

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

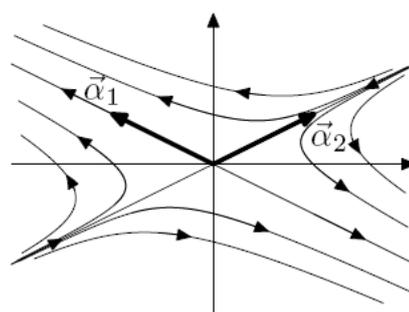
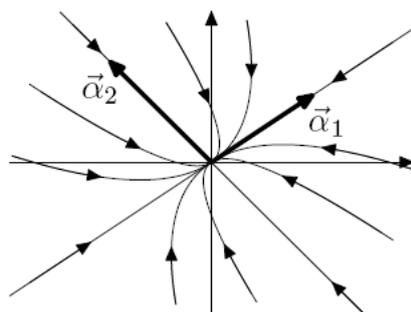
имени М. В. Ломоносова

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

кафедра математики

**Классификация точек покоя
двумерных линейных однородных систем
дифференциальных уравнений первого порядка**

Пособие для студентов II курса



Москва

2012

Панин А. А.

Классификация точек покоя двумерных линейных однородных систем дифференциальных уравнений первого порядка / Учебное пособие. М.: Физический факультет МГУ, 2012. 29 с.

Целью данного пособия является такое изложение классификации точек покоя линейных систем первого порядка относительно двух неизвестных функций, которое, с одной стороны, было бы доступно студентам IV семестра физического факультета, а с другой – подробным и исчерпывающим образом объясняло бы наличие различных типов точек покоя и геометрию фазовых траекторий. Пособие включает 1) теоретическую часть, где показывается, каким образом структура траекторий определяется корнями характеристического уравнения, и приведены рисунки траекторий для всех характерных случаев, 2) примеры на определение типов точки для данных систем, 3) задачи для самостоятельного решения на определение типа точек покоя и независимо от этого нахождение общего решения системы.

Автор признателен проф. Н. Н. Нефёдову, доц. Н. Е. Шапкиной, доц. В. Т. Волкову за ценные замечания по тексту работы, а также за поддержку в её осуществлении.

Илл. 38.

© Физический факультет МГУ, 2012

© А. А. Панин, 2012

КЛАССИФИКАЦИЯ ТОЧЕК ПОКОЯ
ДВУМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь и далее A — действительная матрица и рассматриваются действительные решения.

Нам уже известен алгоритм построения общего решения системы (1) с помощью вычисления собственных значений и собственных векторов матрица A . Теперь нашей целью будет изучение фазового портрета системы (1), т. е. расположения фазовых траекторий на плоскости при всех $t \in \mathbb{R}$; это позволит произвести классификацию точек покоя системы (1), которая в значительной степени переносится на случай общих (нелинейных) систем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2). \end{cases} \quad (2)$$

Прежде всего требуется разделить точки покоя на изолированные и неизолированные. Напоминаем, что точкой покоя системы (2) и, в частности, системы (1) называется решение $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}^0$, не зависящее от переменной t . Очевидно, такое решение существует тогда и только тогда, когда (применительно к системе (1))

$$A\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}. \quad (3)$$

Легко видеть, что $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$, называемое в дальнейшем *тривиальным решением*, всегда удовлетворяет СЛАУ (3), а следовательно, и системе (1). Далее, из курса линейной алгебры известно, что СЛАУ (3) имеет нетривиальное решение в том и только том случае, когда $\det A = 0$. Но как тогда устроено множество точек покоя? Как известно, количество линейно независимых решений СЛАУ (3) равно числу $n - r$, где $n = 2$ — порядок квадратной матрицы A , $r = \text{rank } A$ («порядок минус ранг»). Следовательно, 1) при $r = 0$ (т. е. $A = \Theta$) имеем всю плоскость точек покоя, а 2) при $r = 1$ точки покоя образуют прямую вида $\mathbf{x} = C\vec{\alpha}$, где $\vec{\alpha} \neq \mathbf{0}$ — произвольное нетривиальное решение СЛАУ (3), $C \in \mathbb{R}$. (См. рис. 1 и 2 соответственно.)

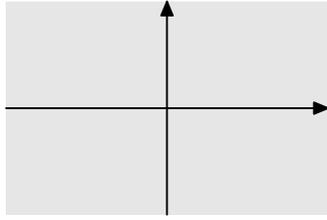


Рис. 1. Точки покоя —
вся плоскость

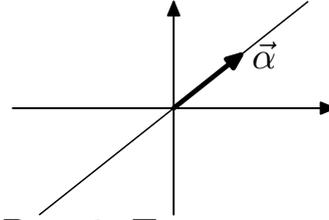


Рис. 2. Точки покоя
образуют прямую

В обоих случаях точки покоя оказались неизолированными, т. е. ни для одной из них нельзя указать окрестность на плоскости, в которой не было бы других точек покоя. Итак, мы полностью рассмотрели возможные случаи неизолированных точек покоя системы (1) и в дальнейшем такими ситуациями интересоваться не будем. Перейдём к исследованию изолированных точек покоя. Таким образом, всюду ниже предполагается, что $\det A \neq 0$ (матрица A невырожденная). В этом случае система (1) имеет единственную точку покоя — тривиальное решение $\mathbf{x}^0 \equiv \mathbf{0}$. Её тип определяется видом фазовых траекторий остальных решений системы; к их исследованию мы сейчас и приступаем.

Запишем в общем виде характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda \operatorname{Sp} A + \det A = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{Sp} A \pm \sqrt{(\operatorname{Sp} A)^2 - 4 \det A}}{2},$$

где $\operatorname{Sp} A \equiv a_{11} + a_{22}$. С учётом условия $\det A \neq 0$ среди собственных значений $\lambda_{1,2}$ нет нулевых, $\lambda_{1,2} \neq 0$. Поэтому могут представиться такие случаи, каждый из которых будет более детально рассмотрен ниже.

1. Собственные значения вещественны и различны.
2. Собственные значения вещественны и совпадают.
3. Собственные значения представляют собой пару комплексно сопряжённых чисел¹.

Рассмотрим каждый из этих случаев по отдельности.

1. λ_1, λ_2 вещественны и различны. Тогда, как известно, общее решение системы (1) может быть записано в виде

$$\mathbf{x}(t; C_1, C_2) = C_1 \vec{\alpha}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \vec{\alpha}_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (4)$$

¹Коэффициенты характеристического многочлена вещественные, поэтому он может иметь комплексные корни только в виде пар сопряжённых чисел.

где

$$\vec{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix} \quad -$$

собственные векторы матрицы A , соответствующие собственным значениям λ_1, λ_2 ; C_1, C_2 — произвольные действительные константы. (Отметим, что тривиальное решение получается при $C_1 = C_2 = 0$.)

1.1a) $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. В этом случае, как видно из формулы (4), имеем

$$\mathbf{x}(t; C_1, C_2) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \mathbf{0}. \quad (5)$$

Можно также видеть, что тривиальное решение $\mathbf{x}^0 \equiv \mathbf{x}(t; 0, 0) = \mathbf{0}$ устойчиво в силу оценки

$$\|\mathbf{x}(t; C_1, C_2)\| \leq |C_1| \|\vec{\alpha}_1\| + |C_2| \|\vec{\alpha}_2\|, \quad t \in [0; +\infty); \quad (6)$$

здесь и далее знак $\|\cdot\|$ норму означает евклидову норму вектора, например $\|\vec{\alpha}_1\| \equiv \sqrt{\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2}$. Из (5) и (6) заключаем, что тривиальное решение асимптотически устойчиво².

Итак, мы знаем, что $\mathbf{x}(t; C_1, C_2) \rightarrow \mathbf{0}$ при $t \rightarrow +\infty$. Выясним, как ведёт себя наклон фазовых траекторий, отвечающих нетривиальным решениям. Более точно, рассмотрим произвольную фиксированную фазовую траекторию (4) при $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$, и выясним, как меняется наклон касательной к этой траектории в точке $\mathbf{x}(t; C_1, C_2)$ при изменении $t \in (-\infty; +\infty)$ ³. Имеем в силу теоремы о дифференцировании функции, заданной параметрически:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{C_1 \lambda_1 \alpha_{12} e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 \alpha_{22} e^{\lambda_2 t}}{C_1 \lambda_1 \alpha_{11} e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 \alpha_{21} e^{\lambda_2 t}} = \frac{C_1 \lambda_1 \alpha_{12} + C_2 \lambda_2 \alpha_{22} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}}{C_1 \lambda_1 \alpha_{11} + C_2 \lambda_2 \alpha_{21} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}}, \quad (7)$$

где $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$ в силу $\lambda_2 < \lambda_1$. Из (7) нетрудно сделать следующие выводы, характеризующие наклон кривых при $t \rightarrow +\infty$ (т. е., с учётом (5), при стремлении кривых к началу координат):

i) при $C_1 \neq 0$ $\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}$ — наклон собственного вектора, отвечающего

$\lambda_1, |\lambda_1|$ — min (в частности, при $C_1 \neq 0, C_2 = 0$ имеем $\frac{dx_2}{dx_1} \equiv \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}$);

²Мы сознательно в этом конкретном случае для наглядности вывели результат, полученный в общем случае в лекции 10.

³Хотя правильно говорить о наклоне *касательной* к кривой в данной точке, в дальнейшем для сокращения записи будем употреблять в указанном смысле выражение «наклон фазовой траектории».

ii) при $C_1 = 0$ $\frac{dx_2}{dx_1} \equiv \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}$ — наклон собственного вектора, отвечающего λ_2 , $|\lambda_2|$ — max.

Можно также заметить, что при $t \rightarrow -\infty$ (когда $\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty$) имеем в некотором смысле обратную ситуацию:

i') при $C_2 \neq 0$ $\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}$ (в частности, при $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$ имеем $\frac{dx_2}{dx_1} \equiv \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}$);

ii') при $C_2 = 0$ $\frac{dx_2}{dx_1} \equiv \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}$.

Чтобы получить представление о поведении фазовых траекторий не только при $t \rightarrow \pm\infty$, а при всех $t \in \mathbb{R}$, исследуем поведение наклона фазовой траектории при движении вдоль неё. Для того вернёмся к формуле (7) и исследуем производную её правой части по t . Введём обозначения

$$\begin{aligned} a &= C_1 \lambda_1 \alpha_{12}, & b &= C_2 \lambda_2 \alpha_{22}, \\ c &= C_1 \lambda_1 \alpha_{11}, & d &= C_2 \lambda_2 \alpha_{21}, \\ \mu &= \lambda_2 - \lambda_1. \end{aligned}$$

тогда правая часть формулы (7) примет вид

$$\frac{a + be^{\mu t}}{c + de^{\mu t}}. \quad (7a)$$

Заметим, что в силу линейной независимости векторов $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ как собственных векторов матрицы A , отвечающих различным собственным значениям $\lambda_1 \neq \lambda_2$, верно $bc - ad \neq 0$. В этом случае производная выражения (7a), равная

$$\left(\frac{a + be^{\mu t}}{c + de^{\mu t}} \right)' = \frac{b\mu e^{\mu t} (c + de^{\mu t}) - (a + be^{\mu t}) d\mu e^{\mu t}}{(c + de^{\mu t})^2} = \frac{\mu e^{\mu t} (bc - ad)}{(c + de^{\mu t})^2},$$

имеет постоянный знак при всех $t \in \mathbb{R}$ (кроме возможной точки обращения знаменателя в 0). Отсюда следует, что при движении вдоль фазовой траектории наклон последней меняется монотонно, — можно сказать, что она «поворачивает всё время в одну и ту же сторону». (Точка t^* , где знаменатель обращается в 0, соответствует точке на кривой с вертикальной касательной; для её корректного рассмотрения достаточно перейти в окрестности t^* к рассмотрению $\frac{dx_1}{dx_2}$.) Далее, можно

заметить, что криволинейные фазовые траектории (т. е. такие, у которых $C_1 \neq 0, C_2 \neq 0$) нигде не пересекают прямолинейные траектории. В самом деле, такое пересечение означало бы коллинеарность вектора $\mathbf{x}(t; C_1, C_2)$ одному из векторов $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$. Но в силу (4) при любых $C_1 \neq 0, C_2 \neq 0, t \in \mathbb{R}$ вектор $\mathbf{x}(t; C_1, C_2)$ есть линейная комбинация векторов $\vec{\alpha}_1$ и $\vec{\alpha}_2$ в которой оба коэффициента отличны от нуля. Поэтому коллинеарность вектора $\mathbf{x}(t; C_1, C_2)$ любому из векторов $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ противоречила бы линейной независимости последних.

С учётом всего вышесказанного мы в состоянии изобразить фазовые траектории при всех t, C_1, C_2 (см. рис. 3).

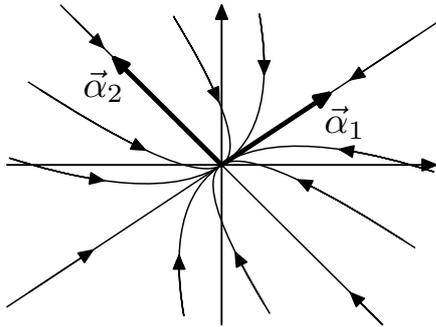


Рис. 3. Устойчивый узел

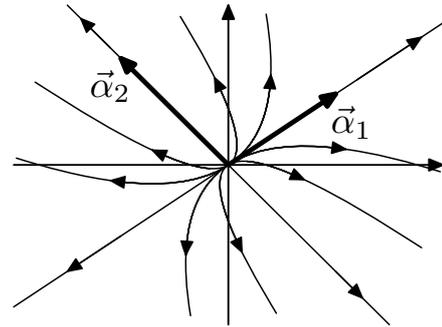


Рис. 4. Неустойчивый узел

Точка покоя такого типа называется *узлом*, причём в данном случае ($\lambda_2 < \lambda_1 < 0$) тривиальное решение устойчиво, и притом асимптотически, поэтому говорят об *устойчивом узле*.

1.1б) $0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

Легко видеть, что случай $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ получается из только что рассмотренного заменой $t \mapsto -t$, поэтому вид фазовых траекторий тот же, что на рис. 3, но направление движения по траекториям меняется на противоположное (см. рис. 4; обозначения аналогичны рис. 3). На рисунках 3 и 4 обозначены собственные вектора $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$, отвечающие собственным значениям λ_1, λ_2 , причём в обоих случаях $|\lambda_1| = \min$.

Важные замечания. (Относятся также ко всем случаям, рассмотренным ниже.)

1. В силу теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши (применительно к системе (1)) верны следующие утверждения:

1) через каждую точку $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ плоскости (x_1, x_2) проходит хотя бы одна фазовая траектория — например, соответствующая задаче

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \\ \mathbf{x}(0) = \tilde{\mathbf{x}}; \end{cases} \quad (8)$$

2) через каждую точку $\tilde{\mathbf{x}}$ плоскости (x_1, x_2) проходит не более одной траектории, ибо их пересечение или ветвление противоречили бы единственности решения задачи (8) или аналогичной, получаемой из неё заменой $t \mapsto -t$.

2. Итак, через каждую точку на плоскости (x_1, x_2) проходит ровно одна фазовая траектория. Кажущееся их пересечение в узле на самом деле отсутствует, потому что, например в случае 1а), траектории лишь неограниченно приближаются к точке $(0, 0)$ при $t \rightarrow +\infty$, но «не доходят» до неё. В противном случае имели бы противоречие с теоремой единственности, ибо точка $(0, 0)$ сама является фазовой траекторией (тривиального решения). Таким образом, обе прямые на рис. 3 и 4 состоят каждая из трёх траекторий: открытых лучей и точки покоя $(0, 0)$.

3. Каждая фазовая траектория, кроме точки покоя, является изображением не одного решения, а целого семейства решений «двусторонних» задач Коши вида

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, & t \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{x}(0; C_1, C_2) = \mathbf{x}^{(1)}, \end{cases}$$

где $\mathbf{x}^{(1)}$ — произвольная точка на рассматриваемой траектории.

4. Полная картина всех фазовых траекторий системы (1) инварианта относительно гомотетии с центром в начале координат. В самом деле, при переходе от точки $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ к точке $k\mathbf{x} = (kx_1, kx_2)$ вектор «скорости» меняется с $A\mathbf{x}$ на коллинеарный ему вектор $Ak\mathbf{x} = kA\mathbf{x}$. Следовательно, при указанной гомотетии любая фазовая траектория системы (1) переходит в некоторую (вообще говоря, другую) фазовую траекторию той же системы.

1.2) Собственные значения вещественны и имеют разные знаки. Для определённости пронумеруем их так, чтобы выполнялось неравенство $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$. По-прежнему используя представление решения (4), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t; C_1 = 0, C_2) &= C_2 \vec{\alpha}_2 e^{\lambda_2 t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0, \\ \mathbf{x}(t; C_1 \neq 0, C_2) &\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty; \\ \|\mathbf{x}(t; C_1, C_2) - \mathbf{x}(t; C_1, C_2 = 0)\| &= \|C_2 \vec{\alpha}_2 e^{\lambda_2 t}\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned} \tag{9a}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t; C_1, C_2 = 0) &= C_1 \vec{\alpha}_1 e^{\lambda_1 t} \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} 0 \\
\mathbf{x}(t; C_1, C_2 \neq 0) &\xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} +\infty; \\
\|\mathbf{x}(t; C_1, C_2) - \mathbf{x}(t; C_1 = 0, C_2)\| &= \|C_1 \vec{\alpha}_1 e^{\lambda_1 t}\| \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} 0.
\end{aligned} \tag{9б}$$

Для исследования наклона фазовых траекторий при различных t снова можем воспользоваться выражением (7). Поскольку, как и в случае 1.1а), собственные значения занумерованы так, что $\lambda_2 < \lambda_1$, то сохраняются и все выводы i)–ii), i')–ii'). Учитывая этот факт, а также соотношения (9а), (9б) и аналогичные случаям 1.1а), 1.1б) соображения о монотонном изменении наклона фазовых траекторий, можем построить схему фазового портрета (см. рис. 5; отмечены собственные вектора $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$, отвечающие собственным значениям $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$).

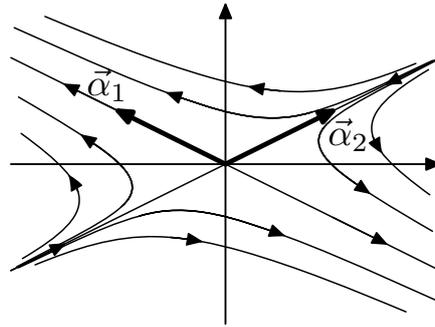


Рис. 5. Седло

Точка покоя такого типа называется *седлом*. Можно видеть, что такая точка покоя всегда неустойчива.

2. Собственные значения вещественны и совпадают, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

Как известно из курса линейной алгебры, здесь возможны две принципиально различные ситуации:

- 1) матрица A имеет 2 линейно независимых собственных вектора $\vec{\alpha}_1$ и $\vec{\alpha}_2$, и общее решение системы (1) строится аналогично предыдущим случаям, где надо положить $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$;
- 2) матрица A имеет собственный вектор $\vec{\alpha}$ и присоединённый вектор $\vec{\beta}$, который мы вынуждены использовать при построении общего решения системы (1).

2.1) Прежде всего заметим, что эта ситуация реализуется тогда и

только тогда, когда

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

В самом деле, наличие у матрицы A двух линейно независимых собственных векторов, отвечающих собственному значению λ , эквивалентно существованию двух линейно независимых решений СЛАУ $(A - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, что возможно в точности тогда, когда $\text{rank}(A - \lambda E) = 0$, или

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

В этом случае общее решение системы (1) имеет вид

$$\mathbf{x} = C_1 \vec{\lambda}_1 e^{\lambda t} + C_2 \vec{\lambda}_2 e^{\lambda t} = (C_1 \vec{\lambda}_1 + C_2 \vec{\lambda}_2) e^{\lambda t},$$

откуда

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{(C_1 \alpha_{12} + C_2 \alpha_{22}) e^{\lambda t}}{(C_1 \alpha_{11} + C_2 \alpha_{21}) e^{\lambda t}} = \frac{C_1 \alpha_{12} + C_2 \alpha_{22}}{C_1 \alpha_{11} + C_2 \alpha_{21}} = \text{const.}$$

Фазовый портрет изображён на рис. 6. В рассмотренном случае любой ненулевой вектор является для матрицы A собственным, и на рисунке собственные векторы не изображены. Точка покоя такого типа называется дикритическим узлом. Он устойчив при $\lambda < 0$ и неустойчив при $\lambda > 0$.

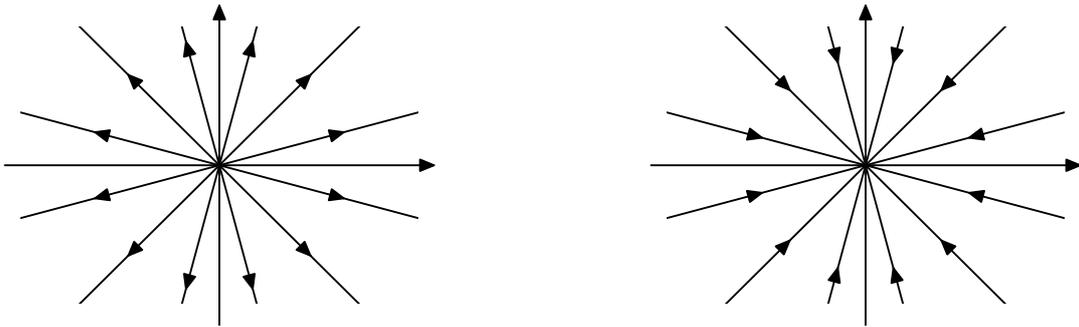


Рис. 6. Неустойчивый (слева) и устойчивый (справа) дикритический узел

2.2) Как известно, при наличии у матрицы A собственного вектора $\vec{\alpha}$ и присоединённого вектора $\vec{\beta}$, где

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix},$$

⁴Напоминаем, что $\lambda \neq 0$.

общее решение системы (1) имеет вид

$$\mathbf{x}(t; C_1, C_2) = \left(C_1 \vec{\alpha} + C_2 (\vec{\alpha}t + \vec{\beta}) \right) e^{\lambda t},$$

или

$$\begin{cases} x_1 = (C_1 \alpha_1 + C_2 \alpha_1 t + C_2 \beta_1) e^{\lambda t}, \\ x_2 = (C_1 \alpha_2 + C_2 \alpha_2 t + C_2 \beta_2) e^{\lambda t}; \end{cases}$$

тогда

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\lambda (C_1 \alpha_2 + C_2 \alpha_2 t + C_2 \beta_2) + C_2 \alpha_2}{\lambda (C_1 \alpha_1 + C_2 \alpha_1 t + C_2 \beta_1) + C_2 \alpha_1}. \quad (9)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \text{i) при } C_2 \neq 0 \quad & \frac{dx_2}{dx_1} \xrightarrow{t \rightarrow \pm \infty} \frac{\alpha_2}{\alpha_1}; \\ \text{ii) при } C_2 = 0 \quad & \frac{x_2}{x_1} = \frac{dx_2}{dx_1} \equiv \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \text{ при всех } t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (10)$$

Для дальнейшего исследования заметим, что при $C_2 \neq 0$ коэффициенты в числителе и знаменателе правой части (9) при t и при 1 не пропорциональны (это следует из линейной независимости векторов $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$). Поэтому числитель и знаменатель обращаются в 0 при разных значениях t , и $\frac{dx_2}{dx_1}(t)$ представляет собой дробно-линейную функцию, график которой при каждом $C_2 \neq 0, C_1$ имеет вид, подобный изображённому на рис. 7.

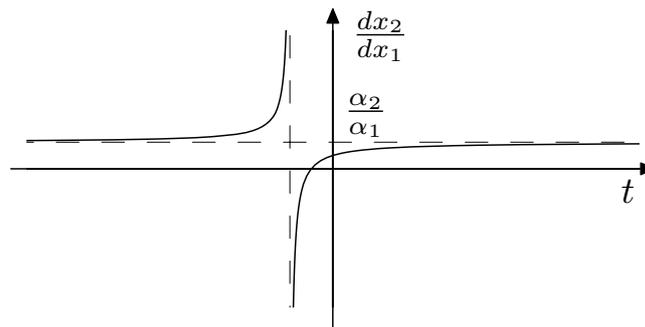


Рис. 7. График дробно-линейной функции

Тогда ясно, что фазовые траектории устроены так, как показано на рис. 8. (Определить направление «поворота» криволинейных фазовых траекторий можно способом, аналогичным случаям точек покоя типа центра и фокуса, см. ниже.) Точка покоя такого типа называется вырожденным узлом.

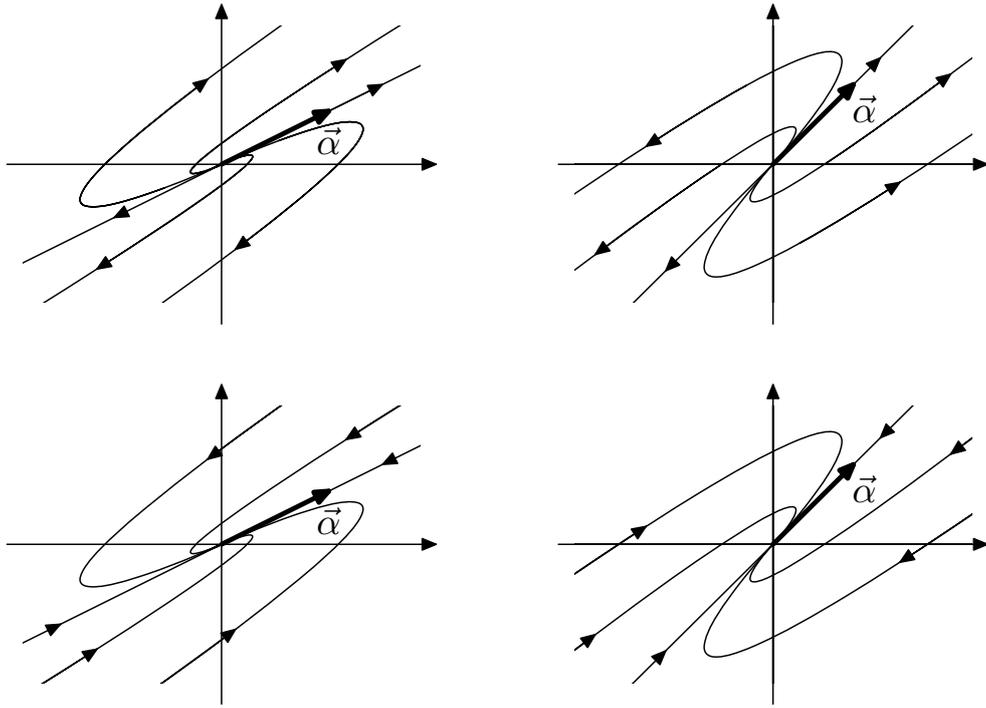


Рис. 8. Неустойчивые (сверху) и устойчивые (снизу) вырожденные узлы

Замечание.

В силу (10) и вида графика $\frac{dx_2}{dx_1}(t)$ (см. рис. 7) можно утверждать, что все криволинейные траектории «асимптотически поворачиваются» на 180° , т. е. полный угол поворота при движении по траектории от точки, соответствующей $t = t_1$ до точки, соответствующей $t = t_2$, стремится к 180° при $t_1 \rightarrow -\infty, t_2 \rightarrow +\infty$.

3. Собственные значения — комплексно сопряжённые числа, $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \lambda = p + iq$. Заметим прежде всего, что поскольку матрица A вещественная (именно этим, кстати, гарантируется равенство $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$), то собственные векторы $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ можно выбрать комплексно сопряжёнными: $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_1 = \overline{\vec{\alpha}_2}$. В самом деле,

$$(A - \lambda E)\vec{\alpha} = \mathbf{0} \Rightarrow \overline{(A - \lambda E)\vec{\alpha}} = \mathbf{0} \Rightarrow (A - \bar{\lambda}E)\vec{\alpha} = \mathbf{0} \Rightarrow (A - \bar{\lambda}E)\overline{\vec{\alpha}} = \mathbf{0} \Rightarrow (A - \bar{\lambda}E)\vec{\alpha} = \mathbf{0}.$$

Далее, в силу известных свойств линейных дифференциальных уравнений и систем с вещественными коэффициентами, фундаментальную совокупность решений системы (1) можно выбрать в виде

$$\{ \operatorname{Re} [\vec{\alpha}e^{pt}(\cos qt + i \sin qt)], \operatorname{Im} [\vec{\alpha}e^{pt}(\cos qt + i \sin qt)] \}, \quad \lambda = p + iq.$$

Положим

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} + i\gamma_{12} \\ \gamma_{21} + i\gamma_{22} \end{pmatrix}$$

(мы выбрали другую букву, чтобы избежать разногласия с предыдущими обозначениями, где первая цифра в индексе α_{ij} обозначала номер собственного значения). Тогда имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t; C_1, C_2) = \\ = e^{pt} \left(C_1 \begin{pmatrix} \gamma_{11} \cos qt - \gamma_{12} \sin qt \\ \gamma_{21} \cos qt - \gamma_{22} \sin qt \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \gamma_{12} \cos qt + \gamma_{11} \sin qt \\ \gamma_{22} \cos qt + \gamma_{21} \sin qt \end{pmatrix} \right). \quad (11) \end{aligned}$$

3.1) Пусть, для начала, $p = 0$. Тогда формула (11) задаёт замкнутые траектории (поскольку $\mathbf{x}(t)$ имеет период $2\pi/q$), симметричные относительно начала координат (поскольку при прибавлении к аргументу t величины π/q вектор $\mathbf{x}(t)$ меняет знак), но через начало координат не проходящие (это противоречило бы теореме единственности). Более подробный анализ (см. Приложение) показывает, что эти кривые представляют собой эллипсы. Направление «вращения» легко установить, вычислив значение правой части системы (1) в произвольной точке траектории и построив соответствующий вектор «скорости» (см. примеры). Точка покоя такого типа называется *центром*; характер фазовых траекторий иллюстрируется рис. 9. Ясно, что точка покоя типа «центр» является устойчивой, но не асимптотически устойчивой. В самом деле, если фазовая траектория замкнута, т. е. при увеличении значения t повторяет сама себя, то стремиться к нулю она не может (т. е. заведомо не будет асимптотической устойчивости), но $\|\mathbf{x}\| < C(\vec{\alpha}, C_1, C_2)$.

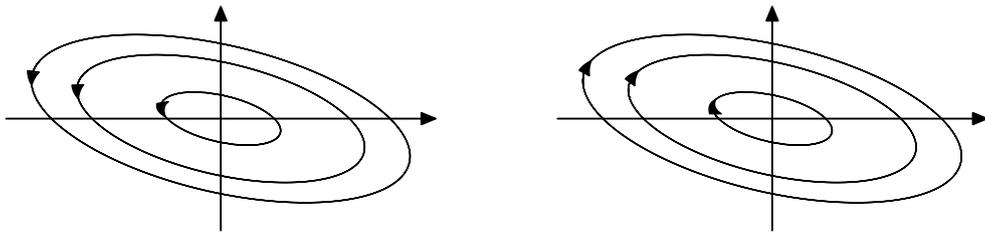


Рис. 9. Центр

3.2) Пусть теперь $p \neq 0$. Сравнивая этот случай с только что рассмотренным, можно заметить, что при изменении t на величину $2\pi/q$ траектория уже не возвращается в прежнюю точку, как это было в предыдущем случае, а оказывается ближе или дальше (смотря по знаку числа p) от начала координат в $e^{2\pi p/q}$ раз, и траектории приобретут вид «эллиптических спиралей», изображённых на рис. 10. Точка покоя такого типа называется *фокусом*, соответственно неустойчивым при $p = \operatorname{Re} \lambda > 0$ и устойчивым при $p = \operatorname{Re} \lambda < 0$.

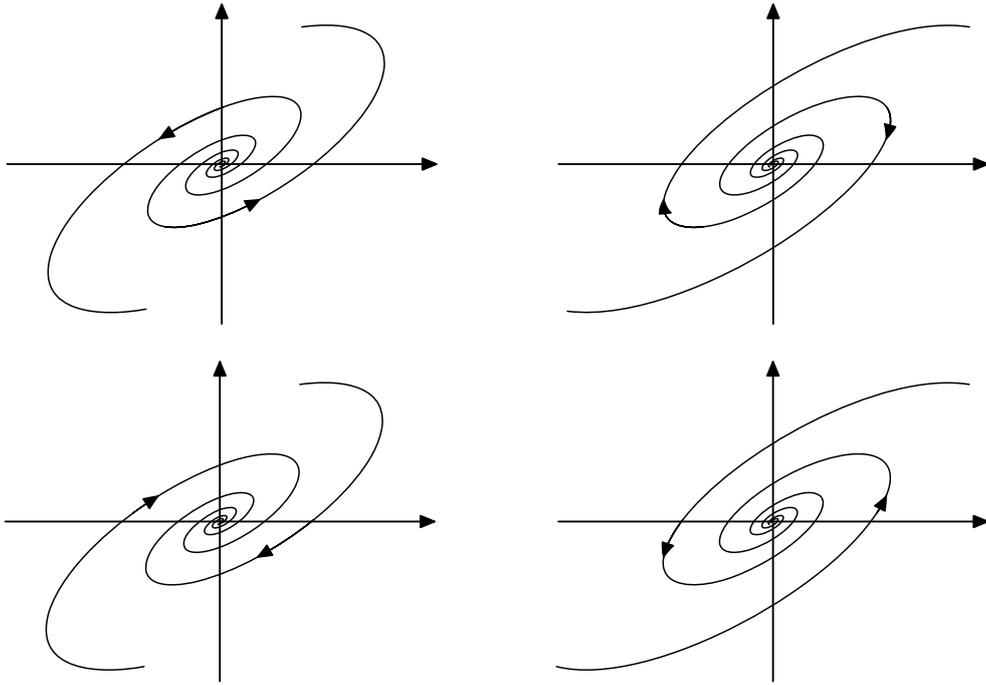


Рис. 10. Неустойчивые (сверху) и устойчивые (снизу) фокусы

Замечание. Как видно на рис. 10, фазовые траектории имеют две независимые «степени свободы»: устойчивость/неустойчивость и направление «закручивания» (по/против часовой стрелки). Чтобы правильно изобразить эти траектории, вопрос об устойчивости мы решаем согласно знаку $p = \operatorname{Re} \lambda$, а направление вращения определяем, как и в случае точки покоя типа центра, подстановкой координат произвольной точки траектории в правую часть системы (1)⁵. Было бы ошибкой заключить из направления $\dot{\mathbf{x}}$, как на рис. 11, о неустойчивости точки покоя. Она может быть как устойчивой, так и неустойчивой. Рис. 12 иллюстрирует возможную ситуацию (см. также пример 9).

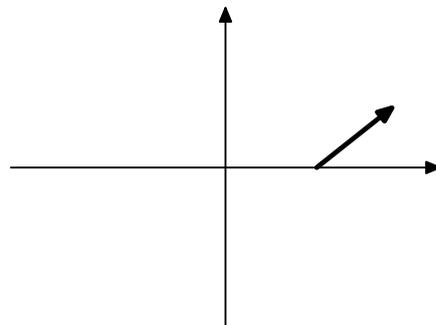


Рис. 11.

⁵Похожая ситуация имеет место для вырожденного узла.

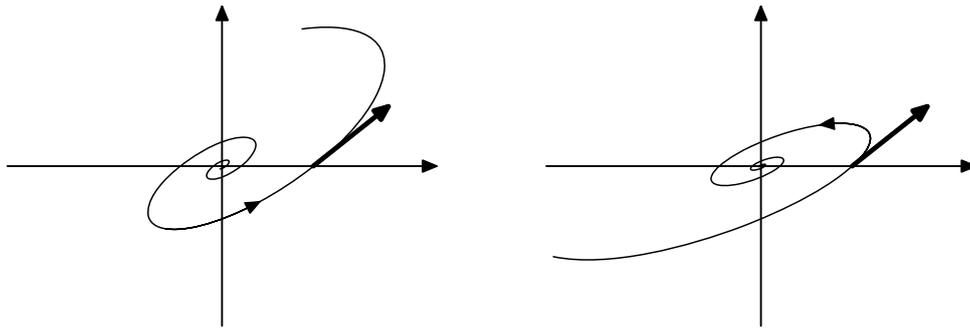


Рис. 12.

Собирая воедино все типы точек покоя, имеем сводный рис. 13.

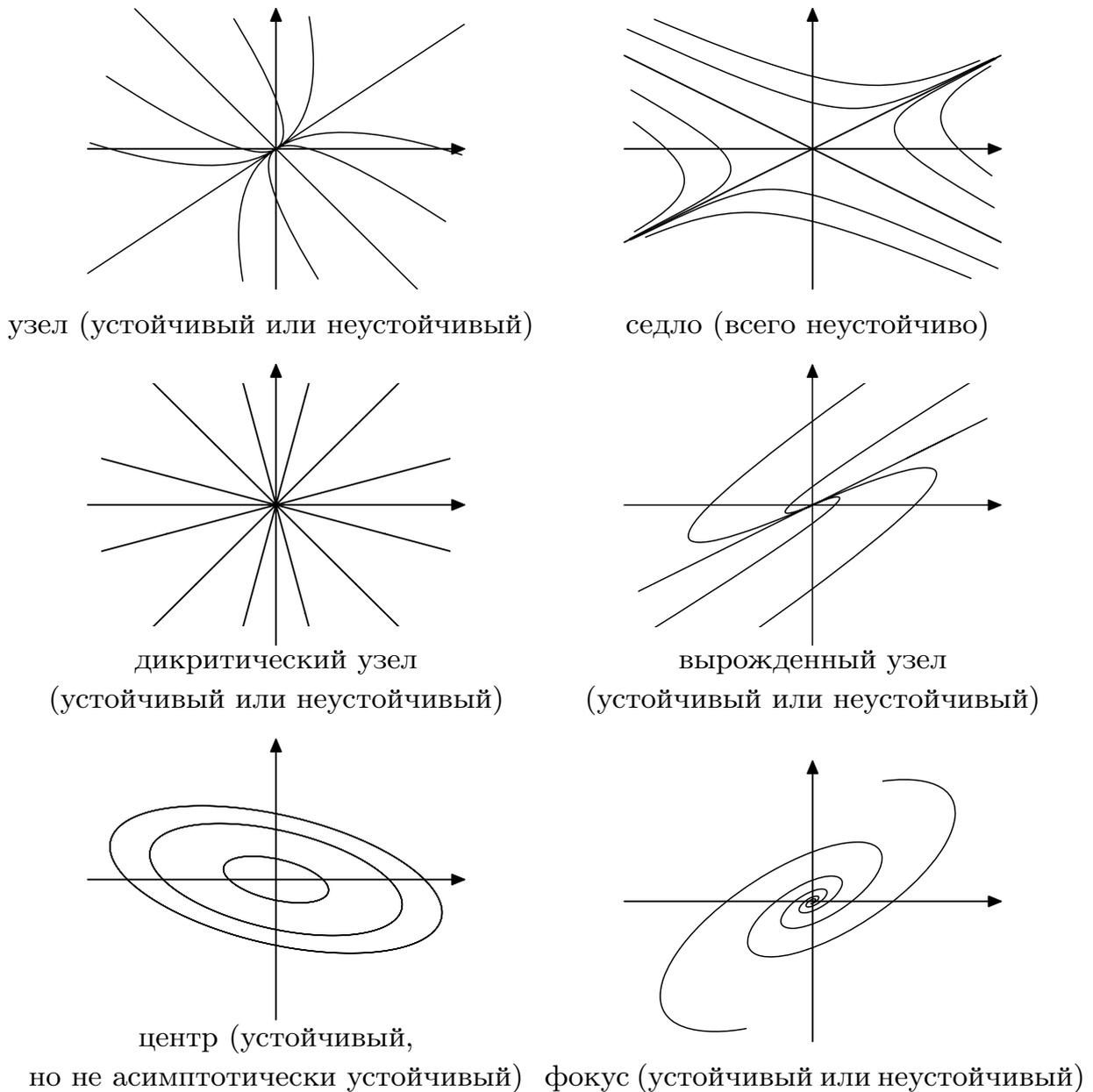


Рис. 13. Типы точек покоя

ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. При переходе от системы первого приближения к нелинейной системе структура фазовых траекторий узла, седла и фокуса локально сохраняется, а центр может сохраниться или исчезнуть.

2. В нелинейном случае возможны и другие характерные структуры фазовых траекторий (например, предельные циклы).

Подводя итог, мы можем сформировать следующую таблицу.

Типы изолированных точек покоя линейной системы (1)

Точка покоя	асимптотически устойчивая	устойчивая, но не асимптотически	неустойчивая
узел	$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$		$0 < \lambda_1 < \lambda_2$
вырожденный узел	$\lambda_2 = \lambda_1 < 0$, матрица A имеет 1 ЛН собственный вектор		$0 < \lambda_1 = \lambda_2$, матрица A имеет 1 ЛН собственный вектор
дикритический узел	$\lambda_2 = \lambda_1 < 0$, матрица A имеет 2 ЛН собственных вектора		$0 < \lambda_1 = \lambda_2$, матрица A имеет 2 ЛН собственных вектора
седло			$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$
центр		$\lambda_{1,2} = \pm iq$	
фокус	$\lambda_{1,2} = p \pm iq, p < 0$		$\lambda_{1,2} = p \pm iq, p > 0$

ПРИЛОЖЕНИЕ
ТРАЕКТОРИИ В СЛУЧАЕ ТОЧКЕ ПОКОЯ ТИПА «ЦЕНТР»

Снова обратимся к явному виду решения (11):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t; C_1, C_2) &= \\ &= e^{pt} \left(C_1 \begin{pmatrix} \gamma_{11} \cos qt - \gamma_{12} \sin qt \\ \gamma_{21} \cos qt - \gamma_{22} \sin qt \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \gamma_{12} \cos qt + \gamma_{11} \sin qt \\ \gamma_{22} \cos qt + \gamma_{21} \sin qt \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

или

$$\begin{cases} x_1 = (\gamma_{11}C_1 + \gamma_{12}C_2) \cos qt + (\gamma_{11}C_2 - \gamma_{12}C_1) \sin qt, \\ x_2 = (\gamma_{21}C_1 + \gamma_{22}C_2) \cos qt + (\gamma_{21}C_2 - \gamma_{22}C_1) \sin qt. \end{cases} \quad (12)$$

Рассмотрим формулы (12) как СЛАУ относительно $\cos qt$, $\sin qt$. Покажем, что её определитель отличен от 0 при $C_1^2 + C_2^2 > 0$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \gamma_{11}C_1 + \gamma_{12}C_2 & \gamma_{11}C_2 - \gamma_{12}C_1 \\ \gamma_{21}C_1 + \gamma_{22}C_2 & \gamma_{21}C_2 - \gamma_{22}C_1 \end{vmatrix} = (C_1^2 + C_2^2)(\gamma_{12}\gamma_{21} - \gamma_{11}\gamma_{22}).$$

Последнее выражение отлично от 0 для нетривиального решения, поскольку $\gamma_{12}\gamma_{21} - \gamma_{11}\gamma_{22} \neq 0$. Этот последний факт вытекает из того, что $\operatorname{Re} \vec{\alpha}$ и $\operatorname{Im} \vec{\alpha}$ линейно независимы, иначе имели бы $\operatorname{Re} \vec{\alpha} = \delta \operatorname{Im} \vec{\alpha}$ (с учётом $\operatorname{Im} \vec{\alpha} \neq \mathbf{0}$ в силу $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$), $\vec{\alpha} = (1 + i\delta)\operatorname{Re} \vec{\alpha}$, откуда следовало бы, что $\operatorname{Re} \vec{\alpha}$ также является собственным вектором, что невозможно в силу $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ для вещественной матрицы A .

Итак, $\Delta \neq 0$, откуда следует, что СЛАУ (12) можно разрешить относительно $\cos qt$, $\sin qt$:

$$\cos qt = b_{11}x_1 + b_{12}x_2, \quad \sin qt = b_{21}x_1 + b_{22}x_2, \quad (13)$$

где линейность правых частей по x_1 и x_2 очевидна из формул Крамера.

Теперь в силу (13) и основного тригонометрического тождества имеем

$$(b_{11}x_1 + b_{12}x_2)^2 + (b_{21}x_1 + b_{22}x_2)^2 = 1.$$

Кривая, удовлетворяющая этому уравнению, является кривой второго порядка. А поскольку в нашем случае траектории замкнуты (см. выше), то эта кривая может быть только эллипсом (в частности, окружностью).

ПРИМЕРЫ

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие изложенную выше теорию. В каждом случае наша задача будет состоять в исследовании типа точки (точек) покоя системы и исследовании точки покоя на устойчивость. В целях повторения традиционного материала будут приведены и общие решения систем. В каждом случае приведены графики фазовых траекторий. При этом нумерация рисунков начинается заново и соответствует нумерации примеров, поэтому далее оговорки «см. рис...» всюду опущены.

0. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 - 2x_2, \\ \dot{x}_2 = 6x_1 - 3x_2. \end{cases}$$

Её характеристическое уравнение имеет вид

$$0 = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -2 \\ 6 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 3) + 12 = \lambda^2 - \lambda - 12 + 12 = \lambda^2 - \lambda,$$

откуда $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$. Можно видеть, что данный пример относится к случаю, рассмотренному в самом начале: точки покоя не являются изолированными. Действительно, найдя собственный вектор

$$\vec{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

соответствующий нулевому собственному значению, заключаем, что точки покоя образуют прямую $x_2 = 2x_1$. Дальнейшее исследование мы не проводим, поскольку нас интересуют только изолированные точки покоя. (Эта же причина объясняет выбранный для данного примера номер.)

1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 + 5x_2. \end{cases}$$

Выпишем характеристическое уравнение:

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -3 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 5) + 6 = \lambda^2 - 5\lambda + 6,$$

или $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$ (здесь и далее нумерация собственных значений производится в соответствии с соглашениями, принятыми в теоретической части). В данном случае имеются действительные собственные значения одного знака, поэтому точка покоя $(0, 0)$ представляет собой *узел*. Поскольку знак собственных значений положителен, — *неустойчивый* узел.

Общее решение системы имеет вид

$$\mathbf{x} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3t}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 = C_1 e^{2t} + 2C_2 e^{3t}, \\ x_2 = C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{3t}. \end{cases}$$

2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 4x_2. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение выглядит так:

$$0 = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & -1 \\ -3 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda + 4) - 3 = \lambda^2 + 6\lambda + 5,$$

т. е. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -5$. В данном случае имеются действительные собственные значения одного знака, поэтому точка покоя $(0, 0)$ представляет собой *узел*. Поскольку знак собственных значений отрицателен, имеем *устойчивый* узел.

Общее решение системы:

$$\mathbf{x} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-5t}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-5t}, \\ x_2 = -C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{-5t}. \end{cases}$$

3. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = x_2 - 4x_1. \end{cases}$$

Заметим, что в правой части переменные «перепутаны», поэтому при составлении характеристического уравнения нужно быть внимательным. Имеем:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ -4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 4 = \lambda^2 + 6\lambda + 5,$$

т. е. $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$. Имеем собственные значения разных знаков, поэтому точка покоя $(0, 0)$ представляет собой *седло*.

Общее решение системы имеет вид

$$\mathbf{x} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 = C_1 e^{-t} - C_2 e^{3t}, \\ x_2 = 2C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{3t}. \end{cases}$$

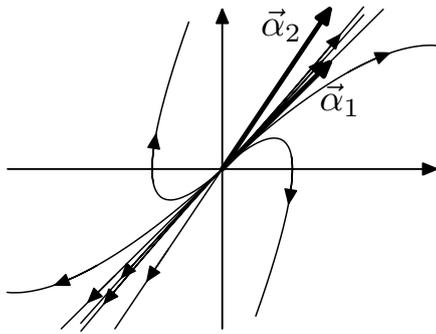


Рис. 1

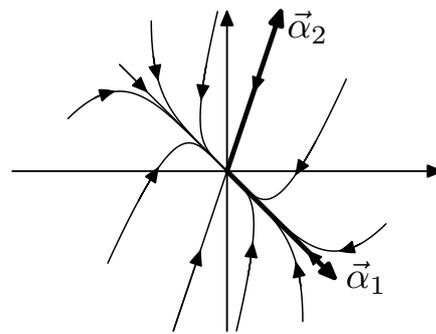


Рис. 2

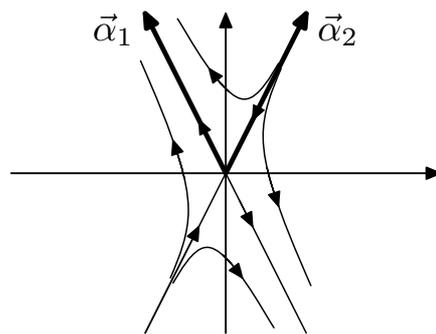


Рис. 3

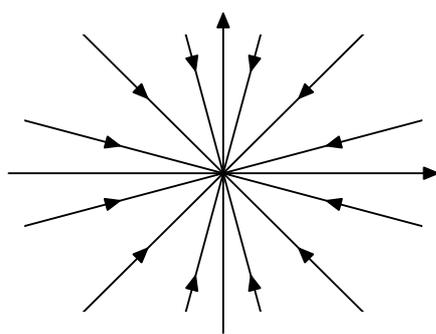


Рис. 4

4. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1, \\ \dot{x}_2 = -2x_2. \end{cases}$$

Из вида матрицы системы следует, что в данном примере имеем *устойчивый дискретический узел*. Общее решение имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = C_1 e^{-2t}, \\ x_2 = C_2 e^{-2t}. \end{cases}$$

5. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 3x_2. \end{cases}$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 2 = (\lambda - 2)^2,$$

или $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, т. е. собственное значение имеет алгебраическую кратность 2. С другой стороны, матрица системы не диагональна. Следовательно, заведомо $\text{rank}(A - 2E) > 0$, и двух линейно независимых собственных векторов матрица A иметь не может; поэтому мы имеем дело с *вырожденным узлом*, причём, в силу знака λ , *неустойчивым*. Для нахождения общего решения требуется найти собственный и присоединённый вектор матрицы системы. Такой парой являются, например, вектора $(1 \ 1)^T$, $(1 \ 2)^T$. Поэтому для общего решения системы имеем

$$\mathbf{x} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) e^{2t}, \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} x_1 = (C_1 + C_2(t + 1)) e^{2t}, \\ x_2 = (C_1 + C_2(t + 2)) e^{2t}. \end{cases}$$

Переобозначив константы: $\tilde{C}_1 = C_1 + C_2$, $\tilde{C}_2 = C_2$, можем записать решение в несколько более простом виде

$$\begin{cases} x_1 = (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 t) e^{2t}, \\ x_2 = (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2(t + 1)) e^{2t}. \end{cases}$$

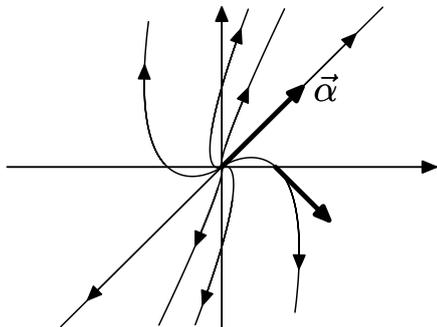


Рис. 5

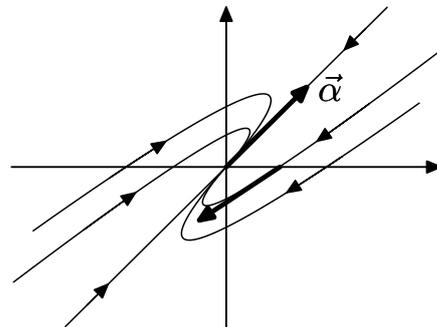


Рис. 6

В этом и следующем примерах можно определить направление «выхода траекторий» начала координат, построив вектор «скорости» $\dot{\mathbf{x}}$ в произвольной точке плоскости, например $(0, 1)$. Так, значение вектора $\dot{\mathbf{x}}$, равное $(1, -1)^T$ в точке $(0, 1)$ фазовой траектории показывает,

что все фазовые траектории выходят из начала координат с направлением «вправо и вверх» или «влево и вниз», но не «вправо и вниз» или «влево и вверх».

6. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 - 3x_1, \\ \dot{x}_2 = x_2 - 2x_1. \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение (заметив, что переменные снова «перепутаны»):

$$0 = \begin{vmatrix} -3 - \lambda & 2 \\ -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 3) + 4 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2,$$

или $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ — собственное значение имеет алгебраическую кратность 2. Матрица системы не диагональна, и точка покоя $(0, 0)$ представляет собой *вырожденный узел*, причём *устойчивый*, поскольку $\lambda < 0$. Для общего решения имеем

$$\mathbf{x} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \right) e^{-t}, \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} x_1 = (\tilde{C}_1 + 2\tilde{C}_2 t) e^{-t}, \\ x_2 = (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 + 2\tilde{C}_2 t) e^{-t}. \end{cases}$$

7. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 5x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2. \end{cases}$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$0 = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & -5 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1) + 5 = \lambda^2 - 1 + 5 = \lambda^2 + 4,$$

откуда $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Очевидно, точка покоя данной системы является *центром*. Найдя общее решение, получим

$$\mathbf{x} = C_1 \begin{pmatrix} \cos 2t + 2 \sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\sin 2t + 2 \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти направление движения по траекториям при возрастании t , достаточно вычислить значение правой части системы в произвольной точке (x_1, x_2) , например $(1; 0)$. Мы ограничимся рисунком, поскольку более подробное обсуждение этого вопроса делается в следующем примере (применительно к точки покоя типа «фокус»).

8. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2. \end{cases}$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$0 = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)^2 + 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 5,$$

откуда $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$. Поскольку собственные значения матрицы — комплексно сопряжённые числа с отрицательной действительной частью, точка покоя $(0, 0)$ представляет собой *устойчивый фокус*. Для выяснения вопроса о направлении «закручивания» траекторий вычислим правую часть системы при $\mathbf{x} = (1, 0)^T$ — получим вектор $\dot{\mathbf{x}} = (-2, -1)^T$. Отсюда следует, что в этом примере при $t \rightarrow +\infty$: 1) траектория приближается к 0; 2) траектория «закручивается» по часовой стрелке (если на плоскости выбрана правая система координат).

Нетрудно найти общее решение системы, равное

$$\mathbf{x} = e^{-2t} \left(C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right).$$

9. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2, \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - 3x_2. \end{cases}$$

Выпишем характеристическое уравнение:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 4 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 5)^2 + 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 5,$$

откуда $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$. Поскольку собственные значения матрицы — комплексно сопряжённые числа с отрицательной действительной частью,

точка покоя $(0, 0)$ представляет собой *устойчивый фокус*. Для выяснения вопроса о направлении «закручивания» траекторий вычислим правую часть системы при $\mathbf{x} = (1, 0)^T$ — получим вектор $\dot{\mathbf{x}} = (1, 4)^T$. Теперь ясно, что при $t \rightarrow +\infty$ 1) траектория приближается к 0, 2) траектория «закручивается» против часовой стрелки (в правой системе координат). Разница с предыдущим характером траекторией в примерах 8 и 9 легко заметна на рисунках. Обращаем внимание читателя, что, хотя найденный вектор «скорости» направлен «от центра», всё же тривиальное решение является устойчивым.

Общее решение системы имеет вид

$$\mathbf{x} = e^{-t} \left(C_1 \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin 2t \\ -\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} \right).$$

10. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_2 - 2x_1. \end{cases}$$

Выпишем характеристическое уравнение:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5,$$

или $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Поскольку собственные значения матрицы — комплексно сопряжённые числа с положительной действительной частью, точка покоя $(0, 0)$ представляет собой *неустойчивый фокус*. Для выяснения вопроса о направлении «закручивания» траекторий вычислим правую часть системы при $\mathbf{x} = (1, 0)^T$ — получим вектор $\dot{\mathbf{x}} = (1, -2)^T$. Теперь ясно, что при $t \rightarrow +\infty$ 1) траектория отдаляется от 0, 2) траектория «закручивается» по часовой стрелке (в правой системе координат).

Общее решение системы имеет вид

$$\mathbf{x} = e^{2t} \left(C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} \right).$$

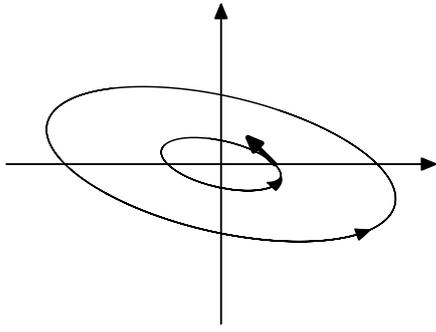


Рис. 7

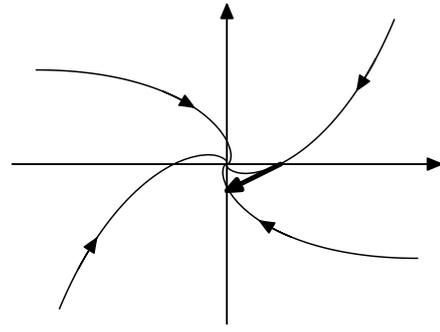


Рис. 8

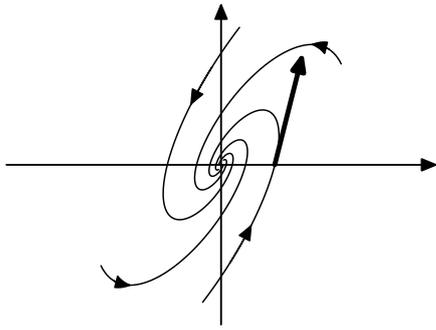


Рис. 9

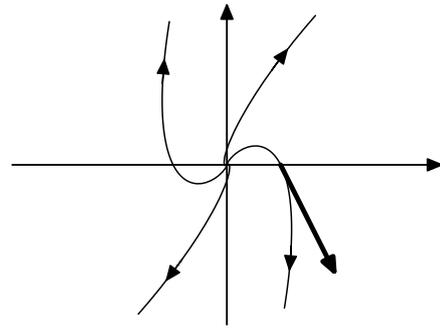


Рис. 10

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

В каждой из задач требуется:

1) не находя решение, определить тип точки покоя $(0, 0)$ и нарисовать схему фазовых траекторий с указанием направления движения по траектории при возрастании t ;

2) найти общее решение системы стандартным методом.

В целях удобства записи рекомендуется вместо обозначений (x_1, x_2) использовать (x, y) .

$$1. \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_2. \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 8x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2. \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 6x_1 + 2x_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 7x_2. \end{cases}$$

$$4. \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 5x_2. \end{cases}$$

$$5. \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 6x_1, \\ \dot{x}_2 = 6x_2. \end{cases}$$

$$6. \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -6x_1, \\ \dot{x}_2 = -3x_2. \end{cases}$$

$$7. \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2. \end{cases}$$

$$8. \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

$$9. \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 3x_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + x_2. \end{cases}$$

$$10. \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2. \end{cases}$$

$$11. \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 5x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2. \end{cases}$$

$$12. \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 5x_1 + 4x_2, \\ \dot{x}_2 = 20x_1 + 7x_2. \end{cases}$$

$$13. \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - 5x_2, \\ \dot{x}_2 = 5x_1 - 3x_2. \end{cases}$$

$$14. \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 13x_1 - 8x_2, \\ \dot{x}_2 = 18x_1 - 13x_2. \end{cases}$$

$$15. \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 3x_2. \end{cases}$$

Ответы к задачам для самостоятельного решения

Нумерация рисунков соответствует нумерации задач.

1. $\mathbf{x} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t}$, тип точки покоя — неустойчивый узел.

2. $\mathbf{x} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t}$, тип точки покоя — седло.

3. $\mathbf{x} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{4t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{9t}$, тип точки покоя — неустойчивый узел.

4. $\mathbf{x} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + C_2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) e^{4t}$, тип точки покоя — неустойчивый вырожденный узел.

5. $\mathbf{x} = \left(C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^{6t}$, тип точки покоя — неустойчивый дикритический узел.

6. $\mathbf{x} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-6t} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$, тип точки покоя — устойчивый узел.

7. $\mathbf{x} = \left(C_1 \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} \right) e^{-t}$, тип точки покоя — устойчивый фокус.

8. $\mathbf{x} = \left(C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right) e^{2t}$, тип точки покоя — неустойчивый фокус.

9. $\mathbf{x} = \left(C_1 \begin{pmatrix} -\sin 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix} \right) e^t$, тип точки покоя — неустойчивый фокус.

10. $\mathbf{x} = C_1 \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ -\sin t \end{pmatrix}$, тип точки покоя — центр.

11. $\mathbf{x} = C_1 \begin{pmatrix} 5 \cos 3t \\ \cos 3t + 3 \sin 3t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -5 \sin 3t \\ 3 \cos 3t - \sin 3t \end{pmatrix}$, тип точки покоя — центр.

12. $\mathbf{x} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} e^{15t}$, тип точки покоя — седло.

13. $\mathbf{x} = C_1 \begin{pmatrix} 3 \cos 4t - 4 \sin 4t \\ 5 \cos 4t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 4 \cos 4t + 3 \sin 4t \\ 5 \sin 4t \end{pmatrix}$, тип точки покоя — центр.

14. $\mathbf{x} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} + C_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} e^{-5t}$, тип точки покоя — седло.

15. $\mathbf{x} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) e^{-2t}$, тип точки покоя — устойчивый вырожденный узел.

Схемы фазовых траекторий к задачам для самостоятельного решения

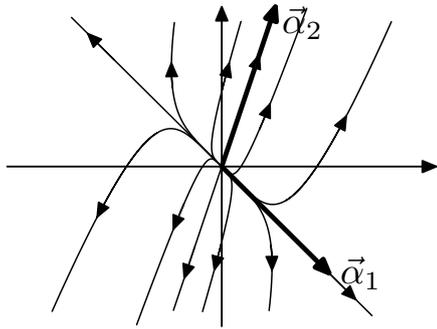


Рис. 1

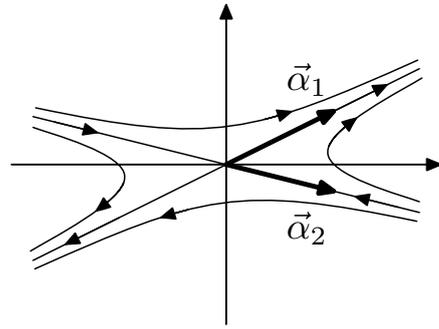


Рис. 2

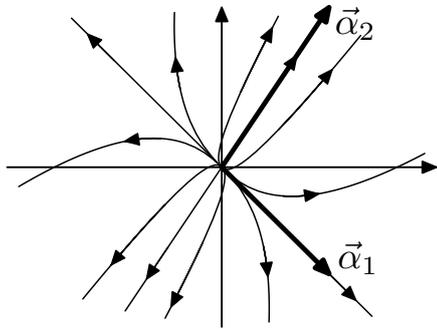


Рис. 3

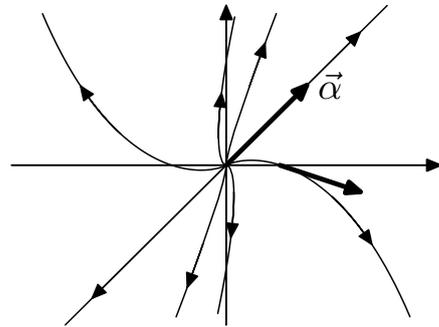


Рис. 4

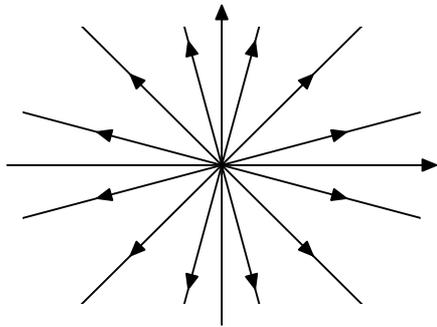


Рис. 5

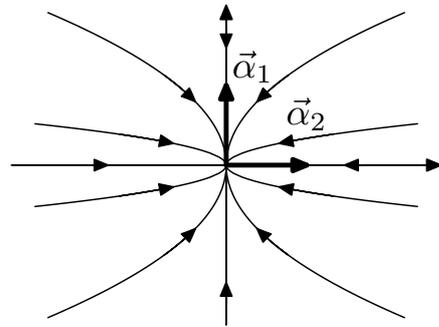


Рис. 6

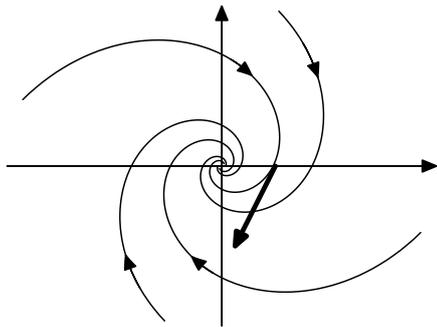


Рис. 7

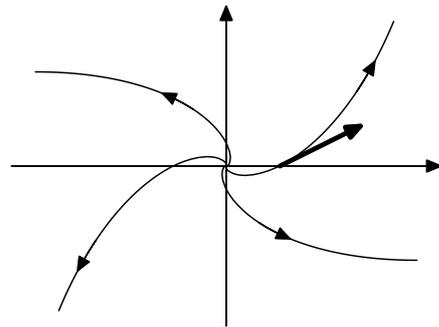


Рис. 8

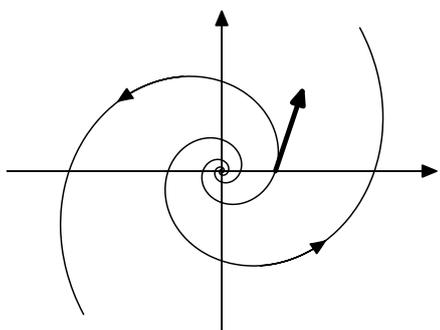


Рис. 9

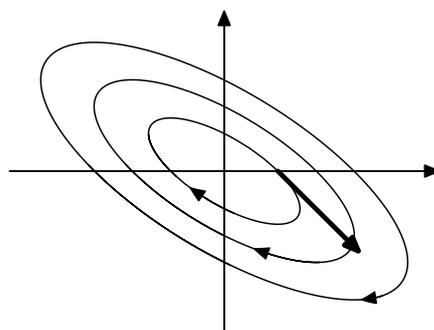


Рис. 10

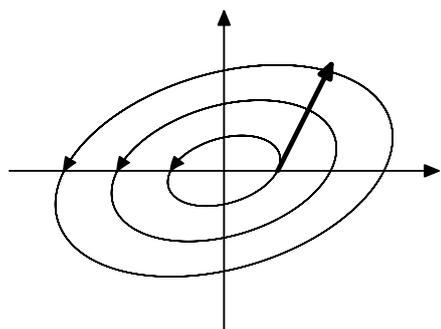


Рис. 11

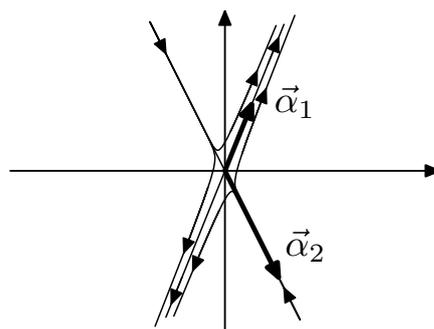


Рис. 12

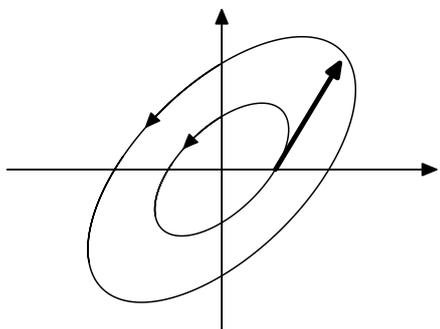


Рис. 13

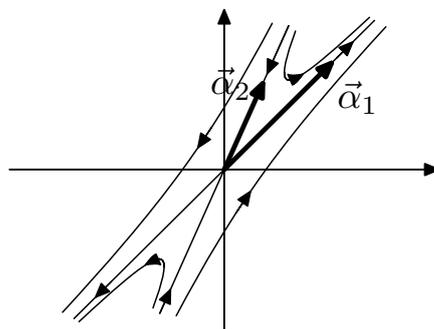


Рис. 14

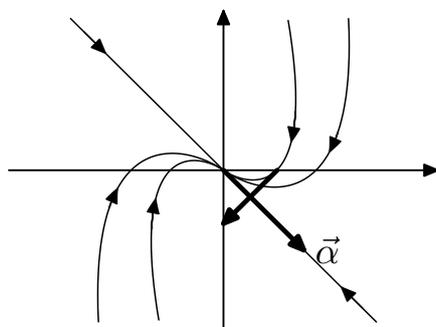


Рис. 15

ЛИТЕРАТУРА

При написании данного пособия были использованы следующие книги:

[1] *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

[2] *Нефёдов Н. Н., Попов В. Ю., Волков В. Т.* Дифференциальные уравнения. Курс лекций. Доступно по адресу http://matematika.phys.msu.ru/files/stud_gen/26/lekcii.pdf

[3] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра. М.: Физматлит, 2011.