихся в области математической физики и ее приложений.

Рецензенты: д.ф.-м. н., профессор *А.С. Ильинский*,
д.ф.-м. н., профессор *Ю.А. Пирогов*

© Физический факультет МГУ
им. М.В. Ломоносова, 2010

© Свешников А.Г.,
Могилевский И.Е., 2010

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Глава 1. Математические модели теории дифракции (постановка и обоснование).	9
§ 1. Уравнения Максвелла	9
1.1. Установившиеся колебания (10). 1.2. Вектор Умова–Пойнтинга (12).	
§ 2. Потенциалы	13
2.1. Векторный и скалярный потенциалы (13). 2.2. Вектор Герца (15).	
§ 3. Функции Борнуса	17
3.1. Поля электрического и магнитного типов (17). 3.2. Представление решения однородной системы уравнений Максвелла в виде суперпозиции полей электрического и магнитного типа (20).	
§ 4. Дополнительные условия в задачах дифракции установившихся колебаний.	27
4.1. Граничные условия (27). 4.2. Условия на бесконечности (33). 4.3. Принцип предельной амплитуды (35). 4.4. Принцип предельного поглощения (36). 4.5. Условия на ребре (36).	
§ 5. Лемма Лоренца. Формулы Стрэттона–Чу.	37
5.1. Лемма Лоренца (37). 5.2. Следствия леммы Лоренца (40).	
§ 6. Теоремы единственности	42
6.1. Постановка задачи (42). 6.2. Лемма Реллиха (44). 6.3. Скалярная задача дифракции на металлическом теле (46). 6.4. Скалярная задача дифракции на прозрачном теле (47). 6.5. Электромагнитный аналог леммы Реллиха (48).	

§ 7. Разрешимость задач дифракции.	52
7.1. Скалярная задача с условиями сопряжения. Уравнение Липмана–Швингера (52).	
§ 8. Задачи дифракции на непроницаемых рассеивателях.	57
8.1. Задача Дирихле (59). 8.2. Задача Неймана (64).	
8.3. Третья краевая задача (67).	
Глава 2. Методы решения задач дифракции.	70
§ 1. Интегральные уравнения задач дифракции.	70
1.1. Дифракция на идеально проводящем теле (70).	
§ 2. Итерационные методы.	76
2.1. Метод простой итерации (77). 2.2. Метод минимальных невязок (80). 2.3. Диссипативность операторов теории дифракции (83). 2.4. Интегро-функциональные уравнения задач дифракции (88).	
§ 3. Метод дискретных источников	92
3.1. Скалярная задача (93). 3.2. Выбор системы базисных функций (95). 3.3. Диполи В.Д. Купрадзе (100). 3.4. Алгоритм численной реализации МДИ (103). 3.5. Дифракция на осесимметричном теле (104). 3.6. Проекционный метод определения амплитуд дискретных источников (108).	
§ 4. Метод антенных потенциалов	114
§ 5. Классические задачи теории дифракции.	117
5.1. Дифракция на сфере. Метод Г. Ватсона (118). 5.2. Дифракция на полуплоскости. Метод Винера–Хопфа (124).	
§ 6. Дифракция в неоднородной среде	133
6.1. Скалярная дифракция на теле в локально неоднородной среде. Парциальные условия излучения (133). 6.2. Энергетическое тождество (137). 6.3. Построение приближенного решения неполным методом Галеркина (139). 6.4. Задача электромагнитной теории дифракции в шаровом слое (147). 6.5. Общая задача электромагнитной дифракции на локальном теле в неоднородной среде (150).	
Глава 3. Направляющие системы	154
§ 1. Открытые направляющие системы.	154
1.1. Свободные электромагнитные колебания вне системы идеальных бесконечных цилиндрических проводников (154). 1.2. Типы волн открытого диэлектрического регулярного волновода (156). 1.3. Дисперсионное уравнение для импедансного бесконечного цилиндра (159).	
§ 2. Волноведущие системы	160

2.1. Типы волн регулярного волновода (161). 2.2. Строение нормальных волн регулярного волновода (163). 2.3. Векторный базис регулярного волновода (166). 2.4. Возбуждение регулярных волноводов (168). 2.5. Возбуждение нерегулярных волноводов (173). 2.6. Скачкообразные неоднородности нерегулярных волноводов (185). 2.7. Излучение из открытого конца волновода. Фазированные антенные решетки (188).

Список литературы 195

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математическая теория дифракции является обширным разделом математической физики, понимаемой как теория математических моделей физических процессов и явлений (см. «Математическая энциклопедия», т. 3). Задачи распространения и дифракции волновых процессов различной физической природы во многих случаях играют ключевую роль в понимании физической сущности изучаемых явлений и в оптике, и в акустике, и в радиофизике, и в гидроаэродинамике, и во многих других разделах современной физики, служат базой теоретических и прикладных исследований, возникающих при этом самых разнообразных проблем, включая задачи управления физическими процессами.

В настоящее время для решения этих проблем все большую роль играют методы математического моделирования, заключающиеся:

1. в последовательной формулировке математической модели изучаемого физического явления;
2. в строгом обосновании ее математической непротиворечивости (однозначная разрешимость, корректность и устойчивость к входным данным);
3. в выборе наиболее эффективных аналитических или численных методов ее решения;
4. в выяснении адекватности предложенной математической модели изучаемому физическому явлению путем сопоставления результатов вычислительных и реальных физических экспериментов;
5. в случае необходимости в дополнительных усложнениях первоначальной математической модели и повторении предыдущих этапов работы с окончательно выбранной моделью;
6. в проведении необходимых для решения исходной теоретической или прикладной физической задачи серии вычислений.

Все перечисленные этапы применения методов математического моделирования к задачам распространения и дифракции установившихся колебаний в сплошных средах различной физической природы и рассматриваются в данной книге. Основное

внимание уделено именно установившимся волновым процессам, когда длина возбуждаемых волн имеет тот же порядок, что и характерные размеры неоднородностей (так называемый «резонансный» случай).

Перейдем к более подробному изложению содержания книги, состоящей из трех глав и приложения.

Первая глава посвящена постановке и обоснованию математических моделей дифракции установившихся электромагнитных и акустических колебаний в сплошных средах различной структуры. Эти модели сводятся, в основном, к внешним краевым задачам для уравнений Максвелла и Гельмгольца. Рассматриваются различные типы граничных условий и условий излучения на бесконечности как в случае дифракции на локальных рассеивателях, так и в случае неограниченной области решения задачи (дифракция в слоистой среде, на полуплоскости).

Во второй главе рассмотрены математические методы построения аналитических и численных решений поставленных задач, включая методы интегральных уравнений, метод дискретных источников, неполный метод Галеркина, итерационные методы, в частности, «метод минимальных невязок» и ряд других специфических методов (метод Винера–Хопфа, метод Ватсона и другие).

Третья глава посвящена математическим моделям волнующих систем, как открытым направляющим системам (диэлектрические волноводы и световоды), так и радиоволноводам, включая нерегулярные волноводы с различного типа нерегулярностями (неоднородное заполнение, геометрическое возмущение боковой поверхности волновода, сочленение волноводов различного поперечного сечения и излучение из открытого конца волновода).

В приложение помещены оттиски ряда оригинальных статей авторов в ведущих изданиях по математической физике, в которых более подробно рассматриваются отдельные, представляющие значительный теоретический и практический интерес проблемы, кратко упомянутые в основном тексте.

Книга написана на основе курса лекций, который авторы в течение ряда последних лет читают на физическом факультете МГУ. Этот курс входит в учебный план кафедры математики физического факультета МГУ, но может представлять интерес и для более широкого круга студентов, аспирантов и научных работников, специализирующихся в области математической физики и ее приложений.

Методы исследования установившихся колебаний во многом определяются соотношением между характерными размерами (a)

неоднородностей среды и длиной (λ) распространяющихся в ней волн. В длинноволновом случае, $\lambda \gg a$, задача оказывается близкой к стационарной, и для ее решения можно пользоваться квазистационарным приближением. В коротковолновом случае, $\lambda \ll a$, возможно разложение решения исходной задачи по степеням малого параметра $\frac{\lambda}{a}$, что позволяет с успехом применять методы сингулярных возмущений. Наконец, в промежуточном случае, $\lambda \sim a$, при отсутствии малых параметров, наиболее эффективными оказываются прямые численные алгоритмы, в том числе и высокопроизводительные вычисления. Этот, так называемый резонансный случай, и является центральным в нашей книге.

Авторы выражают глубокую благодарность профессорам МГУ Александру Николаевичу Боголюбову, Анатолию Серафимовичу Ильинскому и Юрию Андреевичу Пирогову, а также доценту кафедры математики физического факультета Наталье Евгеньевне Шапкиной, взявших на себя труд внимательно ознакомиться с пособием и сделавших ряд ценных замечаний.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 09-01-00408а).

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ (ПОСТАНОВКА И ОБОСНОВАНИЕ).

§ 1. Уравнения Максвелла

Начнем с формулировки и обоснования основных математических моделей теории процессов колебаний в сплошных средах. Физическая природа этих колебаний весьма разнообразна и является предметом исследования ряда разделов современной физики. Одними из центральных являются процессы электромагнитных колебаний в различных средах. Для них основной математической моделью является известная из общих курсов электродинамики система уравнений Максвелла.

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}^{\text{CT}}) \quad (1.1.1)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1.2)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \quad (1.1.3)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho \quad (1.1.4)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{j} + \mathbf{j}^{\text{CT}}) = 0 \quad (1.1.5)$$

Обсуждение. Здесь система уравнений Максвелла записана в СГСЭ и использованы следующие обозначения: $\mathbf{E} = \mathbf{E}(M, t)$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(M, t)$ — напряженности электрического и магнитного полей; $\mathbf{D} = \mathbf{D}(M, t)$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(M, t)$ — векторы электрической и магнитной индукции; $\mathbf{j} = \mathbf{j}(M, t)$ — вектор плотности электрического тока; $\rho = \rho(M, t)$ — плотность электрического заряда. Плотность сторонних токов $\mathbf{j}^{\text{CT}} = \mathbf{j}^{\text{CT}}(M, t)$ считается заданной величиной, которая возбуждает электромагнитное поле.

Система уравнений (1.1.1)-(1.1.5) представляет собой систему из 5 уравнений относительно 6-ти неизвестных, 5 из которых векторные, одно скалярное. При этом не все уравнения независимые. Так, из уравнения (1.1.2) следует (1.1.3), а из (1.1.1) и

(1.1.5) следует (1.1.4). Таким образом, система (1.1.1)-(1.1.5) — недоопределена. Чтобы доопределить систему, вводятся дополнительные связи между неизвестными, описывающие материальные характеристики среды, в которой рассматривается изучаемый физический процесс. Эти связи могут быть различными в зависимости от свойств среды.

а) Локальные, линейные, однородные, изотропные среды

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},$$

где ε , μ — диэлектрическая и магнитная проницаемость, σ — проводимость среды.

б) Локальные, линейные, неоднородные, анизотропные среды

$$\mathbf{D} = \hat{\varepsilon}(M, t) \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \hat{\mu}(M, t) \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \hat{\sigma}(M, t) \mathbf{E},$$

где элементы тензоров $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$ зависят от пространственных и временных координат. Такие связи возникают при описании процессов распространения и дифракции волн в киральных, плазменных и оптически активных средах, в полупроводниках, ферритах и т.д.

в) Нелинейные среды, например, в задачах нелинейной оптики. В таких средах $\mathbf{D} = (\hat{\varepsilon} + \hat{\alpha}|E|^2) \mathbf{E}$ — кубическая нелинейность, $\hat{\alpha}$ — тензор нелинейности, то есть модуль вектора электрической индукции $\mathbf{D}(M, t)$ пропорционален кубу напряженности электрического поля $\mathbf{E}(M, t)$.

г) Нелокальные среды $\mathbf{D}(M, t) = A[\mathbf{E}(M, t)]$, где A — линейный или нелинейный оператор. Например, в случае временной дисперсии

$$\mathbf{D}(M, t) = \int_{-\infty}^t \hat{\varepsilon}(M, \tau - t) \mathbf{E}(M, \tau) d\tau.$$

При определенных условиях система уравнений Максвелла с соответствующими материальными уравнениями среды является полной и может быть использована в качестве математической модели изучаемого физического процесса.

1.1. Установившиеся колебания. Во многих случаях изучаемый физический процесс носит характер установившихся колебаний, при которых временная зависимость искомым неизвестных имеет периодический характер заданной частоты ω . Тогда для искомым неизвестных в уравнениях Максвелла, являющихся

ся действительными функциями пространственных координат и времени, можно использовать представление

$$\vec{\mathcal{E}}(M, t) = \text{Re} \{ \mathbf{E}(M) e^{-i\omega t} \},$$

и аналогичные представления для остальных неизвестных. В этом представлении зависящий только от пространственных переменных вектор $\mathbf{E}(M)$ носит название комплексной амплитуды вектора напряженности искомого электрического поля. В случае линейной среды материальные характеристики которой не зависят от времени, для комплексных амплитуд $\mathbf{E}(M)$ и $\mathbf{H}(M)$ получим уравнения

$$\text{rot} \mathbf{H} = -\frac{i\omega}{c} \varepsilon \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} (\sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}^{\text{CT}}), \quad (1.1.6)$$

$$\text{rot} \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c} \mu \mathbf{H}. \quad (1.1.7)$$

Используя выражение волнового числа $k_0 = \frac{\omega}{c}$ и вводя комплексную диэлектрическую проницаемость

$$\varepsilon' = \varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}, \quad (1.1.8)$$

систему уравнений Максвелла для комплексных амплитуд можно представить как

$$\text{rot} \mathbf{H} = -ik_0 \varepsilon' \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{\text{CT}}, \quad (1.1.9)$$

$$\text{rot} \mathbf{E} = ik_0 \mu \mathbf{H}, \quad (1.1.10)$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1.1.11)$$

$$\text{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (1.1.12)$$

$$-i\omega\rho + \text{div} (\mathbf{j} + \mathbf{j}^{\text{CT}}) = 0. \quad (1.1.13)$$

Замечание 1.1.1 В случае однородной среды, характеристики которой ε и μ имеют постоянные, возможно, комплексные значения, уравнения (1.1.9) и (1.1.10) можно записать в виде

$$\text{rot} \tilde{\mathbf{H}} = -i\tilde{k} \tilde{\mathbf{E}} + \frac{4\pi}{c} \tilde{\mathbf{j}}^{\text{CT}}, \quad (1.1.14)$$

$$\text{rot} \tilde{\mathbf{E}} = i\tilde{k} \mu \tilde{\mathbf{H}}, \quad (1.1.15)$$

где $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{H}}$ и $\tilde{\mathbf{j}}^{\text{CT}}$ — так называемые приведенные комплексные амплитуды электромагнитного поля и тока

$$\tilde{\mathbf{E}} = \sqrt{\varepsilon'} \mathbf{E}, \quad \tilde{\mathbf{H}} = \sqrt{\mu'} \mathbf{H}, \quad \tilde{\mathbf{j}}^{\text{CT}} = \sqrt{\mu} \mathbf{j}^{\text{CT}},$$

а $\tilde{k} = \sqrt{\varepsilon' \mu} k_0$ — приведенное волновое число. В дальнейшем мы всегда будем полагать, что уравнения установившихся полей записаны для приведенных комплексных амплитуд, сохраняя для них прежние обозначения (\mathbf{E} , \mathbf{H} , k).

1.2. Вектор Умова–Пойнтинга. Важной физической характеристикой переноса энергии электромагнитным полем является вектор Умова–Пойнтинга, определяющий временную и пространственную плотность потока энергии $W_n(M, t)$ в заданном направлении единичного вектора \mathbf{n} .

В случае установившихся колебаний с периодом T

$$W_n = \frac{1}{T} \int_0^T \left([\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}] \cdot \mathbf{n} \right) d\tau. \quad (1.1.16)$$

Используя выражения для действительных векторов $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{H}}$ через комплексные амплитуды, получим

$$W_n = \frac{1}{2} \text{Re} ([\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] \cdot \mathbf{n}). \quad (1.1.17)$$

Теорема Пойнтинга. Данная теорема является математическим выражением закона сохранения энергии.

Пусть установившееся электромагнитное поле создается в замкнутой пространственной области D с гладкой границей $S = \partial D$ заданным током $\mathbf{j}(M)$, $M \in D$. Из уравнений Максвелла (1.1.9-1.1.13) для комплексных амплитуд \mathbf{E} и \mathbf{H} и их комплексно сопряженных выражений имеем

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{H} &= -ik\varepsilon' \mathbf{E} + \mathbf{j}, & \text{rot} \mathbf{H}^* &= ik(\varepsilon')^* \mathbf{E}^* + \mathbf{j}^*, \\ \text{rot} \mathbf{E} &= ik\mu \mathbf{H}, & \text{rot} \mathbf{E}^* &= -ik\mu^* \mathbf{H}^*, \quad k = \frac{\omega}{c}. \end{aligned}$$

Используя формулу векторного анализа

$$\text{div} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] = (\mathbf{H}^* \cdot \text{rot} \mathbf{E}) - (\mathbf{E} \cdot \text{rot} \mathbf{H}^*)$$

и формулу Остроградского–Гаусса, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_S ([\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] \cdot \mathbf{n}) d\sigma &= \\ &= -k \int_D \{ \operatorname{Im} \varepsilon' |\mathbf{E}|^2 + \operatorname{Im} \mu |\mathbf{H}|^2 \} dV - \operatorname{Re} \int_D (\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}^*) dV. \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

Здесь мы для сокращения записи в выражении возбуждающего тока в (1.1.14) опустим множитель $\frac{4\pi}{c}$, считая, что он включен в вектор \mathbf{j} . Этой формы записи мы будем придерживаться и в дальнейшем. Воспользовавшись выражением полного потока энергии

$$W = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] d\sigma \quad (1.1.19)$$

через границу S области D , окончательно получим

$$2W + k \int_D \{ \operatorname{Im} \varepsilon' |\mathbf{E}|^2 + \operatorname{Im} \mu |\mathbf{H}|^2 \} dV = -\operatorname{Re} \int_D (\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}^*) dV. \quad (1.1.20)$$

Второе слагаемое в левой части (1.1.20) характеризует диссипативные потери в среде за счет отличных от нуля ее проводимости σ и магнитной вязкости $\operatorname{Im} \mu$, а правая часть определяется мощностью внешних источников \mathbf{j} , создающих данное электромагнитное поле.

§ 2. Потенциалы

Как уже было сказано, полная система уравнений Максвелла содержит пять векторных и одну скалярную неизвестную величину, что сильно затрудняет ее прямое исследование. Естественно желание получить эквивалентную систему уравнений для меньшего числа неизвестных. Это обычно достигается введением вспомогательных функций, называемых потенциалами, через которые выражаются искомые неизвестные, что может быть осуществлено различными способами.

2.1. Векторный и скалярный потенциалы. Рассмотрим случай линейной однородной среды ($\varepsilon \equiv 1$, $\mu \equiv 1$), проводимость которой равна нулю ($\sigma \equiv 0$), и введем векторную функцию

$\mathbf{A}(M, t)$ и скалярную $\varphi(M, t)$, через которые неизвестные векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} выражаются соотношениями

$$\mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A}, \quad (1.2.1)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad} \varphi. \quad (1.2.2)$$

Вектор \mathbf{A} носит название векторного, а φ — скалярного потенциалов. Добавим дополнительное соотношение для потенциалов \mathbf{A} и φ

$$\text{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (1.2.3)$$

носящее название *условия градиентной инвариантности*.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что если \mathbf{A} и φ являются соответственно решениями уравнений

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mathbf{j}, \quad (1.2.4)$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \rho, \quad (1.2.5)$$

где \mathbf{j} и ρ связаны уравнением сохранения заряда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{c}{4\pi} \text{div} \mathbf{j} = 0, \quad (1.2.6)$$

то выраженные через них по формулам (1.2.1) и (1.2.2) векторы напряженностей \mathbf{E} и \mathbf{H} электрического и магнитного поля удовлетворяют системе уравнений Максвелла в данной однородной среде.

Аналогично можно рассмотреть и случай пространственно неоднородной среды с материальными характеристиками $\varepsilon(M)$, $\mu(M)$, $\sigma(M)$. При этом выражения для напряженностей \mathbf{E} и \mathbf{H} через соответственно векторный \mathbf{A} и скалярный φ потенциалы оказывается несколько более сложным, чем (1.2.1) и (1.2.2).

Замечание 1.2.1 Выбор потенциалов \mathbf{A} и φ не является однозначным. Как легко проверить, уравнения для потенциалов (1.2.4), (1.2.5) и выражения (1.2.1), (1.2.2) не изменятся, если заменить потенциалы \mathbf{A} и φ на

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad} \psi, \quad (1.2.7)$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (1.2.8)$$

где ψ — произвольная достаточно гладкая функция.

Замечание 1.2.2 При $\rho = 0$ можно положить $\varphi \equiv 0$ и ограничиться одним потенциалом \mathbf{A} или антипотенциалом \mathbf{A}^* , через который векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} выражаются по формулам

$$\mathbf{E} = \text{rot} \mathbf{A}^*, \quad (1.2.9)$$

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^*. \quad (1.2.10)$$

При этом вектор \mathbf{A}^* удовлетворяет уравнению

$$\vec{\nabla}^2 \mathbf{A}^* - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}^*}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}^*}{\partial t}, \quad (1.2.11)$$

причем в силу $\rho = 0$ из (1.2.6) следует

$$\text{div} \mathbf{j}^* = 0. \quad (1.2.12)$$

Замечание 1.2.3 В случае установившихся колебаний из (1.2.1), (1.2.2) для комплексных амплитуд потенциалов и напряженностей электромагнитного поля получим

$$\mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A}, \quad (1.2.13)$$

$$\mathbf{E} = ik\mathbf{A} - \text{grad} \varphi, \quad (1.2.14)$$

$$\left(\vec{\nabla}^2 + k^2 \right) \mathbf{A} = -\mathbf{j}, \quad (1.2.15)$$

$$(\Delta + k^2) \varphi = -4\pi\rho. \quad (1.2.16)$$

2.2. Вектор Герца. Во многих случаях для построения математической модели процесса колебаний эффективным оказывается потенциал $\mathbf{\Pi}$, носящий название вектора Герца и связанный с векторным потенциалом \mathbf{A} соотношением

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t}. \quad (1.2.17)$$

Из соотношения градиентной инвариантности (1.2.3) следует, что

$$\text{div} \mathbf{\Pi} + \varphi = 0, \quad (1.2.18)$$

а из (1.2.1), (1.2.2) получаем выражения для векторов напряженностей электрического и магнитного поля через вектор Герца

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t}, \quad (1.2.19)$$

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{\Pi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2}. \quad (1.2.20)$$

Введем вектор поляризации \mathbf{P}_0 , положив

$$\mathbf{j} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{P}_0}{\partial t}. \quad (1.2.21)$$

Тогда из уравнения сохранения заряда (1.2.6) получим

$$\rho + \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{P}_0 = 0,$$

что дает

$$\operatorname{div} \mathbf{P}_0 = -4\pi\rho. \quad (1.2.22)$$

Непосредственной проверкой можно установить, что если вектор Герца $\mathbf{\Pi}(M, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\vec{\nabla}^2 \mathbf{\Pi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2} = -\mathbf{P}_0, \quad (1.2.23)$$

то выраженные через него по формулам (1.2.19), (1.2.20) векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} удовлетворяют исходной системе уравнений Максвелла. Например, используя формулы векторного анализа, можно записать следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \operatorname{div} \left\{ \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{\Pi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2} \right\} = \\ &= \operatorname{div} \left\{ \left(\operatorname{rot} \operatorname{rot} + \vec{\nabla}^2 \right) \mathbf{\Pi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2} \right\} = \\ &= \operatorname{div} \left\{ \vec{\nabla}^2 \mathbf{\Pi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2} \right\} = -\operatorname{div} \mathbf{P}_0 = 4\pi\rho. \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

Аналогично проверяется и выполнение остальных уравнений системы Максвелла.

Замечание 1.2.4 В случае установившихся колебаний выражения для комплексных амплитуд полей \mathbf{E} и \mathbf{H} через комплексную амплитуду вектора Герца $\mathbf{\Pi}$ принимают вид

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= -ik \operatorname{rot} \mathbf{\Pi}, \\ \mathbf{E} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{\Pi} + k^2 \mathbf{\Pi},\end{aligned}\quad (1.2.25)$$

а уравнение (1.2.23) для вектора Герца переходит в уравнение

$$\left(\vec{\nabla}^2 + k^2\right) \mathbf{\Pi} = -\frac{i}{k} \mathbf{j}.\quad (1.2.26)$$

Замечание 1.2.5 Введенный вектор Герца, через который напряженности \mathbf{E} и \mathbf{H} выражаются по формулам (1.2.25), носит название электрического вектора Герца и обозначается $\mathbf{\Pi}^{\mathcal{E}}$. В случае $\rho = 0$ аналогично введению антипотенциала \mathbf{A}^* можно ввести магнитный вектор Герца $\mathbf{\Pi}^{\mathcal{M}}$, через который поля $\mathbf{E}^{\mathcal{M}}$ и $\mathbf{H}^{\mathcal{M}}$ выражаются соотношениями

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{\mathcal{M}} &= ik \operatorname{rot} \mathbf{\Pi}^{\mathcal{M}}, \\ \mathbf{H}^{\mathcal{M}} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{\Pi}^{\mathcal{M}} + k^2 \mathbf{\Pi}^{\mathcal{M}}.\end{aligned}\quad (1.2.27)$$

При отсутствии магнитных зарядов вектор $\mathbf{\Pi}^{\mathcal{M}}$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\nabla^2 + k^2\right) \mathbf{\Pi}^{\mathcal{M}} = 0,\quad (1.2.28)$$

что позволяет переписать выражения (1.2.27) в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{\mathcal{M}} &= ik \operatorname{rot} \mathbf{\Pi}^{\mathcal{M}}, \\ \mathbf{H}^{\mathcal{M}} &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{\Pi}^{\mathcal{M}}.\end{aligned}\quad (1.2.29)$$

§ 3. Функции Борнгиса

3.1. Поля электрического и магнитного типов. В нашем стремлении уменьшить количество неизвестных в системе уравнений Максвелла можно продвинуться и дальше, доведя при определенных условиях их число до двух скалярных функций.

До сих пор рассматриваемые методы введения электромагнитных потенциалов никак не были связаны с пространственным видом области D , в которой ищется решение системы уравнений Максвелла. Теперь введем некоторые дополнительные условия.

Пусть область D такова, что в ней можно ввести ортогональную криволинейную систему координат (x_1, x_2, x_3) , однозначно связанную с декартовой прямоугольной системой координат (x, y, z) :

$$x = x(x_1, x_2, x_3); \quad y = y(x_1, x_2, x_3); \quad z = z(x_1, x_2, x_3).$$

Подчиним коэффициенты Ламе h_1, h_2, h_3 этой системы

$$h_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.3.1)$$

условиям

$$h_3 \equiv 1; \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1}{h_2}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_2}{h_1}\right) \equiv 0. \quad (1.3.2)$$

Второе условие в (1.3.2) означает, что отношение коэффициентов h_1 и h_2 не зависит от криволинейной координаты x_3 .

Покажем, что любое решение однородной системы уравнений Максвелла, в котором $H_3 \equiv 0$, может быть выражено через одну скалярную функцию $u(x_1, x_2, x_3)$. Для этого запишем уравнения

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik\mathbf{E}, \quad (1.3.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mathbf{H} \quad (1.3.4)$$

однородной системы уравнений Максвелла в новых координатах (x_1, x_2, x_3) , используя известное выражение вектора $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ в данной криволинейной системе координат, удовлетворяющей условию (1.3.2):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{A} = & \frac{1}{h_2} \left\{ \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_3} (h_2 A_2) \right\} \mathbf{e}_1 + \\ & + \frac{1}{h_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 A_1) - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right\} \mathbf{e}_2 + \\ & + \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 A_1) \right\} \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — координатные орты системы (x_1, x_2, x_3) . Учитывая, что $H_3 \equiv 0$, получим

$$-\frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_3} (h_2 H_2) = -ikE_1, \quad (1.3.6)$$

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 H_1) = -ikE_2, \quad (1.3.7)$$

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 H_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 H_1) \right\} = -ikE_3, \quad (1.3.8)$$

$$\frac{1}{h_2} \left\{ \frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_3} (h_2 E_2) \right\} = ikH_1, \quad (1.3.9)$$

$$\frac{1}{h_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 E_1) - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} \right\} = ikH_2, \quad (1.3.10)$$

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 E_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 E_1) \right\} = 0. \quad (1.3.11)$$

Легко видеть, что уравнение (1.3.11) будет выполнено, если положить

$$E_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3}, \quad E_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad (1.3.12)$$

где $u(x_1, x_2, x_3)$ трижды непрерывно дифференцируемая скалярная функция. Из (1.3.6) и (1.3.7), используя (1.3.12) и условие $\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_2}{h_1} \right) = 0$, получим

$$H_1 = -\frac{ik}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad H_2 = \frac{ik}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}. \quad (1.3.13)$$

Остается выразить компоненту E_3 через скалярную функцию $u(x_1, x_2, x_3)$. В силу (1.3.8) и (1.3.13) получим

$$E_3 = -\frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right\}. \quad (1.3.14)$$

Итак, все компоненты полей \mathbf{E} и \mathbf{H} выражены через одну скалярную функцию u . При этом $H_3 \equiv 0$ и удовлетворяются уравнения (1.3.11), (1.3.6), (1.3.7) и (1.3.8).

Возникает вопрос: какому дополнительному условию надо подчинить функцию $u(x_1, x_2, x_3)$, чтобы одновременно удовлетворялись оставшиеся два уравнения (1.3.9) и (1.3.10) системы уравнений Максвелла? Непосредственной подстановкой выражений (1.3.12), (1.3.13), (1.3.14) в эти уравнения легко убедиться, что они одновременно выполняются, если функция $u(x_1, x_2, x_3)$ является решением уравнения

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right\} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + k^2 u = 0. \quad (1.3.15)$$

Такую функцию называют *электрической функцией Борнгиса* и соответственно уравнение (1.3.15) — *уравнением Борнгиса*. Название функции связано с тем, что она получена при условии $H_3 \equiv 0$, а компонента E_3 вектора напряженности \mathbf{E} может быть отлична от нуля. Полученное с помощью электрической функции Борнгиса электромагнитное поле называют *полем электрического типа*. Из формул (1.3.12)-(1.3.14) вытекает следующее представление поля электрического типа через электрическую функцию Борнгиса:

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= -ik \operatorname{rot}(\mathbf{e}_3 u), \\ \mathbf{E} &= \operatorname{rot} \operatorname{rot}(\mathbf{e}_3 u).\end{aligned}\tag{1.3.16}$$

Совершенно аналогичным образом может быть рассмотрен случай, когда $E_3 \equiv 0$, а все остальные компоненты электромагнитного поля выражаются через *магнитную функцию Борнгиса* $v(x_1, x_2, x_3)$, удовлетворяющую тому же уравнению (1.3.15). Эти выражения аналогичны выражениям (1.3.12), (1.3.13), (1.3.14), в которых надо заменить вектор \mathbf{H} ($H_3 \equiv 0$) на вектор \mathbf{E} ($E_3 \equiv 0$). Данное электромагнитное поле называется *полем магнитного типа*. Представление поля магнитного типа через магнитную функцию Борнгиса имеет вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= ik \operatorname{rot}(\mathbf{e}_3 v), \\ \mathbf{H} &= \operatorname{rot} \operatorname{rot}(\mathbf{e}_3 v).\end{aligned}\tag{1.3.17}$$

3.2. Представление решения однородной системы уравнений Максвелла в виде суперпозиции полей электрического и магнитного типа. Введем дополнительное условие на геометрию области D . Пусть в ней можно ввести такую криволинейную систему координат (x_1, x_2, x_3) , в которой область D представляет собой топологическое произведение двумерной области $S_{x_3}(x_1, x_2)$ на координатной поверхности $x_3 = \text{Const}$ и отрезка $\bar{x}_3 \leq x_3 \leq \bar{\bar{x}}_3$ координатной линии x_3 :

$$D = \{S_{x_3}(x_1, x_2) \times [\bar{x}_3, \bar{\bar{x}}_3]\}.\tag{1.3.18}$$

Пусть при этом коэффициенты Ламе данной системы координат удовлетворяют в области D соотношениям:

$$\begin{aligned}h_3 &\equiv 1, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1}{h_2} \right) = 0; \\ h_1 \cdot h_2 &= f(x_3) \psi(x_1, x_2),\end{aligned}\tag{1.3.19}$$

где $f(x_3)$ и $\psi(x_1, x_2)$ достаточно гладкие функции. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 1.3.1 Если в области D выполнены условия (1.3.18), (1.3.19), то любое решение $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ однородной системы уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik\mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mathbf{H} \end{cases} \quad (1.3.20)$$

представимо в виде суперпозиции полей электрического $\{\mathbf{E}^\ominus, \mathbf{H}^\ominus\}$, ($H_3^\ominus \equiv 0$) и магнитного $\{\mathbf{E}^\ominus, \mathbf{H}^\ominus\}$, ($E_3^\ominus \equiv 0$) типов.

Предварительно заметим, что при введенных выше условиях существуют электрическая $u(x_1, x_2, x_3)$ и магнитная $v(x_1, x_2, x_3)$ функции Боргниса, через которые выражаются поля $\{\mathbf{E}^\ominus, \mathbf{H}^\ominus\}$ и $\{\mathbf{E}^\ominus, \mathbf{H}^\ominus\}$, являющиеся решениями однородной системы (1.3.20). При этом в силу уравнений Боргниса для $u(x_1, x_2, x_3)$ и $v(x_1, x_2, x_3)$ и представлений через них компонент E_3^\ominus и H_3^\ominus имеют место выражения

$$E_3^\ominus = \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + k^2 u, \quad H_3^\ominus = \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} + k^2 v. \quad (1.3.21)$$

Из (1.3.20) следует, что вектора \mathbf{E} и \mathbf{H} удовлетворяют в D уравнениям

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} - k^2 \mathbf{H} = 0. \quad (1.3.22)$$

Прямое вычисление с использованием условий (1.3.19) и уравнения $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ позволяет получить для компоненты E_3 вектора \mathbf{E} уравнение

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial E_3}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial E_3}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} (h_1 h_2 E_3) \right\} + k^2 E_3 = 0, \quad (1.3.23)$$

которое, вводя обозначение

$$L_{x_1 x_2} = \frac{1}{\psi(x_1, x_2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right\}, \quad (1.3.24)$$

можно переписать в виде

$$L_{x_1 x_2} [E_3] + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + k^2 \right) [f(x_3) E_3] = 0. \quad (1.3.25)$$

Заметим, что уравнение для функции Боргниса теперь можно переписать в виде

$$L_{x_1x_2}[u] + f(x_3) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + k^2 \right) [u] = 0. \quad (1.3.26)$$

После этих предварительных замечаний можно перейти к доказательству сформулированной теоремы.

Доказательство. По исходной функции $E_3(x_1, x_2, x_3)$ построим функцию $u(x_1, x_2, x_3)$ как решение в области $S_{x_3}(x_1, x_2)$ уравнения

$$\begin{aligned} L_{x_1x_2}[u] &= -f(x_3) E_3(x_1, x_2, x_3), \\ (x_1, x_2) &\in S_{x_3}, \quad x_3 \in [\bar{x}_3, \bar{\bar{x}}_3]. \end{aligned} \quad (1.3.27)$$

Заметим, что оператор $L_{x_1x_2}$ зависит только от переменных x_1, x_2 , а переменная x_3 в уравнении (1.3.27) играет роль параметра. Решение $u(x_1, x_2, x_3)$ (1.3.27) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, x_3) &= \int_{S_{x_3}} g_2(x_1 - \xi, x_2 - \eta) f(x_3) E_3(\xi, \eta, x_3) d\sigma + \\ &+ \chi(x_1, x_2, x_3), \end{aligned} \quad (1.3.28)$$

где $d\sigma = \psi(\xi, \eta) d\xi d\eta$, g_2 — фундаментальное решение оператора $L_{x_1x_2}$, то есть решение уравнения

$$L_{x_1x_2}[g_2] = -\delta(x_1 - \xi, x_2 - \eta), \quad (1.3.29)$$

$\chi(x_1, x_2, x_3)$ — произвольное решение однородного уравнения (1.3.27), то есть

$$L_{x_1x_2}[\chi] = 0, \quad (1.3.30)$$

зависящее от параметра x_3 .

Покажем, что построенная таким образом функция $u(x_1, x_2, x_3)$, определяемая (1.3.28), удовлетворяет в области D уравнению Боргниса (1.3.26), и заданная функция $E_3(x_1, x_2, x_3)$ выражается через нее формулой (1.3.14). Для этого применим к функции (1.3.28) оператор $\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + k^2 \right)$, который при достаточной

гладкости $f(x_3)E_3(x_1, x_2, x_3)$ и границы ∂S_{x_3} области S_{x_3} приводит к выражению

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + k^2\right)[u] &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + k^2\right)[\chi] + \\ &+ \int_{S_{x_3}} g_2(x_1 - \xi, x_2 - \eta) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + k^2\right)[f(x_3)E_3(\xi, \eta, x_3)] d\sigma + \\ &+ \Psi(x_1, x_2, x_3), \end{aligned} \quad (1.3.31)$$

в котором слагаемое $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ учитывает зависимость области интегрирования S_{x_3} от параметра x_3 . Это выражение в силу уравнения (1.3.25) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + k^2\right)[u] &= \\ &= - \int_{S_{x_3}} g_2 L_{\xi\eta}[E_3] d\sigma + \Psi(x_1, x_2, x_3) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + k^2\right)[\chi]. \end{aligned} \quad (1.3.32)$$

Преобразуя интеграл с помощью аналогов формул Грина, получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + k^2\right)[u] &= - \int_{S_{x_3}} L_{\xi\eta}[g_2] E_3(\xi, \eta, x_3) d\sigma + \\ &+ \int_{\partial S_{x_3}} F\{g_2(x_1 - \xi, x_2 - \eta), E_3(\xi, \eta, x_3)\} ds + \\ &+ \Psi(x_1, x_2, x_3) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + k^2\right)[\chi]. \end{aligned} \quad (1.3.33)$$

Функция $F\{g_2, E_3\}$ в контурном интеграле по ∂S_{x_3} выражается через функции $g_2(x_1 - \xi, x_2 - \eta)$, $E_3(\xi, \eta, x_3)$ и их производные по переменным x_1 и x_2 на контуре ∂S_{x_3} и зависит от переменной x_3 как от параметра, а функция $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ учитывает изменение области S_{x_3} при дифференцировании по x_3 . Обозначим сумму этого контурного интеграла и функции $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ через $\Phi_{x_1 x_2}(x_3)$:

$$\Phi_{x_1 x_2}(x_3) = \int_{\partial S_{x_3}} F\{g_2(x_1 - \xi, x_2 - \eta), E_3(\xi, \eta, x_3)\} ds + \Psi(x_1, x_2, x_3).$$

Определяя функцию $\chi(x_1, x_2, x_3)$ как решение уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + k^2\right) [\chi] = -\Phi_{x_1 x_2}(x_3), \quad \bar{x}_3 \leq x_3 \leq \bar{\bar{x}}_3, \quad (1.3.34)$$

получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + k^2\right) [u] &= \int_{S_{x_3}} \delta(x_1 - \xi, x_2 - \eta) E_3(\xi, \eta, x_3) d\sigma = \\ &= E_3(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \quad (1.3.35)$$

Соотношение (1.3.35) совместно с уравнением (1.3.27) окончательно дает

$$L_{x_1 x_2} [u] + f(x_3) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + k^2\right) [u] = 0, \quad (1.3.36)$$

что совпадает с уравнением Боргниса для функции $u(x_1, x_2, x_3)$.

Итак, по заданной функции $E_3(x_1, x_2, x_3)$ может быть конструктивно построена электрическая функция Боргниса, через которую по формулам (1.3.12), (1.3.13), (1.3.14) в свою очередь строится поле электрического типа $\{\mathbf{E}^\ominus, \mathbf{H}^\ominus\}$, причем $E_3^\ominus = E_3$ и $H_3^\ominus \equiv 0$.

Аналогично по заданной компоненте $H_3(x_1, x_2, x_3)$ строится поле магнитного типа $E_3^M \equiv 0$, $H_3^M = H_3$.

Теперь рассмотрим поле

$$\{\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}\} = \{\mathbf{E}, \mathbf{H}\} - \{\mathbf{E}^\ominus, \mathbf{H}^\ominus\} - \{\mathbf{E}^M, \mathbf{H}^M\}, \quad (1.3.37)$$

где первое слагаемое в правой части — заданное поле, а два оставшихся слагаемых — поля электрического и магнитного типа, построенные по нему с помощью приведенного выше алгоритма. Очевидно, для поля $\{\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}\}$ обе компоненты \tilde{E}_3 и \tilde{H}_3 равны нулю. Поэтому (1.3.37) можно записать в виде

$$\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\} = \{\mathbf{E}^\ominus + \tilde{\mathbf{E}}, \mathbf{H}^\ominus + \tilde{\mathbf{H}}\} + \{\mathbf{E}^M, \mathbf{H}^M\}, \quad (1.3.38)$$

причем $(\mathbf{E}^\ominus + \tilde{\mathbf{E}})_3 = E_3$, $(\mathbf{H}^\ominus + \tilde{\mathbf{H}})_3 \equiv 0$, $E_3^M \equiv 0$, $H_3^M = H_3$, что и доказывает утверждение теоремы.

Замечание 1.3.1 Сравнивая выражения компонент векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} через введенные ранее векторы Герца $\mathbf{\Pi}^{\mathfrak{A}}$ и $\mathbf{\Pi}^{\mathfrak{M}}$ (1.2.27) и (1.2.29) с соответствующими представлениями этих компонент через функции Боргниса $u(x_1, x_2, x_3)$ (1.3.16) и (1.3.17), $v(x_1, x_2, x_3)$, можно видеть, что функции Боргниса в введенных криволинейных координатах являются единственными компонентами векторов Герца, отличными от нуля:

$$\mathbf{\Pi}^{\mathfrak{A}} = (0, 0, \Pi^{\mathfrak{A}}) = (0, 0, u),$$

$$\mathbf{\Pi}^{\mathfrak{M}} = (0, 0, \Pi^{\mathfrak{M}}) = (0, 0, v).$$

Замечание 1.3.2 Уравнение Боргниса при дополнительном условии $\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1 h_2) = 0$ можно привести к уравнению Гельмгольца с переменным коэффициентом $k^2(x_1, x_2, x_3)$.

Замечание 1.3.3 Пусть область D представляет собой область вне сферы Σ_{r_0} радиуса r_0 . Обозначим сферические координаты в этой области

$$x_1 = \theta, \quad x_2 = \varphi, \quad x_3 = r.$$

Тогда коэффициенты Ламе имеют вид:

$$h_1 = r, \quad h_2 = r \sin \theta, \quad h_3 = 1$$

и удовлетворяют условиям существования функций Боргниса, которые являются решением уравнения

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right\} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + k^2 u = 0. \quad (1.3.39)$$

Уравнение (1.3.39) отличается от уравнения Гельмгольца в сферической системе координат. Однако, если сделать замену неизвестной функции

$$u(\theta, \varphi, r) = rU(\theta, \varphi, r), \quad (1.3.40)$$

то для функции U получим уравнение Гельмгольца

$$\frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right\} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rU) + k^2 rU = 0, \quad (1.3.41)$$

которое можно переписать в стандартном виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rU) + \frac{\Delta_{\theta, \varphi} U}{r^2} + k^2 U = 0 \quad (1.3.42)$$

или

$$\Delta U + k^2 U = 0.$$

Функция U носит название электрического потенциала Дебая, соответствующий ей электрический вектор Герца $\Pi^{\mathcal{E}}$ имеет вид

$$\Pi^{\mathcal{E}}(\theta, \varphi, r) = (0, 0, rU). \quad (1.3.43)$$

Аналогично вводится магнитный потенциал Дебая V , связанный с магнитным вектором Герца соотношением

$$\Pi^{\mathcal{M}}(\theta, \varphi, r) = (0, 0, rV). \quad (1.3.44)$$

Замечание 1.3.4 Отметим в заключении, что в рассматриваемом сферическом слое $r_0 < r < \infty$ не может существовать нетривиальных решений однородной системы уравнений Максвелла с $E_r \equiv H_r \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем это утверждение от противного, предполагая, что такое нетривиальное решение существует. Тогда из условия $H_r \equiv 0$ и уравнений Максвелла получим

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_{\varphi}) - \frac{\partial E_{\theta}}{\partial \varphi} = 0, \quad (1.3.45)$$

а из условий $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ и $E_r \equiv 0$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_{\theta}) + \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial \varphi} = 0, \quad (1.3.46)$$

причем хотя бы $E_{\varphi} \neq 0$ или $E_{\theta} \neq 0$. Построим вспомогательную функцию $w(\theta, \varphi)$ по ее полному дифференциалу, полагая

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = E_{\theta} \text{ и } \frac{\partial w}{\partial \varphi} = \sin \theta E_{\varphi}. \quad (1.3.47)$$

Тогда из (1.3.45) и (1.3.46) следует

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (1.3.48)$$

то есть

$$\Delta_{\theta, \varphi} w = 0. \quad (1.3.49)$$

Уравнение (1.3.49) при условиях периодичности по φ и ограниченности w при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ имеет нетривиальное решение, если спектральная задача для уравнения Лапласа на сфере

$$\Delta_{\theta, \varphi} w + \lambda_0 w = 0 \quad (1.3.50)$$

имеет нетривиальное решение при $\lambda_0 = 0$. Но, как известно, такое решение w_0 единственно и

$$w_0 = Const,$$

откуда из (1.3.47) следует $E_\theta \equiv E_\varphi \equiv 0$, то есть $\mathbf{E} \equiv 0$, а в силу уравнений Максвелла и $\mathbf{H} \equiv 0$. Утверждение доказано.

§ 4. Дополнительные условия в задачах дифракции установившихся колебаний

4.1. Граничные условия. Система уравнений Максвелла для случая установившихся колебаний имеет непрерывные решения $\mathbf{E}(M)$ и $\mathbf{H}(M)$ в той подобласти D' области задания D данной системы, где ее коэффициенты, определяемые материальными характеристиками среды $\varepsilon(M)$, $\mu(M)$ и $\sigma(M)$, также являются непрерывными функциями. Если на границе S подобласти D' ($S = \partial D'$) коэффициенты системы Максвелла разрывны, то в точках этой границы уравнения Максвелла не выполняются, и должны быть заменены дополнительными условиями сопряжения на поверхности S разрыва материальных характеристик сред D'_1 и D'_2 с общей границей S . Как известно из общего курса электродинамики, эти условия сопряжения имеют вид

$$[\mathbf{E}_\tau]_S = 0, \quad [\mathbf{H}_\tau]_S = \mathbf{j}^{\text{пов}}, \quad (1.4.1)$$

$$[\mu H_n]_S = 0, \quad [\varepsilon E_n]_S = \rho^{\text{пов}}, \quad (1.4.2)$$

где символ $[\mathbf{a}_\tau]_S = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$ обозначает разрыв касательных \mathbf{a}_τ и нормальных a_n компонент вектора \mathbf{a} на поверхности S , $\rho^{\text{пов}}$, $\mathbf{j}^{\text{пов}}$ — плотности поверхностных зарядов и токов.

Замечание 1.4.1 Если проводимость σ одной из сред, например, D'_2 , бесконечно велика ($\sigma_2 = \infty$), то в области D'_2 векторы $\mathbf{E}^{(2)} \equiv \mathbf{H}^{(2)} \equiv 0$, и условия (1.4.1) принимают вид

$$\mathbf{E}_\tau^{(1)} \Big|_S = 0, \quad \mathbf{H}_\tau^{(1)} \Big|_S = \mathbf{j}^{\text{пов}}, \quad (1.4.3)$$

то есть на поверхности идеального проводника граничное значение вектора $\mathbf{E}_{\tau}^{(1)} \in D'$ равно нулю, а граничное значение вектора $\mathbf{H}_{\tau}^{(1)}|_S$ определяется поверхностным током на S .

Замечание 1.4.2 Если область D'_2 не является идеальным проводником, но ее проводимость достаточно велика ($\sigma_2 \gg \gg 1$), то, как известно, электромагнитное поле будет экспоненциально затухать в скин-слое области D'_2 у поверхности S , и условие сопряжения (1.4.1) может быть заменено приближенным граничным условием, связывающим значения касательных составляющих $E_{\tau}^{(1)}|_S$ и $H_{\tau}^{(1)}|_S$. Это позволяет рассматривать задачу определения электромагнитного поля лишь в области D'_1 .

Граничные условия Шукина–Леонтовича. Эти граничные условия были получены в 40-х годах прошлого века выдающимися российскими физиками М.А. Леонтовичем и А.Н. Шукиным и носят их имя, а также часто называются просто импедансными граничными условиями.

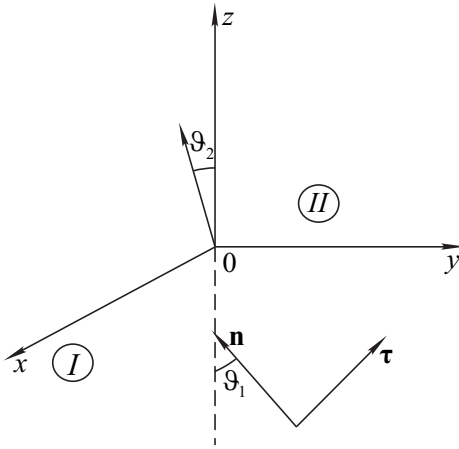


Рис. 1.4.1. Раздел сред.

В общем случае на границе раздела двух сред следует ставить условия сопряжения. Однако, если проводимость одной из сред значительно превосходит проводимость другой, то задача с условиями сопряжения с хорошей точностью может быть заменена задачей только в одной области с меньшей проводимостью, а приближенные граничные условия заданы на поверхности раздела сред.

Приведем вывод этих условий для простого случая падения плоской электромагнитной волны из среды (I) с малой проводимостью на плоскую границу $z = 0$ среды (II) с большой проводимостью $\sigma \gg 1$ (см. рис. 1.4.1).

Уравнения Максвелла для приведенных полей $\tilde{\mathbf{E}} = \sqrt{\varepsilon'} \mathbf{E}$, $\tilde{\mathbf{H}} = \sqrt{\mu} \mathbf{H}$ в областях (I) и (II) имеют вид

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{H}} = -ik\tilde{\mathbf{E}}, \\ \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}} = ik\tilde{\mathbf{H}}, \end{cases} \quad (1.4.4)$$

где $\tilde{k} = \sqrt{\varepsilon' \mu} \frac{\omega}{c}$.

Уравнения (1.4.4) в декартовых координатах допускают два типа решений $\{\tilde{E}_x, \tilde{H}_y, \tilde{H}_z\}$ и $\{\tilde{E}_y, \tilde{E}_z, \tilde{H}_x\}$ соответствующих двум различным поляризациям плоской волны. В первом случае вектор $\tilde{\mathbf{E}}$ лежит на фронте падающей волны, во втором на фронте падающей волны лежит вектор $\tilde{\mathbf{H}}$.

Введем новую декартову систему координат $(x, \boldsymbol{\tau}, n)$, орты которой \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_τ лежат на фронте падающей волны, а \mathbf{e}_n — нормален фронту. Тогда из уравнений Максвелла (1.4.4) для поля \tilde{E}_x получим выражение

$$\tilde{E}_x = A e^{ikn}, \quad (1.4.5)$$

где A — амплитуда поля $\tilde{\mathbf{E}}$, а для $\tilde{\mathbf{H}}_\tau$ из очевидных соотношений

$$ik\tilde{H}_\tau = (\operatorname{rot}\tilde{\mathbf{E}})_\tau = ikAe^{ikn} = ik\tilde{E}_x \quad (1.4.6)$$

следует

$$\tilde{H}_\tau = \tilde{E}_x.$$

Тогда для компонент исходных полей плоской волны (1.4.6) в силу (1.4.4) получим соотношение

$$E_x = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} H_\tau = w H_\tau. \quad (1.4.7)$$

Величина $w = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}$ носит название волнового сопротивления среды и определяется главным образом ее проводимостью σ , так как

$$\varepsilon' = \varepsilon + 4\pi i \frac{\sigma}{\omega}. \quad (1.4.8)$$

Заметим, что при $\sigma \gg 1$ значение $|w|$ будет малой величиной

$$|w| \ll 1.$$

Для обеих сред касательная составляющая вектора \mathbf{H} к границе раздела определяется выражением

$$H_{\tau} = \frac{1}{\cos \theta} H_y. \quad (1.4.9)$$

Под углом θ подразумевается угол падения плоской волны θ_1 (с осью z) в среде (I) (рис. 1.4.1) или угол преломления θ_2 в среде (II). Тогда соотношение (1.4.7) можно переписать в виде

$$E_x = \frac{w}{\cos \theta} H_y. \quad (1.4.10)$$

Тогда из условий сопряжения (1.4.1) и условия (1.4.10) на границах раздела $z = 0$ получим соотношения

$$E_x^{(1)} \Big|_{z=0} = E_x^{(2)} \Big|_{z=0} = \frac{w_2}{\cos \theta_2} H_y^{(2)} \Big|_{z=0} = \frac{w_2}{\cos \theta_2} H_y^{(1)} \Big|_{z=0}, \quad (1.4.11)$$

то есть условия связи касательных составляющих векторов $E_x^{(1)}$ и $H_y^{(1)}$ на границе $z = 0$ области (I). Вообще говоря, эти соотношения зависят от значения угла θ_2 преломления падающей плоской волны на границу раздела $z = 0$ двух сред. Однако, как легко показать, при условии $|w_2| \ll 1$ величина $|\cos \theta_2|$ близка к единице. Действительно, в силу закона Снеллиуса

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2, \quad (1.4.12)$$

где $n = \sqrt{\varepsilon' \mu}$ — полный показатель преломления в среде. Так как в нашем случае $|\sigma_2| \gg 1$ и $|w_2| \ll 1$, то справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \sin \theta_2 &= \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 = O(w_2) \sin \theta_1 \\ &\text{и} \\ \cos \theta_2 &= 1 + O(w_2^2), \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

в силу которых окончательно получим импедансное граничное условие

$$E_x^{(1)} \Big|_{z=0} = w_2 H_y^{(1)} \Big|_{z=0} + O(w_2^3) \quad (1.4.14)$$

справедливое для любых углов падения θ_1 .

Проводя аналогичные рассуждения для случая второй поляризации, получим соотношение

$$E_y^{(1)} \Big|_{z=0} = -w_2 H_x^{(1)} \Big|_{z=0} + O(w_2^3). \quad (1.4.15)$$

Объединяя выражения (1.4.14) и (1.4.15), можно записать единую форму импедансного граничного условия, связывающего касательные составляющие электрического и магнитного полей плоской волны, падающей под любым углом на плоскую границу раздела с хорошо проводящей средой ($\sigma_2 \gg 1$), в виде

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]|_{z=0} = -w_2 \left[\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \right] \Big|_{z=0} + O(w_2^3). \quad (1.4.16)$$

Так как любое электромагнитное поле, удовлетворяющее однородной системе уравнений Максвелла, может быть представлено в виде суперпозиции плоских волн, то соотношение (1.4.16) остается справедливым и в общем случае.

Учет кривизны поверхности S дает дополнительные члены в выражениях (1.4.14), (1.4.15)

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{r}_1}|_S &= w_2 \left(1 + \frac{\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2}{2i\widetilde{k}_2} \right) H_{\mathbf{r}_2} \Big|_S + O(w_2^3), \\ \text{и} & \\ E_{\mathbf{r}_2}|_S &= -w_2 \left(1 - \frac{\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2}{2i\widetilde{k}_2} \right) H_{\mathbf{r}_1} \Big|_S + O(w_2^3), \end{aligned} \quad (1.4.17)$$

где \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 — главные касательные направления в данной точке поверхности, а \mathfrak{a}_1 и \mathfrak{a}_2 — главные кривизны поверхности S в этой точке.

Поскольку $\left| \frac{1}{\widetilde{k}_2} \right| = O(w_2)$, то эти добавки имеют порядок малости $O(w_2^2)$.

Из выражений (1.4.17) можно получить приближенные граничные условия нулевого порядка

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]|_S = 0 \quad (1.4.18)$$

и первого порядка

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]|_S = -w_2 \left[\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \right] \Big|_S, \quad (1.4.19)$$

где \mathbf{n} — вектор нормали к поверхности S , направленный в сторону хорошо проводящей среды (II).

Использование приближений более высокого порядка позволяет выписать граничные условия на границе S среды (I), в

которой ищутся решения уравнений Максвелла, и хорошо проводящей среды (II) с более высоким порядком малости $O(w^N)$

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{r}_1}^{(N)} &= w_2 (1 + a_2 w_2 + \dots + a_N w_2^{N-1}) H_{\mathbf{r}_2}^{(N)} \Big|_S, \\ E_{\mathbf{r}_2}^{(N)} &= -w_2 (1 + b_2 w_2 + \dots + b_N w_2^{N-1}) H_{\mathbf{r}_1}^{(N)} \Big|_S. \end{aligned} \quad (1.4.20)$$

Коэффициенты a_i ($i = 2, \dots, N$), b_i ($i = 2, \dots, N$) определяются геометрией поверхности S и материальными характеристиками хорошо проводящей среды.

О.И. Паничем доказана теорема, согласно которой приближенное решение задачи определения электромагнитного поля в среде (I) вне хорошо проводящей среды (II) с граничным условием N -го порядка на границе S раздела сред (I) и (II) есть N -ая частичная сумма асимптотического разложения по степеням малого параметра w_2 решения $\{\mathbf{E}(M), \mathbf{H}(M)\}$ полной задачи с точными условиями сопряжения на границе раздела S сред (I) и (II).

$$\mathbf{E}^{(N)}(M) = \sum_{i=0}^N w_2^i \vec{\mathcal{E}}_i(M) + O(w_2^{N+1}), \quad (1.4.21)$$

где $\vec{\mathcal{E}}_i(M)$ — коэффициенты асимптотического разложения полной задачи сопряжения на границе S сред (I) и (II), то есть

$$|\mathbf{E}^N(M) - \mathbf{E}(M)| = O(w_2^{N+1}) \quad (1.4.22)$$

всюду в среде (I).

Замечание 1.4.3 Как легко видеть, заменяя в условии (1.4.20) $H_{\mathbf{r}_1}^{(N)}$ на $H_{\mathbf{r}_1}^{(N-1)}$, мы получаем ошибку того же порядка $O(w_2^{N+1})$ малости, что и для решения с приближенным граничным условием порядка N . Однако, если в случае условия (1.4.20) мы имеем третью краевую задачу, где в граничном условии неизвестны обе функции и $\mathbf{E}_{\mathbf{r}_1}^{(N)}$ $H_{\mathbf{r}_2}^{(N)}$, то при задании в (1.4.20) известной правой части $H_{\mathbf{r}_2}^{(N-1)}$ мы имеем последовательность первых краевых задач с известной правой частью, найденной из предыдущего приближения, что во многих случаях позволяет построить эффективный алгоритм как аналитического, так и численного решения исходной задачи.

Замечание 1.4.4 Рассмотренный метод построения импедансных граничных условий для электромагнитного случая применим и к задаче скалярной дифракции для уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k_i^2(M)u = -f(M),$$

$$k_i^2(M) = \begin{cases} k_1^2(M), & M \in (I), \\ k_2^2(M), & M \in (II), \end{cases} \quad (1.4.23)$$

в котором $f(M)$ — заданная функция возбуждения колебаний, а коэффициент $k^2(M)$ является разрывной функцией на общей границе S раздела сред (I) и (II) , на которой должны выполняться условия сопряжения

$$[u]_S = 0, \quad \left[Q(P) \frac{\partial u}{\partial n} \right]_S = 0. \quad (1.4.24)$$

Здесь коэффициент $Q(P)$, $P \in S$, определяется геометрией поверхности S и материальными характеристиками сред и имеет различные значения на поверхности S в средах (I) и (II) .

Таким образом, в случае $|k_2^{(2)}(M)| \gg 1$ решение $u(M)$ полной задачи сопряжения в областях (I) и (II) можно в первом приближении заменить решением уравнения (1.4.23) с импедансным граничным условием

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \zeta(P)u \Big|_S = 0 \quad (1.4.25)$$

только в среде (I) . Импеданс $\zeta(P)$, являющийся, вообще говоря, комплекснозначной функцией точек $P \in S$, определяется геометрией области S и значениями коэффициентов $k_1(P)$ и $k_2(P)$ в точках $P \in S$. При этом $|\zeta(P)| \ll 1$.

4.2. Условия на бесконечности. Уравнения Максвелла для установившихся колебаний и уравнение Гельмгольца являются уравнениями эллиптического типа. Как известно из общего курса методов математической физики, в случае внешних краевых задач в неограниченной области D_e вне замкнутой поверхности S с заданными в D_e локальными источниками для единственности решения должны быть заданы не только граничные условия на поверхности S , но и условия на бесконечности. Физический

смысл последних соответствует требованию отсутствия источников поля на бесконечности.

Рассмотрим уравнение Гельмгольца для комплексной амплитуды установившихся колебаний при временной зависимости $e^{-i\omega t}$:

$$\Delta u + k^2(M)u = f(M). \quad (1.4.26)$$

Пусть начало сферической системы координат (r, θ, φ) расположено внутри поверхности S . Пусть, кроме того, функция $f(M)$ локальна, функция $k^2(r, \theta, \varphi)$ равномерно относительно θ и φ стремится к постоянному значению k_0^2 при $r \rightarrow \infty$,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} k^2(r, \theta, \varphi) = k_0^2. \quad (1.4.27)$$

Тогда соответствующие условия имеют вид

$$\begin{aligned} u(r, \theta, \varphi) &= O\left(\frac{1}{r}\right), \\ \frac{\partial u}{\partial r} - ik_0 u &= o\left(\frac{1}{r}\right). \end{aligned} \quad (1.4.28)$$

Условия (1.4.28) носят название *условий Зоммерфельда* по имени знаменитого немецкого физика, который впервые их предложил.

Аналогичные условия в электромагнитном случае имеют вид

$$[\mathbf{e}_r \times \mathbf{E}]|_{r > R_0} = -w_0 [\mathbf{e}_r \times [\mathbf{e}_r \times \mathbf{H}]] + o\left(\frac{1}{r}\right) \quad (1.4.29)$$

и также отвечают требованию отсутствия источника поля на бесконечности. Здесь \mathbf{e}_r — орт координаты r , а волновое число

$$w_0 = \lim_{r \rightarrow \infty} w(r, \theta, \varphi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\mu(r, \theta, \varphi)}{\varepsilon'(r, \theta, \varphi)}}. \quad (1.4.30)$$

Замечание 1.4.5 Условия Зоммерфельда (1.4.28), (1.4.29) не носят универсальный характер. Форма их зависит от выбора временной зависимости установившихся колебаний ($e^{-i\omega t}$ или $e^{+i\omega t}$); от размерности области D_e (\mathbb{R}^2 или \mathbb{R}^3); от вида зависимости коэффициента $k^2(M)$ от системы координат, в которой рассматривается задача, например, в случае стратифицированной среды, в которой вектора фазовой скорости

\mathbf{v}_Φ и групповой скорости \mathbf{v}_Γ , определяющей направление переноса энергии, могут не совпадать и даже быть противоположно направленными, и в ряде других случаев вид условий Зоммерфельда должен быть изменен. Поэтому встает вопрос о формулировке единообразных принципов излучения для самого широкого круга задач. Таковыми являются принцип предельной амплитуды и принцип предельного поглощения.

4.3. Принцип предельной амплитуды. Наряду с исходной задачей

$$\begin{cases} L[u] + k^2 u = -f(M), & M \in D_e, \\ P[u]|_S = \varphi(Q), & Q \in S, \\ u(r, \theta, \varphi) = O\left(\frac{1}{r}\right), \\ \frac{\partial u}{\partial r} - ik_0 u = o\left(\frac{1}{r}\right), \end{cases} \quad (1.4.31)$$

где $L[u]$ — линейный эллиптический оператор, а $P[u]$ — граничный оператор 1-го, 2-го или 3-го рода, рассмотрим начально-краевую задачу для функции $v(M, t)$

$$\begin{cases} L[v] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\eta(t)f(M)e^{-i\omega t}, & M \in D_e, \quad 0 < t < \infty, \\ P[v]|_S = \eta(t)\varphi(Q)e^{-i\omega t}, & Q \in S, \\ v(M, 0) = 0, \end{cases} \quad (1.4.32)$$

где $\eta(t)$ — функция переходного режима, монотонно изменяющаяся от 0 до 1 при $0 \leq t \leq t_0$ и тождественно равная 1 при $t \geq t_0$.

В силу теоремы Коши–Ковалевской эта задача имеет непрерывное решение при любых $t \geq 0$. Если существует поточечный предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(M, t)e^{i\omega t} = u(M), \quad (1.4.33)$$

то, как легко видеть, в этом случае функция $u(M)$ будет решением краевой задачи (1.4.31). Существование предела (1.4.33) зависит от геометрии поверхности S , оно доказано для широкого класса достаточно гладких поверхностей S .

Таким образом, принцип предельной амплитуды представляет собой требование, чтобы решение задачи (1.4.31) $u(M)$ было предельной амплитудой колебаний задачи (1.4.32) с нулевыми начальными условиями.

4.4. Принцип предельного поглощения. Пусть коэффициент $k^2(M)$ является действительной функцией. Введем комплексный коэффициент

$$k_\varepsilon^2(M) = k^2(M) + i\varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (1.4.34)$$

и наряду с исходной задачей (1.4.31) рассмотрим задачу

$$\begin{cases} L_\varepsilon[u_\varepsilon] + k_\varepsilon^2 u_\varepsilon = -f(M), & M \in D_\varepsilon, \\ P[u_\varepsilon]|_S = \varphi(Q), & Q \in S, \\ u_\varepsilon(M) = O(e^{-\varepsilon r}) & \text{при } r \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1.4.35)$$

Условие на бесконечности означает экспоненциальное стремление решения $u_\varepsilon(M)$ к нулю при $M \rightarrow \infty$, что обеспечивает принадлежность решения (1.4.35) функциональному пространству $L_2(D_\varepsilon)$.

В силу последнего условия решение задачи (1.4.35) существует для любого $\varepsilon > 0$. Если существует конечный поточечный предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(M) = u(M), \quad (1.4.36)$$

то функция $u(M)$ будет удовлетворять всем условиям исходной задачи (1.4.31). Существование этого предела зависит от геометрии поверхности S и доказано для широкого класса поверхностей S и эллиптических операторов $L_\varepsilon[u_\varepsilon]$.

Таким образом, принцип предельного поглощения также позволяет выделить единственное решение, соответствующее расходящимся волнам: функция $u(M)$ должна быть пределом ограниченного решения задачи (1.4.35) с комплексным поглощением при стремлении к нулю коэффициента поглощения.

4.5. Условия на ребре. Большой интерес представляют задачи дифракции электромагнитных волн на телах, имеющих ребра и кромки. В теории краевых задач для уравнений в частных производных показывается, что в областях, границы которых имеют ребра или угловые точки, для однозначной разрешимости необходимо сформулировать условия, определяющие поведение решения в окрестности особой точки границы. Однако для задач дифракции требование ограниченности решения может оказаться слишком жестким, поскольку не всегда существует решение, ограниченное в окрестности ребер или кромок [18].

Естественное с физической точки зрения предположение, что при отсутствии внешних источников на ребре поток энергии

через любую поверхность, охватывающую ребро, стремится к нулю при стягивании этой поверхности к ребру, в скалярном случае позволяет записать следующее условие [18]:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \operatorname{Im} \oint_{C_\rho} u \frac{\partial u^*}{\partial n} dl = 0, \quad (1.4.37)$$

где C_ρ — часть окружности радиуса ρ , заключенная в угле $2\pi - \alpha$. Условие (1.4.37) будет выполнено, если в окрестности ребра поле при $\rho \rightarrow 0$ растет не быстрее, чем ρ^σ , где $\sigma > -\frac{1}{2}$.

Аналогом условия (1.4.37) в электромагнитном случае будет

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{Re} \oint_{S_\rho} ([\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] \cdot \mathbf{n}) d\sigma \right\} = 0, \quad (1.4.38)$$

где S_ρ — любая поверхность, охватывающая ребро. В книге [18] также показано, что в окрестности ребра клина при $\rho \rightarrow 0$ могут иметь особенность только компоненты векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} , лежащие в плоскости, перпендикулярной ребру, причем порядок особенности $\rho^{1-\sigma}$, где $\sigma = \frac{\pi}{2\pi - \alpha}$.

Решение задачи выделения особенностей электромагнитного поля в окрестности ребра границы волновода подробно рассмотрено в Приложении 2.

§ 5. Лемма Лоренца. Формулы Стрэттона–Чу

5.1. Лемма Лоренца. При изучении свойств решений эллиптических уравнений весьма эффективным является использование формул Грина. Для уравнений установившихся электромагнитных колебаний такую роль играет лемма Лоренца.

Пусть в области D с замкнутой гладкой границей $S = \partial D$ токи $\mathbf{j}_1(M)$ и $\mathbf{j}_2(M)$ создают соответственно электромагнитные поля $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$ и $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}_1 = -ik\mathbf{E}_1 + \mathbf{j}_1, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_1 = ik\mathbf{H}_1, \end{cases} \quad (1.5.1)$$

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}_2 = -ik\mathbf{E}_2 + \mathbf{j}_2, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_2 = ik\mathbf{H}_2. \end{cases} \quad (1.5.2)$$

Составим выражения

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2] &= (\mathbf{H}_2 \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}_1) - (\mathbf{E}_1 \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}_2) = \\ &= ik (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2) + ik (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) - (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{j}_2), \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

$$\operatorname{div} [\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1] = ik (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2) + ik (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) - (\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{j}_1).$$

Отсюда вытекает, что

$$\operatorname{div} [\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2] - \operatorname{div} [\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1] = (\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{j}_1) - (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{j}_2). \quad (1.5.4)$$

Соотношение (1.5.4) носит название *дифференциальной формы леммы Лоренца* [18]. Если проинтегрировать (1.5.4) по области $G \subset D$, ограниченной поверхностью ∂G , и воспользоваться в левой части формулой Остроградского–Гаусса, получим

$$\begin{aligned} \oint_{\partial G} (\{[\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2] - [\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1]\} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \\ = \int_G \{(\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{j}_1) - (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{j}_2)\} dV, \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

где \mathbf{n} — внешняя нормаль к ∂G . Равенство (1.5.5) называется *интегральной формой леммы Лоренца* и является векторным аналогом второй формулы Грина в случае электромагнитного поля.

Интегрируя (1.5.4) по области D и используя формулу Остроградского–Гаусса, в случае сосредоточенного тока электрического диполя

$$\mathbf{j}_2(M) = \mathbf{l} \delta(M_0, M), \quad (1.5.6)$$

где единичный вектор \mathbf{l} определяет направление тока \mathbf{j}_2 , получим

$$\begin{aligned} (\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}_1(M_0)) &= \int_S (\{[\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1] - [\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2]\} \cdot \mathbf{n}) d\sigma + \\ &+ \int_D (\mathbf{E}_2(M, M_0, \mathbf{l}) \cdot \mathbf{j}_1(M)) dV_M. \end{aligned} \quad (1.5.7)$$

Формула (1.5.7) является аналогом третьей формулы Грина для скалярного случая. Она устанавливает связь значения вектора \mathbf{E}_1 в произвольной внутренней точке M_0 области D с граничными значениями касательных составляющих векторов $\mathbf{E}_1(Q)$ и

$\mathbf{H}_1(Q)$ ($Q \in S$), возбуждаемых вектором тока $\mathbf{j}_1(M)$ ($M \in D$) и значениями векторов вспомогательного поля $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$ внутри области D и на ее границе S . Можно получить явный вид поля $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$ во всем пространстве \mathbb{R}^3 . Это поле можно выразить в декартовой системе координат (x, y, z) с началом в точке M_0 и ортом \mathbf{e}_z , совпадающим с вектором \mathbf{l} , через электрический вектор Герца $\Pi_z^{\mathfrak{g}}$ с единственной отличной от нуля компонентой $\Pi_z^{\mathfrak{g}}$: $\Pi^{\mathfrak{g}}(M, M_0) = (0, 0, \Pi_z^{\mathfrak{g}})$. Здесь функция $\Pi_z^{\mathfrak{g}}(M, M_0)$ является фундаментальным решением уравнения Гельмгольца

$$(\Delta + k^2) \Pi_z^{\mathfrak{g}} = -\frac{i}{k} \delta(M_0, M), \quad (1.5.8)$$

откуда

$$\Pi_z^{\mathfrak{g}} = -\frac{1}{4\pi ik} \varphi(M_0, M), \quad \text{где } \varphi(M_0, M) = \frac{e^{ikR}}{R_{M_0M}}. \quad (1.5.9)$$

Здесь и далее индекс у R_{MM_0} в фундаментальном решении уравнения Гельмгольца будем указывать только в знаменателе.

Замечание 1.5.1 Выражение (1.5.7) носит название леммы Лоренца для электрического поля.

Выражение, аналогичное (1.5.7) можно получить и для вектора $\mathbf{H}_1(M_0)$ магнитного поля. В качестве уравнений для вспомогательного поля $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$ возьмем систему уравнений Максвелла, в которой возбуждение осуществляется магнитным током

$$\begin{cases} \text{rot} \mathbf{H}_2 = -ik \mathbf{E}_2, \\ \text{rot} \mathbf{E}_2 = ik \mathbf{H}_2 + \mathbf{j}_m. \end{cases} \quad (1.5.10)$$

В качестве тока \mathbf{j}_m выберем сосредоточенный ток магнитного диполя $\mathbf{j}_m = \mathbf{p} \delta(M_0, M)$, где единичный вектор \mathbf{p} определяет направление момента магнитного диполя. Тогда

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{H}_1(M_0)) &= \int_D (\mathbf{E}_2(M, M_0, \mathbf{p}) \cdot \mathbf{j}_1(M)) dV_M + \\ &+ \int_S (\{[\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1] - [\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2]\} \cdot \mathbf{n}) d\sigma. \end{aligned} \quad (1.5.11)$$

где вспомогательное поле $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$ выражается через фундаментальное решение уравнения Гельмгольца для единственной отличной от нуля компоненты $\Pi_z^{\mathfrak{M}}$ магнитного вектора Герца:

$$(\Delta + k^2) \Pi_z^{\mathfrak{M}} = \frac{i}{k} \delta(M_0, M), \quad \Pi_z^{\mathfrak{M}} = \frac{1}{4\pi ik} \varphi(M_0, M). \quad (1.5.12)$$

5.2. Следствия леммы Лоренца. Теорема взаимности.

Пусть поля $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$ и $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$ в открытой области D_e возбуждаются сосредоточенными токами $\mathbf{j}_1(M, M_1) = \mathbf{1}_1 \delta(M, M_1)$ и $\mathbf{j}_2(M, M_2) = \mathbf{1}_2 \delta(M, M_2)$, удовлетворяют нулевым граничным условиям на внутренней границе S области D_e

$$[\mathbf{E}_1 \times \mathbf{n}]|_S = [\mathbf{E}_2 \times \mathbf{n}]|_S = 0$$

и условиям излучения (1.4.29) на бесконечности. Тогда, интегрируя выражение (1.5.4) по области D_e , получим

$$\left(\mathbf{1}_2 \cdot \mathbf{E}_1(M_2)\right) = \left(\mathbf{1}_1 \cdot \mathbf{E}_2(M_1)\right). \quad (1.5.13)$$

Это соотношение означает, что проекция поля $\mathbf{E}_1(M_2)$ в точке M_2 нахождения второго диполя на направление $\mathbf{1}_2$ равна проекции поля $\mathbf{E}_2(M_1)$ в точке M_1 на направление первого диполя. Данное соотношение, позволяющее менять местами положения точечного диполя, возбуждающего электромагнитное поле, и точку его наблюдения, и носит название *теоремы взаимности*.

Формула Стрэттона–Чу. Выражение (1.5.11) для значения поля $\mathbf{H}_1(M_0)$ можно записать в более компактном виде, в котором вспомогательные векторы $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$ выражаются через элементарные функции. Будем исходить из представления векторов $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$ через магнитный вектор Герца

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 &= ik \operatorname{rot} \mathbf{\Pi}^M, \\ \mathbf{H}_2 &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{\Pi}^M + k^2 \mathbf{\Pi}^M, \end{aligned} \quad (1.5.14)$$

где вектор $\mathbf{\Pi}^M = \mathbf{p}_2 \Pi^M$, а \mathbf{p}_2 — единичный постоянный вектор. Из формул векторного анализа в этом случае следует, что

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{\Pi}^M &= (\mathbf{p}_2 \cdot \nabla \Pi^M), \\ \operatorname{rot} \mathbf{\Pi}^M &= [\nabla \Pi^M \times \mathbf{p}_2]. \end{aligned} \quad (1.5.15)$$

Откуда, учитывая, что $\Pi^M = \frac{1}{4\pi ik} \varphi$; $\varphi = \frac{e^{ikR}}{R_{M_0M}}$, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 &= \frac{1}{4\pi} [\nabla \varphi \times \mathbf{p}_2], \\ \mathbf{H}_2 &= \nabla (\nabla \Pi^M \cdot \mathbf{p}_2) + k^2 \Pi^M \mathbf{p}_2. \end{aligned} \quad (1.5.16)$$

Запишем выражение (1.5.11) для вектора $\mathbf{H}(M_0)$

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}(M_0) \cdot \mathbf{p}_2) &= \int_D (\mathbf{E}_2(M_0, M, \mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{j}(M)) dV_M + \\ &+ \int_S (\{[\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}] - [\mathbf{E} \times \mathbf{H}_2]\} \cdot \mathbf{n}) d\sigma. \end{aligned} \quad (1.5.17)$$

Первое слагаемое правой части в силу постоянства вектора \mathbf{p}_2 можно записать в виде

$$(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{H}_0(M_0)) = \frac{\mathbf{p}_2}{4\pi} \int_{D_0} [\mathbf{j} \times \nabla\varphi] dV_M, \quad (1.5.18)$$

что, очевидно, дает выражение магнитного поля в \mathbb{R}^3 , которое возбуждается локальным током $\mathbf{j}(M)$, сосредоточенным в области $D_0 \in \mathbb{R}^3$. Для преобразования второго слагаемого рассмотрим подробнее подинтегральное выражение в поверхностном интеграле. Учитывая представления (1.5.16), запишем следующее соотношение

$$\begin{aligned} &(\{[\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}] - [\mathbf{E} \times \mathbf{H}_2]\} \cdot \mathbf{n}) = \\ &= ik \left([[\nabla\Pi^M \times \mathbf{p}_2] \times \mathbf{H}] \cdot \mathbf{n} \right) + \\ &+ \left([\nabla(\nabla\Pi^M \cdot \mathbf{p}_2) \times \mathbf{E}] \cdot \mathbf{n} \right) - k^2 (\mathbf{p}_2 \Pi^M \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]). \end{aligned} \quad (1.5.19)$$

Имеют место равенства

$$\begin{aligned} &([[\nabla\Pi^M \times \mathbf{p}_2] \times \mathbf{H}] \cdot \mathbf{n}) = ([\mathbf{p}_2 \times \nabla\Pi^M] \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{H}]) = \\ &= (\mathbf{p}_2 \cdot [\nabla\Pi^M \times [\mathbf{n} \times \mathbf{H}]]) , \\ &[\nabla(\nabla\Pi^M \cdot \mathbf{p}_2) \times \mathbf{E}] = \text{rot} \{(\nabla\Pi^M \cdot \mathbf{p}_2) \mathbf{E}\} - \\ &- (\nabla\Pi^M \cdot \mathbf{p}_2) \text{rot} \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (1.5.20)$$

По теореме Остроградского–Гаусса

$$\int_S (\text{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \int_D \text{div} (\text{rot} \mathbf{A}) dV = 0 \quad (1.5.21)$$

для любого дифференцируемого вектора \mathbf{A} . В силу уравнений Максвелла получим

$$(\mathbf{p}_2 \cdot \nabla \Pi^M) (\operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) = ik (\mathbf{p}_2 \cdot \nabla \Pi^M) (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}). \quad (1.5.22)$$

Тогда в силу постоянства вектора \mathbf{p}_2 формула (1.5.11) окончательно приобретает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(M_0) = \mathbf{H}_0(M_0) + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ [\nabla \varphi \times [\mathbf{n} \times \mathbf{H}]] - \nabla \varphi (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) + ik \varphi [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \right\} d\sigma_M, \end{aligned} \quad (1.5.23)$$

где

$$\varphi(M_0, M) = \frac{e^{ikR}}{R_{M_0M}}. \quad (1.5.24)$$

Соотношение (1.5.23) носит название *формулы Стрэттона–Чу*. Аналогичное можно получить и для вектора $\mathbf{E}(M_0)$. Эти формулы выражают значение векторов электромагнитного поля, возбуждаемого в области D с гладкой границей S через заданный ток возбуждения $\mathbf{j}(M)$, граничные значения касательных и нормальных компонент поля $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ и фундаментальное решение (1.5.24) уравнения Гельмгольца. Формулы Стрэттона–Чу широко используются при исследовании задач дифракции установившихся колебаний.

§ 6. Теоремы единственности

6.1. Постановка задачи. Обоснование математической непротиворечивости полученных моделей для задач об установившихся колебаниях начнем с доказательства единственности решения внешних краевых задач.

Пусть электромагнитное поле вне импедансного тела D_i , ограниченного замкнутой гладкой поверхностью S , создается локальным током, сосредоточенным в ограниченной подобласти D_0 внешней области D_e ($D_0 \in D_e$). Соответствующая математическая модель для установившихся электромагнитных колебаний в области D_e представляет собой внешнюю краевую задачу для системы уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik_0 \varepsilon'(M) \mathbf{E} + \mathbf{j}(M), \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = ik_0 \mu(M) \mathbf{H}, \end{cases} \quad M \in D_e \quad (1.6.1)$$

с дополнительными условиями

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]|_S = -\zeta(P) \left[\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \right]|_S, \quad (1.6.2)$$

$$[\mathbf{e}_r \times \mathbf{E}]|_{\Sigma_R} = -w_0 \left[\mathbf{e}_r \times [\mathbf{e}_r \times \mathbf{H}] \right]|_{\Sigma_R} + o\left(\frac{1}{R}\right), \quad (1.6.3)$$

где $\lim_{R \rightarrow \infty} w(M) = w_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ и $\lim_{R \rightarrow \infty} \varepsilon'(M) = \varepsilon_0$, $\lim_{R \rightarrow \infty} \mu(M) = \mu_0$ равномерно на Σ_R , и вектор \mathbf{n} нормали к поверхности S направлен внутрь области D_i , ограниченной этой поверхностью.

Для доказательства единственности решения задачи (1.6.1)-(1.6.3), если оно существует, достаточно показать, что соответствующая однородная внешняя краевая задача имеет только тривиальное решение $\mathbf{E} \equiv \mathbf{H} \equiv 0$.

Запишем для решения однородной ($\mathbf{j}(M) \equiv 0$) задачи (1.6.1) теорему Пойнтинга

$$2 \operatorname{Re} \int_{S+\Sigma_R} \left([\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] \cdot \mathbf{n} \right) d\sigma + k_0 \int_{D_e^*} \left\{ \operatorname{Im} \varepsilon' |\mathbf{E}|^2 + \operatorname{Im} \mu |\mathbf{H}|^2 \right\} dV = 0 \quad (1.6.4)$$

и воспользуемся соотношениями

$$\begin{aligned} \left([\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] \cdot \mathbf{n} \right)|_S &= \left([\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \cdot \mathbf{H}^* \right)|_S = \\ &= -\zeta(P) \left([\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{H}]] \cdot \mathbf{H}^* \right)|_S = \zeta(P) |\mathbf{H}_\tau|^2|_S, \end{aligned} \quad (1.6.5)$$

где $\mathbf{H}_\tau|_S$ — касательная к поверхности S составляющая вектора \mathbf{H} , и

$$\lim_{R_0 \rightarrow \infty} \left([\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] \cdot \mathbf{e}_r \right)|_{\Sigma_{R_0}} = \lim_{R_0 \rightarrow \infty} w_0 |\mathbf{H}_\tau|^2|_{\Sigma_{R_0}}.$$

Тогда из (1.6.4) получим

$$\begin{aligned} 2 \int_S \operatorname{Re} \zeta(P) |\mathbf{H}_\tau|^2 d\sigma + \lim_{R \rightarrow \infty} 2w_0 \int_{\Sigma_R} |\mathbf{H}_\tau|^2 d\sigma + \\ + \int_{D_e^*} \left\{ \operatorname{Im} \varepsilon' |\mathbf{E}|^2 + \operatorname{Im} \mu |\mathbf{H}|^2 \right\} dV = 0. \end{aligned} \quad (1.6.6)$$

Следствием формулы (1.6.6), в которой при условии $\operatorname{Re} \zeta(P)|_S \geq 0$ все слагаемые положительные, являются следующие утверждения:

1. Если $\operatorname{Re} \zeta(P) > 0$, $\operatorname{Im} \varepsilon' > 0$, $\operatorname{Im} \mu > 0$ в D_e , то $\mathbf{E} \equiv \mathbf{H} \equiv 0$.
2. Если $\operatorname{Im} \varepsilon' \equiv 0$, $\operatorname{Im} \mu \equiv 0$, $\operatorname{Re} \zeta(P)|_S > 0$, то $\mathbf{H}_\tau|_S = 0$ и в силу граничного условия $\mathbf{E}_\tau|_S = 0$, откуда по лемме Лоренца следует, что $\mathbf{E} \equiv \mathbf{H} \equiv 0$ в D_e .
3. Если $\operatorname{Im} \varepsilon' \equiv \operatorname{Im} \mu \equiv \operatorname{Re} \zeta(P) \equiv 0$, то $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_R} |\mathbf{H}_\tau|^2 d\sigma = 0$.

Очевидно, что в первых двух случаях однородная краевая задача (1.6.1)-(1.6.3) имеет только тривиальное решение. Физический смысл этого факта заключается в том, что в диссипативной среде или при диссипативном граничном условии свободные колебания при отсутствии внешних источников невозможны.

6.2. Лемма Реллиха. Третий случай, когда отсутствует поглощение энергии колебаний во внешней среде и на внутренней границе неограниченной области, требует дополнительного изучения.

Чтобы нагляднее выявить основную идею доказательства единственности решения задачи в недиссипативной среде, начнем со скалярного случая. Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 1.6.1 (лемма Реллиха) Для не равного тождественно нулю вне сферы Σ_{R_0} решения однородного уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k_0^2 u = 0, \quad (1.6.7)$$

удовлетворяющего условию излучения Зоммерфельда

$$\frac{\partial u}{\partial r} - ik_0 u = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (1.6.8)$$

имеет место соотношение

$$\lim_{R_0 \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_{R_0}} |u|^2 d\sigma \neq 0. \quad (1.6.9)$$

Доказательство. В силу гладкости функции u она на любой сфере Σ_r при $r > R_0$ может быть разложена в равномерно сходящийся ряд по ортонормированным сферическим функциям

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r) Y_n(\theta, \varphi), \quad (1.6.10)$$

где сферические функции $Y_{l(n)}^{(m)} = P_{l(n)}^{(m)}(\cos \theta)e^{im\varphi}$ перенумерованы с помощью одного индекса n , так что

$$Y_n(\theta, \varphi) = P_{l(n)}^{(m)}(\cos \theta)e^{im\varphi}, \quad -l \leq m \leq l, \quad n = 1, 2, \dots$$

При этом индекс $l(n)$ имеет одно и то же значение при $2l(n) + 1$ последовательных значениях индекса n . Введение таких обозначений позволяет в последующих формулах избежать необходимости использовать повторные суммы в разложениях решений по сферическим функциям. Коэффициенты разложения (1.6.10) равны

$$u_n(r) = \int_{\Omega} u(r, \theta, \varphi) Y_n^*(\theta, \varphi) d\omega, \quad (1.6.11)$$

где Ω — сфера единичного радиуса. Используя частные решения однородного уравнения (1.6.7), так называемые метатармонические функции [9]

$$w_n(r, \theta, \varphi) = \zeta_{l(n)}^{(1)}(kr) Y_n(\theta, \varphi), \quad (1.6.12)$$

где $\zeta_{l(n)}^{(1)}(x)$ — сферические функции Ханкеля, с помощью первой формулы Грина для функции u и функции

$$\bar{w}_n(r, \theta, \varphi) = \zeta_{l(n)}^{(1)}(kr) Y_n^*(\theta, \varphi), \quad (1.6.13)$$

можно показать, что функции $u_n(r)$ в (1.6.10) удовлетворяют уравнениям

$$\zeta_{l(n)}^{(1)} \frac{du_n(r)}{dr} - u_n(r) \frac{d}{dr} \zeta_{l(n)}^{(1)}(kr) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.6.14)$$

При этом

$$u_n(r) = a_n \zeta_{l(n)}^{(1)}(kr), \quad (1.6.15)$$

где a_n — произвольные постоянные, будут решениями уравнений (1.6.14) при условии $u_n(r) \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$.

В силу (1.6.10) ряд $\sum_n |u_n(r)|^2$ абсолютно сходится при любом $r > R_0$, а функция $u(r, \theta, \varphi)$ представима в виде

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_n a_n w_n(r, \theta, \varphi), \quad (1.6.16)$$

где $a_n \zeta_{l(n)}^{(1)}(kr) = u_n(r)$. Отсюда следует, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_R} |u|^2 d\sigma = \lim_{R \rightarrow \infty} R^2 \sum_n |a_n|^2 \left| \zeta_{l(n)}^{(1)}(kr) \right|^2. \quad (1.6.17)$$

Воспользовавшись асимптотикой функций Ханкеля при больших значениях аргумента [32], мы и получим утверждение леммы Реллиха

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_R} |u(R, \theta, \varphi)|^2 d\sigma \neq 0.$$

6.3. Скалярная задача дифракции на металлическом теле. Полученный результат позволяет доказать следующие теоремы единственности решения внешних краевых задач в скалярном случае.

Теорема 1.6.1 *Первая внешняя однородная краевая задача*

$$\begin{cases} \Delta u + k^2(M)u = 0, & M \in D_e, \\ u|_S = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } r \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (1.6.18)$$

где $k^2(M)$ ($\text{Im } k^2(M) \geq 0$) — аналитическая функция, равномерно стремящаяся при $M \rightarrow \infty$ к постоянному значению k_0^2 имеет только тривиальное решение.

Доказательство. Пусть $u(M)$ — нетривиальное решение задачи (1.6.18). Запишем вторую формулу Грина для функций u и u^* в области D_e^* с внутренней границей S и внешней Σ_{R_0}

$$\begin{aligned} \int_{D_e^*} (\Delta u + k^2 u) \cdot u^* dV &= \int_{S + \Sigma_{R_0}} \frac{\partial u}{\partial n} u^* d\sigma - \\ &- \int_{D_e^*} |\nabla u|^2 dV + \int_{D_e^*} k^2(M) |u|^2 dV = 0, \end{aligned} \quad (1.6.19)$$

так как левая часть обращается в ноль, поскольку $u(M)$ удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца. Тогда из равенства

нулю мнимой части правой части (1.6.19) получим в силу условий Зоммерфельда

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \int_{\Sigma_R} \frac{\partial u}{\partial r} u^* d\sigma = k \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_R} |u|^2 d\sigma = 0. \quad (1.6.20)$$

Но, согласно лемме Реллиха, правая часть (1.6.20) для нетривиального решения должна быть отлична от нуля. Из полученного противоречия следует, что $u \equiv 0$ при $r \geq R_0$. Согласно теореме Бернштейна [23] решение линейного эллиптического уравнения с коэффициентами, являющимися аналитическими функциями действительных переменных в области D_e , также является в области D_e аналитической функцией действительных переменных. Поэтому, в силу единственности аналитического продолжения через границу Σ_{R_0} в область D_e^* вне поверхности S , получим, что $u \equiv 0$ вплоть до S , что и доказывает теорему.

Замечание 1.6.1 Можно показать, что аналогичные результаты имеют место и для внешних второй $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = 0\right)$ и третьей $\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \zeta(P)u\Big|_S = 0\right)$ краевых задач при дополнительном условии $\operatorname{Im} \zeta(P) \leq 0$ для третьей краевой задачи.

6.4. Скалярная задача дифракции на прозрачном теле.

Более сложной является задача определения электромагнитного поля в том случае, когда оно проникает и внутрь поверхности S . При этом на самой поверхности S ставятся условия сопряжения. Задачи такого типа называются *задачами дифракции на прозрачном теле*.

Рассмотрим скалярную задачу дифракции на прозрачном теле D_i с гладкой поверхностью S . Ее математическая модель представляет собой задачу с условиями сопряжения на S :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_e + k_e^2 u_e = -f(M), \quad M \in D_e, \\ \Delta u_i + k_i^2 u_i = 0, \quad M \in D_i, \\ u_i|_S = u_e|_S, \\ \frac{\partial u_i}{\partial n}\Big|_S = \frac{\partial u_e}{\partial n}\Big|_S, \\ \frac{\partial u_e}{\partial r} - ik_0 u_e = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \end{array} \right. \quad (1.6.21)$$

Здесь $k_e^2(M)$ — аналитическая функция действительных координат в области D_e , равная постоянному значению k_0^2 при $r \geq R_0$, а $k_i^2(M)$, ($\text{Im } k_i^2(M) \geq 0$) — непрерывно дифференцируемая функция в области D_i .

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.6.2 *Однородная задача (1.6.21) имеет только тривиальное решение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторяя доказательство теоремы 1.6.1, получим, что функция $u_e(M) \equiv 0$ для $M \in D_e$. Следовательно, из условий сопряжения получим для предельных значений

$$\lim_{M \rightarrow Q} u_i(M)|_{Q \in S} = 0 \text{ и } \lim_{M \rightarrow Q} \frac{\partial u_i}{\partial n} \Big|_{Q \in S} = 0, \quad M \in D_i. \quad (1.6.22)$$

Тогда для функции $u_i(M)$ получаем переопределенную задачу

$$\begin{cases} \Delta u_i + k_i^2 u_i = 0, & M \in D_i, \\ u_i|_S = 0, & \frac{\partial u_i}{\partial n} \Big|_S = 0, \end{cases} \quad (1.6.23)$$

имеющую только тривиальное решение $u_i(M) \equiv 0$.

Замечание 1.6.2 *Условия $\text{Im } k_e^2(M) \geq 0$ и $\text{Im } k_i^2(M) \geq 0$ в теоремах 1.6.1 и 1.6.2 позволяют исключить из рассмотрения задач дифракции в неоднородных средах случай активных сред.*

Замечание 1.6.3 *Очевидно, теорема 1.6.2 остается справедливой и в том случае, когда область D_i является многослойной с границами раздела слоев S_1, S_2, \dots, S_N , а функция $k_j^2(M)$ — аналитическая в каждом слое D_j с границами (S_{j-1}, S_j) , $j = 1, \dots, N-1$, при этом на общих граничных поверхностях S_j должны выполняться условия сопряжения задачи (1.6.21).*

6.5. Электромагнитный аналог леммы Реллиха. Проведенные рассуждения подсказывают, что ключевым моментом в проблеме единственности решения внешних задач электромагнитной теории дифракции является электромагнитный аналог леммы Реллиха.

Лемма 1.6.2 *(Электромагнитная лемма Реллиха) Если решение однородной системы уравнений Максвелла для установившихся электромагнитных колебаний вне сферы Σ_{R_0} удовле-*

творяет условию излучения и не равно тождественно нулю, то

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_R} |\mathbf{H}_\tau|^2 d\sigma \neq 0. \quad (1.6.24)$$

Начнем со вспомогательных утверждений.

Утверждение 1.6.1 Произвольно заданный гладкий вектор $\mathbf{A}_\tau(\theta, \varphi)$, касательный к поверхности сферы Σ_r , может быть при любом значении r представлен в виде

$$\mathbf{A}_\tau = \nabla_2 \chi + [\nabla_2 \psi \times \mathbf{e}_r], \quad (1.6.25)$$

где $\nabla_2 = \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi$, а χ и ψ — дважды непрерывно дифференцируемые функции сферических координат (θ, φ) .

Доказательство. Пусть $\chi(\theta, \varphi)$ и $\psi(\theta, \varphi)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции сферических координат. Рассмотрим соотношение (1.6.25) как систему дифференциальных уравнений относительно функций $\chi(\theta, \varphi)$ и $\psi(\theta, \varphi)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = A_\theta, \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = A_\varphi. \end{cases} \quad (1.6.26)$$

Откуда следует, что функции $\chi(\theta, \varphi)$ и $\psi(\theta, \varphi)$ на сфере Σ_r удовлетворяют уравнениям Пуассона

$$\begin{aligned} \Delta_{\theta, \varphi} \chi &= \Phi(\theta, \varphi), \\ \Delta_{\theta, \varphi} \psi &= \Psi(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (1.6.27)$$

Здесь

$$\Delta_{\theta, \varphi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (1.6.28)$$

является сферической частью оператора Лапласа, а правые части в (1.6.27) выражаются через сферические компоненты заданного вектора $\mathbf{A}(\theta, \varphi)$ по формулам

$$\begin{aligned} \Phi(\theta, \varphi) &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}, \\ \Psi(\theta, \varphi) &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi). \end{aligned} \quad (1.6.29)$$

Решения уравнений (1.6.27) можно получить, определяя коэффициенты разложения функций $\chi(\theta, \varphi)$ и $\psi(\theta, \varphi)$ по ортонормированному базису сферических функций $\{Y_n(\theta, \varphi)\}_{n=0}^{\infty}$

$$\begin{aligned}\chi(\theta, \varphi) &= \sum_n \chi_n Y_n(\theta, \varphi), \\ \psi(\theta, \varphi) &= \sum_n \psi_n Y_n(\theta, \varphi),\end{aligned}\quad (1.6.30)$$

где коэффициенты χ_n и ψ_n выражаются через коэффициенты разложения правых частей уравнений (1.6.27) по данному базису, что и доказывает утверждение 1.6.1.

Введем обозначения

$$\mathbf{h}_n^M = \nabla_2 Y_n, \quad \mathbf{h}_n^{\mathcal{E}} = [\nabla_2 Y_n \times \mathbf{e}_r]. \quad (1.6.31)$$

Покажем, что в силу ортонормированности базиса сферических функций векторный базис $\{\mathbf{h}_n^M, \mathbf{h}_n^{\mathcal{E}}\}$ также является ортонормированным на сфере, и имеет место представление

$$\mathbf{H}_{\mathbf{r}}|_{\Sigma_R} = \sum_n \left\{ a_n^{\mathcal{E}}(R) \mathbf{h}_n^{\mathcal{E}} + a_n^M(R) \mathbf{h}_n^M \right\}, \quad (1.6.32)$$

где коэффициенты $a_n^{\mathcal{E}}(R)$ и $a_n^M(R)$ определяются касательными составляющими полей электрического и магнитного типа, на которые разлагается полный вектор \mathbf{H} . Для этого запишем

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_R} |\mathbf{H}_{\mathbf{r}}|^2 d\sigma &= \sum_n \sum_{n'} \left\{ |a_n^{\mathcal{E}}(a_{n'}^{\mathcal{E}})^*| I_{nn'}^{(1)} + |a_n^M(a_{n'}^M)^*| I_{nn'}^{(2)} + \right. \\ &\quad \left. + |a_n^{\mathcal{E}}(a_{n'}^M)^*| I_{nn'}^{(3)} + |a_n^M(a_{n'}^{\mathcal{E}})^*| I_{nn'}^{(4)} \right\},\end{aligned}\quad (1.6.33)$$

где интегралы $I_{nn'}^{(1)}$, $I_{nn'}^{(2)}$, $I_{nn'}^{(3)}$, $I_{nn'}^{(4)}$ соответственно равны

$$\begin{aligned}I_{nn'}^{(1)} &= \int_{\Omega} \mathbf{h}_n^{\mathcal{E}} (\mathbf{h}_{n'}^{\mathcal{E}})^* d\omega, & I_{nn'}^{(2)} &= \int_{\Omega} \mathbf{h}_n^M (\mathbf{h}_{n'}^M)^* d\omega, \\ I_{nn'}^{(3)} &= \int_{\Omega} \mathbf{h}_n^{\mathcal{E}} (\mathbf{h}_{n'}^M)^* d\omega, & I_{nn'}^{(4)} &= \int_{\Omega} \mathbf{h}_n^M (\mathbf{h}_{n'}^{\mathcal{E}})^* d\omega.\end{aligned}\quad (1.6.34)$$

Вычислим эти интегралы, пользуясь выражениями элементов векторного базиса $\{\mathbf{h}_n^{\mathfrak{A}}, \mathbf{h}_n^{\mathfrak{M}}\}$ через сферические функции $Y_n(\theta, \varphi) = P_{l(n)}^{(m)}(\cos \theta)e^{im\varphi}$, $-l \leq m \leq l$:

$$I_{nn'}^{(1)} = 2\pi \int_0^{\pi} \left\{ \frac{m^2}{\sin^2 \theta} P_{l(n)}^{(m)} \cdot P_{l'(n')}^{(m)} + \frac{dP_{l(n)}^{(m)}}{d\theta} \frac{dP_{l'(n')}^{(m)}}{d\theta} \right\} \sin \theta d\theta, \quad (1.6.35)$$

где мы учли, что система функций $\{e^{im\varphi}\}_{m=-\infty}^{\infty}$ ортогональна на отрезке $[0, 2\pi]$. Заметим, что присоединенные функции Лежандра удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP_{l(n)}^{(m)}}{d\theta} \right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) P_{l(n)}^{(m)} = 0, \quad (1.6.36)$$

где константа $\lambda = l(l+1)$. Умножая уравнение (1.6.36) на $\sin \theta P_{l'(n')}^{(m)}$ и интегрируя по отрезку $[0, \pi]$, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \left\{ \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP_{l(n)}^{(m)}}{d\theta} \right) P_{l'(n')}^{(m)} - \frac{m^2}{\sin \theta} P_{l(n)}^{(m)} P_{l'(n')}^{(m)} \right\} d\theta = \\ = -\lambda \int_0^{\pi} P_{l(n)}^{(m)} P_{l'(n')}^{(m)} \sin \theta d\theta = -\lambda N_n \delta_{nn'} \end{aligned} \quad (1.6.37)$$

где N_n — норма присоединенной функции Лежандра, а $\delta_{nn'}$ — символ Кронекера. Беря первый интеграл в левой части (1.6.37) по частям, получим

$$2\pi \sin \theta \frac{dP_{l(n)}^{(m)}}{d\theta} P_{l'(n')}^{(m)} \Big|_0^{\pi} - I_{nn'}^{(1)} = -2\pi \lambda N_n \delta_{nn'}, \quad (1.6.38)$$

что в силу граничных условий для присоединенных функций Лежандра дает

$$I_{nn'}^{(1)} = 2\pi l(l+1) N_n \delta_{nn'}, \quad (1.6.39)$$

что означает $I_{nn'}^{(1)} = 0$ при $n \neq n'$.

Совершенно аналогичным образом получим

$$I_{nn'}^{(2)} = 0 \text{ при } n \neq n'. \quad (1.6.40)$$

Обратимся к интегралу

$$\begin{aligned}
 I_{nn'}^{(3)} &= 2\pi \int_0^\pi m \left\{ P_{l(n)}^{(m)} \frac{dP_{l'(n')}^{(m)}}{d\theta} + P_{l'(n')}^{(m)} \frac{dP_{l(n)}^{(m)}}{d\theta} \right\} d\theta = \\
 &= 2\pi m P_{l(n)}^{(m)} P_{l'(n')}^{(m)} \Big|_0^\pi - \\
 &- 2\pi m \int_0^\pi \left\{ P_{l'(n')}^{(m)} \frac{dP_{l(n)}^{(m)}}{d\theta} - P_{l(n)}^{(m)} \frac{dP_{l'(n')}^{(m)}}{d\theta} \right\} \sin \theta d\theta = 0 \quad \forall n, n'.
 \end{aligned} \tag{1.6.41}$$

Аналогично получим

$$I_{nn'}^{(4)} = 0 \quad \forall n, n'.$$

Проведенные вычисления доказывают ортогональность векторного базиса $\{\mathbf{h}_n^\exists, \mathbf{h}_n^M\}_{n=0}^\infty$, что позволяет записать

$$\int_{\Sigma_R} |\mathbf{H}_\mathbf{r}|^2 d\sigma = \sum_n \left\{ |C_n^\exists(R)|^2 + |C_n^M(R)|^2 \right\}, \tag{1.6.42}$$

где коэффициенты $C_n^{\exists, M}(R)$ выражаются через коэффициенты $a_n^\exists(R)$ и $a_n^M(R)$ в формуле (1.6.32), причем для $\mathbf{H}_\mathbf{r}|_{\Sigma_R} \neq 0$ хотя бы один из этих коэффициентов отличен от нуля, что и доказывает лемму 1.6.2 (электромагнитную лемму Реллиха).

Единственность внешних задач дифракции установившихся электромагнитных колебаний на идеально проводящем теле с помощью леммы 1.6.2 доказывается совершенно аналогично соответствующим скалярным задачам.

§ 7. Разрешимость задач дифракции

7.1. Скалярная задача с условиями сопряжения. Уравнение Липмана–Швингера. Рассмотрим скалярную задачу дифракции на прозрачном теле. Пусть среда в области D_e вне тела D_i однородна и характеризуется постоянным волновым числом $k_e(M) \equiv k_0$, $M \in D_e$, а среда в ограниченном теле D_i задается, вообще говоря, переменной непрерывно дифференцируемой функцией $k_i^2(M) \in C^{(1)}(D_i)$. Тогда математическая модель возбуждения колебаний локальным источником $f(M) \in C^{(1)}(D_0)$,

$\text{supp} f(M) = D_0 \subset D_e$ в области D_e сводится к краевой задаче сопряжения (в простейшем случае непрерывности решения и его потока) на общей границе S областей D_e и D_i , которая имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta u_e + k_0^2 u_e = -f(M), & M \in D_e, \\ \Delta u_i + k_i^2(M) u_i = 0, & M \in D_i, \end{cases} \quad (1.7.1)$$

$$\begin{cases} u_e|_S = u_i|_S, \\ \frac{\partial u_e}{\partial n}|_S = \frac{\partial u_i}{\partial n}|_S, \\ \frac{\partial u_e}{\partial r} - ik_0 u_e = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } r \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1.7.2)$$

Пусть $\psi(M_0, M) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_0 R}}{R_{M_0 M}}$, где $R = R_{M_0 M}$, — фундаментальное решение однородного уравнения Гельмгольца $\Delta u + k_0^2 u = 0$ в \mathbb{R}^3 . Тогда, записав второе уравнение (1.7.1) в виде

$$\Delta u_i + k_i^2 u_i = \Delta u_i + k_0^2 u_i - (k_0^2 - k_i^2) u_i = 0, \quad (1.7.3)$$

можем получить следующие соотношения, используя вторую формулу Грина

$$\begin{aligned} & \int_S \left\{ \psi \frac{\partial u_e}{\partial n} - u_e \frac{\partial \psi}{\partial n} \right\} d\sigma + \int_{D_0} \psi f(Q) dV_Q = \\ & = \begin{cases} u_e(M), & M \in D_e, \\ \frac{1}{2} u_e(P), & P \in S, \\ 0, & M \in D_i, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.7.4)$$

$$\begin{aligned} & - \int_S \left\{ \psi \frac{\partial u_i}{\partial n} - u_i \frac{\partial \psi}{\partial n} \right\} d\sigma + \int_{D_i} \psi (k_i^2(Q) - k_0^2) u_i dV_Q = \\ & = \begin{cases} 0, & M \in D_e, \\ \frac{1}{2} u_e(P), & P \in S, \\ u_i(M), & M \in D_i. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.7.5)$$

Складывая полученные соотношения, имеем

$$\begin{aligned} u(M) + \int_{D_i} \psi(M, Q) (k_i^2(Q) - k_0^2) u_i(Q) dV_Q = \\ = \int_{D_0} \psi(M, Q) f(Q) dV_Q = F(M), \quad M \in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \quad (1.7.6)$$

Соотношение (1.7.6) носит двоякий характер. В случае, когда $M \in D_i$, это интегральное уравнение Фредгольма второго рода для функции $u_i(M)$. Если же $M \in D_e$, то (1.7.6) превращается в формулу вычисления функции $u_e(M)$ по известному значению функции $u_i(M)$ в D_i . Оно носит название *уравнения Липмана–Швингера*. Интегральное уравнение (1.7.6) относится к классу интегральных уравнений Фредгольма второго рода со слабо полярным ядром

$$u(M) + \int_D K(M, Q) u(Q) dV_Q = f(M), \quad (1.7.7)$$

ядро которого удовлетворяет условию

$$K(M, Q) = O\left(\frac{1}{r_{MQ}^\alpha}\right) \text{ при } \alpha < \frac{n}{2}, \quad (1.7.8)$$

где n — размерность области D .

Отметим важные для дальнейшего свойства интегрального уравнения (1.7.7).

а) Сглаживающее свойство. Если функция $u(Q) \in C^{(p)}(D)$, $Q \in D$, где p — степень гладкости функции $u(Q)$, то функция

$$v(M) = \int_D K(M, Q) u(Q) dV_Q \quad (1.7.9)$$

имеет гладкость $p + 1$, то есть $v(M) \in C^{(p+1)}(D)$.

б) Теорема Фредгольма. Если однородное уравнение (1.7.7)

$$u_0(M) + \int_D K(M, Q) u_0(Q) dV_Q = 0, \quad M \in D, \quad (1.7.10)$$

имеет только тривиальное решение $u_0(M) \equiv 0$, то неоднородное уравнение (1.7.7) однозначно разрешимо при любой правой части $f(M)$ и гладкость $u(M)$ такая же, как и у $f(M)$.

Доказательство классической разрешимости исходной краевой задачи (1.7.1)-(1.7.2), которую мы обозначим (I), основано на следующих утверждениях.

Утверждение 1.7.1 *Любое классическое решение задачи (I) удовлетворяет соотношению (1.7.6).*

Это утверждение является следствием тождественных преобразований, которые в предположении существования классического решения задачи (I) привели к соотношению (1.7.6).

Утверждение 1.7.2 *Любая функция $u(M)$, $M \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющая соотношению (1.7.6) при $F(M) \in C^{(2)}(\mathbb{R}^3)$, является классическим решением задачи на сопряжение (I).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство этого утверждения проведем прямой проверкой. Согласно (1.7.6) функция $u(M)$ является суммой двух объемных потенциалов со слабо полярными ядрами $\psi(M, Q)$ и $(k_i^2(Q) - k_0^2) \psi(M, Q)$. Из свойств объемных потенциалов вытекает

$$(\Delta + k_0^2) u_e(M) = -f(M), \quad M \in D_e, \quad (1.7.11)$$

и, представляя $\Delta + k_i^2(M) = (\Delta + k_0^2) + (k_i^2(M) - k_0^2)$, получим

$$\begin{aligned} (\Delta + k_i^2(M)) u_i &= - (k_i^2(M) - k_0^2) u_i(M) + \\ &+ (k_i^2(M) - k_0^2) u_i(M) = 0. \end{aligned} \quad (1.7.12)$$

В силу свойств объемных потенциалов для функций $u_i(M)$ и $u_e(M)$ выполняются как условия сопряжения, так и условия на бесконечности (1.7.2). Итак, утверждения 1.7.1 и 1.7.2 устанавливают полную эквивалентность задачи (I) и уравнения Липмана–Швингера (1.7.6).

Полученные результаты позволят доказать разрешимость задачи (I).

Теорема 1.7.1 *При сделанных предположениях о гладкости входных данных задачи (I) существует классическое решение этой задачи.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что в силу установленной эквивалентности задач (I) \iff (1.7.6) достаточно доказать, что для уравнения (1.7.6) выполняется теорема Фредгольма. Предположим, что существует нетривиальное решение $u_0(M)$ однородного ($f(M) \equiv 0$) уравнения (1.7.6). Тогда построенное по формуле (1.7.6) решение однородной задачи (I°) также нетривиально. Но это противоречит теореме единственности решения задачи

сопряжения, что в силу теоремы Фредгольма и теоремы единственности устанавливает однозначную разрешимость задачи (I).

Замечание 1.7.1 Теорема существования классического решения задачи (I) доказана при соответствующих условиях гладкости входных данных задачи. Используя свойства объемных потенциалов с плотностью, являющейся обобщенной функцией $f(M) \in L_2(D_0)$, можно доказать и существование обобщенного решения задачи (I).

Замечание 1.7.2 Теорема существования решения задачи (I) остается справедливой и в случае более общих условий сопряжения, чем условие (1.7.2):

$$\begin{aligned} u_e(P)|_S &= q_1(P)u_i(P)|_S, \\ \frac{\partial u_e}{\partial n}\Big|_S &= q_2(P)\frac{\partial u_i}{\partial n}\Big|_S, \end{aligned} \quad (1.7.13)$$

где функции $q_1(P)$ и $q_2(P)$ определяются материальными характеристиками сред в областях D_i и D_e . В этом случае уравнение Липмана–Швингера (1.7.6) переходит в интегральное уравнение с дополнительным слагаемым в виде поверхностных интегралов на поверхности S раздела сред.

Замечание 1.7.3 Идеи доказательства разрешимости задачи (I) для скалярного случая без существенных изменений переносятся и на случай дифракции установившихся электромагнитных колебаний на прозрачном теле (I')

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \mathbf{H}_e = -ik_0 \varepsilon_0 \mathbf{E}_e + \mathbf{j}, \quad M \in D_e, \quad \operatorname{supp} \mathbf{j} \subset D_0 \subset D_e, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_e = ik_0 \mu_0 \mathbf{H}_e, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_i = -ik_0 \varepsilon'_i(M) \mathbf{E}_i, \quad M \in D_i, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_i = ik_0 \mu_i(M) \mathbf{H}_i, \\ \left. \begin{array}{l} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_e]_S = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_i]_S, \\ [\mathbf{n} \times \mathbf{H}_e]_S = [\mathbf{n} \times \mathbf{H}_i]_S, \\ [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_e]_{\Sigma_R} = -w_0 \left[\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{H}_e] \right]_{\Sigma_R} + o\left(\frac{1}{R}\right), \quad R \rightarrow \infty. \end{array} \right\} \quad (I')$$

Проводя выкладки, аналогичные скалярному случаю, и используя формулу Стрэттона–Чу, можно получить векторное

соотношение, аналогичное формуле (1.7.6):

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(M) - \frac{ik_0}{4\pi} \int_{D_i} \varphi(M, Q) \operatorname{rot} \{(\varepsilon_0 - \varepsilon'_i(Q)) \mathbf{E}_i(Q)\} dV_Q = \\ = \frac{1}{4\pi} \int_{D_0} \varphi(M, Q) \operatorname{rot} \mathbf{j}(Q) dV_Q, \quad M \in \mathbb{R}^3, \end{aligned} \quad (1.7.14)$$

$$\text{где } \frac{1}{4\pi} \varphi(M, Q) = \frac{e^{ik_0 R}}{R_{MQ}}.$$

Соотношение (1.7.14) с использованием формул векторного анализа принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(M) - \frac{1}{4\pi} \int_{D_i} \varphi(M, Q) \left\{ k_0^2 (\varepsilon'_i(Q) - \varepsilon_0) \mathbf{H}_i(Q) + \right. \\ \left. + k_0^2 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon'_i(Q)} \right) [\nabla \varepsilon'_i \times \mathbf{H}_i] - \left[\nabla \left(\frac{1}{\varepsilon'_i} \right) \times \operatorname{rot} \mathbf{H}_i \right] \right\} dV_Q = \\ = \frac{1}{4\pi} \int_{D_0} \varphi(M, Q) \operatorname{rot} \mathbf{j}(Q) dV_Q, \quad M \in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \quad (1.7.15)$$

При $M \in D_i$ соотношение (1.7.15) является интегродифференциальным уравнением Фредгольма, свойства которого во многом аналогичны свойствам интегрального уравнения Фредгольма (1.7.7) со слабо полярным ядром. Эквивалентность задачи (I') соотношению (1.7.15) позволяет доказать однозначную разрешимость этой задачи при соответствующих условиях гладкости входных данных [11].

§ 8. Задачи дифракции на непроницаемых рассеивателях.

В данном параграфе рассмотрим дифракцию на *непроницаемых рассеивателях*, то есть в случае, когда поле не проникает во внутреннюю область D_i , ограниченную поверхностью S .

Математические модели задач дифракции установившихся колебаний на непроницаемых телах представляют собой внешние краевые задачи в неограниченной области D_e с внутренней границей $S = \partial D_e$, на которой задаются граничные условия первого,

второго или третьего рода при условии отсутствия источников поля на бесконечности.

Для исследования проблемы существования решений соответствующих краевых задач эффективным оказывается использование поверхностных потенциалов простого и двойного слоя.

В случае скалярных задач эти потенциалы обладают следующими свойствами [32].

Потенциал простого слоя. Если поверхность S является поверхностью типа Ляпунова, а плотность $\mu(P)$ потенциала простого слоя

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{e^{ikR}}{R_{MP}} \mu(P) d\sigma, \quad (1.8.1)$$

где $k \equiv \text{Const}$, непрерывна на поверхности S , $\mu(P) \in C(S)$, то потенциал (1.8.1) является аналитической функцией координат вне и внутри поверхности S , $u(M) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus S)$, и удовлетворяет в областях D_e и D_i вне и внутри поверхности S однородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad M \in (\mathbb{R}^3 \setminus S)$$

и условиям излучения на бесконечности. Предельные значения потенциала простого слоя при стремлении точки $M \rightarrow P \in (S)$ как с внешней, так и внутренней стороны поверхности S совпадают:

$$u_e(P)|_S = u_i(P)|_S, \quad (1.8.2)$$

и имеет место скачок предельных значений производных функций u_e и u_i по общей нормали \mathbf{n}_i к поверхности S , направленной внутрь области D_i

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_i} \right] \Big|_S = \frac{\partial u_e}{\partial \mathbf{n}_i} \Big|_S - \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}_i} \Big|_S = \mu(P)|_{P \in S}. \quad (1.8.3)$$

Потенциал двойного слоя. Потенциал двойного слоя с непрерывной плотностью $\nu(P)$ на поверхности типа Ляпунова

$$v(M) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{e^{ikR}}{R_{MP}} \right) \nu(P) d\sigma_P, \quad (1.8.4)$$

где нормаль \mathbf{n}_P направлена внутрь области D_i , также является аналитической функцией координат всюду в \mathbb{R}^3 за исключением поверхности S : $v(M) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus S)$ и удовлетворяет в областях D_i

и D_e однородному уравнению Гельмгольца и условиям излучения на бесконечности. Существует значение потенциала $v(M)$ на поверхности S

$$v^0(P_0) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{e^{ikR}}{R_{P_0P}} \right) \nu(P) d\sigma_P, \quad (1.8.5)$$

не совпадающее с предельными значениями $v(M)$ при $M \rightarrow P_0$ извне и изнутри поверхности S , причем скачок потенциала двойного слоя на поверхности S

$$[v(P)]|_S = v_e(P)|_S - v_i(P)|_S = -\nu(P). \quad (1.8.6)$$

При этом предельные значения производных по общей нормали \mathbf{n}_P потенциала двойного слоя совпадают

$$\left[\frac{\partial v}{\partial n_P} \right] \Big|_S = 0. \quad (1.8.7)$$

Заметим, что и потенциал простого слоя $u(M)$, и потенциал двойного слоя $v(M)$ удовлетворяют условию Зоммерфельда на бесконечности.

Перейдем к доказательству разрешимости соответствующих краевых задач.

8.1. Задача Дирихле. Рассмотрим первую внешнюю краевую задачу

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = -f(M), & M \in D_e, \\ u|_S = \varphi(P), \\ \left(\frac{\partial u}{\partial r} - ik u \right) \Big|_{\Sigma_R} = o\left(\frac{1}{R}\right) \text{ при } R \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (1.8.8)$$

где $f(M)$ и $\varphi(P)$ — непрерывно дифференцируемые функции в соответствующих областях и $\text{supp} f \in D_0 \subset D_e$. Легко видеть, что если искать функцию $u(M)$ в виде

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \int_{D_0} \frac{e^{ikR}}{R_{MQ}} f(Q) dV_Q + v(M), \quad (1.8.9)$$

то для функции $v(M)$ получим краевую задачу

$$\begin{cases} \Delta v + k^2 v = 0, & M \in D_e, \\ v|_S = \psi(P), \\ \left(\frac{\partial v}{\partial r} - ik v \right) \Big|_{\Sigma_R} = o\left(\frac{1}{R}\right) \text{ при } R \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (1.8.10)$$

где $\psi(P) = \varphi(P) - \frac{1}{4\pi} \int_{D_0} \frac{e^{ikR}}{R_{PQ}} f(Q) dV_Q$.

Решение задачи (1.8.10) будем искать в виде потенциала двойного слоя

$$v(M) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{e^{ikR}}{R_{MP}} \right) \nu(P) d\sigma_P, \quad (1.8.11)$$

плотность которого $\nu(P)$ подлежит определению. Используя свойства потенциала двойного слоя, из граничного условия (1.8.10) для плотности $\nu(P)$ получим соотношение

$$-\frac{1}{2}\nu(P_0) + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{e^{ikR}}{R_{P_0P}} \right) \nu(P) d\sigma_P = \psi(P_0), \quad (1.8.12)$$

являющееся интегральным уравнением Фредгольма второго рода с полярным ядром, для которого справедлива теорема Фредгольма: уравнение (1.8.12) однозначно разрешимо для любой непрерывной правой части, если соответствующее однородное уравнение имеет только тривиальное решение. Как известно, однородное уравнение

$$-\frac{1}{2}\nu_0(P_0) + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{e^{ikR}}{R_{P_0P}} \right) \nu_0(P) d\sigma_P = 0 \quad (1.8.13)$$

и его союзное уравнение

$$-\frac{1}{2}\mu_0(P_0) + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n_{P_0}} \left(\frac{e^{ikR}}{R_{P_0P}} \right) \mu_0(P) d\sigma_P = 0 \quad (1.8.14)$$

одновременно имеют нетривиальные решения.

Пусть $\mu_0(P) \not\equiv 0$ — решение уравнения (1.8.14). Построим потенциал простого слоя с плотностью $\mu_0(P)$

$$u_0(M) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{e^{ikR}}{R_{MP}} \mu_0(P) d\sigma_P. \quad (1.8.15)$$

В силу свойств потенциала простого слоя и уравнения (1.8.14) справедливы соотношения

$$\begin{cases} \Delta u_0 + k^2 u_0 = 0, & M \in D_i, \\ \left(\frac{\partial u_0}{\partial n} \right)_i \Big|_S = 0, \end{cases} \quad (1.8.16)$$

которые означают, что константа k^2 является собственным значением $\widehat{\lambda}_n = k^2$ спектральной задачи Неймана для оператора Лапласа в области D_i , и, значит, при этом значении k однородное уравнение (1.8.13) имеет нетривиальное решение $\nu_0(P) \neq 0$, и для разрешимости неоднородного уравнения (1.8.12) нужно выполнение дополнительного требования ортогональности правой части (1.8.12) функции $\mu_0(P)$.

Итак, имеет место следующая лемма.

Лемма 1.8.1 Если значение коэффициента k^2 в уравнении (1.8.10) не совпадает ни с одним из собственных значений $\widehat{\lambda}_n$ спектральной задачи Неймана (1.8.16), то исходная задача Дирихле (1.8.8) однозначно разрешима для любых непрерывно дифференцируемых функций $f(M)$ и $\varphi(P)$.

Остается рассмотреть случай, когда $k^2 = \widehat{\lambda}_{n_0}$, то есть коэффициент k^2 в уравнении Гельмгольца совпадает с одним из собственных значений $\widehat{\lambda}_{n_0}$ соответствующей спектральной задачи. Возможны различные подходы к решению этой проблемы.

Первый метод. Будем искать решение задачи (1.8.10) в виде потенциала двойного слоя с измененным ядром

$$v(M) = \int_S \frac{\partial}{\partial n_P} g(M, P) \nu(P) d\sigma_P, \quad (1.8.17)$$

где $g(M, P)$ — решение внешней краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta g + k^2 g = -\delta(M_0, M), \\ g(M_0, P)|_{\Sigma_{r_0}} = 0, \\ \left(\frac{\partial g}{\partial r} - ikg\right)\Big|_{\Sigma_R} = o\left(\frac{1}{R}\right) \text{ при } R \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (1.8.18)$$

где Σ_{r_0} — сфера радиуса r_0 , целиком лежащая внутри области D_i . Функция $g(M_0, M)$ легко может быть построена в явном виде методом разделения переменных, используя теорему сложения сферических функций [32]. При совпадении аргументов M_0 и M она имеет особенность порядка $O\left(\frac{1}{R_{M_0 M}}\right)$, поэтому интеграл (1.8.17) обладает теми же свойствами, что и потенциал двойного слоя (1.8.4). Повторяя проведенные при доказательстве леммы 1.8.1 рассуждения, придем к утверждению о справедливости леммы 1.8.2.

Лемма 1.8.2 Если коэффициент k^2 не совпадает ни с одним собственным значением $\widehat{\lambda}_n$ спектральной задачи в двухсвязной области D_i^* , ограниченной поверхностью S снаружи и поверхностью сферы Σ_{r_0} изнутри,

$$\begin{cases} \Delta u + \widehat{\lambda}_n u = 0, & M \in D^*, \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = 0, \\ u|_{\Sigma_{r_0}} = 0, \end{cases} \quad (1.8.19)$$

то исходная задача Дирихле (1.8.8) однозначно разрешима в области D_e при любых непрерывно дифференцируемых функциях $f(M)$ и $\varphi(P)$.

Как известно, спектр собственных значений $\{\widehat{\lambda}_n\}_{n=1}^{\infty}$ дискретен и собственные значения $\widehat{\lambda}_n$ непрерывно зависят от меры области D^* . Поэтому всегда можно выбором значения радиуса r_0 добиться, чтобы заданное значение коэффициента k^2 не совпадало ни с одним собственным значением $\widehat{\lambda}_n$, что и доказывает следующую теорему.

Теорема 1.8.1 Внешняя краевая задача Дирихле (1.8.8) однозначно разрешима при условиях: S — поверхность Ляпунова, $f(M)$ и $\varphi(P)$ непрерывно дифференцируемы при $M \in D_0$, $P \in S$.

Второй метод. Будем искать решение задачи (1.8.8) в виде комбинации потенциалов двойного и простого слоя с одинаковой плотностью $\nu(P)$:

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{e^{ikR}}{R_{MP}} \right) + \alpha(P) \frac{e^{ikR}}{R_{MP}} \right\} \nu(P) d\sigma_P.$$

Для функции $\nu(P)$ получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$-\frac{1}{2}\nu(P_0) + \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial n_P} + \alpha(P) \right) \frac{e^{ikR}}{R_{P_0P}} \right\} \nu(P) d\sigma = \varphi(P_0). \quad (1.8.20)$$

Соответствующее однородному уравнению (1.8.20) союзное уравнение имеет вид

$$-\frac{1}{2}\mu^0(P_0) + \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial n_{P_0}} + \alpha(P) \right) \frac{e^{ikR}}{R_{P_0P}} \right\} \mu^0(P) d\sigma_P = 0. \quad (1.8.21)$$

Предположим, что существует $\mu^0(P) \neq 0$ — нетривиальное решение уравнения (1.8.21) и построим потенциал простого слоя

$$u_0(M) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{e^{ikR}}{R_{MP}} \mu^0(P) d\sigma_P, \quad (1.8.22)$$

являющийся решением спектральной задачи

$$\begin{cases} \Delta u_0 + k^2 u_0 = 0, & M \in D_i, \\ \left(\frac{\partial u_0}{\partial n} \right)_i + \alpha(P_0) u_0 \Big|_S = 0. \end{cases} \quad (1.8.23)$$

Покажем, что всегда можно так выбрать функцию $\alpha(P)$, чтобы задача (1.8.23) при любом k^2 имела только тривиальное решение.

Записав цепочку равенств

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{D_i} (\Delta u_0 + k^2 u_0) u_0^* dV = \\ &= \int_S \frac{\partial u_0}{\partial n} u_0^* d\sigma - \int_{D_i} |\nabla u_0|^2 dV + k^2 \int_{D_i} |u_0|^2 dV, \end{aligned} \quad (1.8.24)$$

где в силу граничного условия (1.8.23)

$$\int_S \frac{\partial u_0}{\partial n} u_0^* d\sigma = - \int_S \alpha(P) |u_0(P)|^2 d\sigma,$$

получим

$$\int_S \operatorname{Im} \alpha(P) |u_0(P)|^2 d\sigma = 0.$$

Откуда при любом значении $\alpha(P)$, для которого $\operatorname{Im} \alpha(P)|_S \neq 0$ и сохраняет знак, следует

$$u_0(P) \equiv 0, \quad P \in S \quad (1.8.25)$$

и в силу граничного условия (1.8.23)

$$\frac{\partial u_0}{\partial n} \Big|_S \equiv 0. \quad (1.8.26)$$

В переопределенной задаче для однородного уравнения Гельмгольца, где и функция u_0 , и ее нормальная производная на гра-

нице равны нулю, решение тождественно равно нулю, поэтому в (1.8.22)

$$u_0(M) \equiv 0, \quad M \in D_i. \quad (1.8.27)$$

Отсюда следует, что $\mu^0(P)$ в (1.8.21) равно нулю

$$\mu^0(P)|_{P \in S} \equiv 0 \quad (1.8.28)$$

при любой $\alpha(P)$, для которой $\text{Im } \alpha(P) \neq 0$ и сохраняет знак на S .

Итак, окончательно доказана теорема однозначной разрешимости задачи Дирихле (1.8.8).

Замечание 1.8.1 Как следует из проведенных рассуждений, существующие при $k^2 = \tilde{\lambda}_{n_0}$ нетривиальные решения $\nu_{n_0}(P)$ однородного уравнения (1.8.13) порождают в \mathbb{R}^3 потенциал двойного слоя

$$v_0(M) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{e^{ikR}}{R_{MP}} \right) \nu_{n_0}(P) d\sigma,$$

значения которого тождественно равны нулю во внешней области D_e ($M \in D_e$) и отличны от нуля в области D_i ($M \in D_i$). Такие функции $\nu_{n_0}(P)$ называются неизлучающими поверхностными токами.

8.2. Задача Неймана. Рассмотрим внешнюю краевую задачу

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u + k^2 u = 0, \quad M \in D_e, \\ \frac{\partial u}{\partial n_i} \Big|_S = f(P), \\ \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) \Big|_{\Sigma_R} = o\left(\frac{1}{R}\right) \text{ при } R \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (1.8.29)$$

и будем строить ее решение в виде потенциала простого слоя

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{e^{ikR}}{R_{MP}} \mu(P) d\sigma_P. \quad (1.8.30)$$

Проводя рассуждения, аналогичные случаю задачи Дирихле, получим для плотности $\mu(P)$ интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\frac{1}{2}\mu(P_0) + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n_{P_0}} \left(\frac{e^{ikR}}{R_{P_0P}} \right) \mu(P) d\sigma_P = f(P_0) \quad (1.8.31)$$

и союзное ему однородное уравнение

$$\frac{1}{2}\nu_0(P_0) + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{e^{ikR}}{R_{P_0P}} \right) \nu_0(P) d\sigma_P = 0. \quad (1.8.32)$$

Если $\nu_0(P) \neq 0$ — нетривиальное решение уравнения (1.8.32), то потенциал двойного слоя

$$v_0(M) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{e^{ikR}}{R_{MP}} \right) \nu_0(P) d\sigma_P \quad (1.8.33)$$

является собственной функцией спектральной задачи Дирихле в области D_i для оператора Лапласа

$$\begin{cases} \Delta v_{n_0} + \lambda_{n_0} v_{n_0} = 0, & M \in D_i, \\ v_{n_0}|_S = 0 \end{cases} \quad (1.8.34)$$

при $k^2 = \lambda_{n_0}$. В этом случае интегральное уравнение (1.8.31) разрешимо не при любой правой части $f(P)$. Чтобы доказать разрешимость краевой задачи Неймана (1.8.29) при любом значении коэффициента k^2 и функции $f(P)$, можно поступить аналогично случаю задачи Дирихле (1.8.8), заменяя ядро интегрального представления (1.8.30) на функцию $g(M_0, M)$, являющуюся решением задачи (1.8.18). Итак, имеет место следующая теорема.

Теорема 1.8.2 *Внешняя задача Неймана для уравнения Гельмгольца однозначно разрешима, если граничная поверхность является поверхностью типа Ляпунова, а функция $f(P)$ в граничном условии (1.8.29) непрерывно дифференцируема.*

Замечание 1.8.2 *Доказательства однозначной разрешимости задач Дирихле и Неймана с помощью усложнения ядра интегральных представлений решений недостаточно конструктивны, так как выбор радиуса r_0 сферы Σ_{r_0} требует знания собственных значений соответствующих*

спектральных задач в двухсвязной области D_i^* , близких к заданному коэффициенту k^2 . Более конструктивным для задачи Дирихле является представление решения в виде комбинации потенциалов простого и двойного слоя. Можно предложить и еще один достаточно конструктивный алгоритм построения решения задачи Неймана.

Записав формулу Грина в области D_e для решения $u(M)$ внешней задачи Неймана и фундаментального решения уравнения Гельмгольца $\psi(M_0, M) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R_{M_0M}}$ при $M_0 \in D_e$, получим

$$\begin{aligned} u(M_0) &= \int_S \left\{ \psi(M_0, P) \frac{\partial u}{\partial n_i}(P) - u(P) \frac{\partial \psi}{\partial n_i}(M_0, P) \right\} d\sigma_P = \\ &= \int_S \psi(M_0, P) f(P) d\sigma_P - \int_S u(P) \frac{\partial \psi}{\partial n_i}(M_0, P) d\sigma_P. \end{aligned} \quad (1.8.35)$$

Переходя к пределу при $M_0 \rightarrow P_0 \in S$, из (1.8.35) получим поверхностное интегральное уравнение для функции $u(P)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u(P_0) + \int_S \frac{\partial \psi}{\partial n_i}(P_0, P) u(P) d\sigma &= F(P_0) = \\ &= \int_S \psi(P_0, P) f(P) d\sigma_P. \end{aligned} \quad (1.8.36)$$

Записав формулу Грина в области D_e для функций $u(M)$ и $\psi(M_0, M)$ при $M_0 \in D_0 \subset D_i$, то есть в области, где обе функции регуляры, получим

$$\int_S \frac{\partial \psi}{\partial n_i}(M_0, P) u(P) d\sigma_P = F(M_0), \quad M_0 \in D_0. \quad (1.8.37)$$

Соотношения (1.8.36) и (1.8.37) представляют собой переопределенную задачу для интегрального уравнения (1.8.36) с дополнительным условием (1.8.37). Однако, эта переопределенная задача разрешима, так как она получена путем тождественных преобразований с существующим решением задачи Неймана.

Докажем единственность решения этой полученной переопределенной системы. Предположим, что существует нетриви-

альное решение $u^0(P) \neq 0$ однородной системы (1.8.36)-(1.8.37). Рассмотрим потенциал двойного слоя

$$v^0(M) = \int_S \frac{\partial \psi}{\partial n_i}(M_0, P) u^0(P) d\sigma_P, \quad (1.8.38)$$

удовлетворяющий однородному уравнению Гельмгольца и, в силу однородного уравнения (1.8.37), равный нулю в подобласти D_0 области D_i . Так как $v^0(M)$ аналитична в замкнутой области $\overline{D_i}$, то $v^0(M) \equiv 0$ в области D_i , и предельное значение его нормальной производной $\left(\frac{\partial v^0}{\partial n_i}\right)\Big|_S = 0$, а в силу непрерывности граничных значений нормальных производных потенциала двойного слоя и $\left(\frac{\partial v^0}{\partial n_i}\right)\Big|_S = 0$. Откуда на основании единственности решения внешней задачи Неймана для уравнения Гельмгольца получим $v^0(M) \equiv 0$ при $M \in \mathbb{R}^3$, что и доказывает единственность решения переопределенной задачи (1.8.36)-(1.8.37).

8.3. Третья краевая задача. Эта задача является математической моделью задачи дифракции на импедансном теле и в скалярном случае имеет вид

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & M \in D_e, \\ \frac{\partial u}{\partial n_i} + h(P)u\Big|_S = f(P), \\ \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right)\Big|_{\Sigma_R} = o\left(\frac{1}{R}\right) \text{ при } R \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1.8.39)$$

Однородная краевая задача (1.8.39) при $f(P) \equiv 0$ и $\text{Im } h(P) < 0$ имеет только тривиальное решение $u_0(M) \equiv 0$, $M \in D_e$.

Будем искать решение задачи (1.8.39) в виде потенциала простого слоя

$$u(M) = \int_S g(M, P) \mu(P) d\sigma_P, \quad (1.8.40)$$

где функция $g(M, P)$ является фундаментальным решением задачи (1.8.18), равным нулю на поверхности сферы Σ_{r_0} радиуса r_0 , целиком лежащей внутри области D_i .

Повторяя рассуждения, аналогичные проведенным при рассмотрении разрешимости внешних задач Дирихле и Неймана,

для функции $\mu(P)$ в (1.8.40) получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\frac{1}{2}\mu(P_0) + \int_S \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial n_{P_0}} + h(P_0) \right) g(P_0, P) \right\} \mu(P) d\sigma_P = f(P_0) \quad (1.8.41)$$

и союзное однородное уравнение

$$\frac{1}{2}\nu_0(P_0) + \int_S \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial n_P} + h(P) \right) g(P_0, P) \right\} \nu_0(P) d\sigma_P = 0. \quad (1.8.42)$$

Предположим, что уравнение (1.8.42) имеет нетривиальное решение $\nu_0(P) \not\equiv 0$ и построим в \mathbb{R}^3 функцию $w_0(M)$ ($M \in \mathbb{R}^3$), имеющую вид

$$w_0(M) = \int_S \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial n_P} + h(P) \right) g(M, P) \right\} \nu_0(P) d\sigma_P. \quad (1.8.43)$$

Функция $w_0(M)$ представляет собой комбинацию потенциалов двойного и простого слоя. Следовательно, в двусвязной области D_i^* , ограниченной поверхностями S и Σ_{r_0} , она является решением краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta w_0 + k^2 w_0 = 0, & M \in D_i^*, \\ w_0|_S = 0, \\ w_0|_{\Sigma_{r_0}} = 0. \end{cases} \quad (1.8.44)$$

Как следует из предыдущих рассмотрений, для любого заданного значения k^2 можно так выбрать радиус r_0 сферы Σ_{r_0} , что

$$w_0(M) \equiv 0, \quad M \in D_i^* + S. \quad (1.8.45)$$

Из (1.8.45) получим, что предельные значения на поверхности S

$$(w_0)_i|_S = 0 \text{ и } \left(\frac{\partial w_0}{\partial n_{P_0}} \right)_i + h(P_0) (w_0)_i \Big|_S = 0. \quad (1.8.46)$$

Тогда, используя граничные свойства поверхностных потенциалов простого и двойного слоя, получим цепочку равенств

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{\partial w_0}{\partial n_{P_0}} \right)_e + h(P_0)(w_0)_e \right\} \Big|_S = \\ & = \left\{ \left(\frac{\partial w_0}{\partial n_{P_0}} \right)_i + h(P_0)(w_0)_i \right\} \Big|_S + \left[\frac{\partial w_0}{\partial n_{P_0}} \right]_S + \\ & + h(P_0)[w_0]_S = h(P_0)\nu_0(P_0) - h(P_0)\nu_0(P_0) = 0. \end{aligned} \quad (1.8.47)$$

Откуда следует, что $w_0(M)$ является решением внешней однородной импедансной краевой задачи, которая при условии $\text{Im } h(P) < 0$ имеет только тривиальное решение $w_0(M) \equiv 0$ при $M \in D_e$, что и доказывает тождественное равенство нулю функции $w_0(M)$ в \mathbb{R}^3 . Из этого следует однозначная разрешимость при $\text{Im } h(P) < 0$ уравнения (1.8.41) при любом значении k^2 для любой непрерывно дифференцируемой функции $f(P)$.

Итак, имеет место следующая теорема.

Теорема 1.8.3 *Внешняя задача скалярной дифракции на импедансном теле для $\text{Im } h(P) < 0$ однозначно разрешима при любом значении параметра k^2 и непрерывной дифференцируемости функции $f(P)$ в граничном условии.*

Замечание 1.8.3 *Рассмотренные методы доказательства разрешимости скалярных задач дифракции без существенных изменений переносятся и на доказательство разрешимости соответствующих задач электромагнитной теории дифракции (см., например, [18]).*

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ.

§ 1. Интегральные уравнения задач дифракции.

Приведенные в предыдущей главе доказательства однозначной разрешимости задач дифракции во многом носят конструктивный характер и могут быть эффективно использованы для построения численных алгоритмов решения соответствующих задач. В первую очередь это обстоятельство используется при сведении краевых задач как внешних, так и задач на сопряжение к интегральным уравнениям Фредгольма.

1.1. Дифракция на идеально проводящем теле. Рассмотрим электромагнитную задачу дифракции на идеально проводящем теле при возбуждении локальным током. Будем считать, что внешняя среда D_e однородна. Тогда математическая модель состоит в решении внешней краевой задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik\mathbf{E} + \mathbf{j}(M), \quad M \in D_e, \quad \operatorname{supp} \mathbf{j} = D_0 \in D_e, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mathbf{H}, \\ [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]|_S = 0, \\ [\mathbf{e}_r \times \mathbf{E}]|_{\Sigma_R} = -w_0 [\mathbf{e}_r \times [\mathbf{e}_r \times \mathbf{H}]]|_{\Sigma_R} + o\left(\frac{1}{R}\right), \quad R \rightarrow \infty. \end{array} \right. \quad (2.1.1)$$

Для данной постановки при $R \rightarrow \infty$ справедлива формула Стрэттона-Чу

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(M) = \mathbf{H}_0(M) + \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \left[\nabla \varphi \times [\mathbf{n}_P \times \mathbf{H}] \right] - \right. \\ \left. - \nabla \varphi (\mathbf{n}_P \cdot \mathbf{H}) + ik\varphi [\mathbf{n}_P \times \mathbf{E}] \right\} d\sigma_P, \quad M \in D_e, \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

где $\mathbf{H}_0(M)$ — вектор напряженности магнитного поля, возбуждаемого локальным током $\mathbf{j}(M)$ в неограниченном пространстве

\mathbb{R}^3 , а интегральное слагаемое описывает поле, дифрагированное идеально проводящим телом, и $\varphi(M, P) = \frac{e^{ikR}}{R_{MP}}$.

Введем понятие поверхностного тока на S :

$$\mathbf{j}_{\text{пов}}(P) = [\mathbf{n}_P \times \mathbf{H}(P)], \quad \text{где } P \in S. \quad (2.1.3)$$

В силу граничного условия на S для вектора $\mathbf{E}_{\mathbf{t}}|_S = 0$ и вытекающего из него условия $(\mathbf{H} \cdot \mathbf{n})|_S = 0$ формула (2.1.2) принимает вид

$$\mathbf{H}(M) = \mathbf{H}_0(M) + \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ [\nabla_P \varphi(M, P) \times \mathbf{j}_{\text{пов}}(P)] \right\} d\sigma_P. \quad (2.1.4)$$

Поверхностный интеграл в (2.1.4) представляет собой комбинацию поверхностных потенциалов двойного слоя и касательных к S производных потенциала простого слоя. Поэтому, переходя к пределу при $M \rightarrow P_0 \in S$, умножая (2.1.4) на \mathbf{n}_{P_0} — нормаль к поверхности S в точке P_0 и используя обозначение (2.1.3), окончательно получим

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{\text{пов}}(P_0) - \frac{1}{2\pi} \int_S \left[\mathbf{n}_{P_0} \times [\nabla_P \varphi(P_0, P) \times \mathbf{j}_{\text{пов}}(P)] \right] d\sigma_P = \\ = 2\mathbf{j}_{\text{пов}}^0(P_0), \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

$$\text{где } \mathbf{j}_{\text{пов}}^0(P_0) = \left[\mathbf{n}_{P_0} \times \mathbf{H}_0(P_0) \right].$$

Выражение (2.1.5) является векторным интегральным уравнением Фредгольма второго рода и носит название уравнения В.А. Фока.

Оно однозначно разрешимо при любых значениях коэффициента k^2 . Для значений k^2 , совпадающих со значением собственной частоты резонатора D_i с идеально проводящей границей S , следует рассматривать переопределенную систему

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{\text{пов}}(P_0) - \frac{1}{2\pi} \int_S \left[\mathbf{n}_{P_0} \times [\nabla_P \varphi(P_0, P) \times \mathbf{j}_{\text{пов}}(P)] \right] d\sigma_P = 2\mathbf{j}_{\text{пов}}^0(P_0), \\ - \frac{1}{2\pi} \int_S [\nabla_P \varphi(M_0, P) \times \mathbf{j}_{\text{пов}}(P)] d\sigma_P = 2\mathbf{H}_0(M_0), \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

где $M_0 \in D_i^* \in D_i$.

Однозначная разрешимость системы (2.1.6) доказывается так же, как и в случае скалярной задачи Неймана.

Замечание 2.1.1 Получить явные аналитические выражения решения (2.1.5) удается чрезвычайно редко. Например, в исключительном случае, когда S представляет собой идеально проводящую плоскость S_0 ($z = 0$), легко показать, что ядро уравнения (2.1.5) равно нулю и $\mathbf{j}_{\text{пов}}(P) = 2\mathbf{j}_{\text{пов}}^0(P)$, $P \in S$.

Замечание 2.1.2 В радиофизических исследованиях иногда применяется так называемый метод Кирхгофа, позволяющий получить приближенное решение задачи дифракции. При заданной области D_0 , в которой возбуждающий ток отличен от нуля, поверхность S тела дифракции можно разбить на две подобласти, где часть S_1 поверхности S — область света — такова, что прямые лучи из области D_0 , соответствующие приближению геометрической оптики, попадают на S_1 , и S_2 — область тени, в которую не попадают лучи из D_0 . Тогда нулевое приближение решения уравнения (2.1.6) задается в виде

$$\mathbf{j}_0(P) = \begin{cases} 2\mathbf{j}_{\text{пов}}^0(P), & P \in S_1, \\ 0, & P \in S_2. \end{cases} \quad (2.1.7)$$

Вектор $\mathbf{H}^0(M)$ нулевого приближения решения задачи дифракции находится из формулы (2.1.4) по нулевому приближению тока $\mathbf{j}_{\text{пов}}^0$, а вектор $\mathbf{E}^0(M)$ определяется из уравнения Максвелла

$$-ik\mathbf{E}^0 = \text{rot } \mathbf{H}^0 - \mathbf{j}(M),$$

при этом граничное условие $[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]_S = 0$ для вектора \mathbf{E}^0 может быть не выполненным. Определив первое приближение $\mathbf{j}_{\text{пов}}^{(1)}(P)$ по найденному приближенному значению $\mathbf{H}^0(P)$

$$\mathbf{j}_{\text{пов}}^{(1)}(P) = [\mathbf{n}_P \times \mathbf{H}^0(P)], \quad P \in S,$$

можно, повторяя приведенный алгоритм для определения первого приближения дифрагированного электромагнитного поля $\{\mathbf{E}^{(1)}(M), \mathbf{H}^{(1)}(M)\}$, $M \in D_e$, получить второе приближение. Аналогично находятся и последующие приближения. К сожалению, этот метод далеко не всегда сходится к истинному решению исходной задачи.

Замечание 2.1.3 Более эффективными методами построения электромагнитного поля $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$, приближающего истинное решение исходной задачи (2.1.1) с заданной точностью, являются численные алгоритмы решения интегрального уравнения (2.1.5), основанные на сведении интегрального уравнения к эквивалентной системе линейных алгебраических уравнений. Как известно, существует широкий класс таких алгоритмов, в частности, для решения интегральных уравнений задач дифракции эффективно используются метод Крылова–Боголюбова и метод моментов [1].

Как хорошо известно, быстрдействие численного алгоритма решения интегрального уравнения существенно зависит от размерности интегрального оператора. Поэтому естественно стремление максимально понизить его размерность.

а) Тела вращения. Для широкого класса задач дифракции на телах вращения D_i можно свести уравнение (2.1.5) к системе одномерных интегральных уравнений. Пусть поверхность S тела D_i в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) получена вращением контура $C(\rho, z)$ вокруг оси z при $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Контур C пересекает ось z в точках $z = 0$ и $z = z_0$, в которых $\rho = 0$. Перейдем от координат (ρ, φ, z) к координатам (ρ, φ, s) , где s — длина дуги кривой C , отсчитываемая от первой граничной точки с координатами $(0, 0, 0)$. Координаты второй граничной точки $(0, 0, l)$, где l — длина контура $C(\rho, z)$. Тогда для касательного к поверхности S вектора тока получим разложение

$$\mathbf{j}(\varphi, s) = j_s(\varphi, s)\mathbf{l}_s + j_\varphi(\varphi, s)\mathbf{l}_\varphi, \quad (2.1.8)$$

где \mathbf{l}_s и \mathbf{l}_φ — орты системы (ρ, φ, s) . Записывая уравнение (2.1.5)

$$\mathbf{j}(P_0) - \frac{1}{2\pi} \int_S [\mathbf{n}_P \times [\nabla_P \varphi(P_0, P) \times \mathbf{j}(P)]] d\sigma_P = 2\mathbf{j}^0(P_0), \quad (2.1.9)$$

где $\mathbf{j}^0(P_0)$ — ток возбуждения, по координатно, получим систему двух интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$\begin{aligned} j_s(P_0) - \int_S \left\{ K_{11}(s_0, s, \varphi_0 - \varphi) j_s(P) + \right. \\ \left. + K_{12}(s_0, s, \varphi_0 - \varphi) j_\varphi(P) \right\} d\sigma_P = 2j_s^0(P_0), \\ j_\varphi(P_0) - \int_S \left\{ K_{21}(s_0, s, \varphi_0 - \varphi) j_s(P) + \right. \\ \left. + K_{22}(s_0, s, \varphi_0 - \varphi) j_\varphi(P) \right\} d\sigma_P = 2j_\varphi^0(P_0), \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

ядра которых явным образом выражаются через $\varphi(P_0, P) = \frac{e^{ikR}}{R_{P_0P}}$ — функцию расстояния R_{P_0P} , зависящего от координат (s_0, φ_0) и (s, φ) точек P_0 и P .

Разложим ядра уравнений (2.1.10) и токи $\mathbf{j}(s, \varphi)$ и $\mathbf{j}^0(s, \varphi)$ в ряды Фурье по угловым координатам

$$K_{ij}(P_0, P) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_{ij}^{(n)}(s_0, s) e^{in(\varphi_0 - \varphi)}, \quad i, j = 1, 2, \quad (2.1.11)$$

$$j_s(P) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} j_s^{(m)}(s) e^{im\varphi} \quad (2.1.12)$$

и аналогично для $j_\varphi(P)$ и компонент тока \mathbf{j}^0 .

Из уравнения (2.1.10) для гармоник тока $\mathbf{j}(P)$ окончательно получим систему одномерных уравнений Фредгольма второго рода

$$\begin{aligned} j_s^{(m)}(s_0) - \int_0^l \left\{ K_{11}^{(m)}(s_0, s) j_s^{(m)}(s) + \right. \\ \left. + K_{12}^{(m)}(s_0, s) j_\varphi^{(m)}(s) \right\} a(s) ds = 2j_s^{0(m)}(s_0), \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

где $a(s)ds$ — дифференциал дуги контура $C(\rho, s)$. Аналогичное уравнение получим и для гармоники $j_\varphi^{(m)}(s_0)$ тока $\mathbf{j}(P)$.

Ядра этих уравнений в явном виде выражаются через функцию $S_m(s_0, s)$ и ее производные, которая имеет вид

$$S_m(s_0, s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikR}}{R_{P_0P}} e^{-im\psi} d\psi, \quad (2.1.14)$$

где $\psi = \varphi_0 - \varphi$. Подробные выкладки, приводящие к формулам (2.1.13), (2.1.14) можно найти в книге [7].

б) Прозрачное тело. При доказательстве однозначной разрешимости скалярной задачи дифракции на прозрачном теле D_i было получено трехмерное интегральное уравнение Липмана-Швингера

$$u(M_0) + \int_{D_i} (k_0^2 - k_i^2(M)) \psi_e(M_0, M) u(M) dV_M = F(M_0), \quad (2.1.15)$$

$$M_0 \in D_i,$$

где $F(M_0) = \int_{D_0} \psi_e(M_0, M) f(M) dV_M$, $\text{supp} f = D_0 \subset D_e$. Прямое

численное интегрирование уравнения (2.1.15) достаточно трудоемко. При определенных условиях оно может быть сведено к системе двумерных интегральных уравнений на поверхности S тела D_i . Пусть известны не только фундаментальное решение уравнения Гельмгольца $\psi_e(M_0, M)$

$$\Delta \psi_e + k_0^2 \psi_e = -\delta(M_0, M), \quad M \in D_e,$$

но и сингулярное решение $\psi_i(M_0, M)$ уравнения Гельмгольца с коэффициентом $k_i^2(M)$, аналитически продолженным в область D_e

$$\Delta \psi_i + k_i^2(M) \psi_i = -\delta(M_0, M), \quad M \in D_i.$$

Применяя формулы Грина в соответствующих областях D_e и D_i к решению $(u_e(M), u_i(M))$ и сингулярным функциям $(\psi_e(M_0, M), \psi_i(M_0, M))$, получим

$$\int_S \left\{ \psi_e \frac{\partial u_e}{\partial n_P} - u_e \frac{\partial \psi_e}{\partial n_P} \right\} d\sigma_P + F(M) = \begin{cases} u_e(M), & M \in D_e, \\ \frac{1}{2} u_e(P), & P \in S, \\ 0, & M \in D_i, \end{cases}$$

$$- \int_S \left\{ \psi_i \frac{\partial u_i}{\partial n_P} - u_i \frac{\partial \psi_i}{\partial n_P} \right\} d\sigma_P = \begin{cases} 0, & M \in D_e, \\ \frac{1}{2} u_i(P), & P \in S, \\ u_i(M), & M \in D_i. \end{cases} \quad (2.1.16)$$

Введем обозначения $\frac{\partial u}{\partial n_P} \Big|_S = \mu(P)$, $u_e|_S = u_i|_S = u(P)$. Переходя к пределу при $M \rightarrow P_0 \in S$, в силу условий сопряжения получим систему поверхностных интегральных уравнений

$$u(P_0) + \int_S \left\{ \left(\psi_i(P_0, P) - \psi_e(P_0, P) \right) \mu(P) - \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\psi_i(P_0, P) - \psi_e(P_0, P) \right) u(P) \right\} d\sigma_P = F(P_0), \quad (2.1.17)$$

$$\mu(P_0) + \int_S \left\{ \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\psi_i(P_0, P) - \psi_e(P_0, P) \right) \mu(P) - \frac{\partial^2}{\partial n_{P_0} \partial n_P} \left(\psi_i(P_0, P) - \psi_e(P_0, P) \right) u(P) \right\} d\sigma_P = \Phi(P_0), \quad (2.1.18)$$

Здесь

$$F(P_0) = \int_{D_0} \psi_e(P_0, M) f(M) dV_M, \quad \text{а} \quad \Phi(P_0)|_S = \lim_{M \rightarrow P_0} \frac{\partial}{\partial n_{P_0}} F(M) \Big|_S.$$

Уравнение (2.1.18) получено путем дифференцирования соотношений (2.1.16) с последующим переходом к пределу при $M \rightarrow P_0 \in S$.

Поскольку функции

$$\psi_i(M, P), \quad \psi_e(M, P) \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\psi_i(M, P) - \psi_e(M, P) \right)$$

имеют одинаковые особенности, уравнения (2.1.17) и (2.1.18) являются уравнениями Фредгольма второго рода со слабо полярным ядром.

Однозначная разрешимость этой системы доказывается так же, как однозначная разрешимость уравнения Липмана–Швингера.

§ 2. Итерационные методы

Итерационные методы численного решения задач математической физики достаточно широко применяются при изучении различных проблем дифракции.

2.1. Метод простой итерации. Основные идеи этого метода рассмотрим на примере решения конкретной задачи дифракции на системе тел. Ограничимся случаем скалярной дифракции.

Пусть в однородной неограниченной среде (материальные характеристики задаются параметром k_0) находится система N ограниченных непересекающихся непроницаемых тел D_i ($i = 1, \dots, N$), возбуждаемых поверхностными источниками. Математическая модель этой задачи имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u + k_0^2 u = 0, \quad M \in D_e, \quad D_e = \mathbb{R}^3 \setminus \sum_{i=1}^N D_i, \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{S_i} = f_i(P_i), \quad P_i \in S_i \quad (i = 1, \dots, N), \\ \frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \end{array} \right. \quad (2.2.1)$$

Начнем с простейшего случая, когда для каждого тела D_i известна функция Грина внешней задачи Неймана

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta g_i + k_0^2 g_i = -\delta(M_0, M), \quad M_0, M \in \mathbb{R}^3 \setminus D_i, \\ \frac{\partial g_i}{\partial n} \Big|_{S_i} = 0, \\ \frac{\partial g_i}{\partial r} - ik_0 g_i = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при } r \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (2.2.2)$$

и будем искать решение внешней задачи Неймана вне D_i при отсутствии в $\mathbb{R}^3 \setminus D_i$ всех остальных тел

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_i + k_0^2 u_i = 0, \quad M \in \mathbb{R}^3 \setminus D_i, \\ \frac{\partial u_i}{\partial n} \Big|_{S_i} = f_i(P_i), \quad P_i \in S_i, \\ \frac{\partial u_i}{\partial r} - ik_0 u_i = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при } r \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (2.2.3)$$

в виде потенциала простого слоя

$$u_i(M) = \int_{S_i} g_i(M, P_i) \mu_i(P_i) d\sigma. \quad (2.2.4)$$

В силу (2.2.2) и (2.2.3), очевидно, получим

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} \Big|_{S_i} = \frac{1}{2} \mu_i(P_i). \quad (2.2.5)$$

Задача (2.2.3), как было установлено ранее, однозначно разрешима.

Вернемся к исходной задаче (2.2.1) и будем искать ее решение в виде суперпозиции решений $u_i(M)$

$$u(M) = \sum_{i=1}^N u_i(M), \quad M \in D_e. \quad (2.2.6)$$

Функция $u(M)$, очевидно, удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца $\Delta u + k_0^2 u = 0$, ($M \in D_e$) и условиям излучения на бесконечности. Требование удовлетворить граничным условиям задачи (2.2.1) на каждой из поверхностей S_i приводит к соотношениям

$$\frac{1}{2}\mu_i(P_i^0) + \sum_{j \neq i}^{1 \div N} \int_{S_j} \frac{\partial g_j}{\partial n_{P_i^0}}(P_i^0, P_j) \mu_j(P_j) d\sigma = f_i(P_i^0); \quad (2.2.7)$$

$$P_i^0 \in S_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Соотношения (2.2.7) представляют собой систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода для функций $\mu_i(P_i^0)$. Заметим, что ядра этих уравнений регулярны, поскольку функции $g_i(P_i^0, P_j)$ дифференцируются в направлении нормали \mathbf{n}_i^0 в точке P_i^0 поверхности S_i , а интегрирование происходит по поверхности S_j , не совпадающей с поверхностью S_i ($j \neq i$), что гарантирует однозначную разрешимость системы (2.2.7). Однако, в случае системы достаточно высокого порядка, ее прямое численное решение может оказаться слишком трудоемким. Более эффективным в таком случае оказывается метод простой итерации.

Записав систему (2.2.7) в операторном виде

$$\boldsymbol{\mu} + \widehat{A}[\boldsymbol{\mu}] = \mathbf{F}, \quad (2.2.8)$$

где

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1(P_1) \\ \vdots \\ \mu_N(P_N) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1(P_1^0) \\ \vdots \\ f_N(P_N^0) \end{pmatrix}, \quad (2.2.9)$$

а \widehat{A} — линейный оператор, элементы матрицы которого равны

$$A_{ij}(P_i^0, P_j) = \int_{S_j} \frac{\partial g_j}{\partial n_{P_i^0}}(P_i^0, P_j) d\sigma, \quad (2.2.10)$$

построим простой итерационный процесс

$$\boldsymbol{\mu}^{(n+1)} = \mathbf{F} - \widehat{A} \left[\boldsymbol{\mu}^{(n)} \right], \quad (2.2.11)$$

который оказывается хорошо сходящимся в случае, когда оператор \widehat{A} является сжимающим, то есть

$$\left\| \widehat{A} \left[\boldsymbol{\mu}^{(n+1)} - \boldsymbol{\mu}^{(n)} \right] \right\| < q \left\| \boldsymbol{\mu}^{(n+1)} - \boldsymbol{\mu}^{(n)} \right\|, \quad (2.2.12)$$

где $q < 1$.

Поскольку ядра интегральных выражений (2.2.10) регулярны и быстро убывают при увеличении расстояний между телами D_i , можно добиться выполнения (2.2.12) в случае достаточно разнесенных тел D_i .

Заметим, что данный метод применим в том случае, если для каждого тела D_i известно явное аналитическое выражение соответствующей функции $g_i(M_0, M)$ (2.2.2) или алгоритм ее численного построения. В противном случае приходится прибегать к усложнению данного метода, используя вместо неизвестных функций $g_i(M_0, M)$ фундаментальное решение уравнения Гельмгольца $\psi(M_0, M) = \frac{e^{ik_0 R}}{R_{M_0 M}}$, и решение задачи (2.2.3) искать в виде

$$u_i(M) = \int_{S_i} \psi_i(M, P) \mu_i(P) d\sigma. \quad (2.2.13)$$

Тогда вместо (2.2.7) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mu_i(P_i^0) + \int_{S_i} \frac{\partial \psi}{\partial n_{P_i^0}}(P_i^0, P_i) \mu_i(P_i) d\sigma_{P_i} + \\ + \sum_{j \neq i}^{1 \div N} \int_{S_j} \frac{\partial \psi}{\partial n_{P_i^0}}(P_i^0, P_j) \mu_j(P_j) d\sigma_{P_j} = f_i(P_i^0). \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Соотношения (2.2.14) также являются системой интегральных уравнений Фредгольма второго рода, однозначная разрешимость которой так же, как и в предыдущем случае, следует из разрешимости исходной задачи (2.2.1).

Запишем соотношение (2.2.14) в операторном виде

$$\widehat{A}_i[\mu_i] = f_i(P_i^0) - \widehat{B}_i[\mu_j, j \neq i], \quad (2.2.15)$$

где

$$\widehat{A}_i[\mu_i] = \mu_i(P_i^0) + \int_{S_i} \frac{\partial \psi}{\partial n_{P_i^0}}(P_i^0, P_i) \mu_i(P_i) d\sigma, \quad (2.2.16)$$

а оператор \widehat{B} определяется последним слагаемым левой части формулы (2.2.14), и его выражение зависит от всех функций $\mu_j(P_j)$ кроме μ_i . Тогда соответствующий итерационный процесс состоит в решении семейства однотипных интегральных уравнений Фредгольма второго рода (2.2.15) для $\mu_i^{(n)}(P_i)$. Правые части этих уравнений зависят от значений функций $\mu_j^{(n-1)}(P_j)$ ($j = 1, \dots, N; j \neq i$), найденных на предыдущем шаге. Также, как и в предыдущем случае, можно доказать, что операторы \widehat{B}_i являются сжимающими при условии достаточного разнесения тел дифракции D_i .

2.2. Метод минимальных невязок. Для численного решения многих задач дифракции на локальных телах эффективным является так называемый метод минимальных невязок.

Пусть линейный оператор \widehat{A} отображает функциональное пространство H само в себя. Метод минимальных невязок приближенного решения операторного уравнения

$$\widehat{A}[\mu] = f, \quad \mu, f \in H \quad (2.2.17)$$

заключается в построении такого итерационного процесса для определения последовательных приближений $\{\mu_n\}$ решения уравнения (2.2.17), при котором норма невязки

$$z_n = \widehat{A}[\mu_n] - f \quad (2.2.18)$$

стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Последующее $(n + 1)$ -е приближение решения можно найти по n -ому приближению, положив

$$\mu_{n+1} = \mu_n - \tau_{n+1} z_n, \quad (2.2.19)$$

где τ_{n+1} — итерационный параметр, определяемый из условия ортогональности $n + 1$ -ой невязки значению оператора \widehat{A} на n -ой невязке

$$\langle z_{n+1}, \widehat{A}[z_n] \rangle = 0, \quad (2.2.20)$$

где символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено скалярное произведение в H .

Составим цепочку равенств

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \widehat{A}[\mu_{n+1}] - f = \widehat{A}[\mu_n - \tau_{n+1} z_n] - f = \\ &= \widehat{A}[\mu_n] - \tau_{n+1} \widehat{A}[z_n] - f = z_n - \tau_{n+1} \widehat{A}[z_n]. \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

Для сокращения записи обозначим

$$\widehat{A}[z_n] = A_n.$$

Тогда условие (2.2.20) дает

$$\langle z_n - \tau_{n+1} A_n, A_n \rangle = 0$$

или

$$\langle z_n, A_n \rangle - \tau_{n+1} \|A_n\|^2 = 0. \quad (2.2.22)$$

Отсюда для итерационного параметра получаем

$$\tau_{n+1} = \frac{\langle z_n, A_n \rangle}{\|A_n\|^2}. \quad (2.2.23)$$

Покажем, что для ограниченного диссипативного оператора \widehat{A} итерационный процесс (2.2.19) сходится по норме невязки при $n \rightarrow \infty$. Напомним определения.

Определение 2.2.1 *Линейный оператор \widehat{A} называется ограниченным в H , если существует такая постоянная $a_0 > 0$, что для любого элемента $v \in H$*

$$\|\widehat{A}[v]\| \leq a_0 \|v\|. \quad (2.2.24)$$

Определение 2.2.2 *Линейный оператор \widehat{A} называется диссипативным в H , если существует такая постоянная $0 < d_0 < < a_0$, что для любого элемента $v \in H$*

$$\left| \langle v, \widehat{A}[v] \rangle \right| \geq d_0 \|v\|^2. \quad (2.2.25)$$

Замечание 2.2.1 *Из (2.2.25) следует, что $\widehat{A}[v_0] = 0$ лишь для нулевого элемента $v_0 = 0$ пространства H .*

Перейдем к доказательству сходимости по норме невязки итера-

ционного процесса (2.2.19) с итерационным параметром (2.2.23). Составим цепочку равенств

$$\begin{aligned} \|z_{n+1}\|^2 = \langle z_{n+1}, z_{n+1} \rangle &= \|z_n\|^2 - \tau_{n+1} \langle A_n, z_n \rangle - \\ &- \tau_{n+1}^* \langle z_n, A_n \rangle + |\tau_{n+1}|^2 \|A_n\|^2. \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

Воспользовавшись выражением (2.2.23) для τ_{n+1} , получим

$$\tau_{n+1} \langle A_n, z_n \rangle = \frac{|\langle z_n, A_n \rangle|^2}{\|A_n\|^2} \quad (2.2.27)$$

и

$$|\tau_{n+1}|^2 \|A_n\|^2 = \frac{|\langle z_n, A_n \rangle|^2}{\|A_n\|^2}. \quad (2.2.28)$$

Тогда (2.2.26) принимает вид

$$\begin{aligned} \|z_{n+1}\|^2 &= \|z_n\|^2 - \frac{|\langle z_n, A_n \rangle|^2}{\|A_n\|^2} = \\ &= \|z_n\|^2 \left\{ 1 - \frac{|\langle z_n, A_n \rangle|^2}{\|A_n\|^2 \|z_n\|^2} \right\} = \rho_{n+1}^2 \|z_n\|^2, \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

где в силу неравенства Коши-Буняковского

$$0 \leq \rho_{n+1} \leq 1.$$

Для ограниченного и диссипативного оператора \hat{A} отсюда следует оценка

$$\rho_{n+1} \leq 1 - \frac{d_0^2 \|z_n\|^4}{a_0^2 \|z_n\|^4} = 1 - \frac{d_0^2}{a_0^2} = \rho_0^2, \quad (2.2.30)$$

что дает оценку

$$\|z_{n+1}\| \leq \rho_0^{n+1} \|z_0\|, \quad (2.2.31)$$

означающую сходимость по норме невязки данного итерационного процесса при любом начальном приближении.

Замечание 2.2.2 *Можно доказать, что при определенных условиях из сходимости по невязке следует сходимость по норме приближенного решения к точному (см. [29]).*

Замечание 2.2.3 Для выполнения условия диссипативности оператора \widehat{A} достаточно потребовать, чтобы

$$\operatorname{Im} \langle v, \widehat{A}[v] \rangle \text{ или } \operatorname{Re} \langle v, \widehat{A}[v] \rangle \quad (2.2.32)$$

не меняли знак $\forall v \in H$.

2.3. Диссипативность операторов теории дифракции. Диссипативность оператора Липмана–Швингера. Покажем, что при определенных условиях оператор уравнения Липмана–Швингера

$$u(M) - \int_{D_i} \psi(M, Q) (k_i^2(Q) - k_0^2) u(Q) dV_Q = F(M), \quad (2.2.33)$$

$$M \in \mathbb{R}^3$$

диссипативен. Введем обозначение

$$\frac{k_i^2(M)}{k_0^2} = C^2(M). \quad (2.2.34)$$

Уравнение (2.2.34) перепишем в виде

$$u(M) - k_0^2 \int_{D_i} \psi(M, Q) (C^2(Q) - 1) u(Q) dV_Q = F(M), \quad (2.2.35)$$

$$M \in \mathbb{R}^3.$$

Будем рассматривать дифракцию на поглощающем теле D_i . Тогда

$$\operatorname{Im} C^2(Q) \geq \varkappa(Q) \geq \varkappa_0 > 0. \quad (2.2.36)$$

Введем функцию

$$\chi(M) = (C^2 - 1) u(M), \quad M \in D_i \quad (2.2.37)$$

и оператор

$$\widehat{B}[\chi] = \frac{\chi(M)}{C^2(M) - 1} - k_0^2 \int_{D_i} \psi(M, Q) \chi(Q) dV_Q = w(M). \quad (2.2.38)$$

Докажем диссипативность оператора $\widehat{B}[\chi]$. Рассмотрим функцию

$$z(M) = w(M) - \frac{\chi(M)}{C^2(M) - 1} = -k_0^2 \int_{D_i} \psi(M, Q) \chi(Q) dV_Q. \quad (2.2.39)$$

Правая часть этого соотношения является объемным потенциалом, определенным в \mathbb{R}^3 . Следовательно, функция $z(M)$ в (2.2.39) определена в \mathbb{R}^3 и как объемный потенциал удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} \Delta z + k_0^2 z = 0, & M \in D_e, \\ \Delta z + k_0^2 z = k_0^2 \chi(M), & M \in D_i, \\ [z]|_S = \left[\frac{\partial z}{\partial n} \right]_S = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial r} - ik_0 z = o\left(\frac{1}{r}\right) & \text{при } r \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.2.40)$$

Как было доказано ранее, задача (2.2.40) однозначно разрешима. При этом любую функцию $\chi(M)$, $M \in D_i$, оператор $\widehat{B}[\chi]$ (2.2.38) отображает в решение задачи (2.2.40) — функцию $z(M)$, $M \in \mathbb{R}^3$. Установим свойства функции $z(M)$, для чего составим цепочку равенств

$$\begin{aligned} \int_{D_i} (\Delta z + k_0^2 z) z^* dV_Q &= k_0^2 \int_{D_i} \chi(Q) z^* dV_Q = \\ &= k_0^2 \int_{D_i} \chi(Q) w^*(Q) dV_Q - k_0^2 \int_{D_i} \frac{|\chi|^2}{C^2 - 1} dV = \\ &= \int_S \frac{\partial z}{\partial n} z^* d\sigma - \int_{D_i} |\nabla z|^2 dV + k_0^2 \int_{D_i} |z|^2 dV. \end{aligned} \quad (2.2.41)$$

Поскольку функция $z(M)$ удовлетворяет условиям излучения на бесконечности, то

$$\operatorname{Im} \int_S \frac{\partial z}{\partial n} z^* d\sigma = \lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \int_{\Sigma_R} \frac{\partial z}{\partial n} z^* d\sigma = k_0 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_R} |z|^2 d\sigma, \quad (2.2.42)$$

в силу (2.2.38) и очевидного соотношения

$$\operatorname{Im} \frac{1}{(C^2 - 1)^*} = \frac{\operatorname{Im} C^2}{|C^2 - 1|^2},$$

получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \int_{D_i} \chi(Q) w^* dV &= \operatorname{Im} \langle \chi, \widehat{B}[\chi] \rangle = \\ &= \int_{D_i} \frac{\operatorname{Im} C^2}{|C^2 - 1|^2} |\chi|^2 dV + \frac{1}{k_0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_R} |z|^2 d\sigma, \end{aligned} \quad (2.2.43)$$

откуда вытекает окончательное утверждение

$$\operatorname{Im} \langle \chi, \widehat{B}[\chi] \rangle > d_0 \|\chi\|^2, \quad (2.2.44)$$

где $d_0 = \frac{\varkappa_0^2}{\max |C^2 - 1|^2}$, что и доказывает диссипативность оператора $\widehat{B}[\chi]$, а тем самым и оператора уравнения Липмана-Швингера.

Диссипативность операторов внешних задач дифракции на непроницаемых телах. Мы ограничимся случаем, когда соответствующие задачи сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма первого рода.

Задача Дирихле.

$$\begin{cases} \Delta u + k_0^2 u = 0, & M \in D_e, \\ u|_S = f(P), \\ \frac{\partial u}{\partial r} - ik_0 u = o\left(\frac{1}{r}\right), & \text{при } r \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.2.45)$$

Будем искать решение этой задачи в виде потенциала простого слоя

$$u(M) = \int_S \psi(M, P) \mu(P) d\sigma_P. \quad (2.2.46)$$

Для функции $\mu(P)$ получим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\widehat{A}[\mu] = \int_S \psi(P_0, P) \mu(P) d\sigma = f(P_0). \quad (2.2.47)$$

Пусть любой функции $v(P)$, $P \in S$ оператор $\widehat{B}[v]$ ставит в соответствие функцию $w(M)$:

$$\widehat{B}[v] = \int_S \psi(M, P)v(P)d\sigma_P = w(M), \quad M \in \mathbb{R}^3. \quad (2.2.48)$$

При $M = P_0 \in S$ оператор \widehat{B} совпадает с оператором $\widehat{A}[v]$, а $w(P) = f(P)$, $P \in S$. Функция $w(M)$, $M \in \mathbb{R}^3$ есть потенциал простого слоя, удовлетворяющий при $M \in \mathbb{R}^3 \setminus S$ однородному уравнению Гельмгольца, соответствующим граничным условиям и условиям излучения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta w + k_0^2 w = 0, \quad M \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \\ [w]|_S = 0, \\ \left[\frac{\partial w}{\partial n} \right]_S = -v(P), \\ \frac{\partial w}{\partial r} - ik_0 w = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \end{array} \right. \quad (2.2.49)$$

Используя вторую формулу Грина в областях D_e и D_i , получим соответственно

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Im} \int_S \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_e w_e^* d\sigma = - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_R} \frac{\partial w}{\partial r} w^* d\sigma \neq 0, \\ \operatorname{Im} \int_S \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_i w_i^* d\sigma = 0. \end{array} \right. \quad (2.2.50)$$

Вычитая первую формулу из второй, и учитывая (2.2.49) и (2.2.47), получим, что $\operatorname{Im} \langle v, \widehat{A}[v] \rangle$ сохраняет знак для $\forall v(P)$, $P \in S$. Отсюда и следует диссипативность оператора $\widehat{A}[v]$, а тем самым возможность строить решение задачи Дирихле методом минимальных невязок.

Задача Неймана. Исследуем вопрос о диссипативности оператора, возникающего при сведении этой задачи к интегральному уравнению Фредгольма первого рода. Напомним математическую модель задачи Неймана:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u + k_0^2 u = 0, \quad M \in D_e, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n_{P_0}} \right|_S = f(P_0), \\ \frac{\partial u}{\partial r} - ik_0 u = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty. \end{array} \right. \quad (2.2.51)$$

Как было доказано ранее, задача (2.2.51) однозначно разрешима при любом значении параметра k_0 и непрерывно дифференцируемой функции $f(P_0)$. Будем искать ее решение в виде потенциала двойного слоя

$$u(M) = \int_S \frac{\partial \psi}{\partial n_P}(M, P) \nu(P) d\sigma. \quad (2.2.52)$$

Из граничного условия (2.2.51) для неизвестной функции плотности $\nu(P)$ получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial n_{P_0}} \int_S \frac{\partial \psi}{\partial n_P}(P_0, P) \nu(P) d\sigma = f(P_0) \quad (2.2.53)$$

или в операторном виде

$$\widehat{A}[\nu] = \frac{\partial}{\partial n_{P_0}} \int_S \frac{\partial \psi}{\partial n_P} \nu(P) d\sigma = f(P_0). \quad (2.2.54)$$

Для любой непрерывно дифференцируемой на S функции $v(P)$, $P \in S$ существует потенциал двойного слоя

$$w(M) = \int_S \frac{\partial \psi}{\partial n_P} v(P) d\sigma, \quad M \in \mathbb{R}^3. \quad (2.2.55)$$

Очевидно, что при $M = P_0|_S$

$$\widehat{A}[v] = \frac{\partial w}{\partial n_{P_0}}(P_0, P) \Big|_{P_0 \in S}. \quad (2.2.56)$$

Как потенциал двойного слоя, функция $w(M)$ удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца всюду в \mathbb{R}^3 за исключением поверхности S , на поверхности S $w(M)$ разрывна, причем

$$[w(P_0)]|_S = -v(P_0),$$

а ее производная по нормали к поверхности S непрерывна на S , и $w(M)$ удовлетворяет условиям излучения на бесконечности.

На основании указанных свойств функции $w(M)$ получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \int_S \left(\frac{\partial w}{\partial n_P} \right)_e \cdot w_e^* d\sigma &= -k_0 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_R} |w|^2 d\sigma > 0, \\ \operatorname{Im} \int_S \left(\frac{\partial w}{\partial n_P} \right)_i \cdot w_i^* d\sigma &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.57)$$

Отсюда следует

$$\operatorname{Im} \int_S \left(\frac{\partial w}{\partial n_P} \right) v^*(P) d\sigma > 0, \quad (2.2.58)$$

и, окончательно,

$$\operatorname{Im} \langle \widehat{A}[v], v \rangle > 0 \quad \forall v(P), \quad P \in S, \quad (2.2.59)$$

что и доказывает диссипативность оператора $\widehat{A}[v]$.

III-я краевая задача. Диссипативность оператора этой задачи будет доказана в параграфе, посвященном методу дискретных источников.

Замечание 2.2.4 Рассмотренные методы перехода к интегральным уравнениям от задач дифракции на замкнутых телах во многих случаях могут быть перенесены и на задачи дифракции на незамкнутых экранах.

Замечание 2.2.5 Возможно сведение краевых задач теории дифракции и к интегральным уравнениям Фредгольма первого рода другого вида, диссипативность операторов которых удастся доказать лишь при условии нерезонансности области D тела дифракции. Эти уравнения являются частным случаем более общих интегро-функциональных уравнений, свойства которых будут рассмотрены в следующем пункте.

Замечание 2.2.6 Развитые в данном пункте итерационные методы решения скалярных задач дифракции без особых идейных изменений переносятся и на случай электромагнитной дифракции.

2.4. Интегро-функциональные уравнения задач дифракции. Итерационные методы далеко не всегда оказываются наиболее эффективными для решения задач дифракции. Во многих случаях с наименьшим успехом можно пользоваться так называемым методом интегро-функциональных уравнений первого рода. Начнем с наводящих соображений. При выводе уравнения Фока мы исходили из формулы Стрэттона–Чу

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(M) = \mathbf{H}_0(M) + \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \left[\nabla\varphi \times [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \right] - \right. \\ \left. - \nabla\varphi (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) + ik\varphi [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \right\} d\sigma, \quad M \in D_e, \end{aligned} \quad (2.2.60)$$

и для задачи дифракции на идеально проводящем теле при граничном условии $[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]|_S = 0$ путем предельного перехода, устремляя точку M к граничной точке $P_0 \in S$, получили уравнение Фока (2.1.5).

Если попробовать применить этот метод к решению задачи дифракции на импедансном теле с граничным условием

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]|_S = \zeta(P) \left[\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \right] \Big|_S = \zeta(P) [\mathbf{n} \times \mathbf{j}_{\text{пов}}]|_S,$$

то все подынтегральные члены в (2.2.60) окажутся, вообще говоря, отличными от нуля и мы получим уравнение

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{\text{пов}}(P_0) + \frac{1}{2\pi} \int_S \left\{ [\nabla\varphi \times \mathbf{j}_{\text{пов}}] + \frac{i}{k} \nabla\varphi \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_P} \left\{ \zeta(P) [\mathbf{n} \times \mathbf{j}_{\text{пов}}] \right\} + \right. \\ \left. + ik\varphi \left(\zeta(P) [\mathbf{n}_P \times \mathbf{j}_{\text{пов}}] \right) \right\} d\sigma = 2\mathbf{j}_{\text{пов}}^0(P_0). \end{aligned} \quad (2.2.61)$$

Уравнение (2.2.61) является сингулярным интегро-дифференциальным уравнением Фредгольма второго рода, и алгоритмы его численного решения могут оказаться особенно трудоемкими. Это заставляет искать более простые математические модели задач дифракции на импедансных телах.

Как обычно, начнем со скалярной задачи дифракции на импедансном теле:

$$\begin{cases} \Delta u + k_0^2 u = 0, & M \in D_e, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + h(P)u \Big|_S = f(P), \\ \frac{\partial u}{\partial r} - ik u = o\left(\frac{1}{r}\right), & r \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.2.62)$$

Как было доказано ранее, задача (2.2.62) однозначно разрешима при условии $\text{Im } h(P) < 0$.

Применяя в области D_e к функции $u(M)$ и фундаментальному решению однородного уравнения Гельмгольца

$$\varphi(M_0, M) = \frac{e^{ikR}}{R_{M_0M}},$$

при $M_0 \in D_0 \in D_i$ (D_0 — подобласть тела D_i), вторую формулу Грина, и используя условия излучения, получим

$$\int_S \left\{ \varphi(M_0, P) \left(\frac{\partial u}{\partial n_P} \right)_e - u_e \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} d\sigma = 0. \quad (2.2.63)$$

В силу граничного условия в (2.2.62) соотношение (2.2.63) можно переписать в виде

$$\int_S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} + h\varphi \right) u d\sigma = \int_S \varphi(M_0, P) f(P) d\sigma, \quad (2.2.64)$$

и вводя обозначение

$$K(M_0, P) = \frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M_0, P) + h(P)\varphi(M_0, P), \quad M_0 \in D_0, \quad P \in S, \quad (2.2.65)$$

окончательно получим

$$\int_S K(M_0, P) u(P) d\sigma = F(M_0), \quad M_0 \in D_0, \quad (2.2.66)$$

где

$$F(M_0) = \int_S \varphi(M_0, P) f(P) d\sigma - \quad (2.2.67)$$

известная функция, потенциал простого слоя с заданной плотностью $f(P)$.

Заметим, что выражение (2.2.66) является интегральным уравнением первого рода особого вида, поскольку области D_0 задания функции $F(M_0)$ — известной правой части (2.2.66) и искомой функции $u(P)$ ($P \in S$) не совпадают. Это выражение назовем интегро-функциональным уравнением первого рода.

Докажем эквивалентность исходной задачи и уравнения (2.2.66) при условии, что (2.2.66) выполняется для любой точки $M_0 \in D_0$.

Ранее была доказана однозначная разрешимость исходной задачи. Поскольку (2.2.66) получено путем тождественных преобразований решения исходной задачи, то (2.2.66) разрешимо для любой правой части, определенной формулой (2.2.67).

Докажем, что это решение единственно. Предположим, что существует нетривиальное решение $u_0(P) \not\equiv 0$ однородного уравнения (2.2.66). Построим функцию

$$\dot{W}(M) = \int_S K(M, P) u_0(P) d\sigma, \quad (2.2.68)$$

являющуюся комбинацией потенциалов простого и двойного слоя. Очевидно, что $\dot{W}(M)$ (2.2.68) удовлетворяет однородному

уравнению Гельмгольца всюду за исключением поверхности S . В силу (2.2.66) она равна нулю при $M_0 \in D_0$

$$\dot{W}(M_0) \equiv 0, \quad M_0 \in D_0. \quad (2.2.69)$$

Из (2.2.69) в силу аналитичности поверхностных потенциалов $\dot{W}(M) \equiv 0$ при $\forall M \in D_i$. Следовательно, и предельные значения $W_0(M)$ и ее нормальной производной на поверхности S равны нулю

$$\dot{W}_i(P)|_S \equiv \left(\frac{\partial \dot{W}(P)}{\partial n_P} \right) \Big|_{i|_S} = 0. \quad (2.2.70)$$

Так же, как и при доказательстве единственности решения третьей краевой задачи в случае скалярной дифракции, получим

$$\left(\frac{\partial \dot{W}}{\partial n} \right)_e + h(P)\dot{W}_e|_S = 0. \quad (2.2.71)$$

Из (2.2.71) следует, что функция $\dot{W}(M) \equiv 0$, $M \in \mathbb{R}^3$, и тем самым $u_0(P)|_{P \in S} = 0$, что доказывает однозначную разрешимость задачи (2.2.66) и ее эквивалентность задаче (2.2.62).

Замечание 2.2.7 Для численного решения (2.2.66) могут быть использованы все алгоритмы численного решения интегральных уравнений.

Замечание 2.2.8 Требование выполнения (2.2.66) во всех точках области D_0 может быть ослаблено. В частности, если область D_0 нерезонансная, его можно заменить условием, чтобы (2.2.66) выполнялось в счетном, всюду плотном на поверхности S_0 — границе области D_0 , множестве точек $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$. Действительно, в этом случае очевидно функция \dot{W} (2.2.68) удовлетворяет на S_0 условию

$$\dot{W}(P)|_{S_0} = 0, \quad P \in S_0, \quad (2.2.72)$$

и в силу нерезонансности области D_0

$$\dot{W}(M) \equiv 0, \quad M \in D_0.$$

Также достаточно потребовать, чтобы (2.2.66) выполнялось во всех точках P аналитической кривой C , всюду плотно покрывающей поверхность S_0 и даже в счетном множестве точек $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$, всюду плотном на сколь угодно малом отрезке C_ε такой аналитической кривой C .

Замечание 2.2.9 Рассмотренные для скалярного случая методы переносятся и на задачи электромагнитной дифракции. Будем искать решение однородной системы уравнений Максвелла во внешней области D_e поверхности S импедансного тела D_i при граничном условии

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]|_S = \zeta(P) [\mathbf{n} \times \mathbf{j}_{\text{пов}}] + \mathbf{E}_{\mathbf{r}}^0(P) \quad (2.2.73)$$

и условиями излучения на бесконечности.

Пусть в подобласти D_0 внутренней области D_i заданы источники $\mathbf{j}(M)$, создающие в \mathbb{R}^3 вспомогательное поле $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$, удовлетворяющее в D_e однородной системе уравнений Максвелла и условиям излучения. С помощью леммы Лоренца для искомого поля $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ и вспомогательного поля $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$ получим соотношение

$$\int_S \left(\{[\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}] - [\mathbf{E} \times \mathbf{H}_2]\} \cdot \mathbf{n} \right) d\sigma = 0, \quad (2.2.74)$$

которое, используя (2.2.73), перепишем в виде

$$\int_S \left\{ \zeta(P) \left(\mathbf{H}_2(M, P) \cdot [\mathbf{n}(P) \times \mathbf{j}_{\text{пов}}(P)] \right) + \left(\mathbf{E}_2(P) \cdot \mathbf{j}_{\text{пов}}(P) \right) \right\} d\sigma_P = \int_S \left(\mathbf{H}_2(M, P) \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{r}}^0 \right) d\sigma. \quad (2.2.75)$$

Соотношение (2.2.75) является векторным интегро-функциональным уравнением первого рода, и его эквивалентность исходной задаче электромагнитной дифракции доказывается аналогично скалярному случаю.

§ 3. Метод дискретных источников

Одним из действенных методов исследования внешних краевых задач многих разделов математической физики является метод дискретных источников (МДИ), лежащий в основе не только строгих математических рассмотрений проблем однозначной разрешимости больших классов задач, но и являющийся базой создания эффективных компьютерных технологий реализации современных численных методов исследования математических моделей практически важных задач, в частности для анализа

рассеивающих свойств локальных структур, включая наноразмерные неоднородности среды.

Основная идея МДИ состоит в построении квазирешения исходной краевой задачи в виде суперпозиции решений специально выбранных вспомогательных задач.

Рассмотрение реализации МДИ начнем, как обычно, со скалярного случая.

3.1. Скалярная задача. Пусть требуется найти решение внешней краевой задачи

$$\begin{cases} L[u] = 0, & M \in D_e, \\ P[u]|_S = f(P), & P \in S, \\ \frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right), & r \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (2.3.1)$$

где L — линейный дифференциальный оператор в частных производных второго порядка, $P[u]|_S$ — линейный ограниченный оператор на S , первого порядка, $f(P)|_S$ — заданная непрерывно дифференцируемая функция, условия на бесконечности обеспечивают отсутствие внешних источников на бесконечности.

Замечание 2.3.1 Задача, аналогичная (2.3.1), с неоднородной правой частью $L[u] = -F(M)$ достаточно просто сводится к однородному уравнению с измененным граничным условием.

Пусть существует система $\{v_n(M)\}_{n=1}^{\infty}$ частных решений однородного уравнения (2.3.1), удовлетворяющая тем же условиям на бесконечности,

$$L[v_n] = 0, \quad M \in D_e, \quad (2.3.2)$$

и пусть система

$$\{P[v_n]\}_{n=1}^{\infty} = \{\varphi_n(P)\}_{n=1}^{\infty} \quad (2.3.3)$$

полна и замкнута на S , то есть функция $f(P)$ граничного условия (2.3.1) может быть с любой заданной точностью ε_N приближена в норме $L_2(S)$ конечной суперпозицией функций системы (2.3.3)

$$\left\| f(P) - \sum_{n=1}^N C_n^{(N)} \varphi_n(P) \right\| < \varepsilon_N. \quad (2.3.4)$$

Предположим, что задача (2.3.1) однозначно разрешима в классическом смысле. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 2.3.1 Если система $\{\varphi_n(P)\}_{n=1}^{\infty}$ полна и замкнута на S , то квазирешение

$$u_N(M) = \sum_{n=1}^N C_n^{(N)} v_n(M), \quad (2.3.5)$$

с теми же коэффициентами $C_n^{(N)}$, что и в (2.3.4), равномерно приближает решение $u(M)$ задачи (2.3.1) в непрерывной норме

$$|u(M) - u_N(M)| < C(d) \varepsilon_N \quad (2.3.6)$$

в любом компакте d области D_e ($d \in D_e$) с коэффициентом $C(d)$, вообще говоря, своим для выбранного компакта d .

Иными словами, теорема утверждает, что из приближения функции $f(P)$ — граничного условия задачи (2.3.1) системой $\{\varphi_n(P)\}_{n=1}^{\infty}$ в норме $L_2(S)$ следует равномерное приближение классического решения задачи (2.3.1) его квазирешением в любом компакте $d \subset D_e$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При сделанных предположениях относительно задачи (2.3.1) и любого решения $v(M)$ однородного уравнения $L[v] = 0$, $M \in D$, удовлетворяющего тем же условиям на бесконечности, что и решение $u(M)$ задачи (2.3.1), имеет место формула Грина

$$\int_{D_e} \{vL[u] - uL^*[v]\} dV = \int_S \{vP[u] - uP^*[v]\} d\sigma, \quad (2.3.7)$$

где $L^*[v]$ и $P^*[v]$ — операторы сопряженной задачи, существование и методы построения которых рассматриваются в классических курсах уравнений математической физики. Выбирая в качестве функции $v(M)$ в (2.3.7) функцию Грина g сопряженной задачи

$$\begin{cases} L^*[g] = -\delta(M_0, M), M_0, M \in D_e, \\ P^*[g]|_S = 0, \\ \frac{\partial g}{\partial r} - ikg = o\left(\frac{1}{r}\right), r \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (2.3.8)$$

из (2.3.7) получим

$$u(M) = \int_S g(M, P) f(P) d\sigma \quad (2.3.9)$$

и

$$u_N(M) = \int_S g(M, P) \sum_{n=1}^N C_n^{(N)} \varphi_n(P) d\sigma. \quad (2.3.10)$$

Откуда для любого компакта $d \in D_e$ имеет место

$$\begin{aligned} |u(M) - u_N(M)| &= \\ &= \left| \int_S g(M, P) \left\{ f(P) - \sum_{n=1}^N C_n^{(N)} \varphi_n(P) \right\} d\sigma \right|. \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Из равенства (2.3.11), используя формулу Коши–Буняковского и формулу (2.3.4), окончательно получим

$$|u(M) - u_N(M)|_{C(d)} \leq C(d) \varepsilon_N, \quad M \in d \subset D_e, \quad (2.3.12)$$

где

$$C(d) = \|g(M, P)\|_{L_2(S)}, \quad M \in d, \quad (2.3.13)$$

что и доказывает теорему.

Доказанную теорему часто называют *теоремой корректности*.**Замечание 2.3.2** Если норма $\|g(M_0, P)\|_{L_2(S)}$ равномерно ограничена в D_e , то квазирешение равномерно приближает решение (2.3.1) во всей области D_e .**Замечание 2.3.3** В общем случае оператор $P^*[g]_S$ является дифференциальным оператором с косой производной.

3.2. Выбор системы базисных функций. Проблема выбора системы $\{\varphi_n(P)\}_{n=1}^{\infty}$, обладающей требуемыми свойствами, является одной из центральных проблем МДИ. Этот выбор в первую очередь определяется классом изучаемых математических моделей. Начнем со скалярной задачи дифракции на локальном теле в однородной среде, для которой оператор $L[u] = (\Delta + k^2)u$. Для этого класса задач используется ряд различных источников, в частности, дипольные и мультипольные источники, поля которых являются сингулярными решениями однородных уравнений Гельмгольца мультипольного и дипольного типа.

Метагармонические функции (мультиполи И.Н. Векуа) [9]. Эти функции имеют вид

$$v_n(M) = \zeta_{l(n)}^{(1)}(k r_{OM}) Y_n(\theta_M, \varphi_M), \quad (2.3.14)$$

носителем особенности которых является общая точка O соответствующей сферической системы координат. Выбор в качестве радиального сомножителя функции Ханкеля первого рода обеспечивает выполнение условий излучения. Здесь, как и в главе 1, система сферических функций $\{Y_n(\theta, \varphi)\}$ занумерована одним индексом n .

Теорема 2.3.2 Система метагармонических функций (2.3.14) линейно независима, полна и замкнута в норме $L_2(S)$ на любой замкнутой поверхности S типа Ляпунова, содержащей точку O внутри.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с доказательства линейной независимости. Предположим, что существует конечная линейная комбинация функций системы (2.3.14) такая, что

$$\sum_{n=1}^N C_n v_n(P) \Big|_{P \in S} \equiv 0 \quad (2.3.15)$$

на S .

Рассмотрим функцию

$$v(M) = \sum_{n=1}^N C_n v_n(M) \quad (2.3.16)$$

с теми же коэффициентами C_n , что и в (2.3.15). Очевидно, $v(M)$ является решением внешней краевой задачи для однородного уравнения Гельмгольца, равным нулю на S и удовлетворяющим условиям излучения на бесконечности, поэтому в силу теоремы единственности решения задачи Дирихле, имеющей при таких условиях только тривиальное решение, $v(M) \equiv 0$, где $M \in D_e + S$. Поскольку функции (2.3.14) являются аналитическими функциями координат, функция $v(M)$, определяемая (2.3.14), также является аналитической функцией. Отсюда следует, что она может быть аналитически продолжена внутрь области D , ограниченной поверхностью S , только нулем вплоть до начала координат

$$\lim_{M \rightarrow O} v(M) = 0. \quad (2.3.17)$$

Но линейная комбинация конечного числа N метагармонических функций имеет в точке O полюс, порядок которого определяется старшим членом $\zeta_{l(n)}^{(1)}(kr_{OM})$. Полученное противоречие доказы-

ваит линейную независимость системы $\{v_n(M)\}_{n=1}^{\infty}$ на любой поверхности S , содержащей точку O внутри.

Для доказательства полноты и замкнутости системы (2.3.14) предположим, что существует гладкая функция $f(P)$, не равная тождественно нулю и ортогональная на поверхности S всем функциям системы (2.3.14),

$$\int_S v_n(P) f(P) d\sigma = 0 \quad \forall n. \quad (2.3.18)$$

Возьмем шар K_R радиуса R с центром в точке O , целиком лежащий внутри поверхности S . В силу известной теоремы сложения метагармонических функций [32, 40] имеет место разложение

$$\frac{e^{ikR}}{R_{MP}} = \frac{\pi i}{2} \sum_n (2n+1) \psi_{l(n)}(kr_{OM}) Y_n(\theta_M, \varphi_M) v_n(P),$$

$$M \in K_R, P \in S. \quad (2.3.19)$$

Тогда, умножая подынтегральное выражение в (2.3.18) на зависящие лишь от координаты M сомножители при $v_n(P)$ и суммируя по n от 1 до бесконечности, из (2.3.18) получим

$$\int_S \frac{e^{ikR}}{R_{MP}} f(P) d\sigma_P = 0, \quad M \in K_R. \quad (2.3.20)$$

Рассмотрим потенциал простого слоя

$$v(M) = \int_S \frac{e^{ikR}}{R_{MP}} f(P) d\sigma_P. \quad (2.3.21)$$

Очевидно, в силу (2.3.20) функция $v(M)$, определяемая (2.3.21), тождественно равна нулю внутри шара K_R ,

$$v(M) \equiv 0, \quad M \in K_R. \quad (2.3.22)$$

Откуда, в силу аналитических свойств потенциала простого слоя, вытекает

$$f(P) \equiv 0, \quad \forall P \in S. \quad (2.3.23)$$

Полученное противоречие и доказывает справедливость теоремы.

Итак, мы доказали, что из возможности квадратичной (то есть в пространстве $L_2(S)$) аппроксимации метагармоническими функциями (2.3.14) граничного условия $f(P)$ следует существование квазиразрешения $u_N(M)$, приближающего в заданном компакте $d \subset D_e$ в непрерывной норме истинное решение задачи (2.3.1) с требуемой точностью.

Замечание 2.3.4 Если поверхность S не сфера, то система (2.3.14) не является базисом на этой поверхности, то есть любую гладкую на S функцию $f(P)$ можно в норме $L_2(S)$ сколь угодно точно приблизить соответствующей конечной линейной комбинацией метагармонических функций

$$\left\| f(P) - \sum_{n=1}^N C_n v_n(P) \right\| < \varepsilon_N, \quad (2.3.24)$$

однако, вообще говоря, нельзя получить ряд метагармонических функций, равномерно сходящийся на S к $f(P)$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N C_n v_n(P) \neq f(P). \quad (2.3.25)$$

Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, рассмотрим пример, предложенный В.В. Кравцовым.

Пусть S — произвольная поверхность типа Ляпунова, отличная от сферы. Из произвольной точки O внутри S опишем сферу Σ_{R_0} , частично пересекающую поверхность S . Возьмем на этой сфере точку M_0 , лежащую внутри поверхности S и построим функцию

$$\frac{e^{ikR}}{R_{M_0P}} = f(P)|_{P \in S}, \quad M_0 \in \Sigma_{R_0}. \quad (2.3.26)$$

Рассмотрим внешнюю краевую задачу

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & M \in D_e, \\ u|_S = f(P)|_{P \in S} = \frac{e^{ikR}}{R_{M_0P}}, & M_0 \in D_i, \\ \frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right), & r \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.3.27)$$

Задача (2.3.27) однозначно разрешима, и ее решение, очевидно, равно

$$u(M) = \frac{e^{ikR}}{R_{M_0M}}, \quad M \in D_e + S. \quad (2.3.28)$$

Предположим, что система метагармонических функций (2.3.14) $\{v_n(P)\}_{n=1}^{\infty}$ — базис на S , то есть возможно представление функции $f(P)$ на S в виде сходящегося ряда

$$f(P) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n v_n(P). \quad (2.3.29)$$

Тогда в силу теоремы корректности получим

$$u(M) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n v_n(M), \quad M \in D_e + S, \quad (2.3.30)$$

что в силу (2.3.28) дает

$$\frac{e^{ikR}}{R_{M_0M}} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n v_n(M), \quad M \in D_e + S. \quad (2.3.31)$$

Используя формулу сложения метагармонических функций в точке M_1 , лежащей и вне поверхности S и вне Σ_{R_0} , можно записать цепочку равенств

$$\begin{aligned} u(M_1) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n v_n(M_1) = \frac{e^{ikR}}{R_{M_0M_1}} = \\ &= \frac{\pi i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \psi_{l(n)}(kR_0) Y_n(M_0) v_n(M_1), \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

откуда

$$C_n = \frac{\pi i}{2} (2n+1) \psi_{l(n)}(kR_0) Y_n(M_0). \quad (2.3.33)$$

Так как представление (2.3.30) выполняется во всех точках $M \in D_e$, включая точку M_2 , лежащую внутри Σ_{R_0} , но вне S , то должно иметь место и представление

$$\begin{aligned} u(M_2) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n v_n(M_2) = \frac{e^{ikR}}{R_{M_0M_2}} = \\ &= \frac{\pi i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \psi_{l(n)}(kR_0) Y_n(M_0) v_n(M_2), \end{aligned} \quad (2.3.34)$$

что противоречит формуле сложения метагармонических функций при $r_{OM_2} < R_0$

$$\frac{e^{ikR}}{R_{M_0M_2}} = \frac{\pi i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \psi_{l(n)}(kR_{M_2}) Y_n(M_2) v_n(M_0), \quad (2.3.35)$$

что и доказывает утверждение о небазисности системы (2.3.14).

Замечание 2.3.5 Системы функций $\left\{ \frac{\partial v_n}{\partial n_P} + \alpha(P)v_n(P) \right\}_{n=1}^{\infty} \Big|_S$ и $\left\{ \frac{\partial v_n}{\partial n_P} \right\}_{n=1}^{\infty} \Big|_S$ линейно независимы, полны и замкнуты в $L_2(S)$. Доказательства этих утверждений с незначительными изменениями и дополнениями повторяют доказательство теоремы 2.3.2.

3.3. Диполи В.Д. Купрадзе. Метагармонические функции составляют класс дискретных источников (Д.И.), носителем сингулярности которых является единственная общая точка. Это в ряде случаев ограничивает область эффективного применения метагармонических функций в МДИ решения конкретных задач. Более общим является класс Д.И., носитель сингулярности которых уже не единственная точка, а некоторое многообразие. В частности, такими Д.И. являются так называемые дипольные источники

$$\{w_n(M)\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{e^{ikR}}{R_{M_nM}} \right\}_{n=1}^{\infty}, \quad M_n \in D_0, \quad M \in \mathbb{R}^3, \quad (2.3.36)$$

сингулярности которых — точки $\{M_n\}$ всюду плотно заполняют некоторую область $D_0 \subset \mathbb{R}^3$. Функции (2.3.36) одним из первых использовал для решения ряда задач математической физики известный грузинский математик В.Д. Купрадзе, и они иногда называются *диполи Купрадзе* [18].

Перейдем к изучению свойств Д.И. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.3.3 Счетная последовательность функций (2.3.36) с сингулярностями в точках $\{M_n\}_{n=1}^{\infty} \in D_0 \subset \mathbb{R}^3$, всюду плотно заполняющих область D_0 , линейно независима, полна и замкнута на любой замкнутой поверхности S типа Ляпунова, объемлющей область D_0 .

Доказательство. Линейная независимость системы (2.3.36) на S доказывается также, как и в теореме 2.3.2. Чтобы доказать

полноту и замкнутость системы (2.3.36), предположим, что на S существует гладкая функция $f(P) \neq 0$, $P \in S$, ортогональная всем функциям системы (2.3.36)

$$\int_S w_n^*(M_n, P) f(P) d\sigma = 0, \quad \forall n \quad (2.3.37)$$

и построим потенциал простого слоя

$$U(M) = \int_S \frac{e^{-ikR}}{R_{MP}} f(P) d\sigma. \quad (2.3.38)$$

На основании (2.3.37)

$$U(M_n) \equiv 0, \quad \forall M_n \in D_0, \quad (2.3.39)$$

а так как $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ всюду плотна в D_0 , то

$$U(M) \equiv 0, \quad M \in D_0. \quad (2.3.40)$$

В силу аналитических свойств потенциала простого слоя из (2.3.40) следует, что

$$U(M) \equiv 0, \quad M \in D_i + S, \quad (2.3.41)$$

и в силу непрерывности потенциала простого слоя на S верно

$$U_e(P_0)|_{P_0 \in S} = 0, \quad (2.3.42)$$

откуда на основании единственности решения внешней задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца выполняется

$$U(M) \equiv 0, \quad M \in \mathbb{R}^3, \quad (2.3.43)$$

а, следовательно и $f(P)|_{P \in S} = 0$. Полученное противоречие доказывает теорему 2.3.3.

Замечание 2.3.6 Утверждение теоремы 2.3.3 имеет место и при ослабленных условиях на носитель сингулярности функций (2.3.36). Если область D_0 в теореме 2.3.3 нерезонансная, для доказательства теоремы 2.3.3 достаточно требования, чтобы $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ всюду плотно покрывала только поверхность $S_0 = \partial D_0$ области D_0 и даже, чтобы множество $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ было всюду плотно на любом отрезке C_ε аналитической кривой C , всюду плотно покрывающей поверхность S_0 нерезонансной области D_0 внутри S .

Замечание 2.3.7 Последовательность (2.3.36) не минимальна и не является базисом на S , однако из нее можно выделить подпоследовательности, представляющие собой базисы в $L_2(S)$.

Замечание 2.3.8 Функции Д.И. вида (2.3.36) могут быть использованы и для решения внутренних краевых задач для уравнения Гельмгольца внутри нерезонансного тела D_i

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & M \in D_i, \\ (u)_i|_S = f(P). \end{cases} \quad (2.3.44)$$

Для построения алгоритма численного решения задачи (2.3.44) можно воспользоваться функциями (2.3.36), выбрав в качестве носителя их сингулярностей множество точек $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$, всюду плотно покрывающих поверхность S , объемлющую тело D_i .

Также можно для решения задачи (2.3.44) использовать регулярные Д.И. вида

$$\chi_n(M) = \frac{\sin kR}{R_{M_0M}}, \quad M_0 \in D_0 \subset D_i, \quad M \in D_i, \quad (2.3.45)$$

для которых при условии нерезонансности тела D_i имеет место аналог теоремы 2.3.3.

Замечание 2.3.9 Дипольные Д.И. можно использовать и для решения задачи дифракции на прозрачном однородном теле.

Рассмотрим задачу с условиями сопряжения

$$\begin{cases} \Delta u_e + k_e^2 u_e = -f(M), & M \in D_e, \\ \text{Supp} f(M) \subset D_0 \subset D_e, \\ \Delta u_i + k_i^2 u_i = 0, & M \in D_i, \\ u_e(P)|_S = u_i(P)|_S; \quad \frac{\partial u_e}{\partial n_P}|_S = \frac{\partial u_i}{\partial n_P}|_S, & P \in S, \\ \frac{\partial u_e}{\partial r} - ik_e u_e = o\left(\frac{1}{r}\right), & r \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.3.46)$$

Будем искать решение $u_e(M)$ в области D_e в виде $u_e(M) = u_0(M) + v(M)$, где

$$u_0(M) = \int_{D_0} \frac{e^{ik_e R}}{R_{MQ}} f(Q) dV_Q \quad (2.3.47)$$

есть объемный потенциал с плотностью $f(M)$. Тогда (2.3.46) перейдет в задачу

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta v + k_e^2 v = 0, \quad M \in D_e, \\ \Delta u_i + k_i^2 u_i = 0, \quad M \in D_i, \\ \left(v(P) - u_i(P) \right) \Big|_{P \in S} = -u_0(P) = \psi(P), \quad P \in S, \\ \left(\frac{\partial v}{\partial n_P} - \frac{\partial u_i}{\partial n_P} \right) \Big|_{P \in S} = - \frac{\partial u_0}{\partial n} \Big|_S = \varphi(P). \end{array} \right. \quad (2.3.48)$$

Методом дискретных источников квазирешение задачи (2.3.48) ищем в виде

$$\begin{aligned} v_N(M) &= \sum_{n=1}^N \alpha_n^{(N)} w_n(M_n, M), \\ &M \in D_e, M_n \in D_0 \subset D_i, \\ u_{i_N}(M) &= \sum_{n=1}^N \beta_n^{(N)} \chi_n(M_n, M), \\ &M \in D_i, M_n \in D'_0 \subset D_i, \end{aligned} \quad (2.3.49)$$

где $w_n(M_n, M)$ — функции (2.3.36), а $\chi_n(M_n, M)$ — Д.И. (2.3.45). Аппроксимируя функции $\psi(P)$ и $\varphi(P)$ с заданной точностью ε_N , получим из граничных условий (2.3.48) систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов $\alpha_n^{(N)}$ и $\beta_n^{(N)}$, а тем самым и квазирешения $v_N(M)$ и $u_{i_N}(M)$, приближающие в непрерывной норме истинные решения задачи (2.3.48) с точностью $O(\varepsilon_N)$.

3.4. Алгоритм численной реализации МДИ. Существенным моментом в реализации МДИ является разработка эффективных алгоритмов их численного исследования, в первую очередь методов численной реализации проблемы аппроксимации граничных условий. Здесь возможно использование всего арсенала современной вычислительной математики, однако специфическим для численного решения краевых задач дифракции является так называемый метод коллокаций, суть которого состоит в сведении задачи минимизации квадратичной нормы невязки аппроксимации граничного условия конечной комбинацией Д.И.

$$\min \left\| f(P) - \sum_{n=1}^N C_n \varphi_n(P) \right\|_{L_2(S)} \quad (2.3.50)$$

к решению системы линейных алгебраических уравнений для коэффициентов C_n .

Возьмем на поверхности S конечное M число таких точек $P_m \in S$, которые назовем точками коллокации, и потребуем, чтобы в этих точках выполнялись соотношения

$$\sum_{n=1}^N C_n^{(N)} \varphi_n(P_m) = f(P_m), \quad m = 1, \dots, M. \quad (2.3.51)$$

Свойства системы (2.3.51) неоднократно подробно анализировались в различных пособиях по вычислительным методам в теории дифракции (см., например, [16]). Отметим, что при $M > N$ система (2.3.51) становится переопределенной, и можно говорить только о ее псевдорешениях, что в ряде случаев представляет определенные преимущества. Заметим, что найдя решение системы (2.3.51), легко получить оценки нормы невязки найденного квазирешения и истинного решения исходной задачи.

Наконец, заметим, что задача (2.3.50), вообще говоря, является некорректно поставленной и для получения ее устойчивого решения в общем случае следует прибегать к методам регуляризации некорректно поставленных задач, впервые предложенным А.Н. Тихоновым.

3.5. Дифракция на осесимметричном теле. Как мы уже отмечали, большой класс задач дифракции связан с исследованием рассеяния осесимметричными телами.

Пусть поверхность S образована вращением контура C вокруг оси z цилиндрической системы координат (r, φ, z) . Рассмотрим внешнюю скалярную задачу Дирихле дифракции на таком теле при условии, что граничная функция $f(P)$ не зависит от угла φ :

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & M \in D_e, \\ u|_S = f(P), \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi}|_S = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right), & r \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.3.52)$$

Покажем, что для решения этой задачи можно воспользоваться системой Д.И. (2.3.36), носителем сингулярности которых

является отрезок $[a, b]$ оси z , целиком лежащий внутри поверхности S . Для этого достаточно доказать, что система Д.И.

$$\{\dot{w}_n(M_n, M)\} = \left\{ \frac{e^{ikR}}{R_{M_n M}} \right\}_{n=1}^{\infty}, \quad (2.3.53)$$

где последовательность точек $\{M_n(0, 0, z_n)\}$, $z_n \in [a, b]$, имеющая предельную точку $\hat{z} \in [a, b]$, полна и замкнута на поверхности S в классе осесимметричных функций $f(P)$: $\frac{\partial f}{\partial \varphi}(P) = 0$. Для упрощения последующих обозначений будем считать, что $\hat{z} = 0$.

Предположим, что существует функция $f(P) \neq 0$, ортогональная всем функциям системы (2.3.53):

$$\int_S \dot{w}_n(M_n, P) f(P) d\sigma_P = 0 \quad \forall n. \quad (2.3.54)$$

Построим потенциал простого слоя

$$\dot{u}(M) = \int_S \frac{e^{ikR}}{R_{MP}} f(P) d\sigma_P. \quad (2.3.55)$$

Согласно (2.3.54)

$$\dot{u}(M_n) = 0. \quad (2.3.56)$$

Воспользуемся теоремой сложения метагармонических функций

$$\frac{e^{ikR}}{R_{MP}} = \frac{\pi i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \psi_n(kr_{\widehat{M}M}) P_n(\cos \theta_M) \dot{v}_n(P), \quad (2.3.57)$$

где \widehat{M} , $M \in [a, b]$, а $\dot{v}_n(P)$ — осесимметричная метагармоническая функция, $\psi_n(P)$ — сферическая функция Бесселя. Обозначим $kr_{\widehat{M}M} = z$, и, учитывая, что $\cos \theta_M = \pm 1$, получим

$$\dot{u}(z) = \int_S \frac{e^{ikR}}{R_{MP}} f(P) d\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(z) \alpha_n, \quad (2.3.58)$$

где

$$\alpha_n = \pm \frac{\pi i}{2} (2n+1) \int_S f(P) \dot{v}_n(P) d\sigma. \quad (2.3.59)$$

В силу (2.3.56) $\dot{u}(z_n) = 0$ и $\lim_{z_n \rightarrow 0} \dot{u}(z_n) = 0$, а тем самым из (2.3.58) следует

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(0) \alpha_n = 0. \quad (2.3.60)$$

Как известно, сферические функции Бесселя

$$\psi_n(0) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n > 0. \end{cases} \quad (2.3.61)$$

Тогда из (2.3.60) получим $\alpha_0 = 0$ и (2.3.58) принимает вид

$$\dot{u}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z) \alpha_n. \quad (2.3.62)$$

Для $z_n \neq 0$ в силу (2.3.56)

$$\frac{\dot{u}(z_n)}{z_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(z_n)}{z_n} \alpha_n = 0 \quad (2.3.63)$$

и в пределе

$$\lim_{z_n \rightarrow 0} \frac{\dot{u}(z_n)}{z_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{z_n \rightarrow 0} \frac{\psi_n(z_n)}{z_n} \alpha_n = 0. \quad (2.3.64)$$

Но

$$\lim_{z_n \rightarrow 0} \frac{\psi_n(z_n)}{z_n} = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n > 1. \end{cases} \quad (2.3.65)$$

Откуда следует $\alpha_1 = 0$ и (2.3.62) принимает вид

$$\dot{u}(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \psi_n(z) \alpha_n. \quad (2.3.66)$$

Продолжая этот процесс, окончательно получим

$$\alpha_n \equiv 0 \quad \forall n. \quad (2.3.67)$$

Откуда в силу (2.3.59)

$$\int_S f(P) \dot{v}_n(P) d\sigma = 0, \quad (2.3.68)$$

где $\dot{v}(P)|_{P \in S}$ — осесимметричная метагармоническая функция с сингулярностью в точке \hat{z} . Очевидно, что (2.3.68) имеет место и для всех неосесимметричных метагармонических функций, поскольку $f(P)$ не зависит от угла φ , а зависимость $v(M)$ от угла φ такова, что

$$\int_0^{2\pi} v_n(P) d\sigma = 0. \quad (2.3.69)$$

Итак, предположение, что функция $f(P)$ ($\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$) ортогональна на S всем функциям $\dot{w}(M_n, P)$ (2.3.53), приводит к заключению об ортогональности на S функции $f(P)$ всем метагармоническим функциям. Как было ранее доказано, система метагармонических функций $v_n(M) = \zeta_{l(n)}^{(1)}(kr_{OM}) Y_n(\theta_M, \varphi_M)$ полна и замкнута на любой поверхности S , содержащей точку O внутри, что и доказывает полноту и замкнутость системы (2.3.53).

Замечание 2.3.10 Если граничная функция задачи дифракции на осесимметричном теле имеет вид

$$f(P) = \hat{f}(P) e^{im\varphi}, \quad \text{при условии} \quad \left. \frac{\partial \hat{f}}{\partial \varphi} \right|_S \equiv 0, \quad (2.3.70)$$

то полная и замкнутая на S в классе функций (2.3.70) система $\{w_n(M_n, P)\}$ с сингулярностями в точках $M_n \in [a, b]$ оси z определяется выражением

$$w_n^{(m)}(M) = \zeta_{|m|}^{(1)}(kr_{M_n M}) P_{|m|}^{(m)}(\cos \theta_M),$$

$$\text{где } P_m^m(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_m(x) \equiv a_m (1 - x^2)^{\frac{m}{2}}, \quad (2.3.71)$$

$$\text{то есть } P_m^m(\cos \theta) = a_m \sin^m \theta.$$

Замечание 2.3.11 В случае сплюснутого тела, когда отрезок $[a, b]$ оси z много меньше радиального размера R_0 тела D_i при численной реализации МДИ с помощью данной системы Д.И. при достаточно большом числе точек M_n система (2.3.53) может оказаться численно линейно зависимой, что существенно осложняет решение задачи, приводя к плохой обусловленности матрицы соответствующей СЛАУ. Чтобы устранить это осложнение, будем использовать Д.И. вида

$$w_n(M_n, M) = \frac{e^{ikR}}{R_{M_n M}}, \quad M_n(0, 0, 0, \zeta_n), \quad M(0, 0, \rho, z), \quad (2.3.72)$$

где $R_{M_n M}$ уже не расстояние между точками M_n и M , а комплексная величина

$$R_{M_n M}^2 = (z - \zeta_n)^2 + \rho^2, \quad (2.3.73)$$

где комплексный параметр

$$\zeta_n = \xi_n + i\eta_n \quad (0 \leq \eta_n < R_0). \quad (2.3.74)$$

Тем самым мы получаем дополнительный параметр, что при достаточно больших значениях R_0 может повысить обусловленность СЛАУ, сохраняя достаточно большие значения n .

Физический смысл введения такого дополнительного параметра состоит в замене дипольных Д.И. с точечными сингулярностями на круговые токи с центрами на оси z .

3.6. Проекционный метод определения амплитуд дискретных источников. Наряду с методом коллокаций для большого класса задач достаточно эффективным является проекционный метод вычисления амплитуд дискретных источников. Основные идеи этого метода рассмотрим, как и в предыдущих случаях, на примере скалярной задачи дифракции на импедансном теле, условия однозначной разрешимости которой были установлены в предыдущей главе

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u + k^2 u = 0, \quad M \in D_e, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + h(P)u \Big|_S = f(P), \\ \operatorname{Im} h(P) = -\alpha(P), \quad \alpha(P) \geq \alpha_0 > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty. \end{array} \right. \quad (2.3.75)$$

Общие свойства задачи.

Лемма 2.3.1 Решение задачи (2.3.75) ограничено в норме $L_2(S)$ на S при заданной функции $f(P)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая уравнение (2.3.75) на $u^*(M)$ и ин-

тегрируя по области D_e , в силу граничных условий и условий на бесконечности получим

$$0 = \int_{D_e^*} (\Delta u + k^2 u) u^* dV = \int_S \frac{\partial u}{\partial n} u^* d\sigma + \\ + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_R} \frac{\partial u}{\partial r} u^* d\sigma - \int_{D_e^*} |\nabla u|^2 dV + k^2 \int_{D_e^*} |u|^2 dV. \quad (2.3.76)$$

Имеют место следующие очевидные равенства:

$$\operatorname{Im} \int_S \frac{\partial u}{\partial n} u^* d\sigma = \operatorname{Im} \int_S (-h(P)|u|^2 + u^* f(P)) d\sigma, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \int_{\Sigma_R} \frac{\partial u}{\partial r} u^* d\sigma = k \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_R} |u|^2 d\sigma \quad (2.3.77)$$

и

$$\alpha(P) \left\{ |u|^2 + \frac{1}{2i\alpha(P)} (u^* f - u f^*) \right\} \Big|_S = \\ = \alpha(P) \left\{ \left| u + \frac{f(P)}{2i\alpha(P)} \right|^2 - \frac{|f(P)|^2}{4\alpha^2(P)} \right\}. \quad (2.3.78)$$

Тогда мнимая часть (2.3.76) приобретает вид

$$\int_S \alpha(P) \left| u + \frac{f(P)}{2i\alpha(P)} \right|^2 d\sigma + k \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_R} |u|^2 d\sigma = \\ = \int_S \frac{|f(P)|^2}{4\alpha^2(P)} d\sigma = A. \quad (2.3.79)$$

Окончательно получаем

$$\|u(P)\|_{L_2(S)} < A. \quad (2.3.80)$$

Лемма доказана.

Физический смысл соотношения (2.3.79) ясен, это закон сохранения энергии: *сумма диссипативных потерь на импедансной границе S и уходящего на бесконечность потока энергии равна мощности источников, создающих данное поле.*

Общая схема метода. Сформулируем теперь общую схему рассматриваемого метода. В области D_i возьмем область $D' \subset D_i$

и будем искать квазирешение задачи (2.3.75) в виде конечной линейной комбинации дипольных дискретных источников:

$$u_N(M) = \sum_{n=1}^N T_n^{(N)} w_n(M). \quad (2.3.81)$$

Множество $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ сингулярностей функций $w_n(M_n, M)$ всюду плотно в области D' . Согласно предыдущим результатам системы

$$\{w_n(M_n, P)\}_{n=1}^{\infty} \Big|_{P \in S} \quad \text{и} \quad \left\{ \frac{\partial w_n}{\partial n_P} + h(P) w_n(M_n, P) \right\}_{n=1}^{\infty} \Big|_{P \in S}$$

линейно независимы, полны и замкнуты на S . Амплитуды $T_n^{(N)}$ дискретных источников в (2.3.81) будем определять из системы проекционных соотношений

$$\int_S \left(\widehat{h}[u_N] \cdot w_m^* \right) d\sigma = f_m = \int_S f(P) w_m^* d\sigma, \quad (2.3.82)$$

$$m = 1, 2, \dots, M,$$

где $\widehat{h}[u_N]$ — граничный оператор

$$\widehat{h} = \left(\frac{\partial}{\partial n} + h \right). \quad (2.3.83)$$

Соотношения (2.3.82) представляют собой СЛАУ порядка M для N неизвестных $T_n^{(N)}$, $n = 1, 2, \dots, N$, которую можно записать в виде

$$\widehat{K}^{(N)} [\mathbf{T}^{(N)}] = \mathbf{F}^{(N)}, \quad (2.3.84)$$

где элементы матрицы оператора $\widehat{K}^{(N)}$ равны

$$k_{mn} = \int_S \left(\widehat{h}[w_n(P)] \cdot w_m^* \right) d\sigma_P, \quad (2.3.85)$$

а $\mathbf{T}^{(N)}$ и $\mathbf{F}^{(N)}$ — векторы неизвестных $T_n^{(N)}$ и заданных правых частей (2.3.82). Имеет место

Теорема 2.3.4 Для любого значения N оператор $\widehat{K}^{(N)}$ диссипативен.

Теорема утверждает, что для любых N и вектора $\mathbf{Q}^{(N)}$ имеет место неравенство

$$\left| \left\langle \widehat{K}^{(N)} [\mathbf{Q}^{(N)}], \mathbf{Q}^{(N)} \right\rangle \right| \neq 0. \quad (2.3.86)$$

Доказательство. Построим функцию

$$v_N(P) = \sum_{n=1}^N Q_n^{(N)} w_n(P), \quad (2.3.87)$$

где $Q_n^{(N)}$ — элементы вектора $\mathbf{Q}^{(N)}$. Непосредственной проверкой легко убедиться, что

$$\langle \widehat{K}^{(N)} [\mathbf{Q}^{(N)}], \mathbf{Q}^{(N)} \rangle = \int_S \left(\widehat{h} [v_N] \cdot v_N^* \right) d\sigma. \quad (2.3.88)$$

Тогда мнимая часть (2.3.88) равна

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \int_S \widehat{h} [v_N] \cdot v_N^* d\sigma &= \\ &= -k \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_R} |v_N|^2 d\sigma - \int_S \alpha(P) |v_N|^2 d\sigma < 0, \end{aligned} \quad (2.3.89)$$

что и доказывает диссипативность оператора $\widehat{K}^{(N)}$ для любого N .

Очевидно, что если

$$\langle \widehat{K}^{(N)} [\mathbf{Q}_0^{(N)}], \mathbf{Q}_0^{(N)} \rangle = 0, \quad (2.3.90)$$

то $\mathbf{Q}_0^{(N)} \equiv 0$. Отсюда следует однозначная разрешимость СЛАУ (2.3.84) для любого $\mathbf{F}^{(N)}$.

Лемма 2.3.2 Семейство $\{u_N(P)\}$ равномерно по N ограничено в норме $L_2(S)$.

Доказательство. Умножая соотношения (2.3.82) на $(T_m^{(N)})^*$ и суммируя по m , получим

$$\int_S \widehat{h} [u_N] u_N^* d\sigma = \int_S f(P) u_N^* d\sigma_P. \quad (2.3.91)$$

Функция $u_N(M)$ является решением однородного уравнения Гельмгольца в области D_e . Поэтому, проводя те же преобразования, что и при доказательстве леммы 2.3.1, получим энергетическое соотношение для функции u_N , аналогичное (2.3.79), где правая часть зависит только от заданной функции $f(P)$ и не за-

висит от N , что и доказывает равномерную по N ограниченность семейства $\{u_N\}$ в норме $L_2(S)$

$$\|u_N\|_{L_2(S)} < A. \quad (2.3.92)$$

Теорема 2.3.5 При $N \rightarrow \infty$ семейство функций $\{u_N(P)\}|_S$ сходится в норме $L_2(S)$ к истинному решению $u(P)|_S$ задачи (2.3.75), то есть

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|u - u_N\|_{L_2(S)} = 0. \quad (2.3.93)$$

Доказательство. В силу полноты и замкнутости на S систем $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\widehat{h}[w_n]\}_{n=1}^{\infty}$ для любого $\varepsilon_N > 0$ имеет место приближение граничной функции задачи (2.3.75) $f(P)$:

$$\left\| \left\{ f(P) - \sum_{n=1}^N q_n^{(N)} \widehat{h}[w_n] \right\} \right\|_{L_2(S)} < \varepsilon_N. \quad (2.3.94)$$

Построим функцию

$$v_N(P) = \sum_{n=1}^N q_n^{(N)} w_n(P), \quad (2.3.95)$$

и рассмотрим невязки

$$u(P) - v_N(P) = r_N(P). \quad (2.3.96)$$

Обозначим $\widehat{h}[r_N] = \delta_N$ и докажем, что $\|v_N\|_{L_2(S)}$ и $\|r_N\|_{L_2(S)}$ равномерно по N ограничены и $\|r_N\|_{L_2(S)} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Заметим, что из (2.3.94) следует

$$\|f(P) - \widehat{h}[v_N]\|_{L_2(S)} = \|\delta_N\| < \varepsilon_N. \quad (2.3.97)$$

Очевидно, что функция $r_N(M)$, $M \in D_e$ является решением однородного уравнения Гельмгольца

$$\Delta r_N + k^2 r_N = 0, \quad M \in D_e, \quad (2.3.98)$$

удовлетворяющим условиям излучения на бесконечности. Следовательно, как и в предыдущих случаях, справедливы равенства

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \int_S \widehat{h}[r_N] r_N^* d\sigma &= -k \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_R} |r_N|^2 d\sigma - \\ &- \int_S \alpha(P) |r_N(P)|^2 d\sigma = \operatorname{Im} \int_S \delta_N r_N^* d\sigma. \end{aligned} \quad (2.3.99)$$

Отсюда можно заключить, что

$$\int_S \alpha(P) \left| r_N + \frac{\delta_N}{2i\alpha(P)} \right|^2 d\sigma + k \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_R} |r_N|^2 d\sigma = \int_S \frac{|\delta_N|^2}{4\alpha^2(P)} d\sigma < A\varepsilon_N, \quad (2.3.100)$$

что окончательно дает $\|r_N\|_{L_2(S)} < A$, откуда из (2.3.96) и ограниченности $\|u\|_{L_2(S)}$ получим

$$\|v_N\|_{L_2(S)} < A, \quad (2.3.101)$$

причем при $N \rightarrow \infty$ и $\lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon_N = 0$

$$\|r_N\|_{L_2(S)} \rightarrow 0. \quad (2.3.102)$$

Полученные оценки доказывают справедливость утверждения теоремы 2.3.5.

Теорема 2.3.6 При $N \rightarrow \infty$ последовательность квазирешений $\{u_N\}_{n=1}^N$ сходится по норме $L_2(S)$ к истинному решению задачи (2.3.75), то есть

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|u(P) - u_N(P)\|_{L_2(S)} = 0. \quad (2.3.103)$$

Доказательство. Представим оцениваемое выражение в виде

$$\begin{aligned} u(P) - u_N(P) &= u(P) - v_N(P) + (v_N(P) - u_N(P)) = \\ &= r_N(P) + (v_N(P) - u_N(P)) \end{aligned} \quad (2.3.104)$$

и докажем, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|v_N(P) - u_N(P)\|_{L_2(S)} = 0. \quad (2.3.105)$$

Функции $v_N(P)$ и $u_N(P)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \int_S \widehat{h}[v_N]w_m^* d\sigma &= - \int_S \delta_N w_m^* d\sigma + \int_S f w_m^* d\sigma, \\ \int_S \widehat{h}[u_N]w_m^* d\sigma &= \int_S f w_m^* d\sigma. \end{aligned} \quad (2.3.106)$$

Откуда, вводя функцию

$$w_N(P) = v_N(P) - u_N(P) = \sum_{n=1}^N \left(q_n^{(N)} - T_n^{(N)} \right) w_n(P), \quad (2.3.107)$$

после умножения (2.3.106) на коэффициенты функции w_N и суммирования по m будем иметь

$$\int_S \widehat{h}[w_N]w_N^* d\sigma = - \int_S \delta_N w_N^* d\sigma. \quad (2.3.108)$$

Так как функции w_N равномерно ограничены по N , а $\|\delta_N\|_{L_2(S)} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|w_N\|_{L_2(S)} = 0, \quad (2.3.109)$$

что и доказывает утверждение теоремы.

Замечание 2.3.12 В силу теоремы корректности (теорема 2.3.1) отсюда следует, что для любого компакта $d \in D_\varepsilon$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |u(M) - u_N(M)| = 0, \quad M \in d \subset D_\varepsilon. \quad (2.3.110)$$

§ 4. Метод антенных потенциалов

К методу дискретных источников близко примыкает и так называемый метод антенных потенциалов. Как обычно, рассмотрим основные идеи этого метода на примере скалярной дифракции. Пусть внутри замкнутой поверхности S типа Ляпунова задана нерезонансная область D_0 и отрезок $C_\varepsilon \subset C$ — аналитической кривой, всюду плотно покрывающей поверхность $S_0 = \partial D_0$.

Пусть, кроме того, на поверхности S задана полная и замкнутая система гладких функций $\{\nu_n(Q)\}_{n=1}^{\infty}$.

Построим систему функций $\{v_n(M)\}_{n=1}^{\infty}$, $M \in \mathbb{R}^3$ — несобственных криволинейных интегралов, зависящих от параметра

$$v_n(M) = \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{ikR}}{R_{MQ}} \nu_n(Q) dl_Q. \quad (2.4.1)$$

Функции $v_n(M)$, определенные всюду в \mathbb{R}^3 за исключением кривой C_ε , носят название антенных потенциалов. Очевидно, $v_n(M)$ удовлетворяют однородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta v_n + k^2 v_n = 0, \quad M \in \mathbb{R}^3 \setminus C_\varepsilon, \quad (2.4.2)$$

условиям излучения на бесконечности и имеют сингулярную особенность при стремлении точки M к точке Q_0 кривой C_ε , в которой $\nu_n(Q_0) \neq 0$.

Теорема 2.4.1 Система (2.4.1) функций $\{v_n(M)\}_{n=1}^{\infty}$ линейно независима, полна и замкнута на любой поверхности S , содержащей область D_0 внутри.

Доказательство. Линейная независимость системы (2.4.1) доказывается так же, как и для рассмотренных ранее систем дискретных источников. Для доказательства полноты и замкнутости системы (2.4.1) в $L_2(S)$ предположим, что на S существует не равная тождественно нулю гладкая функция $f(P)$, $P \in S$, которая ортогональна всем функциям системы (2.4.1):

$$\int_S f^*(P) v_n(P) d\sigma_P = 0, \quad (2.4.3)$$

или, подробнее,

$$\int_S f^*(P) \left(\int_{C_\varepsilon} \frac{e^{ikR}}{R_{PQ}} \nu_n(Q) dl_Q \right) d\sigma_P = 0. \quad (2.4.4)$$

Меняя порядок интегрирования, что, очевидно, возможно при сделанных предположениях о гладкости функций $f(P)$ и $\nu_n(Q)$, получим

$$\int_{C_\varepsilon} \nu_n(Q) \left(\int_S \frac{e^{ikR}}{R_{PQ}} f^*(P) d\sigma_P \right) dl_Q = 0. \quad (2.4.5)$$

Так как система $\{\nu_n(Q)\}_{n=1}^{\infty}$ полна и замкнута на C_{ε} , отсюда следует, что

$$\int_S \frac{e^{ikR}}{R_{PQ}} f(P) d\sigma_P = 0 \quad \forall Q \in C_{\varepsilon}. \quad (2.4.6)$$

Из условия, что $C_{\varepsilon} \in C$ — аналитической кривой, всюду плотно покрывающей поверхность D_0 , следует, что

$$f(P) \equiv 0, \quad P \in S. \quad (2.4.7)$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 2.4.2 Любую гладкую функцию $f(P)$, $P \in S$, можно сколь угодно точно приблизить в норме $L_2(S)$ антенным потенциалом

$$v(M) = \int_{C_{\varepsilon}} \frac{e^{ikR}}{R_{MQ}} \nu(Q) dl_Q, \quad (2.4.8)$$

то есть $\forall \varepsilon_N > 0 \exists \nu(Q)$, где $Q \in C_{\varepsilon}$, такое что

$$\left\| f(P) - \int_{C_{\varepsilon}} \frac{e^{ikR}}{R_{PQ}} \nu(Q) dl_Q \right\|_{L_2(S)} < \varepsilon_N. \quad (2.4.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как система $v_n(P)$, $P \in S$ полна и замкнута на S , то

$$\left\| f(P) - \sum_{n=1}^N C_n v_n(P) \right\|_{L_2(S)} < \varepsilon_N \quad (2.4.10)$$

или подробнее

$$\left\| f(P) - \int_{C_{\varepsilon}} \frac{e^{ikR}}{R_{PQ}} \sum_{n=1}^N C_n \nu_n(Q) dl_Q \right\|_{L_2(S)} < \varepsilon_N. \quad (2.4.11)$$

Обозначив

$$\sum_{n=1}^N C_n \nu_n(Q) = \nu^{(N)}(Q), \quad (2.4.12)$$

мы и получим (2.4.9). Теорема доказана.

Замечание 2.4.1 По ходу доказательства теоремы мы фактически доказали, что ядро

$$K(P, Q) = \frac{e^{ikR}}{R_{PQ}}, \quad Q \in C_\varepsilon, \quad P \in S, \quad (2.4.13)$$

замкнуто и на C_ε и на S , то есть

а) из условия

$$\int_S K(P, Q) f(P) d\sigma = 0 \quad \forall Q \in C_\varepsilon$$

следует $f(P) \equiv 0, P \in S$;

б) из условия

$$\int_{C_\varepsilon} K(P, Q) \varphi(Q) dl_Q = 0 \quad \forall P \in S$$

следует $\varphi(Q) \equiv 0, Q \in C_\varepsilon$.

Замечание 2.4.2 Оценку невязки антенного потенциала $v(M)$, полученного при реализации (2.4.9), точному решению $u(M)$ краевой задачи получим в силу теоремы корректности 2.3.1:

$$|u(M) - v(M)| < C(d)\varepsilon_N, \quad M \in d \subset D_\varepsilon, \quad (2.4.14)$$

где $C(d)$ — константа, зависящая от компакта $d \subset D_\varepsilon$.

Замечание 2.4.3 Для численной реализации нахождения искомой плотности $\nu(Q)$ антенного потенциала, удовлетворяющего (2.4.9), можно воспользоваться как общими методами регуляризации А.Н. Тихонова функционалов некорректно поставленных задач, так и рассмотренными выше итерационными методами и методом коллокаций.

§ 5. Классические задачи теории дифракции.

При исследовании математических моделей теории дифракции наряду с рассматриваемыми в предыдущих параграфах численными методами, ориентированными, в основном, на технологии высокопроизводительных вычислений, большую роль играют и чисто аналитические методы исследования больших классов задач математической физики. Особенно интенсивно они разви-

вались в первой половине XX-го века такими известными физиками и математиками как В.А. Фок, А. Зоммерфельд, Г. Ватсон, Б. Нобл и рядом других российских и зарубежных ученых. В настоящем параграфе мы кратко проиллюстрируем основные идеи развитых методов на примере классических задач дифракции на сфере и полуплоскости.

5.1. Дифракция на сфере. Метод Г. Ватсона. Рассмотрим краевую задачу Дирихле дифракции плоской акустической волны на сфере радиуса a . В силу аксиальной симметрии задачи ее математическая модель имеет вид

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & M \in D_e \quad (r > a), \\ u|_{r=a} = -u_0|_{r=a}, \\ \frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right), & r \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (2.5.1)$$

где

$$u_0(r, \theta) = e^{ikr \cos \theta} \quad (2.5.2)$$

есть падающая плоская волна единичной амплитуды, $u(r, \theta)$ — рассеянное сферой поле, удовлетворяющее условиям излучения. Заметим, что поле плоской волны, приходящей из бесконечности, не удовлетворяет условиям излучения. Поэтому разложение функции $u_0(r, \theta)$ в ряд по сферическим функциям имеет вид

$$u_0(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(kr) P_n(\cos \theta), \quad (2.5.3)$$

где $\psi_n(kr)$ — сферические функции Бесселя, $P_n(\cos \theta)$ — полиномы Лежандра, то есть плоская волна является суперпозицией стоячих волн. Для определения коэффициентов a_n заметим, что $a_n \psi_n(kr)$ — коэффициент разложения функции $u_0(r, \theta)$ при фиксированном r в ряд по полиномам Лежандра. Тем самым

$$a_n \psi_n(kr) = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 e^{ikrx} P_n(x) dx. \quad (2.5.4)$$

Воспользовавшись асимптотикой сферических функций Бесселя при больших значениях аргумента и беря интеграл по частям, преобразуем (2.5.4) к виду

$$a_n \left\{ \frac{\sin\left(kr - \frac{\pi n}{2}\right)}{kr} + O\left(\frac{1}{(kr)^2}\right) \right\} = \quad (2.5.5)$$

$$= \frac{2n+1}{2} \frac{P_n(x)}{ikr} e^{ikrx} \Big|_{x=-1}^{x=1} + O\left(\frac{1}{(kr)^2}\right).$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части (2.5.5), с учетом того, что $P_n(-1) = (-1)^n = e^{i\pi n}$:

$$(2n+1) e^{i\frac{\pi n}{2}} \frac{e^{i\left(kr - \frac{\pi n}{2}\right)} - e^{-i\left(kr - \frac{\pi n}{2}\right)}}{2ikr} = \quad (2.5.6)$$

$$= \frac{(2n+1)}{kr} (i)^n \sin\left(kr - \frac{\pi n}{2}\right).$$

Сравнивая главные члены разложения (2.5.5), получим

$$a_n = (i)^n (2n+1), \quad (2.5.7)$$

а тем самым и

$$u_0(r, \theta) = \sum_n (i)^n (2n+1) \psi_n(kr) P_n(\cos \theta). \quad (2.5.8)$$

Будем искать решение задачи (2.5.1) в виде суперпозиции расходящихся сферических волн с амплитудами C_n

$$u(r, \theta) = \sum_n C_n \zeta_n^{(1)}(kr) P_n(\cos \theta). \quad (2.5.9)$$

Для неизвестных амплитудных коэффициентов C_n из граничного условия задачи (2.5.1) и выражения (2.5.8) получим

$$C_n \zeta_n^{(1)}(ka) = -(i)^n (2n+1) \psi_n(ka), \quad (2.5.10)$$

что позволяет выписать явное аналитическое выражение решения задачи (2.5.1):

$$u(r, \theta) = - \sum_n (i)^n (2n+1) \frac{\psi_n(ka)}{\zeta_n^{(1)}(ka)} \zeta_n^{(1)}(kr) P_n(\cos \theta). \quad (2.5.11)$$

Итак, явное выражение решения получено. Выясним, как его можно использовать в конкретных случаях. Очевидно, скорость сходимости этого ряда определяется в первую очередь порядком убывания его коэффициентов. Рассмотрим этот вопрос подробнее. Возможны несколько случаев:

а) $ka \ll 1$, то есть длина падающей волны много больше радиуса сферы a , так называемый длинноволновый случай. Пользуясь асимптотикой сферических функций Бесселя и Ханкеля при малых значениях аргумента ka , получим

$$\left| \frac{\psi_n(ka)}{\zeta_n^{(1)}(ka)} \right| = O((ka)^{2n}), \quad (2.5.12)$$

что обеспечивает быструю сходимость ряда (2.5.11) и возможность прямого его вычисления для получения численного значения решения $u(r, \theta)$ с заданной степенью точности.

б) $ka \sim 1$, то есть длина падающей волны есть величина порядка радиуса сферы, так называемый резонансный случай. В этом случае коэффициенты ряда (2.5.11) убывают не очень быстро и, чтобы получить приближенное решение задачи (2.5.1) с заданной степенью точности, приходится пользоваться технологиями высокопроизводительных вычислений, что позволяет получить нужные результаты для значений параметра $ka \sim 10^2 - 10^3$.

в) $ka \gg 1$, то есть длина падающей волны много меньше радиуса сферы, например, дифракция СВЧ радиоволн на поверхности Земли, так называемый коротковолновый случай. В этом случае $10^3 - 10^4$ коэффициентов ряда имеют почти одинаковые значения и прямое суммирование ряда сильно затруднено.

Именно для этого случая английским физиком Г.Ватсоном был предложен метод преобразования плохо сходящегося ряда в другой достаточно быстро сходящийся ряд [33].

Основная идея метода Ватсона необычайно проста и основывается на том факте, что при вычислении интеграла по комплексной переменной с помощью теории вычетов можно, различным образом замыкая контур интегрирования, получать представление исходного интеграла в виде различных рядов. Однако, несмотря на простоту этой идеи, ее реализация во многих конкретных случаях требует большого искусства. Проиллюстрируем сказанное на примере нашей задачи (2.5.1) и полученного представления ее решения в виде ряда (2.5.11).

Рассмотрим на комплексной плоскости $\angle \nu$ интеграл

$$I = \int_A \frac{2\nu + 1}{2i \sin \nu \pi} \frac{\zeta_\nu^{(1)}(kr)}{\zeta_\nu^{(1)}(ka)} P_\nu(-\cos \theta) d\nu, \quad (2.5.13)$$

где A — бесконечный контур, охватывающий положительную часть действительной оси плоскости $\angle \nu$, пересекающий ее в точке $\nu = -\frac{1}{2}$ и уходящий в бесконечность (см. рис. 2.5.1). Особыми точками подынтегральной функции являются точки действительной оси $\nu_n = 0, 1, \dots$, в которых $\sin \nu_n \pi = 0$. Причем это полюса первого порядка. Остальные функции, как функции комплексного индекса ν , особых точек на действительной оси не имеют. Далее, $P_\nu(x)$ — гипергеометрическая функция первого порядка $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ [26], как функция комплексной переменной z , удовлетворяющая уравнению

$$z(1-z)F''(z) - [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]F'(z) - \alpha\beta F(z) = 0 \quad (2.5.14)$$

при значениях комплексных параметров

$$\alpha = -\nu; \quad \beta = \nu + 1; \quad \gamma = 1; \quad z = \frac{1-x}{2}, \quad (2.5.15)$$

совпадающая с $P_\nu(x)$

$$F\left(-\nu, \nu + 1, 1, \frac{1-x}{2}\right) = P_\nu(x), \quad (2.5.16)$$

а уравнение (2.5.14) переходит в уравнение Лежандра

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_\nu}{dx} \right] + \nu(\nu+1)P_\nu(x) = 0. \quad (2.5.17)$$

Заметим, что так как $F(\alpha, \beta, \gamma, z) = F(\beta, \alpha, \gamma, z)$, то

$$P_\nu(x) = P_{-\nu-1}(x). \quad (2.5.18)$$

Вычисляя интеграл (2.5.13) с помощью теории вычетов, получим

$$I = \sum_n (-1)^n (2n+1) \frac{\zeta_n^{(1)}(kr)}{\zeta_n^{(1)}(ka)} P_n(-\cos \theta), \quad (2.5.19)$$

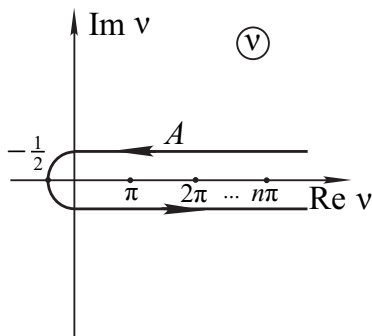


Рис. 2.5.1. Контур интегрирования.

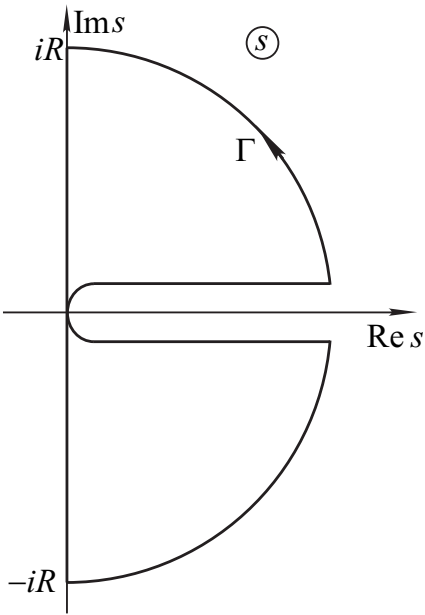


Рис. 2.5.2. Новый контур.

исходного контура стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. Заметим, что в силу (2.5.18)

$$P_{s-\frac{1}{2}}(x) = P_{-s-\frac{1}{2}}(x), \quad (2.5.20)$$

то есть $P_\nu(x)$ — четная функция s . Так как имеет место известное соотношение

$$\zeta_\nu^{(1)}(x) = e^{-i\pi\nu} \zeta_{-\nu}^{(1)}(x), \quad (2.5.21)$$

то $\frac{\zeta_\nu^{(1)}(kr)}{\zeta_\nu^{(1)}(ka)}$ также четная функция s .

Наконец, функция $\frac{s}{\cos \pi s}$ — нечетная функция s , следовательно, и подынтегральная функция в интеграле

$$I' = \int_{\Gamma} \frac{2s}{2i \cos \pi s} \frac{\zeta_{s-\frac{1}{2}}^{(1)}(kr)}{\zeta_{s-\frac{1}{2}}^{(1)}(ka)} P_{s-\frac{1}{2}}(-\cos \theta) ds, \quad (2.5.22)$$

является нечетной функцией s , в силу чего часть интеграла I' при интегрировании по отрезку $[-iR, iR]$ мнимой оси равна нулю. Чтобы доказать, что интеграл по дугам замыкающей

что с точностью до множителя $\psi_n(ka)$ в выражении членов ряда совпадает с исходным рядом (2.5.11). Следуя методу Ватсона, изменим контур интегрирования, перенеся с помощью замены переменной ν на переменную $s = \nu + \frac{1}{2}$ и изменив замыкание контура интегрирования отрезком мнимой оси $[-iR, iR]$ и дугами окружностей радиуса R в правой верхней и нижней полуплоскостях комплексной плоскости $\angle s$. Новый замкнутый контур интегрирования на комплексной плоскости $\angle s$ обозначим Γ (см. рис. 2.5.2). Покажем, что интеграл по новому замыканию

окружности при $R \rightarrow \infty$ стремится к нулю, воспользуемся асимптотикой сомножителей подынтегральной функции при $|s| \rightarrow \infty$. Как легко видеть

$$|\sin \nu \pi| = O\left(e^{|\operatorname{Im} \nu| \pi}\right), \quad (2.5.23)$$

то есть экспоненциально растет при $|\nu| \rightarrow \infty$. Воспользовавшись асимптотикой $P_{s-\frac{1}{2}}(-\cos \theta)$

$$P_{s-\frac{1}{2}}(-\cos \theta) = \sqrt{\frac{1}{2\pi(s-\frac{1}{2}) \sin \theta}} e^{-i[(\pi-\theta)s-\frac{\pi}{4}]} + O\left(\frac{1}{|s-\frac{1}{2}|^{3/2}}\right), \quad (2.5.24)$$

получим, что подынтегральная функция в (2.5.22) экспоненциально убывает при $|s| \rightarrow \infty$, а следовательно, интеграл и по этой части замыкания исходного контура A стремится к нулю.

Значит интегралы I и I' равны, и значение интересующего нас интеграла можно вычислять с помощью теории вычетов, найдя особые точки подынтегральной функции внутри нового контура Γ . Очевидно, это будут те точки комплексной плоскости $\angle \nu$, в которых $\zeta_\nu^{(1)}(ka)$, как функция комплексного индекса ν , равна нулю. Имеет место известное интегральное представление функции $H_s^{(1)}(x)$

$$H_s^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{C_1} e^{-ix \sin \varphi - is \varphi} d\varphi, \quad (2.5.25)$$

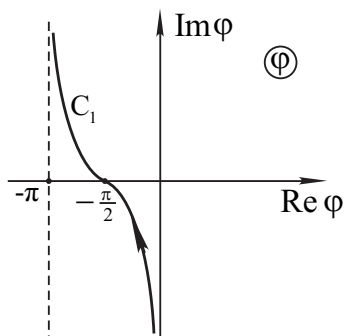


Рис. 2.5.3. Контур C_1 .

где C_1 — контур интегрирования по комплексной переменной φ , пересекающий действительную ось в точке $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ (см. рис. 2.5.3). Для вычисления интеграла (2.5.25) при больших значениях аргумента x можно воспользоваться методом перевала. Положив $\nu = x \cos \alpha$, где α — малый комплексный параметр, найдем, что имеются две точки перевала $\varphi_{1,2} = \pm \alpha$, которые дают примерно одинаковый вклад в асимптотику интеграла (2.5.25)

при больших значениях x . Поэтому окончательное выражение для $H_\nu^{(1)}(x)$ принимает вид

$$H_\nu^{(1)}(x) = 2i\sqrt{\frac{2}{\pi x \sin \alpha}} \sin \left[x(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) - \frac{\pi}{4} \right]. \quad (2.5.26)$$

Из (2.5.26) получим значения комплексной переменной ν , при которых функция $H_\nu^{(1)}(ka) = 0$

$$\nu_m = x + \frac{x^{1/3}}{2} \left[\frac{3\pi}{4}(4m-1) \right]^{2/3} e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.5.27)$$

Заметим, что все нули функции $H_\nu^{(1)}(x)$, $|\nu| \sim x \gg 1$ лежат на луче $\varphi = \frac{\pi}{3}$ в правой полуплоскости комплексной плоскости $\mathcal{L}\nu$.

При этом, хотя, как следует из (2.5.21) и (2.5.24), функции $\sin \nu\pi$ и $P_\nu(-\cos \theta)$ растут при $|\nu| \rightarrow \infty$, их отношение остается ограниченным при $0 < \delta \leq \theta \leq \pi - \delta$, где $\delta > 0$. Тем самым решение задачи (2.5.1) представляется быстро сходящимся рядом

$$u(r, \theta) = \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{m=1}^{\infty} A_m(r, \theta) e^{i(\nu_m + \frac{1}{2})\theta}, \quad (2.5.28)$$

где $0 < \delta \leq \theta \leq \pi - \delta$, $\delta > 0$, а коэффициенты $A_m(r, \theta)$ выражаются через вычеты подынтегральной функции (2.5.13) в ее особых точках ν_m . Представление (2.5.28) оказалось весьма удобным для исследования распространения СВЧ радиоволн вдоль поверхности Земли и многих задач практической радиофизики.

5.2. Дифракция на полуплоскости. Метод Винера–Хопфа. Введение. Одним из самых изящных методов математической физики является метод Винера–Хопфа, созданный Н. Винером и Э. Хопфом для решения одного интегрального уравнения (уравнение Милна) в 30-60-е годы прошлого века [10]. Одновременно модификация этого метода создается В.А. Фоком. В задачах дифракции метод Винера–Хопфа применим к изучению задач дифракции на плоских экранах (см. многочисленные приложения [25]). Изложим здесь применение метода Винера–Хопфа к задаче дифракции на полуплоскости.

Причем воспользуемся той же модификацией метода, которую предложил Джонс. (см. [27]).

Постановка задачи. Рассмотрим скалярную плоскую волну

$$u_0 = e^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)}, \quad 0 < \theta < \pi$$

(временной множитель $e^{-i\omega t}$),

(2.5.29)

падающую на полуплоскость $\{y = 0, x \leq 0\}$, на которой нормальная производная полного поля равна нулю, то есть «абсолютно жесткий экран» (см. рис. 2.5.4). Будем искать полное поле u_{Π} как сумму поля u_0 падающей плоской волны и поля u , которое порождается присутствием полуплоскости:

$$u_{\Pi} = u_0 + u. \quad (2.5.30)$$

Функция $u = u(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (2.5.31)$$

и граничному условию:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0 \pm 0) = ik \sin \theta e^{-ikx \cos \theta}, \quad x < 0. \quad (2.5.32)$$

Для обеспечения единственности решения задачи необходимо поставить условие излучения на бесконечности и некоторые условия в окрестности ребра экрана.

Условия Зоммерфельда здесь не годятся в силу того, что граница области «бесконечна». Поэтому воспользуемся более общим принципом предельного поглощения. А именно предположим, что $k = k_0 + i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ и решение (2.5.31)-(2.5.32) будем искать в классе функций, убывающих на бесконечности, причем будем предполагать определенный порядок убывания (он следует из физических соображений). Итак, будем полагать, что:

$$u \in \{u : |u| + |\nabla u| \leq C e^{-\varepsilon r \cos \theta} \text{ при } r \rightarrow \infty\}, \quad (2.5.33)$$

здесь $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

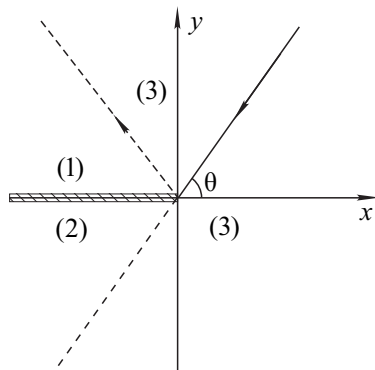


Рис. 2.5.4. Постановка задачи.

В окрестности ребра также надо требовать выполнения определенных условий, иначе даже при выполнении условий на бесконечности возможно существование более чем одного решения [27]. Можно показать, что при выполнении условий

$$|u| < C \text{ и } |\nabla u| \leq Cr^{-1/2} \text{ при } r \rightarrow 0 \quad (2.5.34)$$

имеется единственное решение задачи (2.5.31)-(2.5.33), а следовательно, и единственное решение задачи (2.5.31)-(2.5.32), удовлетворяющее принципу предельного поглощения (если таковое существует). Нашей целью является построение решения задачи (2.5.31)-(2.5.32) с $\varepsilon \neq 0$ и последующее доказательство того факта, что $u(x, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, y, \varepsilon)$ является решением задачи (2.5.31)-(2.5.32).

Построение функционального уравнения методом Джонса. Введем следующие функции комплексного переменного α :

$$\begin{aligned} U_+(\alpha, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} u(x, y) e^{i\alpha x} dx = F_+(u), \\ U_-(\alpha, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 u(x, y) e^{i\alpha x} dx = F_-(u), \\ U(\alpha, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y) e^{i\alpha x} dx = \\ &= U_+(\alpha, y) + U_-(\alpha, y) = F(u). \end{aligned} \quad (2.5.35)$$

Здесь через $F_+(u)$, $F_-(u)$ и $F(u)$ обозначены соответственно односторонние и полное преобразование Фурье по переменной x функции $u(x, y)$. Из теории интеграла Фурье [36] следует, что, если u удовлетворяет (2.5.33), то $U_+(\alpha, y)$ — аналитична в полуплоскости $\Pi_+ = \{\alpha : \text{Im } \alpha > -\varepsilon \cos \theta\}$, а $U_-(\alpha, y)$ — аналитична в полуплоскости $\Pi_- = \{\alpha : \text{Im } \alpha < \varepsilon \cos \theta\}$.

Если функция u удовлетворяет (2.5.31), то $U(\alpha, y)$ удовлетворяет уравнению:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} - (\alpha^2 - k^2) \right] U(\alpha, y) = 0. \quad (2.5.36)$$

Введем функцию $\gamma(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - k^2}$, ветвь которой выберем следующим образом. Положим $\gamma(0) = -ik$ и проведем на плоскости

α разрезы (см. рис. 2.5.5). Возьмем в качестве решений (2.5.36) следующие функции:

$$U(\alpha, y) = \begin{cases} A(\alpha)e^{-\gamma y} & \text{при } y > 0, \\ B(\alpha)e^{\gamma y} & \text{при } y < 0. \end{cases} \quad (2.5.37)$$

Введем также в рассмотрение функции:

$$\begin{aligned} V_+(\alpha, y) &= F_+ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ V_-(\alpha, y) &= F_- \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ V(\alpha, y) &= F \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (2.5.38)$$

Все сказанное выше об аналитических свойствах функций U_{\pm} в равной степени относится и к функциям $V_{\pm}(\alpha, y)$.

Запишем следующие очевидные равенства:

$$\begin{aligned} U_+(\alpha, 0+0) + U_-(\alpha, 0+0) &= A(\alpha), & (a) \\ U_+(\alpha, 0-0) + U_-(\alpha, 0-0) &= B(\alpha), & (б) \\ V_+(\alpha, 0+0) + V_-(\alpha, 0+0) &= -\gamma(\alpha)A(\alpha), & (в) \\ V_+(\alpha, 0-0) + V_-(\alpha, 0-0) &= \gamma(\alpha)B(\alpha). & (г) \end{aligned} \quad (2.5.39)$$

Воспользуемся теперь граничными условиями и свойствами непрерывности u и $\frac{\partial u}{\partial y}$. Из граничного условия (2.5.32) следует, что $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$ непрерывна для всех x при переходе точки (x, y) через ось $y = 0$, а следовательно из (2.5.39в) и (2.5.39г) следует

$$-A(\alpha) = B(\alpha). \quad (2.5.40)$$

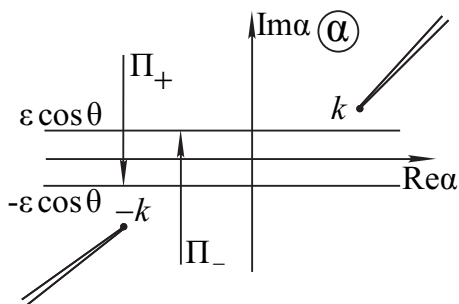


Рис. 2.5.5. Разрезы на плоскости α .

Отметим теперь, что $u(x, y)$ при $x > 0$ непрерывна при $y = 0$, откуда следует, что

$$U_+(\alpha, 0+0) = U_+(\alpha, 0-0). \quad (2.5.41)$$

Используя (2.5.41), вычитая (2.5.39б) из (2.5.39а), получим с учетом (2.5.40)

$$2S_-(\alpha) = U_-(\alpha, 0+0) - U_-(\alpha, 0-0) = 2A(\alpha). \quad (2.5.42)$$

Поскольку имеет место (2.5.32), то $\forall \alpha \in \Pi_-$ справедливо

$$\begin{aligned} V_-(\alpha, 0+0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{i\alpha x} (ik \sin \theta e^{-ikx \cos \theta}) dx = \\ &= \frac{k \sin \theta}{\sqrt{2\pi} (\alpha - k \cos \theta)}. \end{aligned} \quad (2.5.43)$$

Имея в виду (2.5.43), с помощью соотношения (2.5.39в) исключим из (2.5.42) неизвестную $A(\alpha)$ и получим равенство:

$$V_+(\alpha, 0+0) + \frac{k \sin \theta}{\sqrt{2\pi} (\alpha - k \cos \theta)} = -\gamma S_-(\alpha), \quad (2.5.44)$$

справедливое в полосе $\Pi_+ \cap \Pi_- = \{\alpha : |\operatorname{Im} \alpha| < \varepsilon \cos \theta\}$.

Таким образом, нами получено уравнение (2.5.44) для двух неизвестных функций V_+ и S_- с известными, однако, аналитическими свойствами. Если нам удастся определить из (2.5.44) функции V_+ и S_- , то по (2.5.42) мы получим соответственно $A(\alpha)$ и тем самым будем знать фурье-образ $U(\alpha, y)$ — неизвестной искомой $u(x, y)$, что позволит нам, применив обратное преобразование, получить решение задачи с $\varepsilon \neq 0$.

Таким образом, решение (2.5.31)-(2.5.32) свелось к решению функционального уравнения (2.5.44), типичного для метода Винера–Хопфа. Обратимся к некоторым общим соображениям.

Общие положения. Теория функциональных уравнений типа (2.5.44) и более сложных была разработана Винером и Хопфом. Рассмотрим уравнение:

$$M(\alpha)\Phi_+(\alpha) + N(\alpha)\Psi_-(\alpha) = K(\alpha) \quad (2.5.45)$$

справедливое в полосе $\tau = \Pi_+ \cap \Pi_-$. Функции $\Phi_+(\alpha)$ и $\Psi_-(\alpha)$ неизвестны, но являются аналитическими функциями α в Π_+

и Π_- , а функции $M(\alpha)$, $N(\alpha)$ и $K(\alpha)$ — известные функции, определенные на всей комплексной плоскости α за исключением их особых точек. Пусть нам удалось факторизовать (представить в виде произведения) следующую функцию

$$\frac{M(\alpha)}{N(\alpha)} = \frac{L_+(\alpha)}{L_-(\alpha)}, \quad (2.5.46)$$

где $L_{\pm}(\alpha)$ — аналитические функции соответственно в Π_+ и Π_- , тогда (2.5.45) можно переписать в виде

$$L_+(\alpha)\Phi_+(\alpha) + L_-(\alpha)\Psi_-(\alpha) = \frac{L_-(\alpha)K(\alpha)}{N(\alpha)}$$

Пусть также удалось факторизовать в сумму функцию:

$$\frac{L_-(\alpha)K(\alpha)}{N(\alpha)} = -Q_+(\alpha) + Q_-(\alpha), \quad (2.5.47)$$

где $Q_{\pm}(\alpha)$ — аналитичны соответственно в Π_{\pm} . Тогда (2.5.45) примет вид:

$$L_+(\alpha)\Phi_+(\alpha) + Q_+(\alpha) = Q_-(\alpha) - L_-(\alpha)\Psi_-(\alpha). \quad (2.5.48)$$

Предположим теперь, что

$$\left. \begin{array}{l} Q_{\pm}(\alpha) \rightarrow 0, \\ L_+(\alpha)\Phi_+(\alpha) \rightarrow 0, \\ L_-(\alpha)\Psi_-(\alpha) \rightarrow 0, \end{array} \right\} \alpha \in \Pi_{\pm}, \quad |\alpha| \rightarrow \infty, \quad (2.5.49)$$

равномерно относительно $\arg \alpha$. С помощью аналитического продолжения определим функцию:

$$\Omega(\alpha) = \begin{cases} L_+(\alpha)\Phi_+(\alpha) + Q_+(\alpha), & \alpha \in \Pi_+, \\ Q_-(\alpha) - L_-(\alpha)\Psi_-(\alpha), & \alpha \in \Pi_-. \end{cases}$$

Эта функция $\Omega(\alpha)$ аналитична на всей комплексной плоскости α и равномерно по $\arg \alpha$ стремится к нулю при $|\alpha| \rightarrow \infty$. А следовательно, по теореме Лиувилля $\Omega(\alpha) \equiv 0 \quad \forall \alpha$. Откуда получаем

$$\begin{aligned} L_+(\alpha)\Phi_+(\alpha) + Q_+(\alpha) &\equiv 0, \\ Q_-(\alpha) - L_-(\alpha)\Psi_-(\alpha) &\equiv 0, \end{aligned}$$

что и позволяет найти $\Phi_+(\alpha)$ и $\Psi_-(\alpha)$.

Из приведенных выше рассуждений видно, что центральным моментом метода является факторизация функций (2.5.46) и (2.5.47). Имеются общие теоремы о факторизации [33] и обширный обзор непосредственных факторизаций содержится в работе [27]. Заметим, что от условия (2.5.49) также можно освободиться.

Решение исходной задачи. Применим теперь приведенные выше рассуждения к уравнению (2.5.44). В нашем случае $M(\alpha) \equiv 1$, $N = \gamma(\alpha)$ и $K(\alpha) = \frac{k \sin \theta}{\sqrt{2\pi}(\alpha - k \cos \theta)}$. Факторизация (2.5.46) здесь очевидна:

$$\gamma(\alpha) = \sqrt{\alpha - k} \cdot \sqrt{\alpha + k} = \frac{1}{L_+(\alpha)} \cdot L_-(\alpha).$$

Переписав же (2.5.44) в виде

$$\begin{aligned} \frac{V_+(\alpha, 0+0)}{\sqrt{\alpha + k}} + \frac{k \sin \theta}{\sqrt{2\pi}(\alpha - k \cos \theta)} \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha + k}} - \frac{1}{\sqrt{k + k \cos \theta}} \right] = \\ = -\sqrt{\alpha - k} S_-(\alpha) - \frac{k \sin \theta}{\sqrt{2\pi} \sqrt{k + k \cos \theta} (\alpha - k \cos \theta)}, \end{aligned} \quad (2.5.50)$$

мы видим, что здесь факторизация (2.5.47) свелась просто к алгебраическим преобразованиям, необходимым в связи с наличием полюса первого порядка у функции $K(\alpha)$ в точке $\alpha = k \cos \theta$. Таким образом, мы получили запись (2.5.48) для нашего уравнения (2.5.44). Покажем теперь, что в нашем случае имеют место свойства (2.5.49).

Для этого воспользуемся условиями на ребре (2.5.34). Известно, что, если $f(x) = O(x^p)$ при $x \rightarrow 0+0$, $-1 < p < 0$, то

$$F_+(\alpha) = \int_0^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = O(|\alpha|^{-(p+1)}) \quad \alpha \rightarrow \infty, \quad \alpha \in \Pi_+.$$

Применяя этот результат к нашему случаю, имеем

$$\begin{aligned} |S_-(\alpha)| &= O(|\alpha|^{-1}), \quad \alpha \in \Pi_-, \quad \alpha \rightarrow \infty, \\ |V_+(\alpha, 0+0)| &= O(|\alpha|^{-1/2}), \quad \alpha \in \Pi_+, \quad \alpha \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.5.51)$$

Учитывая (2.5.51), мы видим, что (2.5.50) оказалось записанным в виде (2.5.48). Отсюда могут быть получены функции $V_+(\alpha, 0+0)$ и $S_-(\alpha)$, с помощью которых по формуле (2.5.42) определяется $A(\alpha)$:

$$A(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{k \sin \theta}{\sqrt{k + k \cos \theta}} \frac{1}{\sqrt{\alpha - k} (\alpha - k \cos \theta)}.$$

А зная $A(\alpha)$, как было отмечено выше, можно получить функцию $u(x, y)$:

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \frac{k \sin \theta}{\sqrt{k + k \cos \theta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\alpha x - \gamma y}}{\sqrt{\alpha - k} (\alpha - k \cos \theta)} d\alpha \text{ при } y > 0,$$

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{k \sin \theta}{\sqrt{k + k \cos \theta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\alpha x - \gamma|y|}}{\sqrt{\alpha - k} (\alpha - k \cos \theta)} d\alpha \text{ при } y < 0.$$

(2.5.52)

Таким образом, нами получено решение задачи с $\varepsilon \neq 0$, причем оно единственно. Если теперь устремить ε к нулю, то особенности подынтегральных функций $\alpha = \pm k$ и $\alpha = k \cos \theta$ на комплексной плоскости α перейдут на ее вещественную ось $\text{Re } \alpha$, и поэтому интегрирование (2.5.52) следует вести с обходом особенностей (см. рис. 2.5.6). Нетрудно убедиться, что полученное предельным переходом в (2.5.52) при $\varepsilon \rightarrow 0$ решение $u(x, y)$ является решением задачи (2.5.31)-(2.5.32), и, следовательно, единственным решением, удовлетворяющим принципу предельного поглощения.

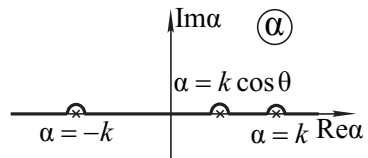


Рис. 2.5.6. Обход особенностей.

Исследование решения. Запишем полное поле

$$u_{\text{П}}(x, y) = u_0(x, y) - \frac{1}{2\pi} \text{sgn}(y) \sqrt{k - k \cos \theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\gamma|y| - i\alpha x}}{\sqrt{\alpha - k} (\alpha - k \cos \theta)} d\alpha.$$

Введем полярные координаты по формулам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ $0 < \varphi < \pi$. Тогда интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-r(\gamma \sin \varphi + i\alpha \cos \varphi)}}{\sqrt{\alpha - k} (\alpha - k \cos \theta)} d\alpha$$

может быть оценен по методу перевала (см., например, [33]). Применяя соответствующие формулы, получим:

$$u_{\Pi} = u_0 + u_{\text{отр}} - \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \frac{\sin \varphi/2 \cdot \sin \theta/2}{\cos \varphi + \cos \theta} \cdot e^{-ikr - i\pi/4} + \quad (2.5.53)$$

$$+ O\left(\frac{1}{kr}\right), \quad \pi - \theta < \varphi < \pi,$$

$$u_{\Pi} = -\sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \cdot \frac{\sin \varphi/2 \cdot \sin \theta/2}{\cos \varphi + \cos \theta} \cdot e^{-ikr - i\pi/4} + O\left(\frac{1}{kr}\right), \quad (2.5.54)$$

$$\pi < \varphi < \pi + \theta,$$

$$u_{\Pi} = u_0 - \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \frac{\sin \varphi/2 \cdot \sin \theta/2}{\cos \varphi + \cos \theta} e^{-ikr - i\pi/4} + O\left(\frac{1}{kr}\right), \quad (2.5.55)$$

$$\pi + \theta < \varphi < 3\pi - \theta,$$

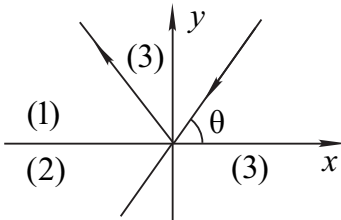


Рис. 2.5.7.

где $u_{\text{отр}} = e^{-ik(x \cos \theta - y \sin \theta)}$ — отраженное поле. Причем здесь считается, что $\varphi \neq \pi - \theta$ (это обусловлено методом перевала). Представление о физической картине легко составить из полученных формул (см. рис. 2.5.7). Так, в области (1) (области света) существует как падающее поле u_0 , так и отраженное поле $u_{\text{отр}}$, и дифрагированное экраном

поле (последнее слагаемое); в области (2) (область тени под экраном) существует только дифрагированное поле и в области (3) — падающее и дифрагированное поле.

§ 6. Дифракция в неоднородной среде

6.1. Скалярная дифракция на теле в локально неоднородной среде. Парциальные условия излучения. До сих пор мы рассматривали задачи скалярной и электромагнитной дифракции на ограниченных объектах, находящихся в однородной среде, для которой коэффициенты в уравнениях Максвелла и Гельмгольца являются постоянными величинами. Однако, большой класс практически важных задач описывается математическими моделями, в которых характеристики внешней среды зависят от пространственных координат. Методам решения этого класса задач и будет посвящен настоящий параграф.

Как обычно, начнем со случая скалярной дифракции в локально неоднородной среде.

Дифракция на импедансном теле. Рассмотрим следующую скалярную задачу дифракции на импедансном теле:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u + k^2(M)u = 0, \quad M \in D_e, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + h(P)u \Big|_S = f(P), \quad P \in S, \\ \frac{\partial u}{\partial r} - ik_0 u = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r > R_0, \\ [u]_{\Sigma_{R_0}} = \left[\frac{\partial u}{\partial r}\right]_{\Sigma_{R_0}} = 0, \end{array} \right. \quad (2.6.1)$$

где

$$k^2(M) = \begin{cases} C^{(1)}(D_e^*), & M \in D_e^*, \\ k_0^2, & r \geq R_0, \quad k_0^2 > 0, \end{cases} \quad (2.6.2)$$

$$\operatorname{Im} k^2(M) = q(M) \geq q_0 > 0; \quad q_1 \geq q(M),$$

$$h(P) \text{ и } f(P) \in C^{(1)}(S), \quad \|f\|_{L_2(S)} \leq f_1,$$

$$\operatorname{Im} h(P) = -\alpha(P), \quad \alpha(P) \geq \alpha_0 > 0, \quad \alpha_1 \geq \alpha(P).$$

Здесь Σ_{R_0} — сфера радиуса R_0 , объемлющая тело D_i с поверхностью S типа Ляпунова и область D_e^* неоднородности коэффициента $k^2(M)$, гладко принимающего значение k_0^2 на Σ_{R_0} .

Как было установлено в предыдущих параграфах, задача (2.6.1) при условиях (2.6.2) однозначно разрешима.

Рассмотрение данной задачи в неограниченной области D_e^* с условиями сопряжения на Σ_{R_0} и асимптотическим условием излучения Зоммерфельда связано с определенными трудностями как теоретического, так и вычислительного характера. Эти трудности можно обойти, сведя исходную задачу (2.6.1), (2.6.2) к краевой задаче в ограниченной двухсвязной области D_e^* , заменив асимптотические условия Зоммерфельда на конкретные условия для некоторых функционалов от решения на внешней границе Σ_{R_0} области D_e^* .

Заметим, что вне Σ_{R_0} решение задачи (2.6.1) может быть разложено в сходящийся ряд по метагармоническим функциям

$$u(M) = \sum_n T_n w_n(r, \theta, \varphi), \quad r \geq R_0, \quad (2.6.3)$$

где

$$w_n(r, \theta, \varphi) = \zeta_{l(n)}^{(1)}(k_0 r) Y_n(\theta, \varphi), \quad (2.6.4)$$

а T_n — неизвестные амплитуды расходящихся сферических волн. Разложение (2.6.3) можно записать в виде

$$u(M) = \sum_n A_n(r) Y_n(\theta, \varphi), \quad (2.6.5)$$

где $A_n(r)$ — коэффициенты разложения решения по сферическим гармоникам

$$A_n(r) = \int_{\Omega} u(r, \theta, \varphi) Y_n^*(\theta, \varphi) d\omega. \quad (2.6.6)$$

Причем этот несобственный интеграл можно дифференцировать по параметру r

$$A'_n(r) = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta, \varphi) Y_n^*(\theta, \varphi) d\omega. \quad (2.6.7)$$

Записав формулу Грина для функций $u(r, \theta, \varphi)$ (2.6.5) и функции $\bar{w}_n = \zeta_{l(n)}^{(1)}(k_0 r) Y_n^*(\theta, \varphi)$ в неограниченной области вне сферы Σ_{R_0} , в силу условий Зоммерфельда для этих функций получим

$$\int_{\Sigma_{R \geq R_0}} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \bar{w}_n - u \frac{\partial \bar{w}_n}{\partial r} \right) R^2 d\omega = 0, \quad (2.6.8)$$

что в силу ортонормированности сферического базиса $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ на любой сфере приводит к окончательному выражению

$$A'_n(R) - \gamma_n(R)A_n(R) = 0 \quad \text{при } R \geq R_0, \quad \forall n, \quad (2.6.9)$$

где

$$\gamma_n(R) = \left. \frac{\frac{d}{dr} \zeta_{l(n)}^{(1)}(k_0 r)}{\zeta_{l(n)}^{(1)}(k_0 r)} \right|_{r=R}. \quad (2.6.10)$$

Формулы (2.6.9), (2.6.10) означают, что функционалы (2.6.6) решения задачи (2.6.1) при $R \geq R_0$ удовлетворяют одномерным условиям излучения типа условий Зоммерфельда.

Это позволяет заменить асимптотическое условие излучения задачи (2.6.1) на бесконечную систему одномерных условий (2.6.9) для коэффициентов $A_n(r)$ разложения искомого решения по сферическим гармоникам. Условия (2.6.9) обычно называются *парциальными условиями излучения*.

Итак, исходная задача (2.6.1) в неограниченной области D_e сведена к краевой задаче в ограниченной двухсвязной области D_e^* , на границах которой S и Σ_{R_0} поставлены точные условия.

Замечание 2.6.1 *Парциальным условиям (2.6.9) можно придать различную форму. Например, их на основании (2.6.7) можно записать в виде*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} Y_n^* d\omega &= \gamma_n(R)A_n(R) = \\ &= T_n \frac{d}{dr} \left(\zeta_{l(n)}^{(1)}(k_0 r) \right) \Big|_{r=R}, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

Замечание 2.6.2 *Обобщением условий (2.6.9) являются условия излучения, задаваемые на замкнутой гладкой поверхности S_1 , охватывающей сферу Σ_{R_0} :*

$$\int_{S_1} \frac{\partial u}{\partial n} \bar{w}_m d\sigma = \int_{S_1} u \frac{\partial \bar{w}_m}{\partial n} d\sigma = \sum_n \Gamma_{mn} T_n, \quad (2.6.12)$$

$$\text{где } \Gamma_{mn} = \int_{S_1} \frac{\partial \bar{w}_m}{\partial n} w_n d\sigma \quad m = 0, 1, \dots$$

Замечание 2.6.3 Умножая (2.6.9) на $Y_n(P_0)$, где $P_0 \in \Sigma_{R_0}$, и суммируя по n , получим

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r}(R_0, P_0) \right|_{\Sigma_{R_0}} = \int_{\Sigma_{R_0}} K(R_0, P_0, P) u(R_0, P) d\sigma_P, \quad (2.6.13)$$

то есть нелокальное условие излучения, связывающее значение нормальной производной решения в точке P_0 сферы Σ_{R_0} со значением самой неизвестной функции $u(R_0, P)$ во всех точках P этой сферы.

При решении некоторых конкретных задач условия излучения (2.6.12), (2.6.13) оказываются более эффективными, чем исходные парциальные условия излучения (2.6.9).

Замечание 2.6.4 Условия (2.6.9) позволяют записать формулу Умова–Пойнтинга для потока энергии, через поверхность сферы Σ_{R_0}

$$w = \operatorname{Im} \int_{\Sigma_{R_0}} \frac{\partial u}{\partial r} u^* d\sigma \quad (2.6.14)$$

в достаточно компактном виде. Воспользовавшись представлением (2.6.3) и ортонормированностью сферических функций, получим

$$w = R_0^2 \sum_n |T_n|^2 \operatorname{Im} \left\{ \left. \frac{d}{dr} \zeta_{l(n)}^{(1)}(k_0 r) \cdot \zeta_{l(n)}^{(2)}(k_0 r) \right\} \right|_{r=R_0}. \quad (2.6.15)$$

Легко видеть, что мнимая часть выражения в фигурных скобках

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left\{ \frac{d}{dr} \zeta_{l(n)}^{(1)}(k_0 r) \cdot \zeta_{l(n)}^{(2)}(k_0 r) \right\} &= \\ &= \frac{k_0}{2i} \left\{ \left(\zeta_{l(n)}^{(1)}(x) \right)' \zeta_{l(n)}^{(2)}(x) - \zeta_{l(n)}^{(1)}(x) \left(\zeta_{l(n)}^{(2)}(x) \right)' \right\}, \quad x = k_0 r, \end{aligned}$$

есть значение вронскиана двух линейно независимых решений уравнения Бесселя, равное $\frac{2i}{x^2}$. Отсюда получим для потока энергии через поверхность сферы Σ_{R_0} выражение

$$w = \frac{1}{k_0} \sum_n |T_n|^2. \quad (2.6.16)$$

Физический смысл этого результата прозрачен: полный поток энергии через замкнутую поверхность равен сумме потоков энергий всех сферических гармоник в представлении решения (2.6.3).

6.2. Энергетическое тождество. Перейдем к изучению свойств решения задачи (2.6.1). Покажем, что решение задачи (2.6.1) ограничено по норме функционального пространства $W_2^1(D_e^*)$. Умножая уравнение (2.6.1) на $u^*(M)$ и интегрируя результат по области D_e^* , получим

$$0 = \int_{D_e^*} (\Delta u + k^2(M)u) u^* dV = \int_{S+\Sigma_{R_0}} \frac{\partial u}{\partial n} u^* d\sigma - \int_{D_e^*} |\nabla u|^2 dV + \int_{D_e^*} k^2(M)|u|^2 dV_M. \quad (2.6.17)$$

Рассмотрим мнимую часть выражения (2.6.17). Заметим, что в силу граничного условия (2.6.1)

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \int_S \frac{\partial u}{\partial n} u^* d\sigma &= \operatorname{Im} \int_S \{-h(P)u + f(P)\} u^* d\sigma = \\ &= \int_S \{\alpha(P)|u|^2 + \operatorname{Im} f(P)u^*(P)\} d\sigma. \end{aligned} \quad (2.6.18)$$

Подынтегральное выражение в правой части (2.6.18) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \{\alpha(P)|u|^2 + \operatorname{Im} f(P)u^*(P)\} &= \alpha(P) \left\{ |u|^2 + \frac{1}{2i\alpha(P)} (fu^* - f^*u) \right\} = \\ &= \alpha(P) \left\{ \left| u + \frac{f(P)}{2i\alpha(P)} \right|^2 - \frac{|f(P)|^2}{4\alpha^2(P)} \right\}, \end{aligned} \quad (2.6.19)$$

а как было показано выше,

$$\operatorname{Im} \int_{\Sigma_{R_0}} \frac{\partial u}{\partial r} u^* d\sigma = \frac{1}{k_0} \sum_n |T_n|^2. \quad (2.6.20)$$

Тогда мнимая часть (2.6.17) принимает вид

$$\int_S \alpha(P) \left| u(P) + \frac{f(P)}{2i\alpha(P)} \right|^2 d\sigma + \frac{1}{k_0} \sum_n |T_n|^2 + \int_{D_e^*} q(M) |u|^2 dV = \int_S \frac{|f(P)|^2}{4\alpha(P)} d\sigma. \quad (2.6.21)$$

В силу условий (2.6.2) для функций $\alpha(P)$, $f(P)$ и $q(M)$ все слагаемые левой части (2.6.21) положительны, а правая часть равна положительной константе

$$\int_S \frac{|f(P)|^2}{4\alpha(P)} d\sigma = A > 0, \quad (2.6.22)$$

значение которой определяется нормой $\|f(P)\|_{L_2(S)}$ и константой α_0 . Отсюда следует ограниченность норм

$$\begin{aligned} \|u(M)\|_{L_2(D_e^*)} &\leq A', \\ \|u(P)\|_{L_2(S)} &\leq A'' \text{ и} \\ \sum_n |T_n|^2 &< A', \end{aligned} \quad (2.6.23)$$

где константы A' и A'' определяются через введенные выше константы (α_0 , α_1 , q_0 , q_1 , f_1).

Замечание 2.6.5 Для действительной части (2.6.17) получим выражение

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_{\Sigma_{R_0}} \frac{\partial u}{\partial r} u^* d\sigma - \int_{D_e^*} |\nabla u|^2 dV &= \int_S \operatorname{Re} h(P) |u|^2 d\sigma - \\ &- \operatorname{Re} \int_S f(P) u^* d\sigma - \int_{D_e^*} \operatorname{Re} k^2(M) |u|^2 dV. \end{aligned} \quad (2.6.24)$$

Пользуясь разложением решения (2.6.1) по сферическим гармоникам и асимптотикой функций Ханкеля, можно показать, что при достаточно большом значении R_0

$$\operatorname{Re} \int_{\Sigma_{R_0}} \frac{\partial u}{\partial r} u^* d\sigma < 0. \quad (2.6.25)$$

Тогда в силу доказанной ранее ограниченности норм $\|u\|_{L_2(S)}$ и $\|u\|_{L_2(D_e^*)}$ норма правой части (2.6.24) в L_2 ограничена, а оба слагаемых в левой части (2.6.24) отрицательны. Отсюда следует ограниченность нормы $\|\nabla u\|_{L_2(D_e^*)}$, а тем самым и ограниченность нормы

$$\|u\|_{W_2^1(D_e^*)} < A_1. \quad (2.6.26)$$

6.3. Построение приближенного решения неполным методом Галеркина. Построение классического решения задачи (2.6.1) в общем случае не удается провести чисто аналитическими методами, представляющими решение задачи в виде явного аналитического выражения. Значительно более эффективными оказываются численные алгоритмы, позволяющие получить приближенное решение, сколь угодно близкое к истинному решению исходной задачи в соответствующей функциональной норме.

В настоящем пункте мы рассмотрим решение исходной задачи (2.6.1) с помощью так называемого неполного метода Галеркина, который, в отличие от полного метода Галеркина, сводящего исходную краевую задачу для уравнения в частных производных к системе алгебраических уравнений, позволяет строить краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, эквивалентную исходной краевой задаче для уравнения в частных производных. Основное преимущество данного метода состоит в том, что вместо построения полной системы базисных функций, являющихся собственными функциями спектральной задачи для исходного многомерного дифференциального оператора в частных производных, как это требуется в полном методе Галеркина, в неполном методе Галеркина появляется значительный произвол в выборе системы базисных функций, через которые выражаются коэффициенты системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Перейдем к более подробному изложению основных положений неполного метода Галеркина на простейшем примере решения задачи (2.6.1), в которой внутренняя граница S области D_e^* решения задачи является сферой Σ_{r_0} радиуса r_0 , концентрической со сферой Σ_{R_0} — внешней граничной поверхностью области D_e^* .

Будем искать приближенное решение $u_N(r, \theta, \varphi)$ задачи (2.6.1) при каждом фиксированном значении r в виде конечной линейной комбинации сферических функций $Y_n(\theta, \varphi)$:

$$u_N = \sum_{n=0}^N Z_n(r) Y_n(\theta, \varphi), \quad r_0 < r < R_0 \quad (2.6.27)$$

с пока неизвестными коэффициентами $Z_n(r)$. Функции $Z_n(r)$ определим из следующих проекционных соотношений:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_r} (\Delta u_N + k^2(M)u_N) Y_m^* d\sigma &= 0, \quad r_0 < r < R_0, \\ \int_{\Sigma_{r_0}} \left(\frac{\partial u_N}{\partial r} + h u_N - f \right) Y_m^* d\sigma &= 0, \quad m = 0, 1, \dots, N, \\ Z'_n(r) - \gamma_n Z_n(r)|_{r=R_0} &= 0, \quad \gamma_n = \frac{\frac{d}{dr} \zeta_{l(n)}^{(1)}(k_0 r)}{\zeta_{l(n)}^{(1)}(k_0 r)} \Big|_{r=R_0}, \end{aligned} \quad (2.6.28)$$

из которых на основании (2.6.27) следует, что функции $Z_n(r)$ должны на отрезке $[r_0, R_0]$ удовлетворять краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} (r^2 Z'_n(r))' + \sum_{m=0}^N K_{nm}(r) Z_m(r) &= 0, \quad r_0 < r < R_0, \\ Z'_n + \sum_{m=0}^N h_{nm}(r) Z_m(r) \Big|_{r=r_0} &= f_n(r_0), \quad n = 0, 1, \dots, N, \\ Z'_n - \gamma_n Z_n(r)|_{r=R_0} &= 0, \end{aligned} \quad (2.6.29)$$

где

$$\begin{aligned} K_{nm}(r) &= -\lambda_{l(n)} \delta_{nm} + \int_{\Sigma_r} k^2(M) Y_n Y_m^* d\sigma, \\ & \quad r_0 < r < R_0, \\ h_{nm} &= \int_{\Sigma_{r_0}} h(P) Y_n Y_m^* d\sigma, \\ f_n(r_0) &= \int_{\Sigma_{r_0}} f(P) Y_n^* d\sigma, \end{aligned} \quad (2.6.30)$$

λ_l — собственные значения спектральной задачи для сферических функций

$$\begin{aligned}\Delta_{\theta,\varphi} Y_l + \lambda_l Y_l &= 0, \\ \lambda_l &= l(l+1).\end{aligned}\quad (2.6.31)$$

Заметим, что парциальные условия излучения (2.6.29) для функций $Z_n(R_0)$ можно переписать в виде

$$Z'_n|_{r=R_0} = \frac{d}{dr} \zeta_{l(n)}^{(1)}(k_0 r) \Big|_{r=R_0} T_n^{(N)}, \quad (2.6.32)$$

где $T_n^{(N)}$ — амплитуда разложения приближенного решения $u_N(R_0, \theta, \varphi)$ по расходящимся сферическим волнам (метагармоническим функциям)

$$u_N(R_0, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^N T_n^{(N)} w_n(R_0, \theta, \varphi). \quad (2.6.33)$$

Покажем, что функция $u_N(r, \theta, \varphi)$, удовлетворяющая краевой задаче (2.6.28), равномерно по N ограничена в норме L_2 .

Умножая уравнения системы (2.6.28) на $Z_m^*(r)$, суммируя по m и интегрируя по r от r_0 до R_0 , получим

$$\int_{K_{R_0}^{r_0}} (\Delta u_N + k^2(M)u_N) u_N^* dV = 0, \quad (2.6.34)$$

где $K_{R_0}^{r_0}$ — шаровой слой между сферами Σ_{r_0} и Σ_{R_0} , и

$$\int_{\Sigma_{r_0}} \left(\frac{\partial u_N}{\partial r} + h(P)u_N(P) - f(P) \right) u_N^*(P) d\sigma = 0. \quad (2.6.35)$$

Из (2.6.34) следует

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_{r_0} + \Sigma_{R_0}} \frac{\partial u_N}{\partial n} u_N^* d\sigma - \int_{K_{R_0}^{r_0}} |\nabla u_N|^2 dV + \\ + \int_{K_{R_0}^{r_0}} k^2(M) |u_N|^2 dV = 0.\end{aligned}\quad (2.6.36)$$

Заметим, что в силу (2.6.35)

$$\operatorname{Im} \int_{\Sigma_{r_0}} \frac{\partial u_N}{\partial n} u_N^* d\sigma = \int_{\Sigma_{r_0}} \left\{ \alpha(P) |u_N|^2 + \operatorname{Im} f(P) u_N^* \right\} d\sigma, \quad (2.6.37)$$

а в силу (2.6.27), условия излучения (2.6.29) и представления (2.6.33) верно соотношение

$$\operatorname{Im} \int_{\Sigma_{R_0}} \frac{\partial u_N}{\partial n} u_N^* d\sigma = \frac{1}{k_0} \sum_{n=0}^N |T_n^{(N)}|^2. \quad (2.6.38)$$

Поэтому, преобразуя подынтегральное выражение в (2.6.37) в разность квадратов модулей соответствующих функций, для мнимой части выражения (2.6.36) окончательно получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma_{r_0}} \alpha(P) \left| u_N + \frac{f(P)}{2i\alpha} \right|^2 d\sigma + \frac{1}{k_0} \sum_{n=0}^N |T_n^{(N)}|^2 + \\ & + \int_{K_{R_0}^{r_0}} q(M) |u_N|^2 dV = \int_{\Sigma_{r_0}} \frac{|f(P)|^2}{4\alpha(P)} d\sigma. \end{aligned} \quad (2.6.39)$$

Отсюда следует ограниченность норм

$$\begin{aligned} \|u_N(M)\|_{L_2(K_{R_0}^{r_0})} &\leq A', \\ \|u_N(P)\|_{L_2(\Sigma_{r_0})} &\leq A'', \\ \sum_{n=0}^N |T_n^{(N)}|^2 &< A' \end{aligned} \quad (2.6.40)$$

для любого N .

Так же, как и в случае решения задачи (2.6.1), беря действительную часть выражения (2.6.36), покажем, что при поставленных условиях на коэффициенты исходной задачи можно доказать принадлежность приближенного решения при любом N пространству $W_2^1(K_{R_0}^{r_0})$.

Следствия из энергетического тождества (2.6.39).

Следствие 2.6.1 Однородная краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.6.29) имеет только тривиальное решение.

Следствие 2.6.2 Неоднородная краевая задача (2.6.29) однозначно разрешима при любом значении N , построенная по этому решению функция $u_N(r, \theta, \varphi)$ принадлежит функциональному пространству $W_2^1(K_{R_0}^{r_0})$ и равномерно по N ограничена по нормам $L_2(K_{R_0}^{r_0})$ и $W_2^1(K_{R_0}^{r_0})$.

Остается показать, что приближенное решение $u_N(r, \theta, \varphi)$ задачи (2.6.1) стремится по норме при $N \rightarrow \infty$ к истинному решению исходной задачи. Рассмотрим невязку

$$w_N(M) = u(M) - u_N(M) \quad (2.6.41)$$

истинного и приближенного решений. Очевидно

$$w_N = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{A}_n(r) Y_n(\theta, \varphi), \quad (2.6.42)$$

коэффициенты $\hat{A}_n(r)$ которой в разложении $w_N(r, \theta, \varphi)$ по сферическим функциям определяются выражением

$$\hat{A}_n(r) = \begin{cases} A_n(r) - Z_n(r), & n \leq N, \\ A_n(r), & n > N, \end{cases} \quad (2.6.43)$$

а сама функция $w_N(r, \theta, \varphi)$ удовлетворяет соотношениям

$$\int_{\Sigma_r} (\Delta w_N + k^2(M)w_N) Y_m^* d\sigma = \begin{cases} 0, & m \leq N, \\ - \int_{\Sigma_r} k^2(M)u_N Y_m^* d\sigma, & m > N, \end{cases} \quad r_0 < r < R_0,$$

$$\int_{\Sigma_{r_0}} \left(\frac{\partial w_N}{\partial n} + k^2(M)w_N \right) Y_m^* d\sigma = \begin{cases} 0, & m \leq N, \\ - \int_{\Sigma_{r_0}} (h(P)u_N - f(P)) Y_m^* d\sigma, & m > N, \end{cases}$$

$$\int_{\Sigma_{R_0}} \frac{\partial w_N}{\partial n} Y_m^* d\sigma = R_0^2 (T_m - T_m^{(N)}) \frac{d}{dr} \zeta_{l(m)}^{(1)}(k_0 R_0), \quad (2.6.44)$$

где $T_m^{(N)} = 0$ при $m > N$.

Обозначив N -ый остаток ряда (2.6.5) в разложении точного решения по сферическим функциям

$$R_N(M) = \sum_{n=N+1}^{\infty} A_n(r) Y_n(\theta, \varphi) \quad (2.6.45)$$

и проделав с выражениями (2.6.44) преобразования, аналогичные предыдущим, получим для невязки $w_N(r, \theta, \varphi)$ энергетическое соотношение

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma_{r_0}} \alpha(P) |w_N|^2 d\sigma + \frac{1}{k_0} \sum_{n=0}^N |T_n - T_n^{(N)}|^2 + \\ & + \int_{K_{R_0}^{r_0}} q(M) |w_N|^2 dV = - \int_{K_{R_0}^{r_0}} \operatorname{Im} \{k^2(M) u_N R_N^*\} dV - \\ & - \int_{\Sigma_{r_0}} \operatorname{Im} \{ (h(P) u_N - f) R_N^* \} d\sigma. \end{aligned} \quad (2.6.46)$$

В силу предыдущих оценок (2.6.23), (2.6.26) для точного и (2.6.40) для приближенного решения, переходя в (2.6.47) к пределу при $N \rightarrow \infty$, получим оценки

$$\begin{aligned} \|w_N\|_{W_2^1(K_{R_0}^{r_0})} &\rightarrow 0, \quad \|w_N\|_{L_2(\Sigma_{r_0})} \rightarrow 0, \quad \text{при } N \rightarrow \infty, \\ \text{и } T_n^{(N)} &\rightarrow T_n, \quad N \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.6.47)$$

что и доказывает сходимость построенного по неполному методу Галеркина приближенного решения задачи (2.6.1) к истинному ее решению.

Замечания и обобщения.

Замечание 2.6.6 Как следует из соотношения (2.6.46), скорость сходимости неполного метода Галеркина в первую очередь зависит от скорости сходимости к нулю остатка $R_N(M)$, (2.6.45), которая в основном определяется степенью гладкости решения исходной задачи (2.6.1).

Замечание 2.6.7 Предыдущие рассуждения были проведены главным образом для краевой задачи с однородным уравнением и диссипативными граничными условиями. Совершенно

аналогично можно получить энергетическое тождество типа (2.6.46) и для неоднородного уравнения Гельмгольца

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2(M)u &= -f(M), \quad M \in D_e, \\ \text{Supp}f(M) &= D_0 \subset D_e, \end{aligned} \quad (2.6.48)$$

в котором при условии

$$\text{Im} k^2(M) = q(M) \geq q_0 > 0 \quad (2.6.49)$$

в правой части тождества появляется член

$$\int_{D_e} \frac{|f(M)|^2}{4q(M)} dV > 0. \quad (2.6.50)$$

Это и обеспечивает необходимые оценки при доказательстве ограниченности решения исходной задачи в норме $W_2^1(D_e)$ и сходимости неполного метода Галеркина и для данного случая.

Замечание 2.6.8 В рассмотренных до сих пор внешних задачах дифракции ставились условия отсутствия источников на бесконечности. Однако большой практический интерес вызывают задачи дифракции с источниками на бесконечности, в частности, задачи дифракции на локальном теле плоской волны, приходящей из бесконечности. В этих случаях однородные парциальные условия излучения (2.6.3) следует заменить на неоднородные условия излучения. Для этого воспользуемся представлением полного решения исходной задачи в виде

$$u_{\text{полн}}(M) = \begin{cases} u_0(M) + u_e(M), & M - \text{вне } \Sigma_{R_0}, \\ u_i(M), & M - \text{внутри } \Sigma_{R_0}, \end{cases} \quad (2.6.51)$$

где $u_0(M)$ — поле, создаваемое бесконечно удаленным источником в \mathbb{R}^3 , $u_e(M)$ — рассеянное поле в D_e вне Σ_{R_0} , $u_i(M)$ — поле в D_e внутри Σ_{R_0} . На поверхности сферы Σ_{R_0} очевидно имеют место условия сопряжения

$$u_{\text{полн}}|_{\Sigma_{R_0}} = u_i|_{\Sigma_{R_0}}, \quad \frac{\partial u_{\text{полн}}}{\partial r} \Big|_{\Sigma_{R_0}} = \frac{\partial u_i}{\partial n} \Big|_{\Sigma_{R_0}}, \quad (2.6.52)$$

причем имеют место разложения

$$\begin{aligned} u_0|_{\Sigma_{R_0}} &= \sum A_n(r)Y_n, & u_e|_{\Sigma_{R_0}} &= \sum_n Q_n(r)Y_n, \\ u_i|_{\Sigma_{R_0}} &= \sum_n Z_n(r)Y_n. \end{aligned} \quad (2.6.53)$$

Из (2.6.52) и (2.6.53) получим

$$\begin{aligned} A_n(r) + Q_n(r)|_{r=R_0} &= Z_n(r)|_{r=R_0}, \\ A'_n(r) + Q'_n(r)|_{r=R_0} &= Z'_n(r)|_{r=R_0}, \end{aligned} \quad (2.6.54)$$

Так как для поля u_e справедливы парциальные условия излучения

$$Q'_n(r) - \gamma_n(r)Q_n(r)|_{r=R_0} = 0, \quad (2.6.55)$$

где величина $\gamma_n(R_0)$ определяется (2.6.10), то отсюда получаем неоднородные парциальные условия излучения для поля $u_i(M)$ на Σ_{R_0}

$$\begin{aligned} Z'_n(r) - \gamma_n(r)Z_n(r)|_{r=R_0} &= \\ &= A'_n(r) - \gamma_n(r)A_n(r)|_{r=R_0} = b_n(R_0). \end{aligned} \quad (2.6.56)$$

Замечание 2.6.9 В качестве дальнейшего обобщения полученных результатов рассмотрим краевую задачу с условиями сопряжения для обобщенного уравнения Гельмгольца

$$\begin{aligned} \Delta u_e + k_0^2 u_e &= -f(M), & M &- \text{вне } \Sigma_{R_0}, \\ \operatorname{div} \left(p(M) \operatorname{grad} u_i \right) + q(M)u_i &= 0, & M &- \text{внутри } \Sigma_{R_0}, \end{aligned} \quad (2.6.57)$$

где коэффициент $p(M)$ может терпеть разрыв на поверхности S внутри Σ_{R_0} . В этом случае на S выполняются условия сопряжения

$$[u]|_S = 0; \quad \left[p \frac{\partial u}{\partial n} \right] \Big|_S = 0, \quad (2.6.58)$$

которые должны сохраняться и для приближенного решения

$$u_N(M) = \sum_{n=1}^N Z_n(r)Y_n(\theta, \varphi) \quad (2.6.59)$$

при использовании неполного метода Галеркина. Для этого функции $Z_n(r)$ в (2.6.59) должны быть подчинены дополнительным условиям на S . Здесь возможны два случая в зависимости от геометрии поверхности S :

а) Поверхность S разрыва коэффициента $p(M)$ совпадает со сферой Σ_{r_0} , concentрической с Σ_{R_0} . Тогда условия (2.6.58) будут выполнены на Σ_{R_0} , если $Z_n(r)$ удовлетворяют соотношениям

$$[Z_n(r)] \Big|_{\Sigma_{r_0}} = 0; \quad \sum_{n=1}^N [p_{mn} Z'_n] \Big|_{\Sigma_{r_0}} = 0, \quad (2.6.60)$$

где $p_{mn}^{\pm} = \int_{\Sigma_{r_0}} p^{\pm} Y_n Y_m^* d\sigma$;

б) Поверхность S разрыва коэффициента $p(M)$ не совпадает со сферой Σ_{r_0} и они пересекаются по контуру $C = S \cap \Sigma_{r_0}$. Тогда, если в правую часть проекционных соотношений (2.6.28) добавить член

$$\int_C [p] \frac{\partial u_N}{\partial n} Y_m^* d\sigma, \quad m = 0, \dots, N, \quad (2.6.61)$$

где $[p]$ — скачок функции $p(M)$ на контуре C , то приближенное решение $u_N(M)$ будет удовлетворять энергетическому соотношению (2.6.39), что обеспечит сходимость по норме $W_2^{(1)}(D_e)$ приближенного решения $u_N(M)$ к истинному решению исходной задачи.

6.4. Задача электромагнитной теории дифракции в шаровом слое. Рассмотрим задачу электромагнитной дифракции локального тока на шаре K_{r_0} .

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik \hat{\varepsilon}'(M) \mathbf{E} + \mathbf{j}(M), \quad M \in D_e, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = ik \hat{\mu}(M) \mathbf{H}, \quad \operatorname{Supp} \mathbf{j}(M) \subset D_0 \subset D_e, \\ [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]|_{\Sigma_{r_0}} = 0, \\ [\mathbf{e}_r \times \mathbf{E}]|_{\Sigma_{R_0}} = -w_0 [\mathbf{e}_r \times [\mathbf{e}_r \times \mathbf{H}]] \Big|_{\Sigma_{R_0}} + o\left(\frac{1}{R_0}\right), \end{array} \right. \quad (2.6.62)$$

где $\hat{\varepsilon}'(M)$ и $\hat{\mu}(M)$ — эрмитовы тензоры, диагональные элементы которых удовлетворяют условиям

$$\operatorname{Im} \varepsilon'_{ii} > 0, \quad \operatorname{Im} \mu_{ii} > 0. \quad (2.6.63)$$

Как показано выше, задача (2.6.62) однозначно разрешима, причем ее можно рассматривать не в неограниченной области D_e , а внутри ограниченного шарового слоя $K_{R_0}^{r_0}$, на внутренней границе Σ_{r_0} и наружной Σ_{R_0} которого должны быть поставлены дополнительные условия: на Σ_{r_0} — (2.6.62), а на Σ_{R_0} — парциальные условия излучения. Для вывода последних воспользуемся представлением вектора, касательного к поверхности Σ_{R_0} , с помощью векторного ортогонального на Σ_{r_0} базиса $\{\mathbf{e}_n^{\exists, M}(\theta, \varphi), \mathbf{h}_n^{\exists, M}(\theta, \varphi)\}$, введенного при доказательстве электромагнитной леммы Реллиха (стр. 50). В силу ортогональности этого базиса поле $\{\mathbf{E}_\tau, \mathbf{H}_\tau\}_{\Sigma_{R_0}}$ может быть представлено в виде

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{E}_\tau \\ \mathbf{H}_\tau \end{array} \right\} \Big|_{\Sigma_{R_0}} = \sum_n T_n \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{E}_n \\ \mathbf{H}_n \end{array} \right\} \Big|_{\Sigma_{R_0}}, \quad (2.6.64)$$

где $\{\mathbf{E}_n, \mathbf{H}_n\}$ — касательные к сфере составляющие расходящихся сферических волн электрического и магнитного типа, а T_n — их амплитуды.

Из представления (2.6.64) и ортогональности базиса $\{\mathbf{e}_n^{\exists, M}, \mathbf{h}_n^{\exists, M}\}$ следуют соотношения

$$(\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_m) \Big|_{\Sigma_{R_0}} = T_m \gamma_m^{\exists}, \quad (\mathbf{H} \cdot \mathbf{h}_m) \Big|_{\Sigma_{R_0}} = T_m \gamma_m^M, \quad (2.6.65)$$

где

$$\gamma_m^{\exists} = (\mathbf{E}_m \cdot \mathbf{e}_m) \Big|_{\Sigma_{R_0}}, \quad \gamma_m^M = (\mathbf{H}_m \cdot \mathbf{h}_m) \Big|_{\Sigma_{R_0}}. \quad (2.6.66)$$

Отсюда, исключая неизвестные амплитудные коэффициенты T_m , окончательно получим соотношение

$$\gamma_m^M (\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_m) = \gamma_m^{\exists} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{h}_m), \quad (2.6.67)$$

являющееся аналогом парциальных условий излучения. Очевидно, краевая задача для неоднородной системы уравнений Максвелла в шаровом слое $K_{R_0}^{r_0}$ с условием излучения (2.6.67) эквивалентна исходной задаче (2.6.62).

Следуя уже отработанной методике, легко показать, что для решения задачи с парциальными условиями излучения (2.6.67) справедливо энергетическое тождество

$$w_0 \sum_m |T_m|^2 + \int_{K_{R_0}^{r_0}} \sum_{p=1}^3 \left\{ \operatorname{Im} \varepsilon'_{pp} \left| E_p - \frac{j_p}{2 \operatorname{Im} \varepsilon'_{pp}} \right|^2 + \operatorname{Im} \mu_{pp} |H_p|^2 \right\} dV = \sum_{p=1}^3 \int_{D_0} \frac{|j_p|^2}{4 \operatorname{Im} \varepsilon'_{pp}} dV, \quad (2.6.68)$$

аналогичное соответствующему энергетическому тождеству для скалярной задачи. Используя неполный метод Галеркина, приближенное решение $\{\mathbf{E}^{(N)}, \mathbf{H}^{(N)}\}$ исходной задачи можем искать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\boldsymbol{\tau}}^{(N)} \Big|_{\Sigma_r, r_0 < r < R_0} &= \sum_{n=1}^N a_n(r) \mathbf{e}_n, \\ \mathbf{H}_{\boldsymbol{\tau}}^{(N)} \Big|_{\Sigma_r, r_0 < r < R_0} &= \sum_{n=1}^N b_n(r) \mathbf{h}_n, \end{aligned} \quad (2.6.69)$$

где $a_n(r)$ и $b_n(r)$ — коэффициенты разложения вектор-функций $\mathbf{E}_{\boldsymbol{\tau}}^{(N)}$ и $\mathbf{H}_{\boldsymbol{\tau}}^{(N)}$ по векторному ортогональному базису на сфере Σ_r . Приближенные выражения для функций $E_r^{(N)}$ и $H_r^{(N)}$ запишем через коэффициенты $a_n(r)$ и $b_n(r)$, потребовав выполнение радиальных уравнений системы уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} ik \left(\widehat{\varepsilon}' \mathbf{E}^{(N)} \right)_r &= - \left(\operatorname{rot} \mathbf{H}^{(N)} \right)_r + j_r(M), \\ ik \left(\widehat{\mu} \mathbf{H}^{(N)} \right)_r &= \left(\operatorname{rot} \mathbf{E}^{(N)} \right)_r. \end{aligned} \quad (2.6.70)$$

Для построения краевой задачи для коэффициентов $a_n(r)$ и $b_n(r)$ потребуем выполнения соотношений

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_r} \left(\operatorname{rot} \mathbf{H}^{(N)} + ik \widehat{\varepsilon}'(M) \mathbf{E}^{(N)} - \mathbf{j} \right) \cdot \mathbf{e}_m^* d\sigma &= 0, \\ r_0 < r < R_0, \quad m = 0, 1, \dots, N, \\ \int_{\Sigma_r} \left(\operatorname{rot} \mathbf{E}^{(N)} - ik \widehat{\mu}(M) \mathbf{H}^{(N)} \right) \cdot \mathbf{h}_m^* d\sigma &= 0, \end{aligned} \quad (2.6.71)$$

$$\left[\mathbf{e}_r \times \mathbf{E}^{(N)} \right] \Big|_{\Sigma_{r_0}} = 0.$$

Также потребуем, чтобы выполнялись парциальные условия излучения (2.6.67). Для решения $\{\mathbf{E}^{(N)}, \mathbf{H}^{(N)}\}$ задачи (2.6.71) обычным методом получается то же энергетическое соотношение (2.6.68), что и для истинного решения исходной задачи, откуда следует однозначная разрешимость краевой задачи на отрезке $[r_0, R_0]$ для конечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов $\{a_n, b_n\}$ и сходимости в норме $W_2^{(1)}(K_{R_0}^{r_0})$ построенного по ним приближенного решения $\{\mathbf{E}^{(N)}, \mathbf{H}^{(N)}\}$ к истинному решению исходной задачи.

6.5. Общая задача электромагнитной дифракции на локальном теле в неоднородной среде. Развитые методы решения задач электромагнитной дифракции для частного случая рассеяния на сфере, сводящие исходную задачу к краевой задаче в шаровом слое, могут быть распространены и на задачи с более сложной геометрией поверхности S рассеивателя.

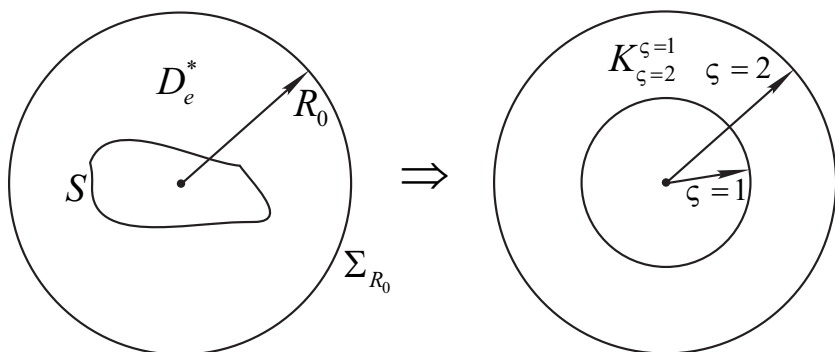
Пусть надо решить задачу электромагнитной дифракции на идеально проводящем теле, ограниченном гладкой поверхностью S типа Ляпунова.

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{j}, \quad M \in D_e, \quad \operatorname{Supp} \mathbf{j} \subset D_0 \subset D_e, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mu_0 \mathbf{H}, \\ [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]|_S = 0, \\ [\mathbf{e}_r \times \mathbf{E}]|_{\Sigma_{R_0}} = -w_0 [\mathbf{e}_r \times [\mathbf{e}_r \times \mathbf{H}]]|_{\Sigma_{R_0}} + o\left(\frac{1}{R_0}\right). \end{array} \right. \quad (2.6.72)$$

В случае достаточно сложной геометрии поверхности S прямое применение к этой задаче неполного метода Галеркина затруднено из-за сложного представления базисных функций.

Поэтому с помощью преобразования координат $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x^1, x^2, x^3)$ проведем взаимно однозначное отображение исходной двухсвязной области D_e^* , ограниченной поверхностью S изнутри и сферой Σ_{R_0} снаружи, на шаровой слой K в системе координат (x^1, x^2, x^3) (см. рис. 2.6.1). Такое отображение можно провести многими способами. В частности, пусть поверхность S является звездной и в сферической системе координат задается соотношением

$$r|_S = r_0(\theta, \varphi)|_S, \quad (2.6.73)$$

Рис. 2.6.1. Отображение области D_e^* на шаровой слой $K_{\zeta=2}^{\zeta=1}$.

где $r_0(\theta, \varphi)$ — однозначная гладкая функция обеих переменных. Тогда соотношения

$$\begin{aligned} x^1 &= \zeta = 1 + \frac{r - r_0(\theta, \varphi)}{R_0 - r_0(\theta, \varphi)}, \\ x^2 &= \theta' = \theta, \\ x^3 &= \varphi' = \varphi \end{aligned} \quad (2.6.74)$$

отображают область D_e^* на шаровой слой $K_{\zeta=2}^{\zeta=1}$ в переменных $(\zeta, \theta', \varphi')$. Заметим, что при фиксированных значениях угловых координат θ и φ новая радиальная переменная изменяется на отрезке $[1 \leq \zeta \leq 2]$.

Итак, мы упростили геометрию задачи, но, конечно, усложнили дифференциальные уравнения, поскольку полученная система координат (x^1, x^2, x^3) в общем случае будет криволинейной и неортогональной. Напомним основные понятия тензорного анализа [17].

В каждой точке $M(x^1, x^2, x^3)$ пространства, в котором введены новые координаты, существует тройка $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ некопланарных векторов, касательных к соответствующим координатным линиям. Эти векторы называются основными. Кроме них по формулам

$$\mathbf{a}^i = \frac{[\mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_k]}{V}, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (2.6.75)$$

(где $V = \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \neq 0$ — смешанное произведение основных векторов, которое в силу их некопланарности отлично от нуля) строится система взаимных векторов $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3$. Имеют место очевидные соотношения

$$(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j) = \delta_{ij}, \quad (\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}^j) = g^{ij}, \quad (2.6.76)$$

где g^{ij} — элемент так называемого метрического тензора.

Любой вектор \mathbf{F} , заданный в точке M , может быть разложен как по основным, так и по взаимным векторам

$$\mathbf{F} = \sum_i f^i \mathbf{a}_i = \sum_i f_i \mathbf{a}^i. \quad (2.6.77)$$

Коэффициенты разложения носят названия f_i -ковариантных и f^i -контрвариантных компонент вектора \mathbf{F} , причем в силу (2.6.76)

$$f^i = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}^i), \quad f_j = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_j) \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.6.78)$$

Нам потребуется выражение дифференциального оператора $\text{rot}\mathbf{F}$. Оно для ковариантных компонент вектора \mathbf{F} имеет вид

$$\text{rot}\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \left(\frac{\partial f_k}{\partial x^j} - \frac{\partial f_j}{\partial x^k} \right) \mathbf{a}_i, \quad (2.6.79)$$

где (x^i, x^j, x^k) — новые криволинейные координаты, а $\sqrt{g} = V$. Используя (2.6.79), мы можем привести исходную систему уравнений Максвелла к знакомому виду. Заметим, что вектора \mathbf{a}^i не являются единичными. Путем нормировки

$$\mathbf{e}^i = \frac{\mathbf{a}^i}{(\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}^i)} = h_i \mathbf{a}^i, \quad (2.6.80)$$

где $h_i = \frac{1}{(\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}^i)}$ — коэффициенты Ламе, можно получить базис из единичных векторов \mathbf{e}^i . Первое из уравнений Максвелла (2.6.79) для скалярных ковариантных нормированных компонент векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial x^2} (h_3 \tilde{H}_3) - \frac{\partial}{\partial x^3} (h_2 \tilde{H}_2) \right) = \\ = -ik\sqrt{g} \left(\frac{\tilde{g}^{11}}{h_2 h_3} \tilde{E}_1 + \frac{\tilde{g}^{12}}{h_3} \tilde{E}_2 + \frac{\tilde{g}^{13}}{h_2} \tilde{E}_3 \right) + \\ + \frac{\sqrt{g}}{h_2 h_3} \left(\mathbf{j} \cdot \frac{\mathbf{a}^1}{h_2 h_3} \right), \end{aligned} \quad (2.6.81)$$

где \tilde{g}^{ij} представляют собой компоненты нового тензора \tilde{g} , являющегося произведением материального тензора $\tilde{\varepsilon}'$ (или $\tilde{\mu}$)

на метрический тензор \hat{g} . Аналогичные выражения могут быть получены и для остальных пяти скалярных уравнений. Здесь символами \tilde{E} и \tilde{H} обозначены компоненты векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} по нормированному базису (2.6.80). Заметим, что при этом левая часть выражения (2.6.81) совпадает с первыми скалярными уравнениями Максвелла, записанными в ортогональной сферической системе координат $(\zeta, \theta', \varphi')$. То же самое имеет место и для остальных уравнений. Легко видеть, что система уравнений Максвелла в новых координатах $(\zeta, \theta', \varphi')$ принимает вид

$$\begin{cases} \text{rot}'\mathbf{H} = -ik\hat{g}\mathbf{E} + \tilde{\mathbf{j}}, \\ \text{rot}'\mathbf{E} = ik\hat{g}\mathbf{H}, \end{cases} \quad (2.6.82)$$

где через rot' обозначено выражение дифференциального оператора rot в якобы «ортогональной» сферической системе координат $(\zeta, \theta', \varphi')$, а тензор \hat{g} является метрическим тензором исходного преобразования системы координат, вектор $\tilde{\mathbf{j}}$ также зависит от тензора \hat{g} .

Итак, с помощью преобразования координат мы получили эквивалентную исходной (2.6.72) задачу электромагнитной дифракции в шаровом слое $1 \leq \zeta \leq 2$ с неоднородным анизотропным заполнением, характеристики которого в первую очередь определяются свойствами метрического тензора использованного отображения. Но решение последней задачи мы только что получили с помощью неполного метода Галеркина.

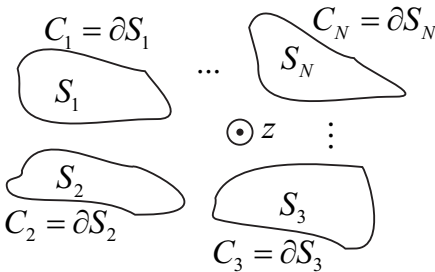
На этом мы заканчиваем рассмотрение методов решения задач дифракции на локальных объектах и переходим к следующей главе нашего курса.

НАПРАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ

В этой главе мы дадим краткий обзор основных идей и методов исследования распространения электромагнитных колебаний в неограниченных областях с некомпактной границей. Рассмотрим два круга задач, связанных с распространением волн во внешней области: в системах, в которых граница является неограниченным множеством (открытые направляющие системы) и в замкнутых волноведущих системах (волноводы).

§ 1. Открытые направляющие системы.

1.1. Свободные электромагнитные колебания вне системы идеальных бесконечных цилиндрических проводников.



Начнем с простейшей задачи о распространении свободных электромагнитных колебаний вне системы идеально проводящих бесконечных цилиндрических проводников D_i с параллельными образующими, направление вдоль которых примем за общую ось z декартовой системы координат. Обозначим сечения проводников в плоско-

Рис. 3.1.1. Сечения проводников плоскостью (x, y) .

сти (x, y) через S_i и $\partial S_i = C_i$ (рис. 3.1.1).

Тогда математическая модель данной задачи принимает вид

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik\mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mathbf{H}, \\ [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]|_{\partial D_i} = 0; \quad (M, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \cup D_i. \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Для задачи (3.1.1) выполнены все условия существования функций Борнуса электрического и магнитного типа (u, v) ,

при которых решение (3.1.1) имеет вид или TM ($H_z \equiv 0$) или TE ($E_z \equiv 0$) волн, а функции u и v удовлетворяют однородному уравнению Гельмгольца, причем

$$E_z = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u, \quad H_z = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + k^2 v. \quad (3.1.2)$$

Выясним могут ли в такой системе существовать TEM волны, то есть волны, для которых одновременно

$$H_z \equiv 0 \text{ и } E_z \equiv 0. \quad (3.1.3)$$

Будем искать решение такой задачи в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(M, z) &= \tilde{\mathbf{E}}(M)e^{i\gamma z}, \quad \mathbf{H}(M, z) = \tilde{\mathbf{H}}(M)e^{i\gamma z}, \\ u &= \tilde{u}e^{i\gamma z}, \quad v = \tilde{v}e^{i\gamma z}. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Тогда из (3.1.2) и (3.1.3) следует, что нетривиальные решения $\{\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}\}$ существуют лишь при $\gamma^2 = k^2$. Из уравнений Максвелла (3.1.1) получим

$$\tilde{E}_x = \tilde{H}_y, \quad \tilde{E}_y = -\tilde{H}_x, \quad (3.1.5)$$

а из (3.1.1) и уравнения $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ для компонент \tilde{E}_x и \tilde{E}_y систему

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad M \in \mathbb{R}^2 \setminus \cup S_i. \quad (3.1.6)$$

Построим функцию $W(x, y)$ по ее полному дифференциалу

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy, \quad (3.1.7)$$

где

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \tilde{E}_x, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = \tilde{E}_y.$$

Легко видеть, что в силу (3.1.6) функция $W(x, y)$ будет регулярной гармонической функцией на плоскости (x, y) вне всех S_i :

$$\Delta W = 0, \quad M \in \mathbb{R}^2 \setminus \cup S_i. \quad (3.1.8)$$

Из граничного условия (3.1.1) следует

$$\begin{aligned} [\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}] \Big|_{C_i} = \tilde{E}_t \Big|_{C_i} = \tilde{E}_x \cos(\boldsymbol{\tau}, x) + \tilde{E}_y \cos(\boldsymbol{\tau}, y) \Big|_{C_i} = \\ = \frac{\partial W}{\partial \tau} \Big|_{C_i} = 0. \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Откуда

$$W \Big|_{C_i} = A_i, \quad (3.1.10)$$

где константы A_i определяются способом возбуждения многопроводной линии поверхностными или локальными внешними источниками. Отметим, что если рассматривается задача для $N > 1$ идеальных проводников, то задача отыскания регулярной гармонической на плоскости (x, y) функции, принимающей различные постоянные значения на контурах C_i , однозначно разрешима, а тем самым существуют нетривиальные решения однородной системы уравнений Максвелла вида *ТЕМ* волны для многопроводной линии. Если же все значения постоянных $A_i = A$ ($i = 1, \dots, N$) одинаковы, такого решения нет, поскольку в этом случае $W \equiv A$. То же имеет место и для одиночного идеального проводника, когда $i = 1$.

1.2. Типы волн открытого диэлектрического регулярного волновода. Математическая модель для этой задачи имеет вид

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}_e = -ik_0 \mathbf{E}_e, & M \in D_e, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_e = ik_0 \mathbf{H}_e, \end{cases} \quad (3.1.11)$$

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}_i = -ik_i \mathbf{E}_i, & k_i = k_0 \sqrt{\varepsilon_i \mu_i}, \quad M \in D_i, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_i = ik_i \mathbf{H}_i, \end{cases}$$

$$[\mathbf{E}_t] \Big|_{S_i} = 0, \quad [\mathbf{H}_t] \Big|_{S_i} = 0.$$

Для упрощения выкладок будем рассматривать случай однородного диэлектрического волновода ($\varepsilon_i \equiv \text{Const}$, $\mu_i \equiv \text{Const}$), круглого поперечного сечения радиуса a . Тогда естественно воспользоваться цилиндрической системой координат (r, φ, z) , в которой существуют функции Борнмиса: u — электрического и v — магнитного типа.

Начнем со случая *ТМ* волн, в котором напряженности полей \mathbf{E} и \mathbf{H} выражаются формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} (u \mathbf{e}_z) + k^2 u \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{H} &= -ik \operatorname{rot} (u \mathbf{e}_z), \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

а функция $u(r, \varphi, z)$ является решением однородного уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

где k^2 принимает значения $k^2 = k_0^2$ или $k^2 = k_i^2$ в областях соответственно вне и внутри цилиндра. Остановимся на случае аксиально симметричной задачи, когда $\frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv 0$ и

$$u(r, z) = \tilde{u}(r)e^{i\gamma z}. \quad (3.1.13)$$

Тогда выражения для полей принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r, z) &= \tilde{\mathbf{E}}(r)e^{i\gamma z}, \\ \mathbf{H}(r, z) &= \tilde{\mathbf{H}}(r)e^{i\gamma z}, \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

где γ — постоянная распространения поля TM , имеющая одинаковые значения как вне, так и внутри диэлектрического цилиндра.

Нашей задачей является определение значений постоянной γ , при которых существует нетривиальное поле TM (3.1.12).

Из (3.1.12) и (3.1.13) получим выражения

$$\begin{aligned} \tilde{E}_r &= i\gamma \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}, & \tilde{H}_r &= -\frac{ik}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi} = 0, \\ \tilde{E}_\varphi &= \frac{i\gamma}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi} = 0, & \tilde{H}_\varphi &= ik \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}, \\ \tilde{E}_z &= (k^2 - \gamma^2)\tilde{u}, & \tilde{H}_z &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

и

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right) + \varkappa^2 \tilde{u}(r) = 0, \quad (3.1.16)$$

где

$$\varkappa^2 = k^2 - \gamma^2 = \begin{cases} \varkappa_i^2, & r < a, \\ \varkappa_0^2, & r > a. \end{cases} \quad (3.1.17)$$

Уравнение (3.1.16) — это уравнение Бесселя нулевого порядка и его решения, ограниченные в нуле и на бесконечности, соответственно равны

$$\tilde{u}(r) = \begin{cases} AJ_0(\varkappa_i r) & r \leq a, \\ BH_0^{(1)}(\varkappa_0 r), & r \geq a. \end{cases} \quad (3.1.18)$$

Учитывая обозначение (3.1.17), условия сопряжения касательных составляющих (3.1.11) полей \mathbf{E} и \mathbf{H} при $r = a$ можно записать в виде

$$\begin{cases} \alpha_i^2 J_0(\alpha_i a) A - \alpha_0^2 H_0^{(1)}(\alpha_0 a) B = 0, \\ k_i \alpha_i J_0'(\alpha_i a) A - k_0 \alpha_0 \left(H_0^{(1)}(\alpha_0 a) \right)' B = 0. \end{cases} \quad (3.1.19)$$

Условием существования нетривиального решения этой линейной алгебраической системы второго порядка является выполнение соотношения

$$k_i \alpha_0 \frac{J_0'(\alpha_i a)}{J_0(\alpha_i a)} = k_0 \alpha_i \frac{\left(H_0^{(1)}(\alpha_0 a) \right)'}{H_0^{(1)}(\alpha_0 a)}, \quad (3.1.20)$$

которое представляет собой дисперсионное уравнение для определения постоянной распространения γ . Покажем, что (3.1.20) имеет решения лишь при значениях γ , удовлетворяющих условию

$$k_0^2 < \gamma < k_i^2. \quad (3.1.21)$$

В самом деле, при $\gamma < k_0$ аргументы всех цилиндрических функций действительны. Функция Ханкеля действительного аргумента — комплексная. Соответствующий комплексный множитель (3.1.20) в этом случае можно записать в виде

$$\begin{aligned} \left(H_0^{(1)}(x) \right)' \cdot \left(H_0^{(1)}(x) \right)^* &= \\ &= (J_0'(x) + iN_0'(x)) (J_0(x) - iN_0(x)) = \\ &= i \{ N_0'(x) J_0(x) - J_0'(x) N_0(x) \} + \\ &\quad + \{ J_0(x) J_0'(x) + N_0(x) N_0'(x) \} \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

Мнимая часть (3.1.22) отлична от нуля, поскольку она является определителем Вронского для двух линейно независимых действительных решений уравнения Бесселя. Тем самым правая часть (3.1.20) является комплексной функцией γ с мнимой частью отличной от нуля, а левая часть — действительная. Следовательно, при $\gamma < k_0$ уравнение (3.1.20) решений не имеет.

Аналогично при $\gamma > k_i$ в силу свойств цилиндрических функций чисто мнимого аргумента

$$J_0(ix) = I_0(x); \quad H_0^{(1)}(ix) = -iK_0(x)$$

легко установить, что знаки левой и правой части (3.1.20) будут различны, что означает отсутствие решений уравнения (3.1.20).

Решения уравнения (3.1.20), удовлетворяющие условию (3.1.21), можно найти численными методами решения трансцендентных уравнений. Оказывается, что их лишь конечное число γ_n , и при $\gamma > k_0$ соответствующие этим значениям γ_n ($n = 1, \dots, N$) поля $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ во внешней области $r > a$ экспоненциально убывают как функция Макдональда $K_0(|\epsilon_0|r)$ при $r \rightarrow \infty$. Тем самым основная энергия распространяющейся при этом TM волны сосредоточена внутри диэлектрического цилиндра. Поскольку $\gamma_n < k_i$, то эти волны часто называют медленными волнами.

Мы подробно рассмотрели случай, когда компоненты поля выражаются через функцию Борнгиса электрического типа. Аналогичные рассуждения можно провести и для TE волн, а также и более общего случая, отказавшись от аксиальной симметрии задачи.

1.3. Дисперсионное уравнение для импедансного бесконечного цилиндра. Получим дисперсионное уравнение для постоянной распространения электромагнитных колебаний вдоль идеального бесконечного цилиндра D ($-\infty < z < \infty$) кругового поперечного сечения радиуса $r = a$, причем откажемся от условия аксиальной симметрии задачи. Математическая модель этой задачи в цилиндрических координатах (r, φ, z) имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik\mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mathbf{H}, \\ E_\varphi|_{r=a} = \zeta_0 H_z|_{r=a}, \\ E_z|_{r=a} = -\zeta_0 H_\varphi|_{r=a}, \\ [\mathbf{e}_r \times \mathbf{E}]|_{\Sigma_r} = -w_0 [\mathbf{e}_r \times [\mathbf{e}_r \times \mathbf{H}]]|_{\Sigma_r} + o\left(\frac{1}{r}\right), \\ \text{при } r \rightarrow \infty. \end{array} \right. \quad (3.1.23)$$

Из-за импедансных условий (3.1.23) нетривиальные решения однородной системы (3.1.23) в общем случае нельзя разделить на TE и TM волны. Поэтому будем искать решение, в котором напряженности \mathbf{E} и \mathbf{H} выражаются через линейную комбинацию электрической и магнитной функций Борнгиса

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= A \{ \operatorname{grad} \operatorname{div} (u\mathbf{e}_z) + k^2 (u\mathbf{e}_z) \} + ikB \operatorname{rot} (v\mathbf{e}_z), \\ \mathbf{H} &= -ikA \operatorname{rot} (u\mathbf{e}_z) + B \{ \operatorname{grad} \operatorname{div} (v\mathbf{e}_z) + k^2 (v\mathbf{e}_z) \}. \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

Будем считать, что зависимость полей от координаты φ выражается множителем $e^{im\varphi}$ ($m = 0, \pm 1, \dots$), а зависимость от координаты z — множителем $e^{i\gamma z}$, где γ — искомая постоянная распространения:

$$\begin{aligned} u(r, \varphi, z) &= R(r)e^{im\varphi+i\gamma z}, \\ v(r, \varphi, z) &= R(r)e^{im\varphi+i\gamma z}. \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

Тогда импедансные граничные условия (3.1.23) с учетом (3.1.24) принимают вид

$$\begin{aligned} -\frac{m}{a}\gamma H_m^{(1)}(\alpha a)A - \\ - \left\{ ik \frac{d}{dr} H_m^{(1)}(\alpha r) \Big|_{r=a} + \zeta_0 \alpha^2 H_m^{(1)}(\alpha a) \right\} B = 0, \\ \left\{ \alpha^2 H_m^{(1)}(\alpha a) + ik \zeta_0 \frac{d}{dr} H_m^{(1)}(\alpha r) \Big|_{r=a} \right\} A - \\ - \frac{m\gamma}{a} \zeta_0 H_m^{(1)}(\alpha a) B = 0, \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

где $\alpha^2 = k^2 - \gamma^2$, γ — искомая постоянная распространения.

Условие равенства нулю определителя системы (3.1.26) и является дисперсионным уравнением для определения значений γ , для которых существуют бегущие вдоль импедансного цилиндра волны вида (3.1.24). Отметим, что в общем случае не удастся построить явные аналитические выражения его решения и придется прибегать к численным методам решения трансцендентных уравнений.

В заключении заметим, что при $m = 0$ система (3.1.26) распадается на отдельные дисперсионные уравнения для TE и TM волн.

§ 2. Волноведущие системы

Направленная передача энергии электромагнитных колебаний, осуществляемая открытыми системами, связана с большими потерями из-за рассеяния энергии во внешнем неограниченном пространстве. Более эффективным для этих целей являются закрытые волноведущие системы, в первую очередь волноводы — бесконечные цилиндрические трубы ограниченного поперечного

сечения, для которых потери энергии через боковую поверхность минимальны. Такие устройства находят все более широкое применение в различных областях физики и техники. Первые работы по теории и практическому использованию акустических колебаний в трубах принадлежат известному английскому физику Д.У. Рэлею, затем проблемами распространения электромагнитных колебаний в радиоволноводах занимались многие известные физики и математики. Строгие математические модели регулярных радиоволноводов впервые предложены и детально изучены в 40-х годах прошлого столетия в работах А.Н. Тихонова и А.А. Самарского [37–39]. В настоящее время построение и исследование математических моделей является весьма актуальной областью математической физики, а практика их применения охватывает широкий круг задач радиофизики, акустики, нелинейной оптики и многих других областей современной физики.

Изучение этих проблем начнем с основ математической теории регулярных волноводов.

2.1. Типы волн регулярного волновода. Регулярным волноводом называется бесконечный прямолинейный цилиндр D постоянного поперечного сечения S с идеально проводящей боковой поверхностью Σ и однородным заполнением.

Изучим вопрос о типах электромагнитных колебаний, которые могут распространяться в таком цилиндре. Очевидно, для этого надо определить возможные типы нетривиальных решений однородной системы уравнений Максвелла, удовлетворяющих условию равенства нулю касательной составляющей вектора электрической напряженности \mathbf{E} на Σ :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik\mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mathbf{H}, \\ [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]|_{\Sigma} = 0, \end{cases} \quad (M, z) \in D, \quad M \in S, \quad -\infty < z < \infty. \quad (3.2.1)$$

Для задачи (3.2.1) выполнены все условия существования функций Борнниса как электрического $u(M, z)$, так и магнитного типа $v(M, z)$, удовлетворяющих в D однородному уравнению Гельмгольца и граничному условию, вытекающему из требования обращения в нуль касательной к Σ вектора \mathbf{E} .

Для поля TM типа ($H_z \equiv 0$) выражение вектора \mathbf{E} через функцию $u(M, z)$,

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div}(u\mathbf{e}_z) + k^2(u\mathbf{e}_z), \quad (3.2.2)$$

дает

$$E_{\tau}|_{\Sigma} = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial z} \Big|_{\Sigma} + k^2 (u \mathbf{e}_z)|_{\Sigma}, \quad (3.2.3)$$

что будет выполнено, если потребовать, чтобы

$$u|_{\Sigma} = 0. \quad (3.2.4)$$

Аналогично для поля TE типа

$$\mathbf{E} = ik \operatorname{rot}(v \mathbf{e}_z) \quad (3.2.5)$$

получим

$$E_{\tau}|_{\Sigma} = - \left(\frac{\partial v}{\partial n} \cdot \boldsymbol{\tau} \right) \Big|_{\Sigma}. \quad (3.2.6)$$

Отсюда следует, что условие $[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]|_{\Sigma} = 0$ будет выполнено, если

$$\frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = 0. \quad (3.2.7)$$

Поскольку на основании теоремы, доказанной в §3 главы I, любое решение однородной системы уравнений Максвелла для данной геометрии области D может быть представлено в виде суперпозиции TM и TE полей, мы можем утверждать, что любое поле внутри регулярного волновода в области, свободной от зарядов и токов, выражается в виде суперпозиции полей функций Борнгиса $u(M, z)$ электрического и $v(M, z)$ магнитного типов, удовлетворяющих внутри волновода однородным уравнениям Гельмгольца и граничным условиям

$$u|_{\Sigma} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = 0. \quad (3.2.8)$$

Замечание 3.2.1 Легко показать, что при этом решении (3.2.1) типа TEM полей ($H_z \equiv 0, E_z \equiv 0$) тождественно равны нулю, если сечение S волновода односвязно.

Действительно, при условии $H_z \equiv 0$ из соответствующего уравнения Максвелла получим

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0, \quad (M, z) \in D, \quad (3.2.9)$$

а из уравнения $\operatorname{div} \mathbf{E} \equiv 0$, следует

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0, \quad (M, z) \in D. \quad (3.2.10)$$

Отсюда вытекает, что функция $W(x, y)$ ($(x, y) \in S$), полный дифференциал которой

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy = E_x dx + E_y dy \quad (3.2.11)$$

выражается через функции E_x и E_y , должна представлять собой решение задачи

$$\begin{cases} \Delta W = 0, & M \in (x, y) \in S, \\ W|_C = \text{Const} = A; & C = \partial S. \end{cases} \quad (3.2.12)$$

Но, если область S односвязна, то задача (3.2.12) имеет единственное решение $W \equiv A = \text{Const}$, откуда получим при $-\infty < z < \infty$

$$E_x \equiv 0, \quad E_y \equiv 0 \implies \mathbf{E}(x, y, z) \equiv 0 \implies \mathbf{H}(x, y, z) \equiv 0.$$

Замечание 3.2.2 Если сечение S является многосвязным (например, коаксиальный волновод с внутренним идеально проводящим цилиндром, рис. 3.2.1), то в такой системе могут существовать и TEM волны.

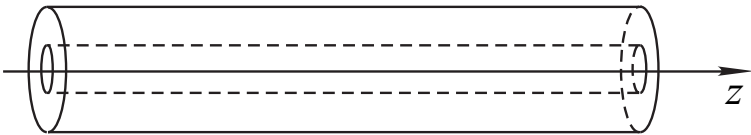


Рис. 3.2.1. Коаксиальный волновод.

2.2. Строение нормальных волн регулярного волновода. Получим явные аналитические выражения для TM и TE волн регулярного волновода. Как было только что установлено, поле TM типа внутри регулярного волновода выражается через электрическую функцию Борнгиса $u(z, y, z)$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & (M; z) \in D, \\ u|_{\Sigma} = 0. \end{cases} \quad (3.2.13)$$

Как известно, собственные функции $\varphi_n(M)$ спектральной задачи Дирихле для оператора Лапласа в области S

$$\begin{cases} \Delta\varphi_n + \lambda_n\varphi_n = 0, & M \in S, \\ \varphi_n|_C = 0, \\ (n = 1, 2, \dots), \lambda_n > 0, \lambda_n \rightarrow \infty, \text{ при } n \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (3.2.14)$$

соответствующие собственным значениям λ_n , ($n = 1, 2, \dots$), образуют ортогональный базис

$$\int_S \varphi_n(M)\varphi_{n'}^*(M)d\sigma = \delta_{nn'}. \quad (3.2.15)$$

Тем самым функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую (3.2.13), можно для любого z искать в виде

$$u(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(z)\varphi_n(M) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y, z), \quad (3.2.16)$$

где коэффициенты $Z_n(z)$ в силу (3.2.13) и (3.2.14) являются решениями уравнения

$$Z_n'' + (k^2 - \lambda_n)Z_n = 0, \quad -\infty < z < \infty. \quad (3.2.17)$$

Введем обозначение

$$\gamma_n^2 = k^2 - \lambda_n \quad \forall n. \quad (3.2.18)$$

Тогда решение уравнения (3.2.17) можно записать в виде

$$Z_n(z) = a_n^+ e^{i\gamma_n z} + a_n^- e^{-i\gamma_n z}, \quad (3.2.19)$$

где a_n^+ и a_n^- — произвольные постоянные. При этом получим частные решения (3.2.13) в виде

$$u_n(x, y, z) = (a_n^+ e^{i\gamma_n z} + a_n^- e^{-i\gamma_n z}) \varphi_n(x, y). \quad (3.2.20)$$

Учитывая, что $u_n(x, y, z)$ является комплексной амплитудой установившихся колебаний (временная зависимость $e^{-i\omega t}$)

$$U_n(x, y, z, t) = u_n(x, y, z)e^{-i\omega t}, \quad (3.2.21)$$

можно заключить, что $u_n(x, y, z)$ представляют собой комплексные амплитуды установившихся волн, распространяющихся вдоль волновода слева направо $e^{i(\gamma_n z - \omega t)}$ и справа налево $e^{i(\gamma_n z + \omega t)}$.

Обычно функции $u_n(x, y, z)$ называются *нормальными ТМ волнами*, или *ТМ волноводными модами* регулярного волновода.

Аналогичным образом для нормальных *ТЕ* волн регулярного волновода получим выражения

$$v_n(x, y, z) = \left(\hat{a}_n^+ e^{i\hat{\gamma}_n z} + \hat{a}_n^- e^{-i\hat{\gamma}_n z} \right) \psi_n(x, y), \quad (3.2.22)$$

где $\psi_n(x, y)$ — собственные функции спектральной задачи Неймана:

$$\begin{cases} \Delta \psi_n + \hat{\lambda}_n \psi_n = 0, & M \in S, \quad n = 0, 1, \dots, \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial n} \Big|_C = 0, \\ \hat{\lambda}_n \geq 0, \quad \hat{\lambda}_n \rightarrow \infty, & \text{при } n \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (3.2.23)$$

а

$$\hat{\gamma}_n^2 = k^2 - \hat{\lambda}_n. \quad (3.2.24)$$

Заметим, что в силу (3.2.18) и (3.2.24) при заданном значении k^2 существует лишь конечное число N и \hat{N} значений $\lambda_n, \hat{\lambda}_n$, при которых γ_n^2 и $\hat{\gamma}_n^2$ положительны и бесконечное число $\lambda_n, \hat{\lambda}_n$, при которых γ_n^2 и $\hat{\gamma}_n^2$ отрицательны. Соответственно, сами значения постоянных распространения γ_n ($n \leq N$) и $\hat{\gamma}_n$ ($n \leq \hat{N}$) будут действительными, а для последующих номеров $n \geq N + 1$, $n \geq \hat{N} + 1$ — чисто мнимыми.

Это означает, что среди *ТМ* и *ТЕ* нормальных волн регулярного волновода лишь конечное число является бегущими с постоянной амплитудой волнами, а амплитуды остальных волноводных мод экспоненциально убывают и возрастают при $z \rightarrow \infty$ или $z \rightarrow -\infty$. Соответствующие решения (3.2.20) и (3.2.22) часто называют «нераспространяющимися» волнами.

Заметим, что энергию вдоль волновода переносят лишь бегущие волны. Действительно, из выражения интеграла Умова-

Пойнтинга для потока энергии, переносимой нормальной волной через поперечное сечение волновода S имеем

$$W_n = \operatorname{Im} \int_S \frac{\partial u_n}{\partial z} u_n^* d\sigma = \operatorname{Im} \left\{ i\gamma_n |a_n|^2 \int_S \varphi_n \varphi_n^* d\sigma \right\} = \begin{cases} \gamma_n |a_n|^2, & \gamma_n^2 > 0, \\ 0, & \gamma_n^2 \leq 0. \end{cases} \quad (3.2.25)$$

При этом фазовая скорость бегущей волны

$$v_\Phi = \frac{\omega}{\gamma_n} = \frac{k}{\gamma_n} c = c \frac{k}{\sqrt{k^2 - \lambda_n}} > c, \quad (3.2.26)$$

а групповая скорость

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{d\gamma_n} = c \frac{dk}{d\gamma_n} = c \frac{d\sqrt{\gamma_n^2 + \lambda_n}}{d\lambda} = c \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma_n^2 + \lambda_n}} < c, \quad (3.2.27)$$

где c — скорость света в вакууме. Так как скорость переноса энергии сигнала определяется групповой скоростью, то выражения (3.2.26) и (3.2.27) находятся в полном соответствии с общими принципами теории относительности.

2.3. Векторный базис регулярного волновода. В §4 главы 2 показано, что, используя базисность сферических функций, на сфере можно построить векторные ортогональные базисы для полей электрического и магнитного типа. Аналогично, используя базисность собственных функций спектральных задач для оператора Лапласа в плоской области S поперечного сечения регулярного волновода

$$\begin{cases} \Delta_2 \varphi_n + \lambda_n \varphi_n = 0, & M \in S, \\ \varphi_n|_C = 0, & n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.2.28)$$

и

$$\begin{cases} \Delta_2 \psi_n + \hat{\lambda}_n \psi_n = 0, \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial n} \Big|_C = 0, & n = 0, 1, \dots, \end{cases} \quad (3.2.29)$$

можно построить векторные базисы в S для представления векторов $\mathbf{F}(x, y)$, лежащих в плоскости S :

$$\mathbf{e}_n = \begin{cases} \nabla\varphi_k, & n = 2k + 1, \quad k = 0, 1, \dots, \\ [\mathbf{e}_z \times \nabla\psi_m], & n = 2m, \quad m = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (3.2.30)$$

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{e}_n]|_C = 0$$

и

$$\mathbf{h}_n = \begin{cases} -[\mathbf{e}_z \times \nabla\varphi_k], & n = 2k + 1, \\ \nabla\psi_m, & n = 2m, \end{cases} \quad (3.2.31)$$

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}_n)|_C = 0.$$

Причем базисные вектора обладают следующими свойствами:

$$\int_S (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_{n'}) d\sigma = \int_S (\mathbf{h}_n \cdot \mathbf{h}_{n'}) d\sigma = \delta_{n,n'}, \quad (3.2.32)$$

$$\int_S [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_n] \mathbf{h}_{n'} d\sigma = \delta_{n,n'}, \quad (3.2.33)$$

$$(\text{rot } \mathbf{e}_n)_z = \begin{cases} 0, & n = 2k + 1, \quad k = 0, 1, \dots, \\ -\hat{\lambda}_n \psi_n, & n = 2m, \quad m = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (3.2.34)$$

$$(\text{rot } \mathbf{h}_n)_z = \begin{cases} \lambda_n \varphi_n, & n = 2k + 1, \quad k = 0, 1, \dots, \\ 0, & n = 2m, \quad m = 1, 2, \dots. \end{cases} \quad (3.2.35)$$

Отметим, что поперечные составляющие нормальных волн регулярного волновода имеют вид

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_n)_{\mathbf{r}} &= A_n^{\pm} \mathbf{e}_n e^{\pm i\gamma_n z}, \\ (\mathbf{H}_n)_{\mathbf{r}} &= B_n^{\pm} \mathbf{h}_n e^{\pm i\gamma_n z}, \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

где A_n^{\pm} и B_n^{\pm} — амплитуды нормальных TE и TM волн, распространяющихся слева направо (знак «+») и справа налево (знак «-») соответственно. При этом последовательности TE и TM нормальных волн перенумерованы одним индексом n , причем четным значениям n соответствуют TM , а нечетным — TE волны.

2.4. Возбуждение регулярных волноводов. Изучив свойства нормальных волн, распространяющихся в регулярном волноводе, перейдем теперь к вопросу об их возбуждении. Возможны различные способы постановки этой задачи. Простейший случай представляет собой возбуждение нормальной волной, приходящей из бесконечности. В случае отсутствия каких-либо геометрических или материальных неоднородностей характеристик на всем протяжении регулярного волновода данная нормальная волна будет распространяться по волноводу, не взаимодействуя с другими нормальными волнами, что обеспечивается полнотой и ортогональностью векторного базиса, рассмотренного в предыдущем пункте.

Другая ситуация возникает при возбуждении волновода локальными токами.

Пусть электромагнитные колебания возбуждаются в регулярном волноводе заданным током $\mathbf{j}(M, z)$, отличным от нуля лишь в ограниченной подобласти $D_0 \subset D$, расположенной внутри рассматриваемого регулярного волновода. Математическая постановка этой задачи имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik\mathbf{E} + \mathbf{j}(M, z), \quad M \in S; \quad -\infty < z < \infty, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mathbf{H}, \quad \operatorname{Supp} \mathbf{j} \in D_0 \subset D, \\ [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]|_{\Sigma} = 0, \\ \left. \begin{array}{l} \mathbf{E}_{\mathbf{r}} \\ \mathbf{H}_{\mathbf{r}} \end{array} \right|_{z \rightarrow -\infty} = \sum_n \left\{ \begin{array}{l} R_n^{\mathfrak{D}} \mathbf{e}_n^{\mathfrak{D}} e^{-i\gamma_n z}, \\ R_n^{\mathfrak{M}} \mathbf{h}_n^{\mathfrak{M}} e^{-i\tilde{\gamma}_n z}, \end{array} \right. \\ \left. \begin{array}{l} \mathbf{E}_{\mathbf{r}} \\ \mathbf{H}_{\mathbf{r}} \end{array} \right|_{z \rightarrow +\infty} = \sum_n \left\{ \begin{array}{l} R_n^{\mathfrak{D}} \mathbf{e}_n^{\mathfrak{D}} e^{i\gamma_n z}, \\ R_n^{\mathfrak{M}} \mathbf{h}_n^{\mathfrak{M}} e^{i\tilde{\gamma}_n z}. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.2.37)$$

Здесь Σ — боковая поверхность волновода, S — его поперечное сечение, z — координата вдоль оси волновода и D_0 — ограниченная подобласть внутри волновода, в которой координата z принадлежит отрезку $[z_1, z_2]$, вне которой ток $\mathbf{j}(M, z)$ равен нулю. Последнее условие означает, что решение задачи при $z \rightarrow \pm\infty$ содержит только уходящие на бесконечность нормальные волны.

Разложим вектор $\mathbf{j}(M, z)$ на продольную и поперечную составляющие:

$$\mathbf{j}(M, z) = j_z(M, z)\mathbf{e}_z + \mathbf{j}_{\mathbf{r}}(M, z). \quad (3.2.38)$$

Рассмотрим по отдельности два случая

$$\begin{aligned} 1. j_z(M, z) \neq 0, \quad \mathbf{j}_\tau(M, z) \equiv 0 \text{ и} \\ 2. j_z(M, z) \equiv 0; \quad \mathbf{j}_\tau(M, z) \neq 0, \end{aligned} \quad (3.2.39)$$

то есть возбуждение либо продольным, либо поперечным током.

Очевидно, возбуждаемое поле в первом случае будет описываться функцией Боргнаиса электрического типа, удовлетворяющей уравнению

$$\begin{cases} \Delta u_\vartheta + k^2 u_\vartheta = -j_z(M, z), \\ u_\vartheta|_\Sigma = 0. \end{cases} \quad (3.2.40)$$

Для единственности решения следует добавить условия отсутствия источников на бесконечности, форма которых будет выписана ниже. Решение задачи (3.2.40) можно искать в виде

$$u_\vartheta(M, z) = \sum_n Z_n(z) \varphi_n(M), \quad (3.2.41)$$

где $\varphi_n(M)$ собственные функции спектральной задачи

$$\begin{cases} \Delta_2 \varphi_n + \lambda_n \varphi_n = 0, \quad M \in S \\ \varphi_n|_C = 0, \end{cases} \quad (3.2.42)$$

а $Z_n(z)$ — подлежащие определению коэффициенты разложения функции $u(M, z)$ по ортогональному базису $\{\varphi_n(M)\}_{n=1}^\infty$. В силу (3.2.40) функции $Z_n(z)$ удовлетворяют уравнению

$$Z_n'' - p_n^2 Z_n = -j_z^{(n)}, \quad (3.2.43)$$

где $p_n^2 = \lambda_n - k^2$, а

$$j_z^{(n)}(z) = \int_S j_z(M, z) \varphi_n(M) d\sigma, \quad (3.2.44)$$

и парциальным условиям излучения на бесконечности

$$\begin{aligned} Z_n'(z) - p_n Z_n \Big|_{z \leq z_1} &= 0, \\ Z_n'(z) + p_n Z_n \Big|_{z \geq z_2} &= 0, \end{aligned} \quad (3.2.45)$$

что является математическим выражением физического требования отсутствия нормальных волн, приходящих из $-\infty$ или $+\infty$.

Как известно из курса обыкновенных дифференциальных уравнений, решение краевой задачи (3.2.43)-(3.2.45) имеет вид

$$Z_n(z) = \frac{1}{2p_n} \int_{z_1}^{z_2} e^{-p_n|z-\zeta|} j_z^{(n)}(\zeta) d\zeta \quad (3.2.46)$$

Из представлений (3.2.41), (3.2.44) и (3.2.46) окончательно получим

$$u_{\mathfrak{g}}(M, z) = \int_{D_0} g(M, M', z - \zeta) j_z(M', \zeta) dV, \quad (3.2.47)$$

где

$$g(M, M', z - \zeta) = \sum_n \frac{1}{2p_n} e^{-p_n|z-\zeta|} \varphi_n(M) \varphi_n(M') \quad (3.2.48)$$

так называемая функция Грина регулярного волновода. В работе [37] показано, что функцию (3.2.48) можно представить в виде

$$g(M, M', z - \zeta) = V(M, M', z - \zeta) + O\left(\frac{1}{R(M, z; M', \zeta)}\right), \quad (3.2.49)$$

где $V(M, M', z - \zeta)$ регулярная в D функция, а второе слагаемое при $R \rightarrow 0$ ведет себя так же, как фундаментальное решение уравнения Гельмгольца.

Замечание 3.2.3 При $p_n > 0$ и достаточно больших значениях $|z - \zeta|$ члены ряда (3.2.48) экспоненциально убывают, что обеспечивает его хорошую сходимость.

Замечание 3.2.4 Если какое-либо значение p_{n_0} окажется равным нулю, что имеет место при совпадении параметра k , определяемого частотой установившихся колебаний, с собственным значением λ_{n_0} спектральной задачи (3.2.42), то имеет место так называемый поперечный резонанс, при котором не происходит установления периодических колебаний данной частоты, а амплитуда колебаний может неограниченно возрастать при $t \rightarrow \infty$.

Перейдем к рассмотрению второго случая — возбуждения регулярного волновода поперечным током. Математическая постановка этой задачи имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik_0 \mathbf{E} + \mathbf{j}_\tau, \quad \operatorname{supp} \mathbf{j}_\tau \subset D_0 \subset D, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = ik_0 \mathbf{H}, \\ [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]|_\Sigma = 0, \\ \left. \begin{array}{l} \mathbf{E}_\tau \\ \mathbf{H}_\tau \end{array} \right|_{z \rightarrow -\infty} = \sum_n \left\{ \begin{array}{l} R_n^\exists \mathbf{e}_n^\exists e^{-i\gamma_n z}, \\ R_n^M \mathbf{h}_n^M e^{-i\hat{\gamma}_n z}, \end{array} \right. \\ \left. \begin{array}{l} \mathbf{E}_\tau \\ \mathbf{H}_\tau \end{array} \right|_{z \rightarrow +\infty} = \sum_n \left\{ \begin{array}{l} R_n^\exists \mathbf{e}_n^\exists e^{i\gamma_n z}, \\ R_n^M \mathbf{h}_n^M e^{i\hat{\gamma}_n z}. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.2.50)$$

Решение этой задачи для заданного вектора $\mathbf{j}_\tau(M)$ — поперечного тока не удастся выразить через одну скалярную функцию, поэтому приходится решать векторную задачу (3.2.49), воспользовавшись введенным ранее векторным базисом (3.2.30), (3.2.31). В силу установленных свойств этого базиса для поперечных компонент векторов электромагнитного поля (3.2.50) имеют место разложения

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\tau &= \sum_n A_n(z) \mathbf{e}_n(M), \\ \mathbf{H}_\tau &= \sum_n B_n(z) \mathbf{h}_n(M), \end{aligned} \quad (M, z) \in D, \quad (3.2.51)$$

где $A_n(z)$ и $B_n(z)$ — неизвестные коэффициенты разложения векторов $\{\mathbf{E}_\tau, \mathbf{H}_\tau\}$ по базису (3.2.30), (3.2.31). Для их определения воспользуемся уравнениями Максвелла (3.2.50), из которых следует, что

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{1}{ik_0} (\operatorname{rot} \mathbf{H}_\tau)_z = -\frac{1}{ik_0} \sum_n B_n^\exists(z) (\operatorname{rot} \mathbf{h}_n)_z = \\ &= -\frac{1}{ik_0} \sum_n B_n^\exists(z) \lambda_n \varphi_n(M), \quad n = 2k - 1, \end{aligned} \quad (3.2.52)$$

$$H_z = \frac{1}{ik_0} \sum_n A_n^M(z) \hat{\lambda}_n \psi_n(M), \quad n = 2m. \quad (3.2.53)$$

Также из уравнений (3.2.50) получим:

$$\begin{aligned}
 (\operatorname{rot} \mathbf{H})_{\mathbf{r}} &= \left(\operatorname{rot} \mathbf{H}_{\mathbf{r}} + \operatorname{rot} (H_z \mathbf{e}_z) \right)_{\mathbf{r}} = \\
 &= \left[\mathbf{e}_z \times \frac{\partial \mathbf{H}_{\mathbf{r}}}{\partial z} \right] + [\nabla_2 H_z \times \mathbf{e}_z] = \\
 &= \sum_n (B_n^\ominus(z))' [\mathbf{e}_z \times \mathbf{h}_n] - \frac{i}{k_0} \sum_n \widehat{\lambda}_n A_n^M(z) \mathbf{e}_n^M(M)
 \end{aligned} \tag{3.2.54}$$

и, аналогично,

$$\begin{aligned}
 (\operatorname{rot} \mathbf{E})_{\mathbf{r}} &= \sum_n (A_n^M(z))' [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_n] - \\
 &\quad - \frac{i}{k_0} \sum_n \lambda_n B_n^\ominus(z) \mathbf{h}_n^\ominus(M).
 \end{aligned} \tag{3.2.55}$$

Так как в силу (3.2.50)

$$\int_S (\operatorname{rot} \mathbf{H} + ik_0 \mathbf{E} - \mathbf{j}_{\mathbf{r}}) \mathbf{e}_m^\ominus d\sigma = 0, \quad \forall z, \quad m = 1, 2, \dots \tag{3.2.56}$$

и, как получено ранее,

$$\int_S [\mathbf{e}_z \times \mathbf{h}_n] \mathbf{e}_m^\ominus d\sigma = \begin{cases} -\delta_{n,m} & \text{для } \mathbf{h}_n^\ominus, \\ 0 & \text{для } \mathbf{h}_n^M, \end{cases} \tag{3.2.57}$$

то из (3.2.56) и (3.2.57) окончательно получим

$$- (B_m^\ominus(z))' + ik_0 A_m^\ominus(z) = j_m^\ominus(z), \tag{3.2.58}$$

где

$$j_m^\ominus = \int_S (\mathbf{j}_t \cdot \mathbf{e}_m^\ominus) d\sigma. \tag{3.2.59}$$

Аналогично из уравнения

$$\int_S (\{\operatorname{rot} \mathbf{E} - ik_0 \mathbf{H}\} \cdot \mathbf{h}_m^\ominus) d\sigma = 0 \tag{3.2.60}$$

следует

$$(A_m^\ominus(z))' + \frac{i}{k_0} \lambda_m B_m^\ominus(z) - ik_0 B_m^\ominus(z) = 0. \tag{3.2.61}$$

Итак, для коэффициентов $A_m^\exists(z)$ и $B_m^\exists(z)$ получена система (3.2.58), (3.2.61) двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которая может быть сведена к одному уравнению второго порядка

$$(A_m^\exists(z))'' + \gamma_m^2 A_m^\exists(z) = -\frac{i}{k_0} \gamma_m^2 j_m^\exists(z), \quad -\infty < z < \infty, \quad (3.2.62)$$

где $\gamma_m^2 = k_0^2 - \lambda_m$, а $B_m^\exists(z)$ выражается через $A_m^\exists(z)$ формулой

$$B_m^\exists(z) = i \frac{k_0}{\gamma_m^2} (A_m^\exists(z))'. \quad (3.2.63)$$

Для однозначного определения решения (3.2.62) необходимо добавить парциальные условия решения при $z \rightarrow \pm\infty$.

Записав условия ортогональности поперечных уравнений Максвелла базисным векторам \mathbf{e}_m^M и \mathbf{h}_m^M , получим аналогичное (3.2.62) уравнение для функции $A_m^M(z)$

$$(A_m^M(z))'' + \hat{\gamma}_m^2 A_m^M(z) = -ik_0 j_m^M(z), \quad \hat{\gamma}_m^2 = k_0^2 - \hat{\lambda}_m \quad (3.2.64)$$

и выражение

$$B_m^M(z) = -\frac{i}{k_0} (A_m^M(z))'. \quad (3.2.65)$$

К уравнению (3.2.64) также надо добавить парциальные условия излучения при $z \rightarrow \pm\infty$.

Замечание 3.2.5 При $\gamma_{m_0} = 0$ и $\hat{\gamma}_{m_0} = 0$ получаем эффект поперечного резонанса, при котором невозможны установившиеся колебания.

Итак, решение задачи возбуждения электромагнитных колебаний в регулярном волноводе заданным локальным током выражается явной формулой (3.2.47), а в случае поперечного тока мы свели задачу к решению обыкновенных дифференциальных уравнений.

2.5. Возбуждение нерегулярных волноводов. Перейдем теперь к более сложной задаче возбуждения нерегулярных волноводов. Понятие регулярного волновода является идеализированной простейшей направляющей системой. В реальной физической и технической практике приходится иметь дело с более сложными моделями нерегулярных волноводов причем с самыми различными типами нерегулярности. Это может быть и неоднородность заполнения, и отличие боковой поверхности волновода

от идеального цилиндра, и стык полубесконечных волноводов различного и даже переменного сечения, и отклонение продольной оси волновода от прямой, что имеет место в случае изгиба волноводов, и многие другие, порой весьма экзотические варианты. И во всех этих случаях надо построить математическую модель рассматриваемого устройства и предложить эффективный алгоритм исследования возбуждения и распространения в нем скалярных или векторных колебаний.

Начнем со скалярной задачи возбуждения прямолинейного волновода с локально неоднородным заполнением. Математическая модель этой задачи имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2(M, z)u = -f(M, z), & M \in S; \quad z \in (-\infty, \infty), \\ u|_{\Sigma} = 0, \quad \text{supp } f = D_0 \subset D. \end{cases} \quad (3.2.66)$$

Для единственности решения необходимо добавить парциальные условия излучения и задать нормальную волну $u_{n_0}(M, z) = A_0 e^{i\gamma_{n_0} z} \varphi_{n_0}(M)$, приходящую из $-\infty$ ($\gamma_{n_0} = k_0^2 - \lambda_{n_0}$). Здесь

$$k^2(M, z) = \begin{cases} k_0^2, & z > z_2, \\ k^2(M, z) \in C^{(2)}(D_1); & D_1 \in D, \\ k_0^2, & z < z_1, \end{cases} \quad (3.2.67)$$

$$k_0^2 > 0, \quad \text{Im } k^2(M, z) = q(M, z); \quad q(M, z) \geq q_0 > 0,$$

где z_1 и z_2 — сечения, перпендикулярные оси, ограничивающие область $D_1 \subset D$ (см. рис. 3.2.2). Сначала рассмотрим случай,

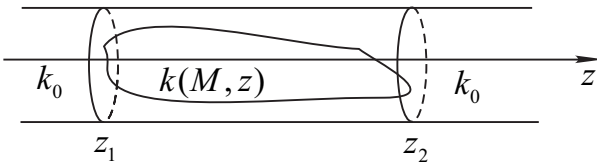


Рис. 3.2.2. Прямолинейный волновод с локально неоднородным заполнением.

когда $f(M, z) \equiv 0$ и возбуждение осуществляется лишь нормальной волной $u_0(M, z)$. Тогда условия на бесконечности можно записать в виде

$$\begin{aligned} u|_{z \leq z_1} &= A_0 e^{i\gamma_{n_0} z} \varphi_{n_0}(M) + \sum_n R_n e^{-i\gamma_n z} \varphi_n(M), \\ u|_{z \geq z_2} &= \sum_n T_n e^{i\gamma_n z} \varphi_n(M). \end{aligned} \quad (3.2.68)$$

Здесь $\varphi_n(M)$ — собственные функции спектральной задачи Дирихле для оператора Лапласа

$$\begin{cases} \Delta_2 \varphi_n + \lambda_n \varphi_n(M) = 0, & M \in S, \\ \varphi_n|_{C=\partial S} = 0, \end{cases}$$

а R_n и T_n — искомые амплитуды нормальных волн в областях $z \leq z_1$ и $z \geq z_2$.

Разрешимость задачи (3.2.66)-(3.2.68) доказывается путем сведения ее к интегральному уравнению Фредгольма второго рода со слабополярным ядром, аналогичному уравнению Липмана-Швингера для скалярной задачи дифракции на прозрачном теле.

Для доказательства единственности получим энергетическое тождество, которому удовлетворяет решение задачи (3.2.66)-(3.2.68). Для этого запишем очевидное соотношение

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{D_1} (\Delta u + k^2(M, z)u) u^* dV = \\ &= \int_{\Sigma+S_1+S_2} \frac{\partial u}{\partial n} u^* d\sigma - \int_{D_1} |\nabla u|^2 dV + \int_{D_1} k^2(M, z)|u|^2 dV. \end{aligned} \quad (3.2.69)$$

Взяв мнимую часть (3.2.69) и учитывая граничные условия (3.2.66), (3.2.68), и тот факт, что продольные постоянные γ_n нормальных волн действительны лишь для конечного N числа индексов n , а начиная с $n \geq N + 1$ являются чисто мнимыми, получим

$$\sum_{n=1}^N \gamma_n |R_n|^2 + \sum_{n=1}^N \gamma_n |T_n|^2 + \int_{D_1} q(M, z)|u|^2 dV = \gamma_{n_0} |A_0|^2. \quad (3.2.70)$$

Аналогично, для действительной части (3.2.69) имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{n=N+1}^{\infty} p_n \{e^{2p_n z_1} |R_n|^2 + e^{-2p_n z_2} |T_n|^2\} + \int_{D_1} |\nabla u|^2 dV = \\ = 2\gamma_{n_0} \operatorname{Im} (A_0 R_{n_0}^* e^{2i\gamma_{n_0} z_1}) + \int_{D_1} \operatorname{Re} k^2(M, z)|u|^2 dV. \end{aligned} \quad (3.2.71)$$

Из (3.2.70) и (3.2.71) обычным образом заключаем, что решение нашей задачи

$$u(M, z) \in W_2^{(1)}(D) \quad (3.2.72)$$

принадлежит функциональному пространству $W_2^{(1)}(D)$.

Для построения приближенного решения нашей задачи естественно воспользоваться рассмотренным ранее неполным методом Галеркина.

Ищем квазирушение задачи (3.2.66)-(3.2.68) при $f(M, z) \equiv 0$ в виде конечной линейной комбинации

$$u_N(M, z) = \sum_{n=1}^N Z_n^{(N)}(z) \varphi_n(M). \quad (3.2.73)$$

Для определения пока неизвестных функций $Z_n^{(N)}(z)$ потребуем выполнения соотношений

$$\int_{S(z)} \{ \Delta u_N + k^2(M, z) u_N \} \varphi_m^*(M) d\sigma_M = 0, \quad (3.2.74)$$

$$m = 1, 2, \dots, N,$$

где $S(z)$ — поперечное сечение волновода при продольной координате z .

Из соотношений (3.2.73), (3.2.74) на основании свойства ортогональности базисных функций $\varphi_m(M)$ при любом фиксированном z , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$Z_m^{(N)''}(z) - \lambda_m Z_m^{(N)} + \sum_{n=1}^N k_{mn}(z) Z_n^{(N)} = 0, \quad (3.2.75)$$

где

$$k_{mn}(z) = \int_{S(z)} k^2(M, z) \varphi_m^*(M) \varphi_n(M) d\sigma_M. \quad (3.2.76)$$

Уравнения (3.2.75) выполняются при всех значениях $z \in (-\infty, \infty)$, но мы будем рассматривать их лишь на отрезке $z \in [z_1, z_2]$, где значения функции $k^2(M, z)$, вообще говоря, не совпадают с константой k_0^2 . В граничных точках $z = z_1$ и $z = z_2$

функции $Z_m^{(N)}(z)$ подчиним граничным условиям, вытекающим из условий возбуждения и излучения (3.2.68):

$$\left(Z_m^{(N)}\right)' \Big|_{z=z_1} + i\gamma_m Z_m^{(N)}(z_1) = 2i\gamma_{n_0} A_0 e^{i\gamma_{n_0} z_1} \delta_{n_0 m}, \quad (3.2.77)$$

$$\left(Z_m^{(N)}\right)' \Big|_{z=z_2} - i\gamma_m Z_m^{(N)}(z_2) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (3.2.78)$$

Итак, мы свели задачу построения квазирешения исходной задачи к краевой задаче (3.2.75) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений на ограниченном отрезке $z \in [z_1, z_2]$ с неоднородными граничными условиями третьего рода. Для доказательства однозначной разрешимости этой задачи достаточно показать, что соответствующая однородная краевая задача имеет только тривиальное решение. Умножая уравнения (3.2.75), (3.2.77), (3.2.78) на $\varphi_m(M)$, суммируя по m от 1 до N и интегрируя полученные выражения по области D_1 , ограниченной сечениями $S(z_1)$ и $S(z_2)$, можно убедиться, что квазирешение удовлетворяет тем же энергетическим соотношениям (3.2.70), (3.2.71), что и точное решение исходной задачи

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N_1} \gamma_n \left| R_n^{(N)} \right|^2 + \sum_{n=1}^{N_1} \gamma_n \left| T_n^{(N)} \right|^2 + \\ + \int_{D_1} q(M, z) |u_N|^2 dV = \gamma_{n_0} |A_0|^2 \end{aligned} \quad (3.2.79)$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{n=N_1+1}^N p_n \left\{ e^{2p_n z_1} \left| R_n^{(N)} \right|^2 + e^{-2p_n z_2} \left| T_n^{(N)} \right|^2 \right\} + \\ + \int_{D_1} |\nabla u_N|^2 dV = \quad (3.2.80) \\ = 2\gamma_{n_0} \operatorname{Im} \left\{ A_0 \left(R_{n_0}^{(N)} \right)^* e^{2i\gamma_{n_0} z_1} \right\} + \int_{D_1} q(M, z) |u_N|^2 dV. \end{aligned}$$

Здесь N_1 — наибольшее значение индекса n , при котором $\gamma_n^2 \geq 0$, а $R_n^{(N)}$ и $T_n^{(N)}$ — амплитудные коэффициенты нормальных волн квазирешения $u_N(M, z)$, уходящие от сечений $S(z_1)$ и $S(z_2)$ в полубесконечных отрезках волновода $z \in (-\infty, z_1]$ и $z \in [z_2, +\infty)$.

Из соотношения (3.2.79) следует, что если $A_0 = 0$, то $u_N^0(M, z) \equiv 0$, следовательно, краевая задача (3.2.75), (3.2.77), (3.2.78) имеет только тривиальное решение.

Сходимость при $N \rightarrow \infty$ квазирешения $u_N(M, z)$ в энергетической норме $W_2^{(1)}(D_1)$ к истинному решению исходной задачи доказывается совершенно аналогично сходимости неполного метода Галеркина для задачи дифракции на ограниченном теле в локально неоднородной среде. Отметим, что наиболее существенным в наших построениях есть результат равномерной по N ограниченности семейства квазирешений $\{u_N(M, z)\}_{n=1}^N$ в соответствующих энергетических нормах. Это явилось следствием выбора проекционных соотношений, сводящих исходную задачу к конечной системе краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений неполного метода Галеркина.

Замечания и обобщения.

Замечание 3.2.6 Мы рассмотрели случай граничного условия Дирихле

$$u|_{\Sigma} = 0.$$

Все наши построения останутся в силе и для условия на боковой поверхности Σ типа условия Неймана

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Sigma} = 0$$

с заменой собственных функций $\varphi_n(M)$, $M \in S$ на собственные функции $\psi_n(M)$, $M \in S$ задачи Неймана, удовлетворяющие условию

$$\left. \frac{\partial \psi_n}{\partial n} \right|_C = 0, \quad C = \partial S$$

на граничном контуре C поверхности сечения S рассматриваемого волновода.

Проведенные рассмотрения легко обобщаются на случай третьей краевой задачи

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} + \zeta(P)u \right|_{\Sigma} = 0, \quad \text{Im} \zeta(P) = -\alpha(P), \quad \alpha(P) \geq \alpha_0 > 0, \quad (3.2.81)$$

если учесть, что ключевым моментом доказательства является получение энергетических тождеств (3.2.70), (3.2.71) как следствие соотношения (3.2.69). Действительно, в этом случае в правой части (3.2.69) первое слагаемое принимает вид

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} u^* d\sigma = - \int_{\Sigma} \zeta(P) |u|^2 d\sigma, \quad (3.2.82)$$

что при условии (3.2.81) оставляет в силе все последующие рассуждения. При этом коэффициенты $Z_n(z)$ квазирешения

$$u_N(M, z) = \sum_{n=1}^N Z_n(z) \psi_n(M) \quad (3.2.83)$$

надо определять из соотношений

$$\begin{aligned} \int_{S(z)} (\Delta u_N + k^2 u_N) \psi_m^*(M) d\sigma_M = \\ = - \int_{C(z)} \zeta(P) u_N \psi_m^*(P) dl_P, \quad C(z) = \partial S(z). \end{aligned} \quad (3.2.84)$$

Тогда как решение исходной задачи с граничным условием (3.2.81), так и квазирешение (3.2.83) будут удовлетворять одинаковым энергетическим соотношениям типа (3.2.70), (3.2.71), что и обеспечит сходимость неполного метода Галеркина и в данном случае.

Замечание 3.2.7 Легко освободиться от условия

$$f(M, z) \equiv 0.$$

В этом случае для коэффициентов $Z_n(z)$ квазирешения следует записать проекционные соотношения в виде

$$\begin{aligned} \int_{S(z)} \{ \Delta u_N + k^2 u_N + f(M, z) \} \varphi_m^*(M) d\sigma_M = 0, \\ m = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.2.85)$$

что приводит к неоднородной системе обыкновенных дифференциальных уравнений типа (3.2.75), и повторить проведенные выше рассуждения.

Электромагнитный случай. Рассмотрим задачу о возбуждении электромагнитных колебаний в радиоволноводе с локально неоднородным заполнением. Математическая постановка задачи состоит в решении системы уравнений Максвелла для комплексных амплитуд векторов напряженности \mathbf{E} и \mathbf{H} электрического и магнитного поля

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik_0 \hat{\varepsilon}'(M) \mathbf{E} + \mathbf{j}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = ik_0 \hat{\mu}(M) \mathbf{H}, \end{cases} \quad \operatorname{Supp} \mathbf{j} = D_0 \subset D, \quad (3.2.86)$$

где $\hat{\varepsilon}'(M)$ и $\hat{\mu}(M)$ — эрмитовы тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости с переменными в области $D_1 \subset D$ элементами, причем диагональные элементы тензоров $\hat{\varepsilon}'(M)$ и $\hat{\mu}(M)$ имеют положительную мнимую часть

$$\text{Im}\varepsilon'_{ii}(M) \geq \varepsilon_0 > 0; \quad \text{Im}\mu_{ii}(M) \geq \mu_0 > 0. \quad (3.2.87)$$

Вне области D_1 тензоры $\hat{\varepsilon}'(M)$ и $\hat{\mu}(M)$ непрерывно переходят в единичный тензор \hat{I}

$$\hat{\varepsilon}'(M) = \hat{I}, \quad \hat{\mu}(M) = \hat{I} \quad \text{вне } D_1. \quad (3.2.88)$$

Решение системы (3.2.86) будем искать при следующем граничном условии на поверхности волновода Σ

$$\mathbf{E}_\tau|_\Sigma = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]|_\Sigma = 0$$

и условия отсутствия источников на бесконечности.

Повторяя рассуждения, проведенные в скалярном случае, и используя лемму Лоренца, можно показать, что решение задачи (3.2.86)-(3.2.88) удовлетворяет энергетическому соотношению вида

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \int_{D_1} \left\{ \text{Im}\varepsilon'_{ii} \left| E_i - \frac{j_i}{2\text{Im}\varepsilon'_{ii}} \right|^2 + \text{Im}\mu_{ii} |H_i|^2 \right\} dV + \\ & + \sum_n \{ |R_n|^2 + |T_n|^2 \} = \sum_{i=1}^3 \int_{D_1} \frac{|j_i|^2}{4\text{Im}\varepsilon'_{ii}} dV, \end{aligned} \quad (3.2.89)$$

где R_n и T_n — амплитудные коэффициенты нормальных волн, уходящих при $z \rightarrow \pm\infty$. Если искать квазирешение $\{\mathbf{E}^{(N)}, \mathbf{H}^{(N)}\}$ задачи (3.2.86)-(3.2.88), используя введенные выше векторные базисы $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^\infty$, $\{\mathbf{h}_n\}_{n=1}^\infty$, то можно показать, что это квазирешение удовлетворяет энергетическому соотношению, аналогичному (3.2.89), откуда следует равномерная по N ограниченность квазирешения и сходимость неполного метода Галеркина и для данного случая. Аналогично можно рассмотреть случай возбуждения радиоволновода с локально неоднородным анизотропным заполнением заданной нормальной волной, приходящей из бесконечности, а также в случае импедансных граничных условий на боковой поверхности Σ волновода.

Возбуждение радиоволновода с локально нерегулярной боковой поверхностью. До сих пор мы ограничивались случаем, когда боковая поверхность Σ рассматриваемого волновода

представляла собой регулярный прямолинейный цилиндр постоянного поперечного сечения S . Однако на практике широкое применение находят и волноводы с нерегулярной боковой поверхностью Σ , причем эти нерегулярности могут быть самых различных типов (изменение поперечного сечения $S(z)$ вдоль оси волновода, включая и скачкообразные изменения; искривления оси волновода, приводящие к потере его прямолинейности и так далее). Возникает вопрос о возможности единообразного описания достаточно широкого класса таких нерегулярных волноводов.

Для этого рассмотрим следующую конструкцию. Пусть в неограниченном пространстве задана бесконечная гладкая кривая L , на которой выбран параметр длины ζ , отсчитываемый от некоторой фиксированной точки кривой L , и определены трехгранник Френе (\mathbf{n} — главная нормаль, \mathbf{b} — бинормаль, $\mathbf{\tau}$ — касательная) и гладкие функции переменной ζ : кривизна $\kappa(\zeta)$ и кручение $\nu(\zeta)$. (Как известно [17], в этом случае кривая L определяется однозначно). В каждой точке $O(\zeta)$ кривой L векторы \mathbf{n} и \mathbf{b} определяют плоскость $S_0(\zeta)$, нормальную к кривой L в данной точке. В плоскости $S_0(\zeta)$ возьмем замкнутый гладкий контур $C(\zeta)$, содержащий точку $O(\zeta)$ внутри и ограничивающий замкнутую подобласть $S(\zeta) \subset S_0(\zeta)$. Очевидно, что при изменении переменной ζ вдоль кривой L контур $C(\zeta)$ будет создавать гладкую боковую поверхность $\Sigma(\zeta)$ волновода D с изменяющимся поперечным сечением $S(\zeta)$, нормальным к направляющей кривой L . При достаточно произвольных L и $S(\zeta)$ данная конструкция задает достаточно широкий класс нерегулярных криволинейных волноводов D с переменным сечением $S(\zeta)$ (рис. 3.2.3).

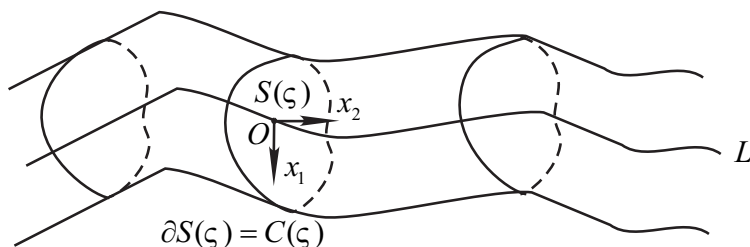


Рис. 3.2.3. Нерегулярный волновод.

В области D внутри построенного волновода введем криволинейную систему координат (x^1, x^2, x^3) . Для этого в каждой точке поперечного сечения волновода $S(\zeta)$ введем систему координат (x^1, x^2) , связанную с системой полярных координат (ρ, φ) с на-

чалом в точке $O(\zeta)$. Пусть в этой полярной системе координат контур $C(\zeta)$ описывается уравнением

$$\rho = r_0(\varphi, \zeta). \quad (3.2.90)$$

Тогда система координат

$$\begin{aligned} x^1 &= \frac{\rho}{r_0(\varphi, \zeta)} = r, \\ x^2 &= \varphi, \\ x^3 &= \zeta, \\ (x^1, x^2, x^3) &= (r, \varphi, \zeta) \end{aligned} \quad (3.2.91)$$

при $0 \leq \zeta \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-\infty < \zeta < \infty$

полностью описывает рассматриваемую область D с границей Σ .

Заметим, что преобразование ортогональных декартовых координат (x, y, z) в введенную криволинейную систему координат (r, φ, ζ)

$$(x, y, z) \rightarrow (r, \varphi, \zeta)$$

осуществляет отображение области D на прямолинейный круговой цилиндр G единичного поперечного сечения. Отметим, что в общем случае построенная система координат (ρ, φ, ζ) неортогональная и криволинейная. Поэтому уравнения Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik_0 \mathbf{E} + \mathbf{j}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = ik_0 \mathbf{H}, \end{cases}$$

даже в случае однородного заполнения волновода D для ковариантных компонент вектор \mathbf{E} и \mathbf{H} так же, как и в случае задачи дифракции электромагнитного поля на произвольном локальном теле в однородной среде, запишутся в виде

$$\begin{cases} \operatorname{rot}' \mathbf{H} = -ik_0 \sqrt{g} \hat{g} \mathbf{E} + \sqrt{g} \mathbf{j} \\ \operatorname{rot}' \mathbf{E} = ik_0 \sqrt{g} \hat{g} \mathbf{H}, \end{cases} \quad (3.2.92)$$

где rot' — оператор rot , записанный в ортогональных цилиндрических координатах (r, φ, ζ) , \hat{g} — метрический тензор данного преобразования, \sqrt{g} — объем параллелепипеда, построенного на координатных векторах $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3$ новой системы координат.

Заметим, что граничное условие $[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]|_{\Sigma} = 0$ исходной задачи перейдет в условие

$$[\mathbf{a}^1 \times \mathbf{E}]|_{r=1} = 0, \quad (3.2.93)$$

тем самым сохраняя условие равенства нулю касательной составляющей вектора \mathbf{E} на границе волновода.

Итак, с помощью отображения исходного волновода D с нерегулярной боковой поверхностью Σ на прямолинейной цилиндр G постоянного поперечного сечения мы свели задачу (3.2.86)-(3.2.88) к задаче (3.1.17) возбуждения прямолинейного волновода G с неоднородным анизотропным заполнением, только что рассмотренную в п. 2.5.2.

Полученные результаты находят широкое применение в практической радиотехнике. Так, хорошо известен эффект взаимного преобразования волны H_{01} в волну E_{11} радиоволновода круглого поперечного сечения при его плоском круговом изгибе, что приводит к значительному увеличению потерь энергии распространяющихся волн в стенках волновода. Причем при изгибе волновода на так называемый угол Жуге происходит полное преобразование друг в друга данных нормальных волн. Основываясь на приведенных выше постановках задач возбуждения волноводов с нерегулярной боковой поверхностью, описание которых использовало направляющую пространственную кривую L , характеризующую не только кривизной $\alpha(\zeta)$, но и кручением $\nu(\zeta)$, можно установить, что при изгибе оси волновода по пространственной спирали с заданными значениями α_0 и ν_0 можно найти такое сочетание этих параметров, при котором для плоского изгиба радиоволновода на заданный угол θ_0 практически отсутствует эффект преобразования волны H_{01} в волну E_{11} в изогнутом по соответствующей спирали радиоволноводе.

Замечание 3.2.8 Мы рассмотрели задачу возбуждения радиоволновода D с нерегулярной боковой поверхностью и однородным заполнением (3.2.86)-(3.2.88). Повторяя наши рассуждения для более общего случая возбуждения нерегулярных волноводов не только с нерегулярной боковой поверхностью, но и локальным неоднородным заполнением $\hat{\epsilon}_0(M)$, $\hat{\mu}_0(M)$, мы опять приходим к задаче (3.2.92), в которой вместо тензора $\hat{g}(M)$ появятся тензоры

$$\begin{aligned}\hat{\epsilon}(M) &= \hat{g}(M)\hat{\epsilon}_0(M), \\ \hat{\mu}(M) &= \hat{g}(M)\hat{\mu}_0(M),\end{aligned}\tag{3.2.94}$$

и можно будет ставить задачу определения заполнения $(\hat{\epsilon}_0, \hat{\mu}_0)$ исходного волновода D , при котором заполнение преобразованного волновода оказывается однородным. Другими словами встает вопрос: как надо заполнить участок исходного волновода в области с нерегулярной боковой поверхностью,

чтобы данная нормальная волна проходила этот участок без искажения?

Наиболее просто такая задача решается в случае плоского акустического волновода, когда исходный волновод D , представляющий собой искривленную полосу переменного сечения на комплексной плоскости Z ($z = x + iy$), отображается на регулярную полосу G на комплексной плоскости ζ ($\zeta = \xi + i\eta$). В силу теоремы Римана существует аналитическая функция $\zeta = f(z)$, осуществляющая соответствующее конформное отображение. При этом обратная функция $z = \varphi(\zeta)$ осуществляет конформное отображение регулярной полосы G комплексной плоскости ζ на криволинейную полосу D комплексной плоскости z , а оператор Лапласа $\Delta_{xy}u(x, y)$ принимает вид

$$\frac{1}{|\varphi'(\zeta)|^2} \Delta_{\xi\eta} U(\xi, \eta). \quad (3.2.95)$$

Следовательно, при данном конформном отображении получим уравнение

$$\Delta_{\xi\eta} U(\xi, \eta) + K^2(\xi, \eta) |\varphi'(\zeta)|^2 U(\xi, \eta) = 0, \quad (3.2.96)$$

где

$$K^2(\xi, \eta) = k^2(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \quad (3.2.97)$$

и при

$$k^2(x, y) = \frac{k_0^2}{|\varphi'(\zeta)|^2}, \quad \zeta = \xi(x, y) + i\eta(x, y) \quad (3.2.98)$$

уравнение (3.2.96) принимает вид

$$\Delta_{\xi\eta} U + k_0^2 U(\xi, \eta) = 0. \quad (3.2.99)$$

Отсюда вытекает, что при неоднородном заполнении (3.2.98) нерегулярного участка волновода D нормальная волна данного волновода проходит этот участок без искажения. Это, в частности, позволит решить задачу о таком заполнении окрестности излома прямолинейного плоского акустического волновода, чтобы при прохождении его не происходило искажения заданной нормальной волны, входящей из бесконечности (см. рис. 3.2.4). Явное выражение требуемого конформного отображения в данном случае мож-

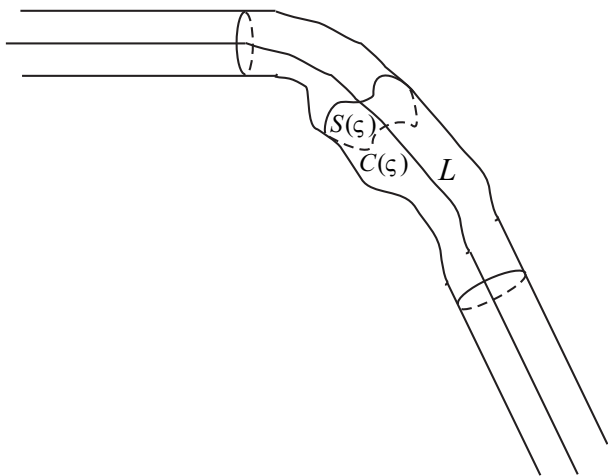


Рис. 3.2.4. Изгиб волновода.

но получить с помощью интеграла Шварца–Кристоффеля.

2.6. Скачкообразные неоднородности нерегулярных волноводов. В практических приложениях радиофизики и техники важную роль играют нерегулярные волноводы, геометрические и электродинамические характеристики которых меняются не непрерывно, а скачкообразно. Для исследования задач возбуждения таких волноводов могут быть применены соответствующим образом модифицированные методы, развитые в предыдущих пунктах. Рассмотрим основные идеи этих методов на простейшем примере плоского акустического волновода D , поперечное сечение S которого является разрывной функцией, скачкообразно изменяющейся при $z = 0$ (рис. 3.2.5):

$$S(z) = \begin{cases} a, & z < 0, \\ b, & z > 0. \end{cases} \quad (3.2.100)$$

Заполнение волновода будем считать однородным (характеризуемым параметром k_0) и на боковой поверхности Σ волновода D поставим граничное условие второго рода $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = 0$, которое подробнее можно записать в

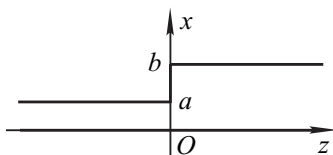


Рис. 3.2.5.

виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0, \quad \forall z, \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a} &= 0; \quad z < 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=b} = 0; \quad z > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{x \in [a,b]} &= 0; \quad a < x < b. \end{aligned} \quad (3.2.101)$$

Пусть возбуждение осуществляется нормальной волной

$$u_0(x, z) = A e^{i\gamma n_0 z} \psi_{n_0}(x), \quad (3.2.102)$$

приходящей из левого волновода ($z < 0$). Тогда соответствующая математическая задача принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u + k_0^2 u = 0, \quad M(x, z) \in D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = 0, \\ u|_{z < 0} = A e^{i\gamma n_0 z} \psi_{n_0}(x) + \sum_n R_n e^{-i\gamma n z} \psi_n(x), \\ u|_{z > 0} = \sum_n T_n e^{i\Gamma n z} \Psi_n(x), \end{array} \right. \quad (3.2.103)$$

где R_n — амплитудные коэффициенты нормальных волн, отраженных от скачка поперечного сечения при $z = 0$ в левом волноводе, и T_n — амплитудные коэффициенты нормальных волн, возбужденных в правом волноводе; $\psi_n(x)$ и $\Psi_n(x)$ — собственные функции спектральных задач Неймана на отрезках $0 < x < a$ и $0 < x < b$ соответственно, а γ и Γ — продольные постоянные распространения нормальных волн в левом и правом волноводах. При $z = 0$ и $0 < x < a$ должны выполняться условия сопряжения полей левого и правого волноводов:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow -0} u(x, z) &= \lim_{z \rightarrow +0} u(x, z), \quad 0 < x < a, \\ \lim_{z \rightarrow -0} \frac{\partial u}{\partial z}(x, z) &= \lim_{z \rightarrow +0} \frac{\partial u}{\partial z}(x, z), \quad 0 < x < a. \end{aligned} \quad (3.2.104)$$

Условия (3.2.104) и граничное условие $\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{x \in [a,b]} = 0$ из формулы (3.2.101) приводят к следующей системе алгебраических урав-

нений для неизвестных амплитудных коэффициентов R_n и T_n ($n = 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned} A\gamma_{n_0}\psi_{n_0}(x) - \sum_n \gamma_n R_n \psi_n(x) &= \\ &= \sum_n \Gamma_n T_n \Psi_n(x), \quad 0 < x < a, \quad (3.2.105) \\ 0 &= \sum_n T_n \Gamma_n \Psi_n(x), \quad a < x < b. \end{aligned}$$

Уравнения (3.2.105) представляют собой разложение функции, стоящей в левой части этих уравнений, в ряд Фурье по ортогональным на отрезке $0 < x < b$ функциям $\Psi_n(x)$. Выражая коэффициенты T_n этого разложения через разлагаемую функцию левой части (3.2.105), получим

$$\mathbf{T} = \widehat{T}[\mathbf{R}] + \mathbf{G}, \quad (3.2.106)$$

где векторы $\mathbf{T} = (T_1, T_2, \dots)$ и $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots)$ подлежат определению, \mathbf{G} — заданный вектор, выражающийся через амплитуду A падающей волны, а линейный оператор \widehat{T} определяет связь векторов \mathbf{T} и \mathbf{R} и выражается через функционалы базисных функций $\psi_n(x)$ и $\Psi_n(x)$.

Подставляя выражение (3.2.106) в первое уравнение (3.2.105), получим

$$\mathbf{R} = \widehat{R}[\mathbf{R}] + \mathbf{b}, \quad (3.2.107)$$

где линейный оператор \widehat{R} выражается через \widehat{T} , а \mathbf{b} — заданный вектор. Выражение (3.2.107) представляют собой бесконечную алгебраическую систему уравнений относительно неизвестных амплитудных коэффициентов R_n . Алгоритмы решения системы (3.2.107) в первую очередь зависят от свойств бесконечной матрицы оператора \widehat{R} . При условии регулярности этой матрицы эффективными оказываются так называемые методы усечения, которые решение бесконечной системы сводят к решению алгебраической системы конечного порядка. В случае нерегулярной матрицы \widehat{R} известным харьковским радиофизиком и математиком В.П. Шестопаловым предложен метод приближенного решения системы (3.2.107), получивший название *метода полюбращения* [41]. Суть этого метода состоит в представлении оператора \widehat{R} в виде

$$\widehat{R} = \widehat{R}_1 + \widehat{R}_2, \quad (3.2.108)$$

где матрица оператора \widehat{R}_2 — регулярная, а оператор $(\widehat{I} - \widehat{R}_1)^{-1}$ ограничен (\widehat{I} — единичный оператор). Тогда (3.2.107) можно записать в виде

$$(\widehat{I} - \widehat{R}_1)[\mathbf{R}] = \widehat{R}_2[\mathbf{R}] + \mathbf{b}. \quad (3.2.109)$$

Отсюда для неизвестного вектора \mathbf{R} получим алгебраическую систему

$$\mathbf{R} = (\widehat{I} - \widehat{R}_1)^{-1} \widehat{R}_2[\mathbf{R}] + \mathbf{c}, \quad (3.2.110)$$

или

$$\mathbf{R} = \widehat{A}[\mathbf{R}] + \mathbf{c}, \quad (3.2.111)$$

где в силу сделанных преобразований матрица оператора \widehat{A} регулярна, что позволяет решать (3.2.111) методом усечений или другими итерационными методами. В работах школы Шестопалова показано, что для широкого класса задач исследуемого типа требуемое разбиение (3.2.108) исходного оператора \widehat{R} возможно. При этом оператор \widehat{R}_2 соответствует статическому приближению исходной задачи.

2.7. Излучение из открытого конца волновода. Фазированные антенные решетки. Эта задача имеет большое практическое значение, поскольку во многих случаях для возбуждения во внешнем пространстве D_0 электромагнитного поля с заданными характеристиками используются излучающие системы, представляющие собой системы открытых полубесконечных волноводов с общим фланцем.

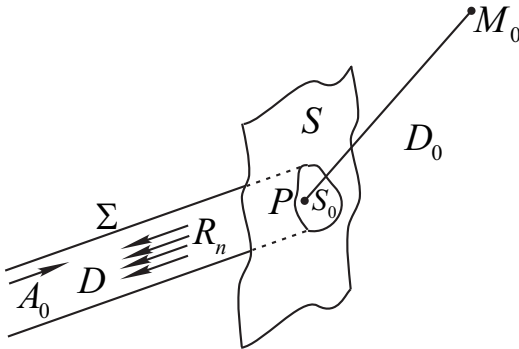


Рис. 3.2.6. Открытый полубесконечный волновод с фланцем.

Рассмотрим сначала излучение из открытого конца волновода в акустическом случае. Пусть рассматриваемый волновод D представляет собой полубесконечный цилиндр постоянного поперечного сечения S_0 , сопряженный с бесконечным фланцем S , нормальным

в точке $z = 0$ к оси $-\infty < z < 0$ волновода, и пусть в фланце имеется отверстие, совпадающее с сечением S_0 . На боковой поверхности волновода Σ и на фланце S (за исключением отверстия S_0) выполняются граничные условия второго рода

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma+S} = 0 \quad (3.2.112)$$

(рис. 3.2.6). Пусть в волноводе D в положительном направлении оси z распространяется нормальная волна

$$u_{n_0}(M, z) = A_0 e^{i\gamma_{n_0} z} \psi_{n_0}(M), \quad -\infty < z < 0, \quad (3.2.113)$$

где ψ_{n_0} — собственная функция второй краевой задачи для оператора Лапласа в S_0 , а γ_{n_0} — постоянная распространения данной нормальной волны. Данная нормальная волна будет частично отражаться от открытого конца волновода S_0 , а частично излучается в свободное полупространство D_0 .

Тогда математическая постановка данной задачи излучения принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta u_0 + k_0^2 u_0 &= 0, \quad (M, z) \in D_0, \quad z > 0, \\ \Delta u + k^2 u &= 0, \quad (M, z) \in D, \quad z < 0, \\ \frac{\partial u_0}{\partial n} \Big|_{z=0} &= 0, \quad M \in S, \quad M \notin S_0, \end{aligned} \quad (3.2.114)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial r} - ik_0 u_0 = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad M \in D_0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = 0; \quad z < 0,$$

$$u(M, z) = u_{n_0}(M, z) + \sum_n R_n e^{-i\gamma_n z} \psi_n(M), \quad z < 0. \quad (3.2.115)$$

Здесь k_0 и k — материальные характеристики среды во внешнем пространстве D_0 и волноводе D .

При $z = 0$, $M \in S_0$ функции $u_0(M, 0)$ и $u(M, 0)$ должны удовлетворять условиям сопряжения

$$u_0(M, 0)|_{z=0} = u(M, 0)|_{z=0}, \quad M \in S_0, \quad (3.2.116)$$

$$k_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} \Big|_{z=0} = k \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad M \in S_0.$$

Поле $u_0(M, z)$, описываемое (3.2.114), можно представить через функцию Грина $g_0(M_0, z_0; M, \zeta)$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{cases} \Delta g_0 + k_0^2 g_0 = -\delta(M, z), & z > 0, \\ \frac{\partial g_0}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \\ \frac{\partial g_0}{\partial r} - ik_0 g_0 = o\left(\frac{1}{r}\right), & \text{при } r \rightarrow \infty, M \in D_0. \end{cases} \quad (3.2.117)$$

Явный вид этой функции

$$g_0(M_0, z_0, M, \zeta) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{e^{ik_0 R}}{R} + \frac{e^{ik_0 \bar{R}}}{\bar{R}} \right\}, \quad (3.2.118)$$

$(M_0, z_0), (M, \zeta) \in D_0,$

где R — расстояние между точками (M_0, z_0) и (M, ζ) , а \bar{R} — расстояние между точками $(M_0, -z_0)$ и (M, ζ) . Тогда

$$u_0(M_0, z_0) = - \int_{S_0} g_0(M_0, z_0, P, 0) \frac{\partial u_0}{\partial z}(P, 0) d\sigma_P, \quad (3.2.119)$$

$P \in S_0, z_0 \geq 0.$

Аналогично, воспользовавшись функцией Грина $g_1(M_0, z_0, M, \zeta)$ полубесконечного волновода, удовлетворяющей граничному условию

$$\frac{\partial g_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad (3.2.120)$$

и условию отсутствия волн, приходящих из бесконечности, явное представление которой также, как и для (3.2.118) легко получить методом зеркального отражения, для поля внутри волновода D получим выражение

$$u(M_0, z) = \int_{S_0} g_1(M_0, z_0, P, 0) \frac{\partial u}{\partial z}(P, 0) d\sigma_P + \quad (3.2.121)$$

$+ 2A_0 \cos(\gamma_{n_0} z_0) \psi_{n_0}(M), P \in S_0, z_0 \geq 0.$

Здесь

$$g_1(M_0, z_0, M, \zeta) = \sum_n \frac{1}{2P_n} e^{-i\gamma_n |\zeta - z_0|} \cos(\gamma_n z_0) \psi_n(M_0) \psi_n(M), P_n = i\gamma_n, \quad (3.2.122)$$

а последнее слагаемое описывает условие возбуждения системы нормальной волной полубесконечного волновода. Обозначая функцию

$$\left. \frac{\partial u_0}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad M_0 \in S, = \mu(P), \quad P \in S, \quad (3.2.123)$$

на основании условий сопряжения (3.2.116), переходя к пределу при $z_0 \rightarrow 0$, окончательно получим для функции $\mu(P)$ интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_{S_0} K(P_0, P) \mu(P) d\sigma_P = 2i\gamma_{n_0} A_0 \varphi_{n_0}(P_0), \quad (3.2.124)$$

где

$$K(P_0, P) = g_0(P_0, 0, P, 0) + \frac{k_0}{k} g_1(P_0, 0, P, 0). \quad (3.2.125)$$

Это уравнение, полученное как следствие исходной задачи (3.2.114)–(3.2.116), однозначно разрешимо и позволяет найти решение исходной задачи в виде

$$u_0(M, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{S_0} \frac{e^{ik_0 R}}{R(M, z; P, 0)} \mu(P) d\sigma_P, \quad z \geq 0, \quad (3.2.126)$$

где R — расстояние между точкой наблюдения $(M, z) \in D_0$ и точкой интегрирования $P \in S_0$, а функция $\mu(P)$ является решением интегрального уравнения (3.2.124).

Большой практический интерес представляет асимптотическое выражение поля излучения на больших расстояниях от излучающего конца волновода, то есть асимптотики интеграла (3.2.126) при больших значениях $R \gg 1$.

Введем в области интегрирования S_0 полярную систему координат (ρ, ψ) и в области D_0 ($z \geq 0$) сферические координаты (R_0, θ, φ) точки (M, z) (см. рис. 3.2.7, рис. 3.2.8), где

$$R^2(M, z, \rho, \psi) = R_0^2 + \rho^2 - 2\rho R_0 \sin \theta \cos(\varphi - \psi). \quad (3.2.127)$$

При условии $R_0 \gg \rho$ легко получить асимптотическое значение интеграла (3.2.126) в виде

$$u(M, z) = \frac{e^{ik_0 R_0}}{R_0} f(\theta, \varphi) + O\left(\frac{\rho_0^2}{R_0^2}\right), \quad (3.2.128)$$

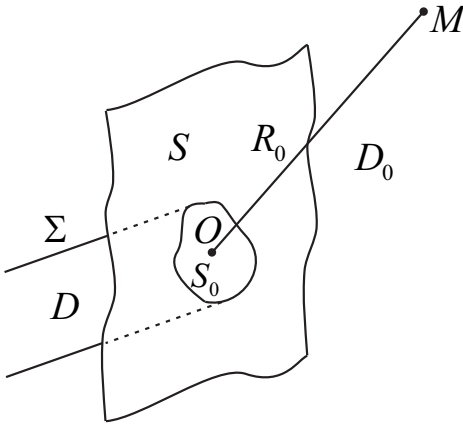


Рис. 3.2.7.

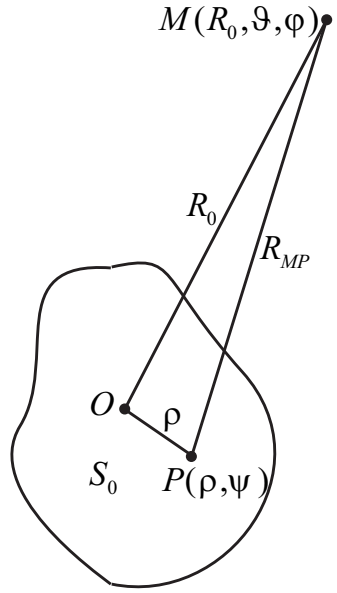


Рис. 3.2.8.

где функция $f(\theta, \varphi)$, носящая название диаграммы направленности, имеет вид

$$f(\theta, \varphi) = -\frac{1}{2\pi} \int_{S_0} e^{-ik_0 \rho \sin \theta \cos(\varphi - \psi)} \mu(\rho, \psi) \rho d\rho d\psi. \quad (3.2.129)$$

Выражение в формуле (3.2.128) и представляет собой приближенное решение исходной задачи.

Замечания и обобщения.

Замечание 3.2.9 Мы рассмотрели случай акустической излучающей системы. Очевидно, аналогично проводятся и исследования излучения из открытого конца волновода в электромагнитном случае. Внимательный читатель сможет, пользуясь материалом данного пособия, самостоятельно провести требуемые рассуждения.

Замечание 3.2.10 Также легко обобщить проведенные рассмотрения на случай, когда излучающая система состоит не из одного, а из нескольких открытых волноводов с общим фланцем. Обозначим излучающие концы волноводов в общем

фланце через S_i ($i = 1, \dots, N$), а возбуждающие их нормальные волны через

$$u_i(M, z) = A_i e^{i\gamma_n^{(i)} z} \psi_n^{(i)}(M_i), \quad (3.2.130)$$

где A_i — амплитуды приходящих из бесконечности своих нормальных волн в каждом из возбуждаемых волноводов, $\psi_n^{(i)}(M_i)$ — собственная функция второй краевой задачи для оператора Лапласа в сечении S_i

$$\begin{cases} \Delta_2 \psi_n^{(i)} + \lambda_n^{(i)} \psi_n^{(i)} = 0, & M_i \in S_i, \\ \left. \frac{\partial \psi_n^{(i)}}{\partial n} \right|_{C_i} = 0, & C_i = \partial S_i, \end{cases} \quad (3.2.131)$$

а $\gamma_n^{(i)}$ — соответствующие продольные постоянные распространения.

Тогда задача возбуждения такой излучающей системы по аналогии с (3.2.124) сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма первого рода

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \int_{S_i} K_{ji} \left(P_0^{(j)}, P^{(i)} \right) \mu_i \left(P^{(i)} \right) d\sigma_{P^{(i)}} = \\ = 2A_j e^{i\gamma_n^{(j)} z} \psi_n^{(j)} \left(P_0^{(j)} \right), \quad j = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.2.132)$$

где

$$K_{ji} \left(P_0^{(j)}, P^{(i)} \right) = g_0 \left(P_0^{(j)}, P^{(i)} \right) + \delta_{ij} \frac{k_0}{k_j} g_j \left(P_0^{(j)}, P^{(i)} \right), \quad (3.2.133)$$

δ_{ij} — символ Кронекера, A_j — амплитуда возбуждающей нормальной волны j -го волновода. Если возбуждается только один волновод (или несколько), то эти волноводы являются активными, возбуждающими поле в открытом полупространстве, остальные — пассивные, в них существуют только соответствующие уходящие на бесконечность при $z \rightarrow -\infty$ нормальные волны.

При возбуждении только одного j -го волновода асимптотика поля во внешнем пространстве, аналогично предыдущему, может быть представлена в виде

$$u_0(M, z) = \frac{e^{ik_0 R_0}}{R_0} f_j(\theta, \varphi) + O\left(\frac{\rho_0^2}{R_0^2}\right), \quad R_0 \gg \rho_0. \quad (3.2.134)$$

Функция $f_j(\theta, \varphi)$ в этом случае обычно называется *парциальной диаграммой излучения* j -го волновода. Очевидно, в общем случае возбуждения всех волноводов решетки, которая может представлять собой и пространственную систему, полная диаграмма направленности будет равна сумме «парциальных диаграмм»

$$F(\theta, \varphi) = \sum_{i=1}^N f_i(\theta, \varphi). \quad (3.2.135)$$

Она, очевидно, является функционалом всех геометрических и электродинамических параметров системы, и можно ставить задачу синтеза параметров такой излучающей системы, реализующую заданную диаграмму направленности ее излучения, а также осуществлять электрическое сканирование диаграммы путем изменения ее электрических параметров.

Список литературы

1. Бахвалов Н.С. Численные методы, М. Наука, 1973.
2. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Могилевский И.Е., Свешников А.Г. Особенности нормальных волн неоднородного волновода с входящими ребрами // Радиотехника и электроника. 2003. Т.48. №7. С.787-794.
3. Боголюбов А.Н., Минаев Д.В., Свешников А. Г. Расчет открытого согласующего волноводного перехода с использованием эффективных нелокальных граничных условий // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2002, Т.42, №4, с.514-521.
4. Бройль Луи де. Электромагнитные волны в волноводах и полых резонаторах, М. Иностранной литературы, 1948
5. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
6. Ваганов Р.В., Каценеленбаум Б.З. Основы теории дифракции, М.Наука, 1982.
7. Васильев Е.Н. Возбуждение тел вращения, М. Радио и связь, 1987.
8. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач, М.Наука, 1988.
9. Векуа И.Н. Метатармонические функции, Труды Тбилисского Математического Института, Т.12, 1943.
10. Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной плоскости, М.: Наука, 1964.
11. Владимиров В.С. Уравнения математической физики М. Наука, 1981.
12. Н.В. Гришина, Ю.А. Еремин, А.Г. Свешников Анализ эффекта экстремального просачивания волн через проводящую пленку методом дискретных источников // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2009, Т.49, №1, с.1-9.
13. Дмитриев В.И. Поля в слоистых средах, М. Изд-во МГУ, 1963.
14. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики, М. Изд-во МГУ, 1987.
15. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике, М. Макс пресс, 2008.

16. Еремин Ю.А., Свешников А.Г. Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции, М. Изд-во МГУ, 1992.
17. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, Часть II, М.: Физматлит, 2001.
18. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели электродинамики, М. Высшая школа, 1991.
19. Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах, М. ИПРЖР, 1996.
20. Ильинский А.С., Шестопалов Ю.В. Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн, М. Изд-во МГУ, 1989.
21. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния, М. Мир, 1987.
22. Купрадзе В.Д. О приближенном решении задач математической физики // Успехи математических наук, 1967, Т.22, Вып.2, С.58-109.
23. Ладыженская О.А., Уралыцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
24. Лакс П., Филлис Р. Теория рассеяния, М. Мир, 1971.
25. Нефедов Е.И., Фиалковский А.Т. Асимптотическая теория дифракции электромагнитных волн на конечных структурах, М. Наука, 1972.
26. Никифоров А.Ф., Уваров Б.В. Специальные функции математической физики, М.: Наука, 1979.
27. Нобл Б. Метод Винера–Хопфа ИЛ. 1962 г.
28. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование, М. Наука, Физматлит, 1997.
29. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений, М. Наука, 1978.
30. Самохин А.Б. Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии, Радио и связь, 1998.
31. Свешников А.Г.; Боголюбов А.Н.; Буткарев И.А. Математическое моделирование волноведущих систем // Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Серия Б. Справочные приложения, базы и банки данных. Т. VII–1 Математическое моделирование в низкотемпературной плазме. Часть 2. М.: Янус-К. 2008.
32. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике, М.: Изд-во МГУ; Наука, 2004.

33. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной, М. Физматлит, 2004.
34. Смирнов Ю.Г. Математические методы исследования задач электродинамики, Пенза, 2009.
35. Стрэттон Дж.А. Теория электромагнетизма, М-Л, ОГИЗ, 1948.
36. Титчмарш Е. Теория функций, М. Наука, 1980.
37. Тихонов А.Н., Самарский А.А. О возбуждении радиоволноводов. 3 // Журн. техн. физики, 1948г. Т.18, вып.7, с. 971-985.
38. Тихонов А.Н., Самарский А.А. О принципе излучения // Журн. техн. физики, 1948г. Т.18, вып.2, с. 243-248.
39. Самарский А.А., Тихонов А.Н. О сопротивлении излучения линейных токов // Журн. техн. физики, 1949г. №7, с. 792-803.
40. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, М. Изд-во МГУ, 1999.
41. Шестопалов В.П., Кириленко А.А., Рудь Л.А. Резонансное рассеяние волн, Киев, Наукова Думка, 1986.
42. Шишмарев И.А. Введение в теорию эллиптических уравнений, М. Изд-во МГУ, 1979.
43. Chew W.C. Waves and Fields in Inhomogeneous Media, Van, Nostramd Reinhold, New York, 1990.
44. Cotton D. and Kress R. Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory, Springer Verlag, Berlin, 1992.
45. Doien A., Eremin Yuri, Wriedt Thomas Acoustic and Electromagnetic scattering Analysis Using Discrete Sources Academic Press, San Diego, San Francisco, New Boston, London, Sudney, Tokyo, 2000.
46. Hafner C. The Generalized Multipole Technique for Computational Electromagnetics. Artech Hause, Boston, London, 1990.
47. Miller C. Foundations of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves. Springer Verland, Berlin, Heidelberg, New York, 1969.
48. Varadan V.V., Laktahia A., Varadan V.R. Field Representation and Introduction to Scattering. Elsevier Science, Amsterdam, 1991.
49. Wang J.H.H. Generalized Moment Methods in Electromagnetics. New York, John Wiley and Songs, 1991.

*Свешников Алексей Георгиевич
Могилевский Илья Ефимович*

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, стр.2

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
16	1(снизу)	$\mathbf{H} = -\frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t}$	$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t}$
85	1(снизу)	$k_0^2 \int_D \psi(M, Q) \chi(Q) dV_Q$	$k_0^2 \int_{D_i} \psi(M, Q) \chi(Q) dV_Q$
86	1(снизу)	$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_R} \frac{\partial z}{\partial n} z^* d\sigma$	$\lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \int_{\Sigma_R} \frac{\partial z}{\partial n} z^* d\sigma$
91	13(сверху)	Фока (2.2.5)	Фока (2.1.5)
110	15(сверху)	$M_n(0, z_n), M(\rho, z_n)$	$M_n(0, 0, 0, z_n), M(0, 0, \rho, z_n)$
112	2(сверху)	$\int_S \alpha(P) \left u + \frac{f(P)}{2i\alpha(P)} \right ^2 d\sigma$	$\int_S \alpha(P) \left u + \frac{f(P)}{2i\alpha(P)} \right ^2 d\sigma$
112	3(сверху)	$\int_S \frac{ f(P) ^2}{4\alpha^2(P)} = A$	$\int_S \frac{ f(P) ^2}{4\alpha^2(P)} d\sigma = A$
113	8(снизу)	$v_n(P) = \sum_{n=1}^N Q_n^{(N)} w_n(P)$	$v_N(P) = \sum_{n=1}^N Q_n^{(N)} w_n(P)$
115	2(сверху)	$u_N(P) - v_N(P)$	$u(P) - v_N(P)$
129	12(сверху)	Положим $\gamma(0) = -i\alpha$	Положим $\gamma(0) = -ik$
142	6(снизу)	$Z'_n + \sum_{m=0}^N h_{nm}(r) Z_n(r) \Big _{r=r_0}$	$Z'_n + \sum_{m=0}^N h_{nm}(r) Z_m(r) \Big _{r=r_0}$
159	4(снизу)	$\tilde{H}_\varphi = k\gamma \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}$	$\tilde{H}_\varphi = ik \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}$
159	2(снизу)	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi} \right)$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right)$
159	1(снизу)	$\alpha^2 = k^2 - \gamma^2 = \begin{cases} \alpha_i, & r < a, \\ \alpha_0, & r > a. \end{cases}$	$\alpha^2 = k^2 - \gamma^2 = \begin{cases} \alpha_i^2, & r < a, \\ \alpha_0^2, & r > a. \end{cases}$
169	1(сверху)	$\Delta_2 \psi_n + \hat{\lambda}_n \varphi_n = 0$	$\Delta_2 \psi_n + \hat{\lambda}_n \psi_n = 0$
169	7(снизу)	$(\operatorname{rot} \mathbf{h}_n)_z = \begin{cases} \lambda_n \varphi_k, \\ 0, & n = 2m, \end{cases}$	$(\operatorname{rot} \mathbf{h}_n)_z = \begin{cases} \lambda_n \varphi_n, \\ 0, & n = 2m \end{cases}$

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
174	3(сверху)	$-\frac{1}{ik_0} \sum_n B_n(z) (\text{rot } \mathbf{h}_n)_z$	$-\frac{1}{ik_0} \sum_n B_n^\vartheta(z) (\text{rot } \mathbf{h}_n)_z$
174	4(сверху)	$-\frac{1}{ik_0} \sum_n B_n^\vartheta(z) \lambda_k \varphi_k(M)$	$-\frac{1}{ik_0} \sum_n B_n^\vartheta(z) \lambda_n \varphi_n(M)$
174	5(сверху)	$H_z = \frac{1}{ik_0} \sum_n A_n^M(z) \hat{\lambda}_m \psi_m(M)$	$H_z = \frac{1}{ik_0} \sum_n A_n^M(z) \hat{\lambda}_n \psi_n(M)$
174	3(снизу)	$\int_S [\mathbf{e}_z \times \mathbf{h}_n] \mathbf{e}_n^\vartheta d\sigma$	$\int_S [\mathbf{e}_z \times \mathbf{h}_n] \mathbf{e}_m^\vartheta d\sigma$
192	9(снизу)	$k_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} \Big _{z=0} = k_1 \frac{\partial u_0}{\partial z} \Big _{z=0}$	$k_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} \Big _{z=0} = k \frac{\partial u}{\partial z} \Big _{z=0}$
193	9(сверху)	условию отсутствию	условию отсутствия
193	7(снизу)	нормальной волны	нормальной волной