

**СПИСОК ЗАДАЧ, КОТОРЫЕ НЕОБХОДИМО УМЕТЬ РЕШАТЬ ДЛЯ
ПОЛУЧЕНИЯ ЗАЧЕТА ПО КУРСУ "ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ"**

Решить уравнения (записать общее решение и решение задачи с дополнительными условиями, если это необходимо):

- | | |
|--|---|
| 1. $y' = \cos(x - y)$ | 14. $xydy = (y^2 + x)dx$ |
| 2. $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$ | 15. $(x - y^2)y' = 1$
$y(0) = 0$ |
| 3. $y^2 + x^2 y' = xy y'$ | 16. $x - \frac{y}{y'} = \frac{2}{y}$ |
| 4. $xy' - y = x \cdot \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ | 17. $2(x - y^2)dy = ydx$ |
| 5. $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$ | 18. $xy' - 2x^2 \cdot \sqrt{y} = 4y$ |
| 6. $x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0$ | 19. $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$ |
| 7. $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$ | 20. $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$ |
| 8. $xy' - 2y = 2x^4$ | 21. $(1 + y^2 \sin 2x)dx = (2y \cos^2 x)dy$ |
| 9. $y' + y \cdot \operatorname{tg} x = \sec x$
$y(0) = 1$ | 22. $(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0$ |
| 10. $y = x(y' - x \cos x)$
$y(1) = 0$ | 23. $ydx - xdy = 2x^3 \operatorname{tg} \frac{y}{x} dx$ |
| 11. $(x + y^2)dy = ydx$ | 24. $y(x + y)dx + (xy + 1)dy = 0$ |
| 12. $(2e^y - x)y' = 1$ | 25. $x = y'^3 + y'$ |
| 13. $y' + 2y = y^2 e^x$ | 26. $y = y'^2 + 2y'^3$ |

Исследовать особенности семейства решений уравнений. Построить графики интегральных кривых (схематично):

- | | |
|-----------------------------|----------------------------|
| 27. $(y')^2 = 4y^3(1 - y)$ | 30. $y = 2xy' + y^2(y')^3$ |
| 28. $y'^2 + xy = y^2 + xy'$ | 31. $y^2 + y'^2 = 1$ |
| 29. $y = xy' - y'^2$ | |

Решить уравнения:

32. $y'' = 2yy'$

33. $yy'' + 1 = y'^2$

34. $xy''' = y'' - xy''$

35. $xyy'' - xy'^2 = yy'$

35. $xyy'' = y'(y + y')$

37. $x^3y'' = (y - xy')(y - xy' - x)$

38. $4x^2y^3y'' = x^2 - y^4$

Решить уравнения (записать общее решение и решение задачи с дополнительными условиями, если это необходимо):

39. $y'' + y = 4\sin x$
 $y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$

40. $y'' + 2y' - 3y = x^2e^x$

41. $y'' - 3y' + 2y = x \cos x$

42. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$

43. $y'' - 9y = e^{3x} \cos x$
 $y(0) = 1, \quad y'(1) = 0$

44. $y'' + y = x \sin x$
 $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

45. $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$

46. $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$

47. $y'' + 4y = 2 \operatorname{tg} x$

48. $y'' - 2y' + y = 6xe^x$

49. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \cos x$

Решить уравнения методом вариации постоянной:

50. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

51. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$

52. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$

Решить уравнения Эйлера:

53. $x^2y'' - xy' + y = 8x^3$

54. $x^3y'' - 2xy = 6 \ln x$

55. $x^2y'' - 2y = \sin \ln x$

56. $(x-2)^2y'' - 3(x-2)y' + 4y = x$

Решить системы уравнений (записать общее решение и решение задачи с дополнительными условиями, если это необходимо):

57.
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + 2z \\ \dot{y} = x + 2z \\ \dot{z} = -2x + y - z \end{cases} \quad (\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \pm i)$$

62.
$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + y - e^{2t} \\ \dot{y} = y - 2x \end{cases}$$

$$58. \begin{cases} \dot{x} = x - y + z \\ \dot{y} = x + y - z \\ \dot{z} = -y + 2z \end{cases} \quad (\lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = 1)$$

$$59. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z \\ \dot{z} = 2z - x + y \end{cases} \quad (\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = 1)$$

$$60. \begin{cases} \dot{x} = y - 2z - x \\ \dot{y} = 4x + y \\ \dot{z} = 2x + y - z \end{cases} \quad (\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = -1)$$

$$61. \begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t} \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$$

$$63. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y + e^t \\ \dot{y} = -2x + 2t \end{cases}$$

$$64. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y & x(0) = 1 \\ \dot{y} = y - 2x + 18t & y(0) = 2 \end{cases}$$

$$65. \begin{cases} \dot{x} = x - y + 2 \sin t \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$$

$$66. \begin{cases} \dot{x} = 2y - x + 1 \\ \dot{y} = 3y - 2x \end{cases}$$

67. Построить функцию Коши и записать с ее помощью общее решение уравнения $y^{(4)} + y'' = x$

68. Построить функцию Коши и записать с ее помощью общее решение уравнения $y^{(4)} - y'' = x^2$

69. Построить матрицу Коши и записать с ее помощью решение начальной задачи для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + 1 & x(0) = 0 \\ \dot{y} = x - y & y(0) = 1 \end{cases}$$

73. Найти положения равновесия системы, определить их тип и исследовать устойчивость (по первому приближению)

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\sqrt{x} - 2\sqrt{y} \\ \dot{y} = xy - 1 \end{cases}$$

74. Найти положения равновесия системы, определить их тип и исследовать устойчивость (по первому приближению)

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(2 - y^2) \\ \dot{y} = e^x - 1 \end{cases}$$

75. Найти положения равновесия системы, определить их тип и исследовать устойчивость (по первому приближению)

$$\begin{cases} \dot{x} = e^x - e^{-y} \\ \dot{y} = x(y + 2) \end{cases}$$

70. Найти положения равновесия системы и исследовать их устойчивость $y' = \sin y$

71. Найти положения равновесия системы, определить их тип и исследовать устойчивость (по первому приближению)

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y \\ \dot{y} = \ln(3x^2 - 1) - \ln 2 \end{cases}$$

72. Найти положения равновесия системы, определить их тип и исследовать устойчивость (по первому приближению)

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - 2x - y^2 \\ \dot{y} = e^{-4x} - 1 \end{cases}$$

76. Найти стационарные точки, определить их тип и изобразить фазовые траектории $y'' + \sin y = 0$

77. Найти стационарные точки, определить их тип и изобразить фазовые траектории $y'' = y(1 - y)$

78. Найти стационарные точки, определить их тип и изобразить фазовые траектории $y'' = y^3 - y$

Построить функцию Грина и записать решения краевых задач:

79. $y'' = f(x), \quad 0 < x < l$
 $y(0) = 0, \quad y(l) = 0$

80. $y'' = f(x), \quad 0 < x < l$
 $y'(0) = 0, \quad y(l) = 0$

81. $y'' = f(x), \quad 0 < x < l$
 $y(0) = 0, \quad y'(l) = 0$

82. $y'' + y = 1, \quad 0 < x < 1;$
 $y(0) = 1, \quad y(1) = -1$

83. $y'' - y = 1, \quad 0 < x < 1;$
 $y'(0) = -1, \quad y(1) = 1$

84. $y'' + y = f(x), \quad 0 < x < \pi;$
 $y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$

85. $y'' + y' = f(x), \quad 0 < x < 1;$
 $y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$

86. $x^2 y'' + 2xy' = f(x), \quad 0 < x < 3;$
 $|y(0)| < \infty, \quad y'(3) = 0$

87. $x^2 y'' - 6y = x, \quad 0 < x < 1;$
 $|y(0)| < \infty, \quad y'(1) + 2y(1) = 0$

Найти собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля:

88. $y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < 1;$
 $y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$

89. $y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < 1;$
 $y'(0) = 0, \quad y(1) = 0$

92. $y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < \pi;$
 $y(0) = 0, \quad y'(\pi) + y(\pi) = 0$

93. $y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < \pi;$
 $y'(0) = y(0), \quad y'(\pi) = 0$

$$90. \quad y'' + \lambda y = 0, \quad 2 < x < 4;$$

$$y(2) = 0, \quad y(4) = 0$$

$$91. \quad y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < 3;$$

$$y'(0) = 0, \quad y(3) = 0$$

$$94. \quad y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < 2\pi;$$

$$y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi)$$

Записать общее решение и решение задачи Коши для уравнений

$$95. \quad z_x + cz_y = 0;$$

$$z|_{y=0} = \varphi(x)$$

$$96. \quad yz_x - xz_y = 0;$$

$$z|_{x=1} = y^2$$

$$97. \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + xy \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$u|_{z=0} = x^2 + y^2$$

$$98. \quad y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = x$$

$$x = 0, \quad z = y^2$$

$$99. \quad xz_x - 2yz_y = x^2 + y^2;$$

$$y = 1, \quad z = x^2$$

$$100. \quad xz_x + z z_y = y;$$

$$y = 2z, \quad x + 2y = z$$