Глава 18. Интегралы, зависящие от параметров

Рассмотрим интеграл $\int_a^b f(x,y)\,dx$. Подынтегральная функция зависит от x и y. Пусть при каждом значении y из некоторого множества Y этот интеграл существует. Тогда он является функцией аргумента y, определённой на множестве Y. Обозначим эту функцию $F(y)$:

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Функция $F(y)$ называется интегралом, зависящим от параметра y.

Если a и b — какие-то числа, т.е. промежуток интегрирования — сегмент $[a,b]$, и функция $f(x,y)$ ограничена на сегменте $[a,b]$ при каждом y из множества Y, то данный интеграл представляет собой определённый интеграл и называется собственным интегралом, зависящим от параметра y. Если же промежуток интегрирования бесконечный (т.е. либо $a=-\infty$, либо $b=\infty$, либо $a=-\infty$ и $b=\infty$) или $f(x,y)$ — неограниченная функция, то данный интеграл называется несобственным интегралом, зависящим от параметра y.

Если подынтегральная функция зависит не от одного параметра y, а от нескольких: $y_1, y_2, \ldots, y_m$, то и интеграл $\int_a^b f(x,y_1,\ldots,y_m)\,dx$ будет функцией m переменных $y_1, \ldots, y_m$.

Аналогично вводятся кратные интегралы,

зависящие от параметров:

$$F(y_1,\dots,y_m)=\int\limits_{G}\cdots\int f(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)\,dx_1\cdots dx_n.$$

Итак, интегралы, зависящие от параметров, — это функции этих параметров, заданные специальным образом — с помощью интегралов. Мы рассмотрим вопросы о непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости таких функций. Ясно, что ответы на эти вопросы зависят от подынтегральной функции. Исследование указанных свойств несобственных интегралов, зависящих от параметров, потребует введения новых понятий.

Отметим, что интегралы, зависящие от параметров, играют важную роль в математической физике. С одним физическим примером — ньютоновым потенциалом — мы познакомимся в конце главы.

18.1 Собственные интегралы, зависящие от параметра

Пусть функция $f(x,y)$ определена в прямоугольнике $Q=\{(x,y):\ a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$ и интегрируема по x на сегменте $[a,b]$ при каждом y из сегмента $[c,d]$. Тогда

$$F(y)=\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$$

является функцией аргумента y, определённой на сегменте $[c,d]$. Функцию $F(y)$ мы назовем собственным интегралом, зависящим от параметра y.

Займёмся исследованием свойств этой функции.

Теорема 1 (о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра).

Если функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике Q, то функция $F(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$ непрерывна на сегменте $[c,d]$.

Доказательство. По теореме Кантора функция $f(x,y)$ равномерно непрерывна в прямоугольнике Q.

Поэтому $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$, такое, что $\forall$ точек $M'(x',y')$ и $M''(x'',y'')$ из прямоугольника Q, удовлетворяющих условию $\rho(M',M'')<\delta$, выполняется неравенство $|f(x',y')-f(x'',y'')|<\frac{\varepsilon}{b-a}$. В частности, $\forall x\in[a,b]$ и $\forall y'$ и y'' из сегмента $[c,d]$, удовлетворяющих условию $|y'-y''|<\delta$, будет выполнено неравенство

$$|f(x,y')-f(x,y'')|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Следовательно, если $|y'-y''|<\delta$, то

$$|F(y')-F(y'')|=\left|\int_a^b f(x,y')\,dx-\int_a^b f(x,y'')\,dx\right|\le$$

$$\le\int_a^b |f(x,y')-f(x,y'')|\,dx<\frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx=\varepsilon.$$

Итак, $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$, такое, что если $|y'-y''|<\delta$, то $|F(y')-F(y'')|<\varepsilon$. Это означает, что функция $F(y)$ равномерно непрерывна (а, значит, и просто непрерывна) на сегменте $[c,d]$. Теорема 1 доказана.

Обобщением теоремы 1 является следующая теорема.

Теорема 1'. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике $Q=\{(x,y): a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$ и пусть непрерывные функции $x_1(y)$ и $x_2(y)$ определены на сегменте $[c,d]$ и удовлетворяют неравенствам

$$a\le x_1(y)\le x_2(y)\le b \text{ при } c\le y\le d$$

(рис. 18.1).

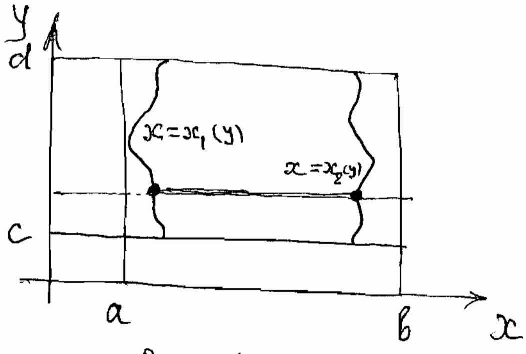

Рис. 18.1

Тогда функция

$$g(y)=\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$$

непрерывна на сегменте $[c,d]$.

(Докажите эту теорему самостоятельно).

Теорема 2 (об интегрировании по параметру).

Если функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике $Q=\{(x,y): a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$, то функция $F(y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx$ интегрируема на сегменте $[c,d]$ и справедливо равенство

$$\int\limits_c^d F(y)dy=\int\limits_c^d\Big[\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\Big]dy=\int\limits_a^b\Big[\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\Big]dx. \quad (18.1)$$

(в таком случае говорят, что можно изменить порядок интегрирования).

Доказательство. По теореме 1 функция $F(y)$ непрерывна на сегменте $[c,d]$ и, следовательно, интегрируема на этом сегменте.

Функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике Q, поэтому существует двойной интеграл $\iint\limits_Q f(x,y)\,dx\,dy$ и существуют внутренние интегралы в повторных интегралах, входящих в равенство (18.1). Следовательно (см. главу 11), существуют повторные интегралы и каждый из них равен двойному интегралу, а, значит, эти повторные интегралы равны друг другу, т.е. выполняется равенство (18.1). Теорема 2 доказана.

Теорема 3 (о дифференцировании по параметру)

Пусть функция $f(x,y)$ и её частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ непрерывны в прямоугольнике $Q=\{(x,y): a\le x\le b, c\le y\le d\}$. Тогда функция $F(y)=\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ имеет на сегменте $[c,d]$ непрерывную производную $F'(y)$ и справедливо равенство

$$F'(y)=\int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

(в таком случае говорят, что интеграл, зависящий от параметра, можно дифференцировать по параметру под знаком интеграла).

Доказательство. Введём функцию

$$G(y)=\int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

По теореме 1 функция $G(y)$ непрерывна на сегменте $[c,d]$. Нам нужно доказать, что функция $F(y)$ имеет (непрерывную) производную и $F'(y)=G(y)$.

Рассмотрим интеграл с переменным верхним пределом

$$\int\limits_c^y G(t)\,dt=\int\limits_c^y\Big[\int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx\Big]dt.$$

В силу теоремы 2 в повторном интеграле можно изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_c^y G(t)\,dt=\int\limits_a^b\Big[\int\limits_c^y \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dt\Big]dx.$$

Внутренний интеграл в правой части равенства вычислим по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_c^y \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dt = f(x,t)\Big|_c^y = f(x,y) - f(x,c).$$

Таким образом,

$$\int\limits_c^y G(t)\,dt = \int\limits_a^b [f(x,y) - f(x,c)]\,dx = F(y) - F(c),$$

откуда получаем:

$$F(y) = \int\limits_c^y G(t)\,dt + F(c).$$

Так как $G(t)$ – непрерывная функция, то $\frac{d}{dy}\left[\int\limits_c^y G(t)\,dt\right] = G(y)$ (производная интеграла с переменным верхним пределом).

Следовательно,

$$F'(y) = G(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

Теорема 3 доказана.

Обобщением теоремы 3 является следующая теорема.

<u>Теорема 3'.</u> Пусть выполнены условия теоремы 3 и пусть $x_1(y)$ и $x_2(y)$ – дифференцируемые на сегменте $[c,d]$ функции, удовлетворяющие неравенствам

$$a \le x_1(y) \le x_2(y) \le b \quad \text{при} \quad c \le y \le d \quad (\text{см. рис. } 18.1).$$

Тогда функция

$$g(y) = \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$$

дифференцируема на сегменте $[c,d]$ и справедливо равенство

$$g'(y) = \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx + f(x_2(y),y)\cdot x_2'(y) - f(x_1(y),y)\,x_1'(y). \quad (18.2)$$

Доказательство. Введём функцию

$$\Phi(y,u,v)=\int_u^v f(x,y)\,dx,\quad c\le y\le d,\ a\le u\le b,\ a\le v\le b.$$

Вычислим её частные производные:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\int_u^v\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx \quad (\text{в силу теоремы } 3),$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}=-f(u,y),\ \frac{\partial\Phi}{\partial v}=f(v,y).$$

Заметим, что эти частные производные являются непрерывными функциями аргументов y,u,v. Поэтому $\Phi(y,u,v)$ — дифференцируемая функция.

Положив $u=x_1(y)$, $v=x_2(y)$, получим сложную функцию аргумента y:

$$\Phi(y,x_1(y),x_2(y))=\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}f(x,y)\,dx=g(y),\quad c\le y\le d.$$

Эта функция дифференцируема (по теореме о дифференцируемости сложной функции), и её производная вычисляется по формуле:

$$g'(y)=\left[\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial u}\cdot x_1'(y)+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\cdot x_2'(y)\right]_{\substack{u=x_1(y)\\ v=x_2(y)}}=$$

$$=\left[\int_u^v\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx-f(u,y)\,x_1'(y)+f(v,y)\,x_2'(y)\right]_{\substack{u=x_1(y)\\ v=x_2(y)}}=$$

$$=\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx+f(x_2(y),y)\,x_2'(y)-f(x_1(y),y)\,x_1'(y).$$

Полученное равенство для $g'(y)$ совпадает с (18.2). Теорема 3' доказана.

18.2 Несобственные интегралы первого рода, зависящие от параметра. Признаки равномерной сходимости

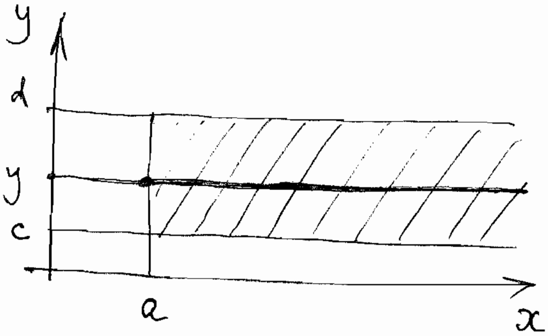

Рис. 18.2

Пусть функция $f(x,y)$ определена в полуполосе $\{(x,y):\ x \geq a,\ c \leq y \leq d\}$, (рис. 18.2) и пусть для каждого значения y из сегмента $[c,d]$ сходится несобственный интеграл первого рода $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$. Тогда на сегменте $[c,d]$ определена функция

$$F(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx,$$

которая называется <u>несобственным интегралом первого рода, зависящим от параметра y.</u>

<u>Замечание</u>. Параметр y может изменяться не на сегменте, а на полупрямой ($y \geq c$ или $y \leq c$), или на всей числовой прямой ($-\infty < y < \infty$), или на каком-то другом множестве.

<u>Пример</u>. Рассмотрим несобственный интеграл

$$F(y) = \int\limits_0^\infty y e^{-xy}\,dx$$

на полупрямой $y \geq 0$. Если $y=0$, то $F(0)=0$, а если $y>0$, то $F(y) = \lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_0^A y e^{-xy}\,dx = \lim\limits_{A\to\infty}(1-e^{-Ay}) = 1$.

Итак, данный несобственный интеграл сходится $\forall y \geq 0$, причём

$$F(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y=0, \\ 1, & \text{если } y>0. \end{cases}$$

Обратим внимание на тот факт, что подынтегральная функция $f(x,y) = ye^{-xy}$ непрерывна в квадранте

$\{(x,y): x\geq 0, y\geq 0\}$, а функция $F(y)=\int\limits_0^\infty ye^{-xy}dx$ разрывна в точке $y=0$. В связи с этим отметим, что:

1) для собственного интеграла $F(y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx$ непрерывность $f(x,y)$ гарантировала непрерывность функции $F(y)$ [теорема 1];

2) с аналогичной ситуацией мы встречались при изучении функциональных рядов: сумма ряда, членами которого являются непрерывные функции, может быть разрывной функцией.

В теории функциональных рядов и последовательностей важную роль играло понятие равномерной сходимости. Например (как мы знаем), если члены ряда — непрерывные функции и ряд сходится равномерно на некотором промежутке, то и сумма ряда — непрерывная функция на этом промежутке.

Введём понятие равномерной сходимости для несобственных интегралов первого рода, зависящих от параметра.

Вставка (стр. 9а).

<u>Определение.</u> Несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ называется сходящимся равномерно по параметру y на промежутке Y, если он сходится $\forall y\in Y$ и если $\forall \varepsilon>0\ \exists A\ (A\geq a)$, такое, что $\forall A'>A$ и $\forall y\in Y$ выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_{A'}^\infty f(x,y)dx\right|<\varepsilon. \qquad (18.3)$$

Главным моментом в этом определении является то, что по заданному ε найдётся "нужное" A, одно и то же для всех y из промежутка Y. Неравенство (18.3) означает, что "остаток" несобственного интеграла, т.е. $\int\limits_a^\infty - \int\limits_a^{A'} = \int\limits_{A'}^\infty f(x,y)dx$, Пусть несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ сходится для любого y из промежутка Y. Это означает, что $\forall y \in Y$ существует предел

$$\lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x,y)\,dx,$$

т.е. $\forall \varepsilon>0\ \exists A>a$, такое, что $\forall A'>A$ выполняется неравенство

$$\left| \int_a^\infty f(x,y)\,dx - \int_a^{A'} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon$$

или, что то же самое,

$$\left| \int_{A'}^\infty f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon.$$

При этом число A может зависеть не только от ε, но и от y, и может случиться так, что не существует общего числа A для всех y из промежутка Y. Если же найдётся общее для всех y число A, то мы будем говорить, что несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ сходится равномерно по параметру y на промежутке Y.

Таким образом, мы приходим к следующему определению.

можно сделать меньше (по абсолютной величине) любого наперёд заданного положительного числа ε сразу для всех $y \in Y$, если взять A' достаточно большим.

Вернёмся к рассмотренному примеру:

$$F(y) = \int_0^\infty y e^{-xy}\, dx\,, \quad y \geq 0,$$

и исследуем этот несобственный интеграл на равномерную сходимость. С этой целью рассмотрим для этого интеграла неравенство (18.3) при $y > 0$ и $0 < \varepsilon < 1$:

$$\left| \int_{A'}^\infty y e^{-xy}\, dx \right| = e^{-A'y} < \varepsilon. \qquad (18.4)$$

Это неравенство выполняется, если $A' > -\frac{\ln \varepsilon}{y}$. Так как $-\frac{\ln \varepsilon}{y} \to +\infty$ при $y \to +0$, то для заданного ε $(0 < \varepsilon < 1)$ не существует числа A (одного и того же для всех $y > 0$), такого, чтобы $\forall A' > A$ и $\forall y > 0$ выполнялось неравенство (18.4). Это означает, что данный несобственный интеграл сходится неравномерно по параметру y на полупрямой $(0, \infty)$ (и также на полупрямой $[0, \infty)$).

<u>Задание.</u> 1. Сформулируйте определение неравномерной сходимости по параметру y несобственного интеграла $\int_a^\infty f(x, y)\, dx$ (т.е. отрицание равномерной сходимости) и примените его для установления неравномерной сходимости при $y > 0$ рассмотренного несобственного интеграла.

2. Докажите (на основе определения равномерной сходимости), что этот несобственный интеграл сходится равномерно по параметру y на любой полупрямой $[\delta, \infty)$, где $\delta > 0$.

Перейдём к признакам равномерной сходимости несобственных интегралов.

Теорема 4 (критерий Коши равномерной сходимости несобственных интегралов первого рода, зависящих от параметра).

Пусть несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ сходится при каждом y из промежутка Y. Для того чтобы этот интеграл сходился равномерно по параметру y на промежутке Y, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon>0\ \exists A\geq a$, такое, что $\forall A'>A$, $\forall A''>A$ и $\forall y\in Y$ выполнялось неравенство

$$\left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon. \qquad (18.5)$$

Доказательство. 1) Необходимость. Пусть несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ сходится равномерно по параметру y на промежутке Y. Тогда (согласно определению равномерной сходимости) $\forall \varepsilon>0\ \exists A$, такое, что если $A'>A$ и $A''>A$, то $\forall y\in Y$ будут выполнены неравенства

$$\left|\int\limits_{A'}^{\infty} f(x,y)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \left|\int\limits_{A''}^{\infty} f(x,y)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Используя эти неравенства, получаем:

$$\left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x,y)\,dx\right|=\left|\int\limits_{A'}^{\infty} f(x,y)\,dx-\int\limits_{A''}^{\infty} f(x,y)\,dx\right|\leq$$

$$\leq\left|\int\limits_{A'}^{\infty} f(x,y)\,dx\right|+\left|\int\limits_{A''}^{\infty} f(x,y)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Итак, $\forall \varepsilon>0\ \exists A$, такое, что $\forall A'>A$, $\forall''>A$ и $\forall y\in Y$ выполнено неравенство (18.5). Тем самым утверждение о необходимости (условия (18.5)) доказано.

2) Достаточность. Пусть $\forall \varepsilon>0\ \exists A$, такое, что $\forall A'>A$, $\forall A''>A$ и $\forall y \in Y$ выполняется неравенство (18.5). Перейдем в этом неравенстве к пределу при $A''\to\infty$. Получим, что $\forall A'>A$ и $\forall y\in Y$ выполняется неравенство

$$\left|\int_{A'}^{\infty} f(x,y)\,dx\right| \le \varepsilon,$$

а это и означает, что несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно по параметру y на промежутке Y. Теорема 4 доказана.

<u>Теорема 5 (мажорантный признак Вейерштрасса).</u>

Пусть функция $f(x,y)$ определена в области $G=\{(x,y): x\ge a, y\in Y$, где Y — некоторый промежуток$\}$; $\forall y\in Y$ функция $f(x,y)$ интегрируема по x на любом сегменте вида $[a,A]$; в области G выполняется неравенство $|f(x,y)|\le g(x)$, где $g(x)$ — такая функция, что несобственный интеграл $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ сходится.

Тогда несобственные интегралы $\int_a^{\infty} f(x,y)\,dx$ и $\int_a^{\infty} |f(x,y)|\,dx$ сходятся равномерно по параметру y на промежутке Y.

<u>Доказательство.</u> Зададим произвольное $\varepsilon>0$. Согласно критерию Коши для несобственных интегралов первого рода $\exists A>a$, такое, что $\forall A'>A$ и $\forall A''>A$ будет выполнено неравенство

$$\left|\int_{A'}^{A''} g(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

а так как $|f(x,y)| \le g(x)$, то $\forall y \in Y$ будут выполнены неравенства

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,y)\,dx\right| \le \left|\int_{A'}^{A''} |f(x,y)|\,dx\right| \le \left|\int_{A'}^{A''} g(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Эти неравенства означают, что несобственные интегралы $\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ и $\int_a^\infty |f(x,y)|\,dx$ сходятся равномерно по параметру y на промежутке Y. Теорема 5 доказана.

<u>Задание.</u> Докажите, используя признак Вейерштрасса, что несобственный интеграл $\int_0^\infty y e^{-xy}\,dx$ сходится равномерно по параметру y на полупрямой $[\delta \le y < \infty)$, где $\delta > 0$.

Следующий признак равномерной сходимости относится к (несобственным) интегралам вида

$$\int_a^\infty f(x,y)\,g(x,y)\,dx. \qquad (18.6).$$

<u>Теорема 6 (признак Дирихле – Абеля).</u>

Пусть выполнены условия:

1) функция $f(x,y)$ непрерывна в области $G = \{(x,y): x \ge a,\ y \in Y$, где Y – некоторый промежуток$\}$ и имеет в этой области ограниченную первообразную $F(x,y)$ по переменной x $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f(x,y),\ |F(x,y)| \le M,\ (x,y) \in G\right)$;

2) функция $g(x,y)$ при каждом значении y из промежутка Y является невозрастающей функцией аргумента x

на полупрямой $[a,\infty)$; $g(x,y)$ стремится к нулю при $x\to\infty$ равномерно относительно переменной $y\in Y$ (т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists A>a$, такое, что $\forall x>A$ и $\forall y\in Y$: $|g(x,y)|<\varepsilon$); $g(x,y)$ имеет непрерывную в области G частную производную $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$.

Тогда несобственный интеграл (18.6) сходится равномерно по параметру y на промежутке Y.

Доказательство теоремы проводится в точности так же, как и доказательство теоремы о признаке Дирихле – Абеля для несобственного интеграла вида $\int\limits_a^\infty f(x)g(x)dx$ (теорема 3 в § 17.2), но только теперь нужно воспользоваться критерием Коши равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра (теорема 4 данного параграфа).

Задание. Проведите доказательство теоремы 6.

Пример. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{\sin xy}{x}\,dx.$$

Он сходится $\forall y\in(-\infty,\infty)$: при $y=0$ он равен нулю, при $y\neq 0$ сходится по признаку Дирихле – Абеля (теорема 3 из § 17.2). Докажем, что этот интеграл сходится равномерно по параметру y на полупрямой $[y_0,\infty)$, где $y_0>0$.

Положим $f(x,y)=\sin xy$, $g(x,y)=\frac{1}{x}$.

Функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию 1) теоремы 6: она непрерывна в области $G=\{(x,y): x\geq 1,\ y\geq y_0\}$ и имеет в этой области ограниченную первообразную $F(x,y)$ по переменной x: $F(x,y)=-\frac{\cos xy}{y}$, $|F(x,y)|\leq\frac{1}{y_0}$.

Функция $g(x,y)$ удовлетворяет условию 2) теоремы 6: $g(x,y)=\frac{1}{x}$ – убывающая функция на полупрямой $[1,\infty)$; $g(x,y)\to 0$ при $x\to\infty$, причём это стремление равномерно по y, поскольку $g(x,y)$ не зависит от y; $g(x,y)$

имеет непрерывную производную $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}$.

Следовательно, по признаку Дирихле-Абеля данный несобственный интеграл сходится равномерно по параметру y на полупрямой $[y_0, \infty)$.

Задание. Докажите (с помощью критерия Коши), что этот интеграл сходится неравномерно по y на всей прямой!

18.3 О непрерывности, интегрировании и дифференцировании по параметру несобственных интегралов первого рода, зависящих от параметра

Обратимся ещё раз к примеру, рассмотренному в § 18.2:

$$F(y) = \int_0^\infty y e^{-xy}\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } y=0, \\ 1, & \text{если } y>0. \end{cases}$$

В этом примере подынтегральная функция $f(x,y) = ye^{-xy}$ непрерывна в квадранте $\{(x,y): x \geq 0, y \geq 0\}$, а функция $F(y)$ (несобственный интеграл, зависящий от параметра y) разрывна в точке $y=0$. Как мы установим, это обусловлено неравномерной сходимостью несобственного интеграла по параметру y.

Теорема 7 (о непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра)

Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в полуполосе $\{(x,y): x \geq a,\ c \leq y \leq d\}$, и пусть несобственный интеграл $F(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$ сходится равномерно по параметру y на сегменте $[c,d]$. Тогда функция $F(y)$ непрерывна на сегменте $[c,d]$.

Доказательство. Для каждого натурального числа n введём функцию

$$F_n(y) = \int_a^{a+n} f(x,y)\,dx.$$

Для каждого n функция $F_n(y)$ является собственным интегралом, зависящим от параметра y. По теореме 1 каждая функция $F_n(y)$ непрерывна на сегменте $[c,d]$.

Рассмотрим функциональную последовательность $\{F_n(y)\}$ и докажем, что $F_n(y) \rightrightarrows F(y)$ на сегменте $[c,d]$.

Отсюда последует (в силу теоремы 15 из § 16.6), что функция $F(y)$ непрерывна на сегменте $[c,d]$.

По условию несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ сходится равномерно по параметру y на сегменте $[c,d]$. Это означает, что $\forall \varepsilon>0\ \exists A$ такое, что $\forall A'>A$ и $\forall y\in[c,d]$ выполняется неравенство $\left|\int\limits_{A'}^\infty f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon$.

Возьмём номер N такой, что $a+N\geqslant A$. Тогда $\forall n>N$ и $\forall y\in[c,d]$ будет выполнено неравенство

$$\left|\int\limits_{a+n}^\infty f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon. \qquad (18.7)$$

Поскольку $\int\limits_{a+n}^\infty f(x,y)\,dx$ можно представить в виде

$$\int\limits_{a+n}^\infty f(x,y)\,dx = \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx - \int\limits_a^{a+n} f(x,y)\,dx = F(y)-F_n(y),$$

то неравенство (18.7) можно записать так:

$$|F_n(y)-F(y)|<\varepsilon \quad \forall n>N \text{ и } \forall y\in[c,d].$$

Это и означает, что $F_n(y)\rightrightarrows F(y)$ на сегменте $[c,d]$, что и требовалось доказать.

<u>Теорема 8 (об интегрировании несобственного интеграла по параметру)</u>

Если выполнены условия теоремы 7, то функция $F(y)=\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ интегрируема на сегменте $[c,d]$, и справедливо равенство

$$\int\limits_c^d F(y)\,dy = \int\limits_c^d \Big[\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx\Big]dy = \int\limits_a^\infty \Big[\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\Big]dx \quad (18.8).$$

(т.е. можно изменять порядок интегрирования).

<u>Доказательство.</u> По теореме 7 функция $F(y)$ непрерывна на сегменте $[c,d]$ и, следовательно, интегрируема на этом сегменте. Несобственный интеграл в правой части равенства (18.8) – это предел $\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_a^A\Big[\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\Big]dx$ (по определению несобственного интеграла первого рода), а так как в повторном интеграле, стоящем под знаком предела, можно изменить порядок интегрирования (в силу теоремы 2), то для доказательства равенства (18.8) нужно доказать, что

$$\lim_{A\to\infty}\int\limits_c^d \Big[\int\limits_a^A f(x,y)\,dx\Big]dy = \int\limits_c^d \Big[\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx\Big]dy$$

или, что то же самое,

$$\lim_{A\to\infty}\int\limits_c^d \Big[\int\limits_a^A f(x,y)\,dx - \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx\Big]dy = 0,$$

т.е.

$$\lim_{A\to\infty}\int\limits_c^d \Big[\int\limits_A^\infty f(x,y)\,dx\Big]dy = 0. \qquad (18.9)$$

Зададим произвольное $\varepsilon>0$. Так как несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ сходится равномерно по (параметру) y на сегменте $[c,d]$, то $\exists A$, такое, что $\forall A'>A$ и $\forall y\in[c,d]$ будет выполнено неравенство $\Big|\int\limits_{A'}^\infty f(x,y)\,dx\Big| < \frac{\varepsilon}{d-c}$. Используя это неравенство, получаем, что $\forall A'>A$:

$$\Big|\int\limits_c^d \Big[\int\limits_{A'}^\infty f(x,y)\,dx\Big]dy\Big| \le \frac{\varepsilon}{d-c}\int\limits_c^d dy = \varepsilon,$$

а это и означает справедливость равенства (18.9), что и требовалось доказать.

Замечание. Если параметр y изменяется на полупрямой $y \ge c$, то можно поставить вопрос об изменении порядка интегрирования в повторном интеграле $\int_c^\infty \left[\int_a^\infty f(x,y)\,dx\right]dy$, т.е. вопрос о том, при каких условиях справедливо равенство

$$\int_c^\infty \left[\int_a^\infty f(x,y)\,dx\right]dy = \int_a^\infty \left[\int_c^\infty f(x,y)\,dy\right]dx.$$

В этом равенстве все четыре интеграла — несобственные.

Чтобы это равенство выполнялось, нужно на функцию $f(x,y)$ наложить более сильные требования, чем в теореме 8 (см. [Ильин, Позняк]).

Теорема 9 (о дифференцировании несобственного интеграла по параметру)

Пусть выполнены условия:

1) функция $f(x,y)$ и её частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ непрерывны в полуполосе $\{(x,y):\ x \ge a,\ c \le y \le d\}$;

2) несобственный интеграл $F(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$ сходится $\forall y \in [c,d]$;

3) несобственный интеграл $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ сходится равномерно по параметру y на сегменте $[c,d]$.

Тогда функция $F(y)$ дифференцируема на сегменте $[c,d]$ и справедливо равенство

$$F'(y) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx,$$

т.е. $\frac{d}{dy}\int_a^\infty f(x,y)\,dx = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$.

Это равенство означает, что несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x,y)dx$, зависящий от параметра y, можно дифференцировать по параметру под знаком интеграла.

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим функциональную последовательность $\{F_n(y)\}$, где

$$F_n(y) = \int_a^{a+n} f(x,y)\,dx.$$

В силу условия 2) $\{F_n(y)\} \to F(y)$ при $n\to\infty$ на сегменте $[c,d]$, а по теореме 3 каждая функция $F_n(y)$ имеет непрерывную производную на сегменте $[c,d]$, причём $F_n'(y) = \int_a^{a+n} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$.

В силу условия 3) $F_n'(y) \rightrightarrows \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ на сегменте $[c,d]$ (это доказывается так же, как была доказана равномерная сходимость последовательности $\{F_n(y)\}$ к $F(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx$ в теореме 7).

Итак, для функциональной последовательности $\{F_n(y)\}$ выполнены все условия теоремы 17 из § 16.6. Согласно этой теореме, функция $F(y)$ дифференцируема на сегменте $[c,d]$ и имеет место равенство $F'(y) = \lim\limits_{n\to\infty} F_n'(y) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$. Теорема 9 доказана.

<u>Замечание</u> (о несобственных интегралах второго рода, зависящих от параметра).

Пусть функция $f(x,y)$ определена в области $\{(x,y): a \le x \le b, y \in Y$, где Y - некоторый промежуток$\}$; при каждом $y \in Y$ функция $f(x,y)$ не ограничена в окрестности точки $x = a$, но ограничена на любом сегменте $[a+\delta, b]$, где $a < a+\delta < b$.

Пример такой функции: $f(x,y) = \dfrac{g(x,y)}{(x-a)^\alpha}$, где $g(x,y)$ удовлетворяет неравенствам $0 < c_1 \le g(x,y) \le c_2$, $\alpha > 0$.

При указанном условии $\forall y \in Y$ интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ является несобственным интегралом второго рода. Если $\forall y \in Y$ этот несобственный интеграл сходится, то на промежутке Y определена функция $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$, которая называется <u>несобственным интегралом второго рода, зависящим от параметра y</u>.

<u>Определение</u>. Несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ называется <u>сходящимся равномерно по параметру y</u> на промежутке Y, если он сходится для любого $y \in Y$ и если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, такое, что $\forall \delta' \in (0, \delta)$ и $\forall y \in Y$ выполняется неравенство

$$\left| \int\limits_a^{a+\delta'} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon .$$

Главным моментом в этом определении является то, что δ — одно и то же для всех $y \in Y$.

Для несобственных интегралов второго рода, зависящих от параметра, имеют место теоремы, аналогичные теоремам для несобственных интегралов первого рода, зависящих от параметров.

18.4 Вычисление несобственных интегралов с помощью дифференцирования по параметру

Рассмотрим конкретный пример: вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ (в точке $x=0$ считаем подынтегральную функцию 0 равной 1).

Мы знаем, что этот интеграл сходится, и задача теперь состоит в том, чтобы найти его значение.

С этой целью рассмотрим несобственный интеграл первого рода, зависящий от параметра y:

$$F(y) = \int\limits_0^\infty e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\,dx, \quad y \geq 0.$$

Заметим, что интересующий нас интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ равен $F(0)$. Забегая вперёд, отметим, что с помощью дифференцирования по параметру y нам удастся получить более удобное выражение для $F(y)$, из которого мы и найдём $F(0)$.

Разобъём наше вычисление на несколько пунктов.

а) Прежде всего докажем, что $F(y)$ – непрерывная функция при $y \geq 0$.

Представим $F(y)$ в виде

$$F(y) = F_1(y) + F_2(y),$$

где $F_1(y) = \int\limits_0^1 e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\,dx$, $F_2(y) = \int\limits_1^\infty e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\,dx$.

Функция $F_1(y)$ является собственным интегралом, зависящим от параметра y. Так как подынтегральная функция

$$f(x,y) = e^{-yx}\frac{\sin x}{x}$$

непрерывна в любом прямоугольнике $Q = \{(x,y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq y_0\}$, то по теореме 1 функция $F_1(y)$ непрерывна на любом сегменте $[0; y_0]$ и, следовательно, непрерывна на полупрямой $y \geq 0$.

Для доказательства непрерывности по параметру y несобственного интеграла $F_2(y)$ достаточно (согласно теореме 7) доказать, что этот несобственный интеграл сходится равномерно по параметру y на полупрямой $y \geq 0$. Воспользуемся признаком Дирихле-Абеля (теорема 6). С этой целью положим $\tilde{f}(x,y) = \sin x$, $g(x,y) = \frac{e^{-yx}}{x}$. Функция $\tilde{f}(x,y)$ - непрерывная и имеет ограниченную первообразную $(-\cos x)$; функция $g(x,y)$ при каждом $y \geq 0$ является убывающей функцией аргумента x на полупрямой $x \geq 1$, $g(x,y) \to 0$ при $x \to \infty$ равномерно относительно y из промежутка $[0 \leq y < \infty)$ (это следует из неравенства $g(x,y) \leq \frac{1}{x}$), и, наконец, $g(x,y)$ имеет непрерывную в области $\{x \geq 1, y \geq 0\}$ частную производную $\frac{\partial g}{\partial x} = -e^{-yx}\left(\frac{y}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$ (отметим, что разбиение $F(y)$ на два слагаемых $F_1(y)$ и $F_2(y)$ было сделано именно для того, чтобы обеспечить непрерывность частной производной $\frac{\partial g}{\partial x}$: в области $\{x \geq 1, y \geq 0\}$, связанной с несобственным интегралом $F_2(y)$, частная производная $\frac{\partial g}{\partial x}$ непрерывна, а в исходной области $\{x \geq 0, y \geq 0\}$ $\frac{\partial g}{\partial x}$ разрывна при $x = 0$).

Итак, функции $\tilde{f}(x,y)$ и $g(x,y)$ удовлетворяют условиям теоремы 6 и, следовательно, по признаку Дирихле-Абеля несобственный интеграл $F_2(y)$ сходится равномерно по параметру y на полупрямой $y \geq 0$, что обеспечивает непрерывность $F_2(y)$, а, значит, и $F(y)$ при $y \geq 0$.

б) Докажем теперь, что функция $F(y)$ является дифференцируемой при $y>0$, и её производную $F'(y)$ можно вычислять путём дифференцирования под знаком интеграла.

Возьмём произвольный сегмент $y_0 \le y \le y_1$, где $y_0>0$, и рассмотрим функцию $F'(y)$ на сегменте $[y_0, y_1]$. Для неё выполнены все условия теоремы 9:

1) $f(x,y) = e^{-yx}\frac{\sin x}{x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -e^{-yx}\sin x$ непрерывны в полуполосе $\{(x,y): x\geq 0,\ y_0\le y\le y_1\}$;

2) несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty f(x,y)\,dx$ сходится $\forall y\in[y_0,y_1]$ (это доказано в п. а));

3) несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx = -\int\limits_0^\infty e^{-yx}\sin x\,dx$ сходится равномерно по параметру y на сегменте $[y_0, y_1]$ (это легко доказывается с помощью признака Вейерштрасса: $|e^{-yx}\sin x| \le e^{-y_0 x} := g(x)$, а несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty g(x)\,dx$ сходится — он равен $\frac{1}{y_0}$).

По теореме 9 функция $F(y)$ дифференцируема на сегменте $[y_0, y_1]$, причём

$$F'(y) = \int\limits_0^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx = -\int\limits_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx. \quad (18.10)$$

Так как $\forall y>0$ (можно указать сегмент) $[y_0, y_1]$, такой, что $y_0>0$ и $y\in[y_0,y_1]$, то равенство (18.10) справедливо для любого $y>0$.

в) Вычислим несобственный интеграл (18.10). По определению $\int\limits_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx = \lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_0^A e^{-xy}\sin x\,dx.$

Функция $\dfrac{-e^{-yx}(y\sin x+\cos x)}{1+y^2}$ является первообразной для функции $e^{-xy}\sin x$ по переменной x для любого $y>0$. Поэтому, применяя формулу Ньютона – Лейбница, получаем:

$$\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-xy}\sin x\,dx=\lim_{A\to\infty}\left.\frac{-e^{-yx}(y\sin x+\cos x)}{1+y^2}\right|_{x=0}^{x=A}=\frac{1}{1+y^2},$$

и, следовательно,

$$F'(y)=-\frac{1}{1+y^2}\quad\text{при } y>0. \qquad (18.11)$$

2) Итак, мы вычислили несобственный интеграл (18.10). В этом и состоит суть метода: несобственный интеграл $F(y)$ не вычисляется непосредственно, но, как оказалось, нетрудно вычислить несобственный интеграл $F'(y)$.

Из (18.11) следует, что $\left[F(y)=-\operatorname{arctg}y+C \text{ при } y>0.(18.12)\right]$

Для определения неизвестной пока постоянной C найдём $\lim\limits_{y\to+\infty}F(y)$, для чего воспользуемся оценкой $|f(x,y)|\leq$

$\leq e^{-yx}\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\leq e^{-yx}$, в силу которой

$$|F(y)|\leq\int_0^\infty e^{-yx}dx=\frac{1}{y}.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{y\to+\infty}F(y)=0$. Переходя к пределу при $y\to+\infty$ в равенстве (18.12), получаем $0=-\frac{\pi}{2}+C$, откуда $C=\frac{\pi}{2}$. Таким образом,

$$F(y)=\int_0^\infty e^{-yx}\frac{\sin x}{x}dx=-\operatorname{arctg}y+\frac{\pi}{2}\text{ при } y>0,$$

а поскольку функция $F(y)$ непрерывна при $y\geq0$ (это доказано в п. а)), то $F(0)=\lim\limits_{y\to0}F(y)=\frac{\pi}{2}$.

Итак, $\boxed{F(0)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}.}$

Рассмотрим теперь функцию

$$I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx.$$

Если $\alpha=0$, то $I(0)=0$.

Если $\alpha>0$, то, сделав замену переменной $\alpha x=t$, получим:

$$I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}.$$

Так как $I(\alpha)$ – нечётная функция $(I(-\alpha)=-I(\alpha))$, то $I(\alpha)=-\frac{\pi}{2}$, если $\alpha<0$.

Таким образом,

$$I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & \text{если } \alpha>0,\\ 0, & \text{если } \alpha=0,\\ -\frac{\pi}{2}, & \text{если } \alpha<0.\end{cases}$$

Функция $I(\alpha)$ называется *разрывным множителем Дирихле*. Через эту функцию можно выразить известную функцию $\operatorname{Sign}\alpha$:

$$\operatorname{Sign}\alpha=\frac{2}{\pi}I(\alpha)=\begin{cases}1, & \text{если } \alpha>0,\\ 0, & \text{если } \alpha=0,\\ -1, & \text{если } \alpha<0.\end{cases}$$

18.5 Эйлеровы интегралы

Под этим названием в математическом анализе выступают две функции:

$$\Gamma(p)=\int^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}\,dx \quad \text{– "гамма-функция" аргумента } p, \quad (18.13)$$

это несобственный интеграл, зависящий от параметра p;

$$B(p,q)=\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \quad \text{– "бета-функция" аргументов } p \text{ и } q, \quad (18.14)$$

это интеграл, зависящий от параметров p и q.

Мы рассмотрим некоторые свойства этих функций.

Свойства Γ-функции.

1) Область определения. Представим функцию $\Gamma(p)$ в виде суммы двух слагаемых

$$\Gamma(p) = \Gamma_1(p) + \Gamma_2(p),$$

где $\Gamma_1(p) = \int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx$, $\Gamma_2(p) = \int_1^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$.

Если $p \geq 1$, то $\Gamma_1(p)$ является собственным интегралом. Если же $p < 1$, то $\Gamma_1(p)$ – несобственный интеграл второго рода по полусегменту $(0; 1]$, точка $x=0$ является особой точкой подынтегральной функции, и интеграл сходится, если $1-p<1$, т.е. $p>0$.

Функция $\Gamma_2(p)$ является несобственным интегралом первого рода, этот интеграл сходится для любого p (см. раздел 17.1).

Таким образом, функция $\Gamma(p)$, заданная формулой (18.13), определена на полупрямой $p>0$.

2) Непрерывность. Возьмём произвольный сегмент $[p_1 \leq p \leq p_2]$, где $p_1 > 0$, и рассмотрим сначала функцию $\Gamma_2(p)$. Подынтегральная функция $f(x,p) = x^{p-1} e^{-x}$ непрерывна в полуполосе $\{(x,p):\ x \geq 1,\ p_1 \leq p \leq p_2\}$, а несобственный интеграл $\Gamma_2(p)$ сходится равномерно по параметру p на сегменте $[p_1; p_2]$ по признаку Вейерштрасса.

(В качестве мажорантной функции можно взять функцию $g(x) = x^{p_2-1}e^{-x}$, для которой несобственный интеграл $\int_1^\infty g(x)\,dx$ сходится). Следовательно, по теореме 7 функция $\Gamma_2(p)$ непрерывна на сегменте $[p_1, p_2]$.

Если $p_1 \geq 1$, то функция $\Gamma_1(p)$ является собственным интегралом от непрерывной функции $f(x,p) = x^{p-1}e^{-x}$, поэтому $\Gamma_1(p)$ непрерывна на сегменте $[p_1, p_2]$ по теореме 1. Если же $p_1 < 1$, то для $p \in [p_1, 1)$ функция $\Gamma(p)$ является несобственным интегралом второго рода. Этот несобственный интеграл сходится равномерно по параметру p на промежутке $p_1 \leq p < 1$ (это можно доказать с помощью признака Вейерштрасса для несобственных интегралов второго рода, взяв в качестве мажорантной функцию $g(x) = x^{p_1-1}e^{-x}$, для которой интеграл $\int_0^1 g(x)\,dx$ сходится), поэтому $\Gamma_1(p)$ — непрерывная функция на любом сегменте $[p_1, p_2]$, где $p_1 > 0$.

Итак, функция $\Gamma(p) \overset{= \Gamma_1(p) + \Gamma_2(p)}{}$ непрерывна на любом сегменте $[p_1, p_2]$, где $p_1 > 0$, а поскольку для любого $p > 0$ можно взять сегмент $[p_1, p_2]$ такой, что $0 < p_1 < p < p_2$, то функция $\Gamma(p)$ непрерывна $\forall p > 0$, т.е. непрерывна на полупрямой $p > 0$.

3) Дифференцируемость. С помощью теоремы 9 и аналогичной теоремы для несобственных интегралов второго рода нетрудно доказать, что функции $\Gamma_2(p)$ и $\Gamma_1(p)$ дифференцируемы любое число раз по параметру p на полупрямой $p>0$ и их производные можно вычислять путем дифференцирования под знаком интеграла. Для производной n-го порядка функции $\Gamma(p)$ получается формула

$$\Gamma^{(n)}(p)=\int_0^{\infty}x^{p-1}(\ln x)^n e^{-x}dx.$$

Задание. Опираясь на теорему 9, докажите дифференцируемость функции $\Gamma_2(p)$.

4) Рекуррентная формула. Запишем выражение для $\Gamma(p+1)$ и применим к интегралу формулу интегрирования по частям, считая, что $p>0$ (можно доказать, что в данном случае эта формула применима):

$$\Gamma(p+1)=\int_0^{+\infty}x^p e^{-x}dx=-\int_0^{+\infty}x^p de^{-x}=-x^p e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}px^{p-1}e^{-x}dx=p\Gamma(p).$$

Итак, для $p>0$ справедливо равенство

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p).$$

Это равенство называется формулой приведения. Если $n-1<p\le n$, где n – натуральное число, то, применяя формулу приведения несколько раз, получим:

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)=p(p-1)\Gamma(p-1)=\dots=p(p-1)\cdots(p-n+1)\Gamma(p-n+1) \quad (18.15)$$

Так как $0<p-n+1\le 1$, то равенство (18.15) даёт возможность свести вычисление $\Gamma(p)$ для любого $p>1$ к вычислению $\Gamma(p)$ для $0<p\le 1$.

Полагая в равенстве (18.15) $p = n$, где n - натуральное число, и учитывая, что $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$, приходим к замечательной формуле

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\cdots 1 = n!$$

5) <u>График функции $\Gamma(p)$.</u> Запишем формулу приведения в виде $\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}$. Если $p \to +0$, то $\Gamma(p+1) \to \Gamma(1) = 1$ и, следовательно, $\Gamma(p) \to +\infty$ при $p \to +0$, причём функция $\Gamma(p)$ ведёт себя при $p \to +0$ так же, как функция $\frac{1}{p}$. Более детальное исследование показывает, что график функции $\Gamma(p)$ имеет вид, представленный на рис. 18.3.

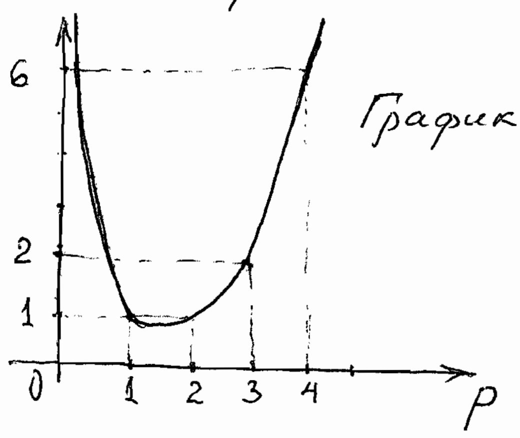

График функции $\Gamma(p)$.

Рис. 18.3

6) <u>Функция $\Gamma(p)$ при $p<0$.</u> Как уже было отмечено, при $p \le 0$ несобственный интеграл (18.13) расходится и поэтому формула (18.13) не может служить определением функции $\Gamma(p)$ для $p<0$. Но можно определить $\Gamma(p)$ для $p<0$ иначе, а именно, используя рекуррентную формулу

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}. \quad (18.16)$$

Пусть $-1<p<0$. Тогда $0<p+1<1$ и, следовательно, правая часть в (18.16) имеет смысл. Определим функцию $\Gamma(p)$ для значений p из интервала $(-1; 0)$ формулой (18.16).

Если $-2 < p < -1$, то $-1 < p+1 < 0$, и так как функция $\Gamma(p)$ уже определена для значений p из интервала $(-1; 0)$, то правая часть в (18.16) имеет смысл и, следовательно, формула (18.16) позволяет определить функцию $\Gamma(p)$ для значений p из интервала $(-2; -1)$.

Продолжая этот процесс, мы определим функцию $\Gamma(p)$ с помощью формулы (18.16) на любом интервале $(-n, -(n-1))$, где n - натуральное число.

<u>Задание</u>. Изобразите (качественно) график функции $\Gamma(p)$ для $p < 0$.

7) <u>Некоторые другие соотношения для функции $\Gamma(p)$.</u>

Можно доказать, что для $0 < p < 1$ справедливо равенство (<u>формула дополнения</u>) (см. [Будак, Фомин]).

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

Отметим также, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx = \sqrt{\pi}$ (для вычисления интеграла сделайте замену переменной $x = t^2$; тот же результат можно получить по формуле дополнения, положив $p = \frac{1}{2}$).

Свойства B-функции.

1) Область определения. Представим функцию $B(p,q)$ в виде суммы двух слагаемых

$$B(p,q) = B_1(p,q) + B_2(p,q),$$

где

$$B_1(p,q) = \int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \quad B_2(p,q) = \int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

Если $p \geq 1$ и $q \geq 1$, то $B_1(p,q)$ и $B_2(p,q)$ являются собственными интегралами — непрерывными функциями параметров p и q. Если же $p<1$, то $B_1(p,q)$ является несобственным интегралом второго рода по полусегменту $(0, \frac{1}{2}]$, точка $x=0$ является особой точкой подынтегральной функции, и интеграл сходится, если $1-p<1$, т.е. $p>0$. Аналогично, если $q<1$, то $B_2(p,q)$ является несобственным интегралом второго рода по полусегменту $[\frac{1}{2}, 1)$, $x=1$ — особая точка подынтегральной функции, и интеграл сходится, если $q>0$. Таким образом, функция $B(p,q)$ определена в квадранте $\{p>0, q>0\}$.

2) Симметрия. Справедливо равенство

$$B(p,q) = B(q,p).$$

Оно получается с помощью замены переменной $x=1-t$:

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = -\int_1^0 (1-t)^{p-1}t^{q-1}dt = \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt = B(q,p).$$

3) Связь функций $B(p,q)$ и $\Gamma(p)$.

Можно доказать (см. [Ильин, Позняк]), что имеет место равенство

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \qquad (18.17)$$

Из этой формулы следует, что функция $B(p,q)$

имеет в квадранте $\{p>0, q>0\}$ непрерывные частные производные любого порядка.

4) <u>Другая формула для $B(p,q)$.</u> В интеграле $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ сделаем замену переменной $x=\frac{1}{1+t}$, $0\le t\le\infty$. Тогда $dx=-\frac{dt}{(1+t)^2}$, $1-x=\frac{t}{1+t}$ и для $B(p,q)$ получаем выражение $B(p,q)=\int_0^\infty t^{q-1}(1+t)^{-p-q}dt$. Заменив p на q, а q — на p (свойство симметрии), и обозначив переменную интегрирования снова буквой x, получим для $B(p,q)$ следующее выражение:

$$B(p,q)=\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx. \qquad (18.18).$$

Г-функция и В-функция используются при вычислении интегралов (собственных и несобственных). Хотя функция $\Gamma(p)$ (и также $B(p,q)$) не относится к классу элементарных функций, она хорошо изучена, для неё составлены таблицы значений, поэтому если удаётся выразить какой-то интеграл через $\Gamma(p)$, то задача считается решённой.

<u>Пример.</u> Вычислить интеграл $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x)^3}dx$.

Запишем интеграл I в виде

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{x^{4/3-1}}{(1+x)^{4/3+5/3}}dx.$$

Сопоставляя это выражение с формулой (18.18), приходим к выводу, что интеграл I равен значению функции $B(p,q)$ при $p=\frac{4}{3}$, $q=\frac{5}{3}$. Применяя формулу (18.17), а затем формулу приведения и формулу дополнения для Г-функции, получаем:

$$I = B\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}+\frac{5}{3}\right)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}.$$

18.6 Кратные интегралы, зависящие от параметров

Кратные интегралы, зависящие от параметров, — это функции следующего вида:

$$u(y_1,\dots,y_m) = \int\limits_G\cdots\int f(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)\,dx_1\cdots dx_n.$$

Мы ограничимся рассмотрением тройных интегралов, имеющих вид

$$u(M) = \iiint\limits_G f(M,P)\,g(P)\,dV_P\,,$$

где G — ~~к~~убируемая область, точка $P(x,y,z)$ пробегает область G, $dV_P = dx\,dy\,dz$, $M(x_0,y_0,z_0)$ — точка, от координат которой, как от параметров, зависит функция $u(M)$, $g(P)$ — ограниченная интегрируемая в области G функция, а $f(M,P)$ — функция, зависящая от шести переменных (x_0,y_0,z_0,x,y,z), причем $f(M,P)$ непрерывна при $M\neq P$ и имеет особенность (стремится к бесконечности), если $P\to M$.

Важным примером интегралов такого типа является потенциал гравитационного поля, создаваемого в точке $M(x_0,y_0,z_0)$ телом G с плотностью массы $\rho(P)$ в точке $P(x,y,z)$. Этот потенциал называется объёмным потенциалом или ньютоновым потенциалом и имеет вид

$$u(M) = \iiint\limits_G \frac{\rho(P)}{r_{MP}}\, dV_P,$$

где $r_{MP} = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ — расстояние между точками $M(x_0, y_0, z_0)$ и $P(x, y, z)$ (рис. 18.4).

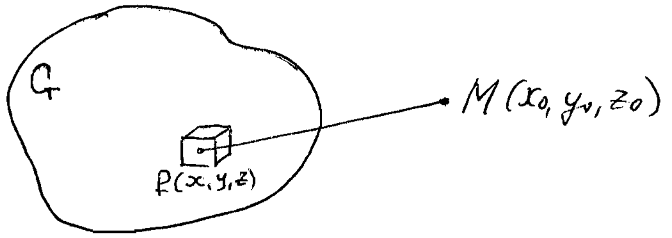

Рис. 18.4

Выражение для $u(M)$ следует из того, что $\frac{\rho(P)\,dV_P}{r_{MP}}$ — потенциал гравитационного поля, создаваемого в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ элементом объема $dV_P = dx\,dy\,dz$ с массой $\rho(P)\,dV_P$

Если точка M лежит вне области G, то $r_{MP} \neq 0$ $\forall P \in G$, поэтому $f(M, P) = \frac{1}{r_{MP}}$ является непрерывной (и также любое число раз дифференцируемой) функцией, а $u(M)$ представляет собой собственный тройной интеграл, зависящий от параметров x_0, y_0, z_0 — координат точки M. Если при этом $\rho(P)$ - интегрируемая (например, непрерывная) функция, то функция $u(M)$ дифференцируема любое число раз в точке M и её частные производные любого порядка можно вычислять путём дифференцирования под знаком интеграла. Например,

$$\frac{\partial u}{\partial x_0}(M) = \iiint\limits_G \rho(P) \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right) dV_P = \iiint\limits_G \rho(x, y, z)\, \frac{x - x_0}{r_{MP}^3}\, dx\,dy\,dz.$$

Аналогичные выражения получаются для $\frac{\partial u}{\partial y_0}(M)$ и $\frac{\partial u}{\partial z_0}(M)$.

Отметим, что частные производные первого порядка функции $u(M)$ являются координатами вектора $\operatorname{grad} u(M)$, представляющего собой силу $\vec{F}(M)$, с которой единичная точечная масса, помещенная в точку M, притягивается телом G_T:

$$\vec{F}(M) = \operatorname{grad} u(M) = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_0}(M), \frac{\partial u}{\partial y_0}(M), \frac{\partial u}{\partial z_0}(M) \right\}.$$

Вычисление производных второго порядка функции $u(M)$ даёт формулу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}(M) = \iiint\limits_{G_T} \rho(P) \left[-\frac{1}{r_{MP}^3} + \frac{3(x-x_0)^2}{r_{MP}^5} \right] dV_P$$

и аналогичные формулы для $\frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2}(M)$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial z_0^2}(M)$.

Складывая эти вторые производные, получаем:

$$\Delta u(M) := \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}(M) + \frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2}(M) + \frac{\partial^2 u}{\partial z_0^2}(M) = \iiint\limits_{G_T} \rho(P) \left\{ -\frac{3}{r_{MP}^3} + \frac{3\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]}{r_{MP}^5} \right\} dV_P = 0,$$

поскольку выражение в фигурных скобках равно нулю.

Таким образом,

$$\Delta u(M) = 0,$$

т.е. <u>в точках M, не лежащих в области G_T, ньютонов потенциал $u(M)$ удовлетворяет уравнению Лапласа.</u>

Если же точка $M(x_0, y_0, z_0) \in G_T$, то функция $f(M,P) = \frac{1}{r_{MP}}$ имеет особенность при $P = M$ ($\frac{1}{r_{MP}} \to \infty$ при $P \to M$), поэтому $u(M)$ является <u>несобственным</u> тройным интегралом, зависящим от параметров x_0, y_0, z_0. Вопрос о непрерывности и дифференцируемости функции $u(M)$ становится более сложным.

Для решения этого вопроса нам понадобятся новые понятия и утверждения.

Обратимся к несобственному интегралу вида

$$u(M) = \iiint_G f(M,P)\,g(P)\,dV_P\,, \qquad (18.19)$$

где G — замкнутая кубируемая область, $g(P)$ — ограниченная функция, интегрируемая в области G, $f(M,P)$ — непрерывная функция своих аргументов при $P \neq M$, $f(M,P) \to \infty$ при $P \to M$. Введём понятие равномерной сходимости этого несобственного интеграла относительно параметра M.

Пусть $M_0 \in G$. Обозначим через $\Omega^\delta_{M_0}$ шар радиуса δ с центром M_0.

<u>Определение</u>. Несобственный интеграл (18.19) называется сходящимся равномерно относительно M (по параметру M) в точке M_0, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такое, что шар $\Omega^\delta_{M_0} \subset G$ и $\forall$ кубируемой области $\omega \subset \Omega^\delta_{M_0}$ и $\forall$ точки $M \in \Omega^\delta_{M_0}$ выполняется неравенство

$$\left| \iiint_\omega f(M,P)\,g(P)\,dV_P \right| < \varepsilon.$$

Иначе говоря, интеграл (18.19) сходится равномерно относительно параметра M в точке M_0, если величина $\left|\iiint_\omega f(M,P)g(P)dV_P\right|$ сколь угодно мала для любой области ω и любой точки M, расположенных в достаточно малом шаре $\Omega^\delta_{M_0}$ (в том числе и для $\omega = \Omega^\delta_{M_0}$).

<u>Теорема 10.</u> Если несобственный интеграл (18.19) сходится равномерно относительно M в точке M_0, то функция $u(M)$ непрерывна в точке M_0.

<u>Доказательство.</u> Согласно определению непрерывности нужно доказать, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такое, что

$$|u(M) - u(M_0)| < \varepsilon\,, \text{ если } \rho(M, M_0) < \delta.$$

Разобьём область G_T на две части: $G_{T_1} = \Omega_{M_0}^{\delta_1}$ и $G_{T_2} = G_T - G_{T_1}$ (рис. 18.5, выбор числа $\delta_1 > 0$ уточним ниже) и представим функцию $u(M)$ в виде суммы двух слагаемых:

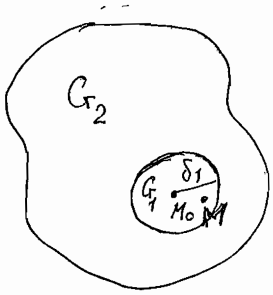

Рис. 18.5

$$u(M) = u_1(M) + u_2(M),$$

где $u_1(M) = \iiint\limits_{G_{T_1}} f(M,P)g(P)\,dV_P$, $u_2(M) = \iiint\limits_{G_{T_2}} f(M,P)g(P)\,dV_P$.

Отметим, что если точка M лежит внутри области G_1, то точка P, пробегающая область G_{T_2}, не может совпасть с точкой M, т.е. для точек M, лежащих внутри G_{T_1}, функция $u_2(M)$ является собственным интегралом и потому непрерывной функцией. В частности, функция $u_2(M)$ непрерывна в точке M_0.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как несобственный интеграл $u(M)$ сходится равномерно относительно M в точке M_0, то $\exists\, \delta_1$, такое, что $\forall\, M \in \Omega_{M_0}^{\delta_1}$ выполняется неравенство

$$|u_1(M)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{в частности,} \quad |u_1(M_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (18.20)$$

Функция $u_2(M)$, как уже было отмечено, непрерывна в точке M_0. Поэтому $\exists\, \delta_2 > 0$, такое, что

$$|u_2(M) - u_2(M_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{если } \rho(M, M_0) < \delta_2. \qquad (18.21)$$

Возьмём $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда, если $\rho(M, M_0) < \delta$, то $M \in G_{T_1}$ и, следовательно, выполнены неравенства (18.20), а также неравенство (18.21), используя которые, получаем:

$$|u(M) - u(M_0)| = |(u_1(M) + u_2(M)) - (u_1(M_0) + u_2(M_0))| \leq$$

$$\leq |u_1(M)| + |u_1(M_0)| + |u_2(M) - u_2(M_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Итак, $|u(M) - u(M_0)| < \varepsilon$, если $\rho(M, M_0) < \delta$, что и требовалось доказать. Теорема 10 доказана.

Следующая теорема даёт достаточное условие равномерной сходимости несобственного интеграла (18.19).

Теорема 11. Если $|f(M,P)| \le \frac{c}{r_{MP}^{\alpha}}$, где $c = const > 0$, $0 < \alpha < 3$, то несобственный интеграл $u(M) = \iiint f(M,P)g(P)\,dV_P$ сходится равномерно относительно M в любой внутренней точке M_0 области G.

Доказательство. Пусть M_0 — внутренняя точка области G. Согласно определению равномерной сходимости относительно M в точке M_0 нужно доказать, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такое, что $\forall \omega \subset \Omega_{M_0}^{\delta}$ и $\forall$ точки $M \in \Omega_{M_0}^{\delta}$ выполняется неравенство

$$\left| \iiint_{\omega} f(M,P)g(P)\,dV_P \right| < \varepsilon. \qquad (18.22)$$

Так как $|f(M,P)| \le \frac{c}{r_{MP}^{\alpha}}$ и так как $g(P)$ — ограниченная функция ($|g(P)| \le A$, где A — некоторое число), то

$$\left| \iiint_{\omega} f(M,P)g(P)\,dV_P \right| \le cA \iiint_{\omega} \frac{1}{r_{MP}^{\alpha}}\,dV_P. \qquad (18.23)$$

Зафиксируем какую-нибудь точку M, лежащую внутри шара $\Omega_{M_0}^{\delta}$ (величину δ уточним ниже). Очевидно, что $\Omega_{M_0}^{\delta} \subset \Omega_{M}^{2\delta}$, и поэтому для любой области $\omega \in \Omega_{M_0}^{\delta}$ будет выполнено неравенство

$$\iiint_{\omega} \frac{1}{r_{MP}^{\alpha}}\,dV_P \le \iiint_{\Omega_M^{2\delta}} \frac{1}{r_{MP}^{\alpha}}\,dV_P.$$

Интеграл, стоящий в правой части неравенства, вычислим, перейдя к сферическим координатам с центром в точке M: $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$, $0 \le r = r_{MP} \le 2\delta$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

$$\iiint\limits_{\Omega_M^{2\delta}} \frac{1}{r_{MP}^{\alpha}}\, dV_P = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\delta} \frac{r^2 \sin\theta}{r^{\alpha}}\, dr = 4\pi \int_0^{2\delta} r^{2-\alpha} dr = \frac{4\pi}{3-\alpha}(2\delta)^{3-\alpha}.$$

Так как $\alpha < 3$, то $3-\alpha > 0$, и поэтому величину $\frac{4\pi}{3-\alpha}(2\delta)^{3-\alpha}$ можно сделать сколь угодно малой, выбирая достаточно малое δ. Следовательно, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такое, что правая часть в неравенстве (18.23) будет меньше ε, т.е. будет выполнено неравенство (18.22). Теорема доказана.

Теоремы 10 и 11 применим к ньютонову потенциалу

$$u(M) = \iiint\limits_{G} \frac{\rho(P)}{r_{MP}}\, dV_P \qquad (18.24)$$

в том случае, когда точка M — внутренняя точка области G. Так как подынтегральная функция удовлетворяет неравенству $\left|\frac{\rho(P)}{r_{MP}}\right| \le \frac{C}{r_{MP}}$ (здесь $\alpha = 1 < 3$), то (по теореме 11) несобственный интеграл (18.24) сходится равномерно относительно M в любой внутренней точке M_0 области G и, следовательно, по теореме 10 функция $u(M)$ — непрерывная функция внутри области G.

Можно доказать, что частные производные первого порядка функции $u(M)$ и в этом случае (т.е. когда M — внутренняя точка области G) можно вычислять путем дифференцирования под знаком интеграла, например,

$$\frac{\partial u}{\partial x_0}(M) = \iiint\limits_{G} \frac{\rho(P)(x-x_0)}{r_{MP}^3}\, dV_P .$$

Так как $\left|\frac{\rho(P)(x-x_0)}{r_{MP}^3}\right| \le \frac{C}{r_{MP}^2}$ (здесь $\alpha = 2 < 3$), то несобственный интеграл $\frac{\partial u}{\partial x_0}(M)$ (и также несобственные интегралы $\frac{\partial u}{\partial y_0}(M)$ и $\frac{\partial u}{\partial z_0}(M)$) сходятся равномерно относительно M в любой внутренней точке M_0 области G и, следовательно, частные производные первого порядка функции $u(M)$ непрерывны внутри области G.

Оказывается, что частные производные второго порядка функции $u(M)$ уже нельзя вычислять путём дифференцирования под знаком интеграла. Если потребовать, чтобы функция $\rho(P)$ имела в области G непрерывные частные производные первого порядка, то функция $u(M)$ будет иметь внутри области G непрерывные частные производные второго порядка и $u(M)$ будет удовлетворять внутри области G уравнению Пуассона

$$\Delta u(M) := \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}(M) + \frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2}(M) + \frac{\partial^2 u}{\partial z_0^2}(M) = -4\pi\rho(M).$$