МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В.Ломоносова

Ф И З И Ч Е С К И Й   Ф А К У Л Ь Т Е Т

А.Б. Васильева, Н.Н. Нефедов

Нелинейные краевые задачи

(дополнительные разделы к курсу лекций «Дифференциальные уравнения»)

Москва --2006

1. Постановка задачи.

Рассмотрим двухточечную краевую задачу

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(u,x), \quad x \in (0,1) := D,$$

$$u(0) = u^0, \ u(1) = u^1. \tag{1}$$

Если f - нелинейная функция, то решить задачу аналитически весьма сложно.

Основные методы решения таких задач – численные. В основном они основаны на конечно-разностных методах, и среди них можно выделить следующие:

1) Разностные методы - производные заменяются конечными разностями, задача линеаризуется, для ее решения применяется метод прогонки, а затем применяются методы последовательных приближений.

2) Метод стрельбы -- задается $u'(0) = \gamma$ и решается начальная задача для $u(x,\gamma)$. Параметр γ подбирается так, чтобы $u(1,\gamma) = u^1$.

При этом важно установить разрешимость задачи (1), а при использовании метода стрельбы важно выделить классы нелинейностей, когда задача (1) разрешима этим методом. В последние годы важную роль в исследовании различных классов нелинейных задач приобрели методы качественной теории дифференциальных уравнений, в основе которых лежат так называемые теоремы сравнения. Этот подход носит также название метод дифференциальных неравенств. Этот метод развивает и распространяет идеи С.А. Чаплыгина для начальных задач на более сложные классы задач, в том числе краевые. Основной целью настоящего раздела курса ДУ является знакомство с этими эффективными подходами.

В качестве вспомогательного результата нам понадобится теорема, доказательство которой основано на методе стрельбы и приводится в следующем разделе.

2. Существование решения в случае ограниченной правой части (метод стрельбы).

Первый достаточно простой результат содержится в теореме.

Теорема 1. ***Пусть*** $f(u,x)$ ***непрерывна, ограничена и удовлетворяет условию Липшица при*** $x \in \bar{D}$ $(\bar{D} = [0,1])$***,*** $u \in R$***. Тогда задача* (1) *имеет решение.***

Доказательство Теоремы 1.

Рассмотрим начальную задачу

$$u'' = f\left(u,x\right), \quad x \in (0,1],$$
$$u(0) = u^0, u'(0) = \gamma \tag{2}$$

Докажем, что можно выбрать γ так, что $u(1,\gamma) = u^1$ и, следовательно, решение задачи (2) будет являться решением задачи (1) (метод стрельбы).

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Задача Коши* (2) *имеет единственное непрерывно зависящее от* γ *решение.*

Результат Леммы 1 является следствием известных теорем существования и единственности и непрерывной зависимости от параметров решения уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной.

Если $u(x,\gamma)$ - решение задачи Коши (2), то, интегрируя дважды полученное тождество, получим

$$u(x,\gamma) = u^0 + \gamma x + \int_0^x d\xi \int_0^\xi f(u,s)ds \ . \tag{3}$$

В силу условий Теоремы 1 существует $M > 0$ такая, что $M \geq |f(u,x)|$ при $x \in \bar{D}$, $u \in R$. Используя (3), получим

$$u(1,\gamma) = u^0 + \gamma + \int_0^1 d\xi \int_0^\xi f(u,s)ds$$

Выберем теперь $\gamma = \gamma_0, \gamma_0 > 0$, получим

$$u(1,\gamma_0) \geq u^0 + \gamma_0 - M > u^1$$

при γ_0 достаточно большом. Аналогичным образом получаем, что

$$u(1,-\gamma_0) \leq u^0 - \gamma_0 + M < u^1$$

при γ_0 достаточно большом (выбираем γ_0 так, чтобы выполнялись оба неравенства). Тогда, в силу непрерывности $u(1,\gamma)$ существует такое $\gamma, -\gamma_0 < \gamma < \gamma_0$, что $\underline{u(1,\gamma) = u^1}$. При этом γ решение задачи (2) является решением задачи (1). Таким образом, Теорема 1 доказана.

Замечание. *Класс функций f в Теореме 1 – узкий. В него не попадает даже функция $f = u$.*

Конструктивный подход, основанный на методе дифференциальных неравенств, предложен японским математиком Нагумо (Nagumo).

3. Теорема Нагумо.

Подход Нагумо является развитием идеи Чаплыгина.

Определение. Ф*ункции* $\alpha(x)$, $\beta(x) \in C^2(D) \bigcap C(\bar{D})$ *называются соответственно нижним и верхним решениями задачи* (1), *если выполняются следующие неравенства*

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2} - f(\alpha(x),x) \geq 0 \geq \frac{d^2\beta}{dx^2} - f(\beta(x),x), \ x \in D$$

$$\alpha(0) \leq u^0 \leq \beta(0), \ \alpha(1) \leq u^1 \leq \beta(1).$$

Теорема 2 (Нагумо). ***Пусть существуют $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - нижнее и верхнее решение задачи (1), причем $\alpha(x) \leq \beta(x)$, $x \in [0,1]$. Пусть $f(u,x)$ - непрерывна и удовлетворяет условию Липшица при $u \in [\alpha, \beta]$, $x \in [0,1]$. Тогда существует решение задачи (1) $u(x)$, удовлетворяющее неравенствам***

$$\alpha(x) \leq u(x) \leq \beta(x), \ x \in [0,1].$$

Доказательство Теоремы 2. Рассмотрим модифицированную задачу (1).

$$\frac{d^2u}{dx^2} = h(u,x), \ x \in (0,1)$$

$$u(0) = u^0, \ u(1) = u^1, \tag{1*}$$

где

$$h(u,x)=\begin{cases} f(\beta,x)+(u-\beta)/(1+u^2), u>\beta \\ f(u,x), \alpha\le u\le\beta \\ f(\alpha,x)+(u-\alpha)/(1+u^2), u<\alpha. \end{cases}$$

Лемма 2. *Задача* **(1*)** *имеет решение***.**

Доказательство. Проверим, что $h(u,x)$ удовлетворяет условиям Теоремы 1, т.е. $h(u,x)$ - непрерывна, ограничена и удовлетворяет условию Липшица при $x\in[0,1]$, $u\in R$. Ее непрерывность очевидна, а ограниченность следует немедленно следует из непрерывности и существования предела при $u\to\pm\infty$. Проверим выполнение условия Липшица в полосе $x\in[0,1]$, $u\in R$.

Легко заметить, что производная функции $h(u,x)$ по переменной u при $u\ge\beta, 0\le x\le 1$

$$h_u(u,x)=(1-u^2-2u\beta)/(1+u^2)^2$$

ограничена. Тогда, как известно, функции $h(u,x)$ удовлетворяет в этой области условию Липшица

$$\left|h(u_1,x)-h(u_2,x\right|\le L_1\left|u_1-u_2\right|$$

(в качестве L_1 можно выбрать $L_1=\sup\left|h_u(u,x)\right|, u\ge\beta, 0\le x\le 1$).

Аналогично можно показать, что функция $h(u,x)$ удовлетворяет условию Липшица в области $u\le\alpha, 0\le x\le 1$.

Пусть при $\alpha(x)\le u\le\beta(x)$ функция $h(u,x)\equiv f(u,x)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной L_0. Покажем, что она удовлетворяет условию Липшица в полосе $x\in[0,1]$, $u\in R$. Рассмотрим лишь случай $u_2>\beta, \alpha\le u_1\le\beta$. Пусть $u_0=\beta$. Имеем

$$\left|h(u_1,x)-h(u_2,x)\right|=\left|h(u_1,x)-h(u_0,x)+h(u_0,x)-h(u_2,x)\right|\le\left|h(u_1,x)-h(u_0,x)\right|+$$
$$\left|h(u_0,x)-h(u_2,x)\right|\le L_0\left|u_1-u_0\right|+L_1\left|u_0-u_2\right|\le L\left|u_1-u_2\right|,$$

где $L=\max(L_0,L_1)$.

Таким образом, все условия Теоремы 1 выполнены и, следовательно, задача (1*) имеет решение $u=u(x)$. Лемма 2 доказана.

Покажем теперь, что это решение удовлетворяет неравенствам $\alpha\le u\le\beta$ и так как при этих u $h(u,x)\equiv f(u,x)$, то решение модифицированной задачи (1*) является решением задачи (1).

Предположим, что нарушается первое неравенство, т.е. $\exists x^*\in(0,1):\alpha(x^*)-u(x^*)>0$. Тогда $\exists x^0\in(0,1)$, в которой функция $(\alpha(x)-u(x))$ достигает положительного максимума и, следовательно,

$$(\alpha(x)-u(x))''\big|_{x=x_0}\le 0. \tag{4}$$

В этой точке $u(x)$ удовлетворяет уравнению:

$$-u''(x_0)=-f(\alpha(x_0),x_0)+(\alpha(x_0)-u(x_0))/(1+u^2(x_0)),$$

а $\alpha(x)$ - дифференциальному неравенству:

$$\alpha''(x_0)\ge f(\alpha(x_0),x_0).$$

Складывая два последних соотношения, получим

$$(\alpha(x)-u(x))''\big|_{x=x_0}\ge(\alpha(x_0)-u(x_0))/(1+u^2(x_0))>0,$$

что противоречит (4). Тогда $\alpha(x)\le u(x)$, $x\in[0,1]$. Аналогично показывается $\beta(x)\ge u(x)$, $x\in[0,1]$. Это завершает доказательство теоремы.

3. **Примеры.**

Пример 1. Рассмотрим задачу (1) с кубической нелинейностью

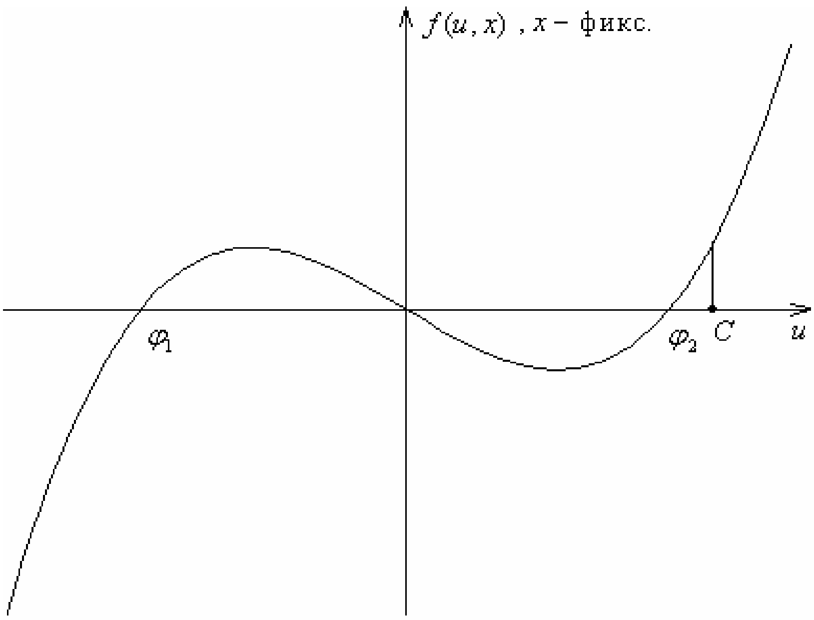
$$\frac{d^2u}{dx^2} = u(u-\varphi_1(x))(u-\varphi_2(x)),\ x \in (0,1)$$

$u(0)=u^0$, $u(1)=u^1$; $u^0, u^1 > 0$,

предполагая, что $\varphi_1(x) < 0$, $\varphi_2(x) > 0$ - непрерывные при $x \in [0,1]$ функции.

Докажем существование решения. Очевидно, что $\alpha(x) \equiv 0$ - нижнее решение. Пусть $\bar{\varphi}_2 = \max\limits_{[0,1]} \varphi_2(x)$. Тогда в качестве верхнего решения можно взять любую

постоянную $C = \beta(x) \ge \max[\bar{\varphi}_2, u^0, u^1]$. Действительно в этом случае $f(C,x) \ge 0$ (см. рисунок) и, следовательно, $\dfrac{d^2\beta}{dx^2} - f(\beta,x) \le 0$.



Тогда по Теореме Нагумо существует решение краевой задачи $u(x)$, удовлетворяющее неравенствам

$$0 \le u(x) \le \beta(x) = \max[\bar{\varphi}_2, u^0, u^1].$$

В качестве нижнего решения можно выбрать также $\alpha(x) = \delta > 0$,

где $\delta \le \min(\min\limits_{[0,1]} \varphi_2(x), u^0, u^1)$, верхнее же решение оставим прежним.

Таким образом можно показать существование положительного решения

$$\delta \le u(x) \le \beta(x).$$

График иллюстрирует построение α и β.

Пример 2. Рассмотрим задачу (1) со степенной нелинейностью:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = u^p, \ x \in (0,1)$$

$$u(0) = u^0, \ u(1) = u^1; \quad u^0, u^1 > 0,$$

где $p > 1$.

В этом случае $\alpha(x) \equiv 0$ - нижнее решение. В качестве верхнего решения можно взять любую постоянную $C = \beta(x) \geq \max[u^0, u^1]$.

Тогда по Теореме Нагумо существует неотрицательное решение краевой задачи $u(x)$, удовлетворяющее неравенствам

$$0 \leq u(x) \leq \beta(x) = \max[u^0, u^1].$$