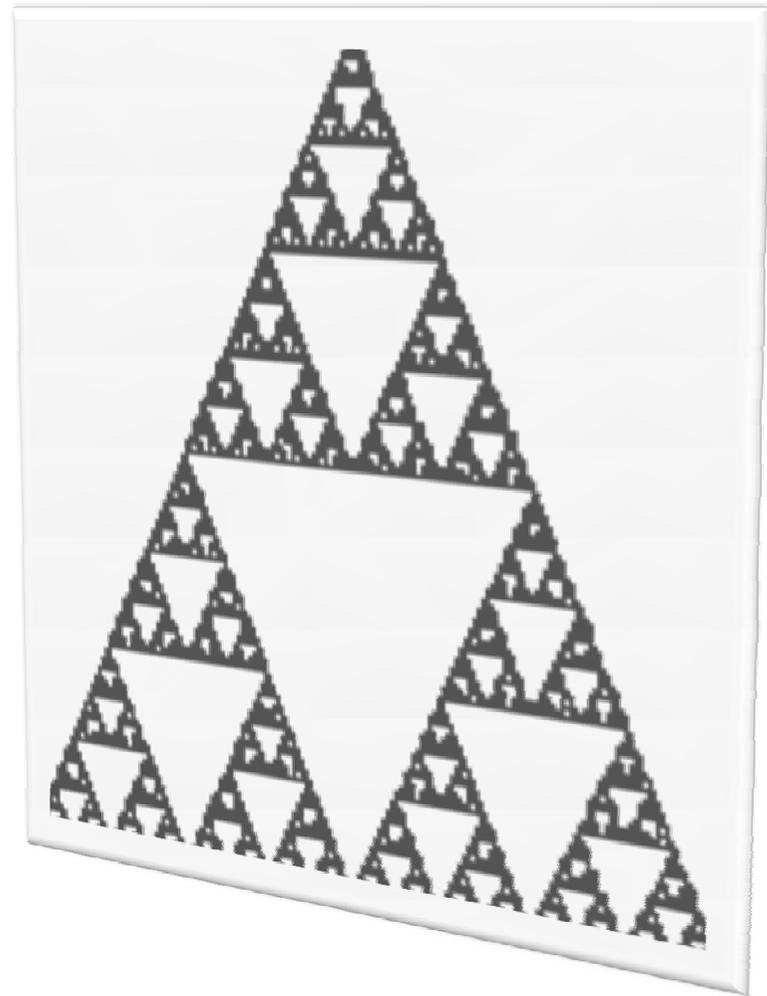


Гл. 5. Некоторые новые методы и объекты математического моделирования.

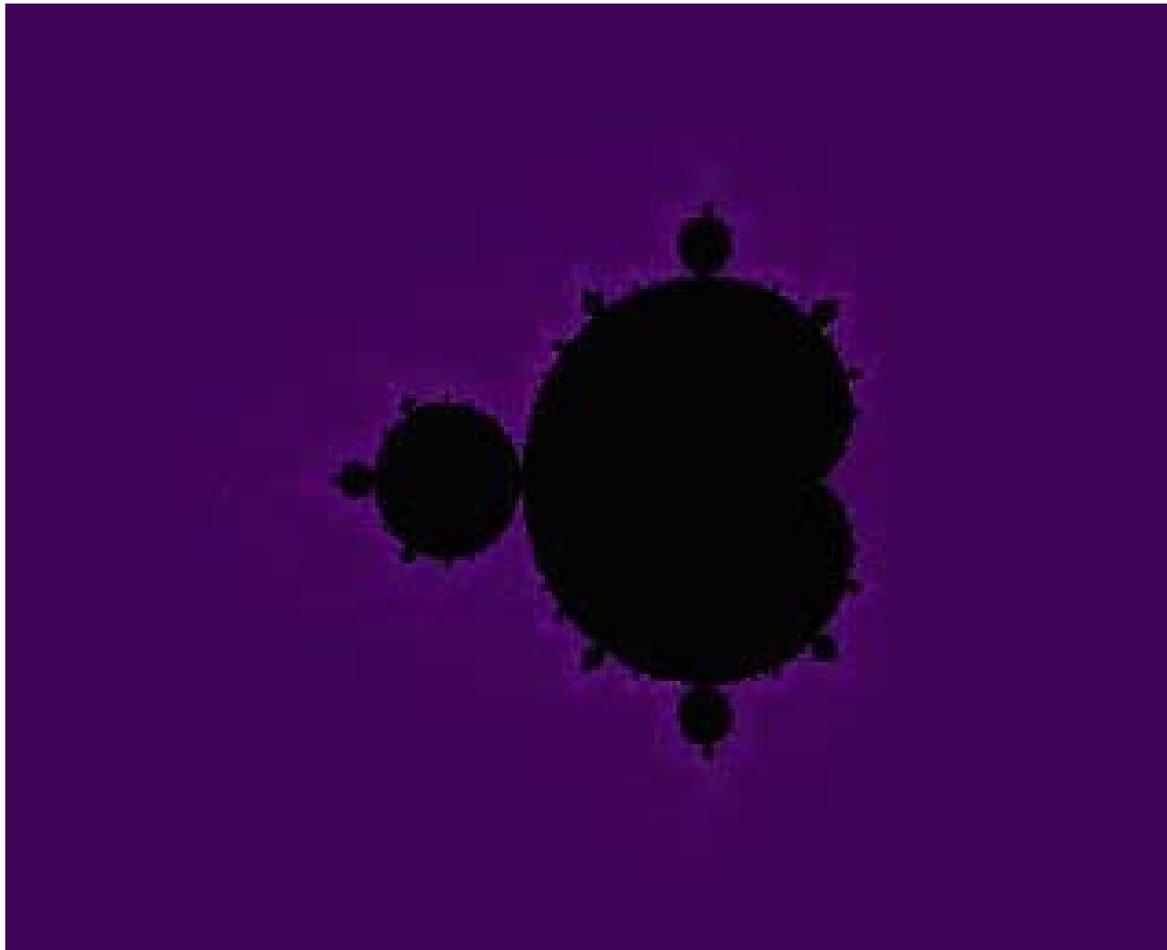
1. Фракталы и фрактальные структуры.

ФРАКТАЛ –
это геометрическая фигура, в
которой один и тот же
фрагмент повторяется при
каждом уменьшении
масштаба.



На спинках блох блошата естъ,
Кусают блох они там,
Блошонков у блошат не счесть,
И так indefinite...

Даниель Дефо

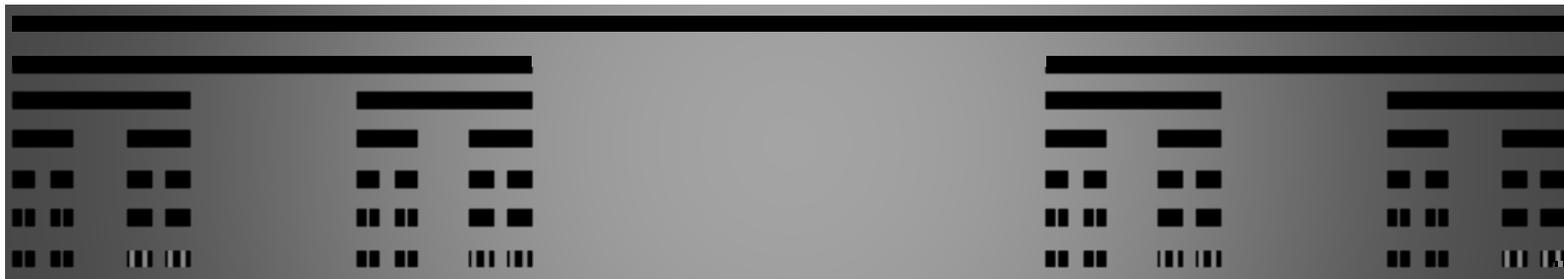


В прошлом математики основное внимание уделяли функциям и множествам, которые могут быть исследованы методами классического анализа.

Те функции, которые не являлись достаточно гладкими или регулярными, как правило, не исследовались как не достойные внимания патологические объекты.

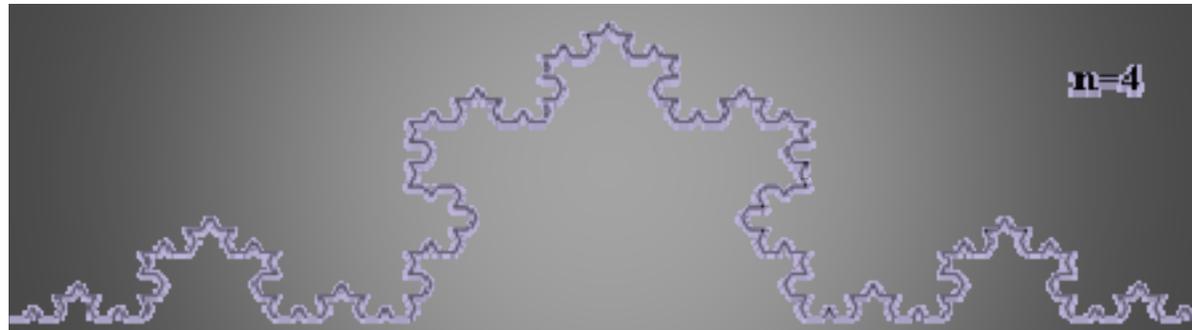
Однако еще в конце девятнадцатого века были построены математические объекты, которые вызвали значительный интерес у математиков.

Так в 1883 году Георг Кантор описал множество, которое теперь называют множество Кантора или пыль Кантора. Это множество имеет мощность континуума, но мера его равна нулю. Каждый из фрагментов множества Кантора выглядит как множество в целом, то есть оно является самоподобным.

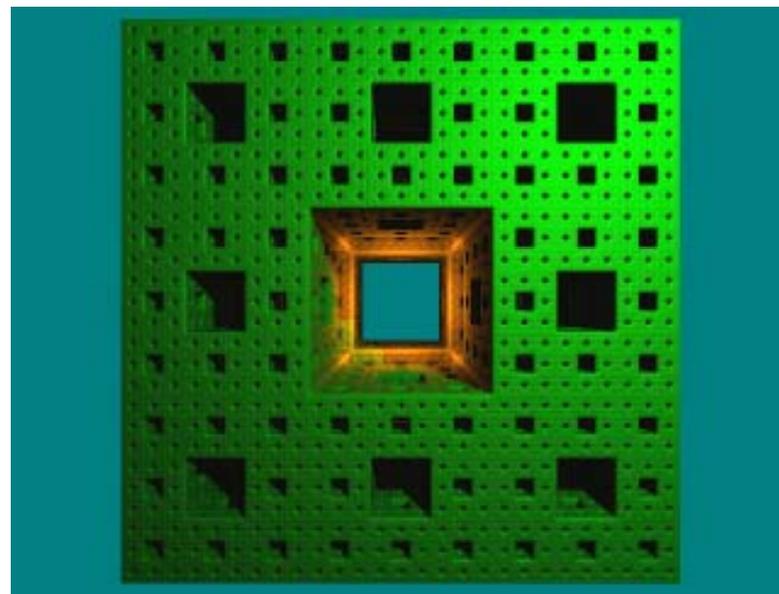
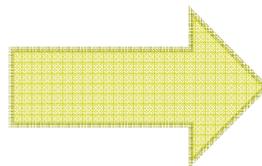
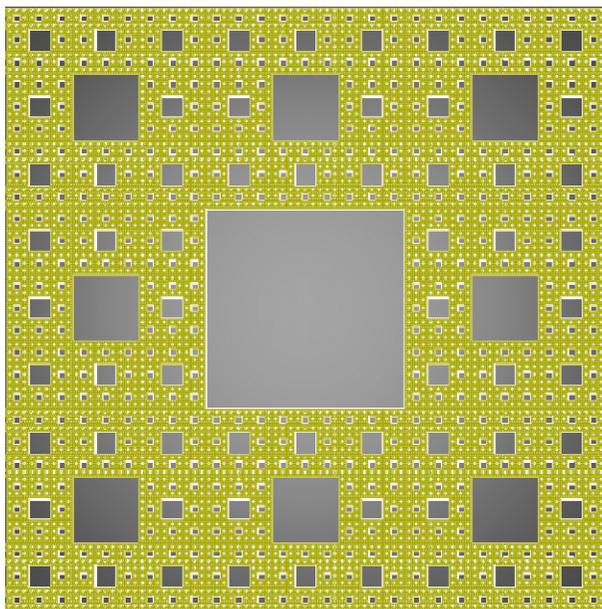


В 1886 году Карл Вейерштрасс построил функцию, не имевшую производной ни в одной точке. График этой функции – бесконечно изломанная линия. При увеличении любой участок кривой выглядит подобно всей кривой.

В 1904 году Хелге фон Кох построил пример непрерывной кривой, которая нигде не имеет касательной. Можно построить снежинку или остров Коха, если в качестве начального объекта взять равносторонний треугольник, а не единичный отрезок. Снежинка или остров Коха будут иметь бесконечный периметр, но при этом будут ограничивать конечную область.



В 1915 году Вацлав Серпинский построил ряд конструкций, в частности, **салфетку Серпинского** и **ковёр Серпинского**. Можно построить трехмерные аналоги этих объектов. Их называют **губками**.



Рассмотренные объекты называют конструктивными фракталами. Они получаются в результате простой рекурсивной процедуры (комбинации линейных преобразований). Именно изучение таких объектов составляет основное содержание фрактальной геометрии.

Своей популярностью в последние десятилетия фракталы в значительной степени обязаны появлением в 1983 году книги сотрудника исследовательского центра имени Томаса Дж. Уотсона корпорации IBM франко-американского математика Бенуа Мальденброта «Фрактальная геометрия природы». Мальденброт ввел в 1975 году термин «фрактал» от латинского слова fractus – изломанный, дробный.

Большой интерес к фракталам, как и вообще к нерегулярным функциям и множествам объясняется прежде всего тем, что они гораздо лучше обеспечивают представление многих природных явлений нежели объекты классической геометрии. В этом плане интересно сравнить два высказывания, которые разделяет в 350 лет.

«Философия природы написана в величайшей книге – я разумею Вселенную... А написана эта книга на языке математики, и письменна ее – треугольники, окружности и другие геометрические фигуры».

Галилео Галилей, 1623 год.

«Почему геометрию называют холодной и сухой? Одна из причин заключается в ее неспособности описать форму облака, горы, дерева или берега моря. Облака – это не сферы, горы – это не конусы, линия берега – это не окружности, и кора не является гладкой, и молния не распространяется по прямой... Природа демонстрирует нам не просто более высокую степень, а совсем другой уровень сложности. Число различных масштабов длин в структурах всегда бесконечно».

Бенуа Мандельброт, 1973 год.

Широчайшее распространение фрактальных структур объясняется их разномасштабностью: и большие, и малые масштабы фрактальных структур имеют одинаковый закон роста. Это геометрическое подобие и есть основной принцип роста всего живого, который называют также **иерархическим принципом организации**. Законы ветвления самой тонкой веточки дерева абсолютно те же, что и для всех его ветвей, и для всего живого в целом.

Задать фрактальную структуру-это значит задать не застывшую, неизменную форму , а принцип роста, закон изменения формы.

Как правило, алгоритмы построения формы гораздо проще, чем полученная с его помощью форма. **Фрактал даёт компактный описания самых замысловатых форм.**

Фракталы подразделяются на конструктивные и динамические. Конструктивный фрактал – это геометрическая фигура, в которой один и тот же фрагмент повторяется при каждом уменьшении масштаба. Они строятся путем применения простой рекурсивной процедуры (комбинации линейных преобразований). Конструктивный фрактал – это множество, получающееся в результате линейных (аффинных) сжимающих отображений подобия. Результирующее сжимающее отображение обладает устойчивой неподвижной точкой – «фракталом». Задать фрактальную структуру – значит задать не застывшую, неизменную форму, а принцип роста, закон изменения формы.

Динамические фракталы, как правило задаются с помощью некоторого отображения. Одним из первых описал динамические фракталы в 1918 году французские математики Гастон Жюлиа и Пьер Фату. Если в отображении

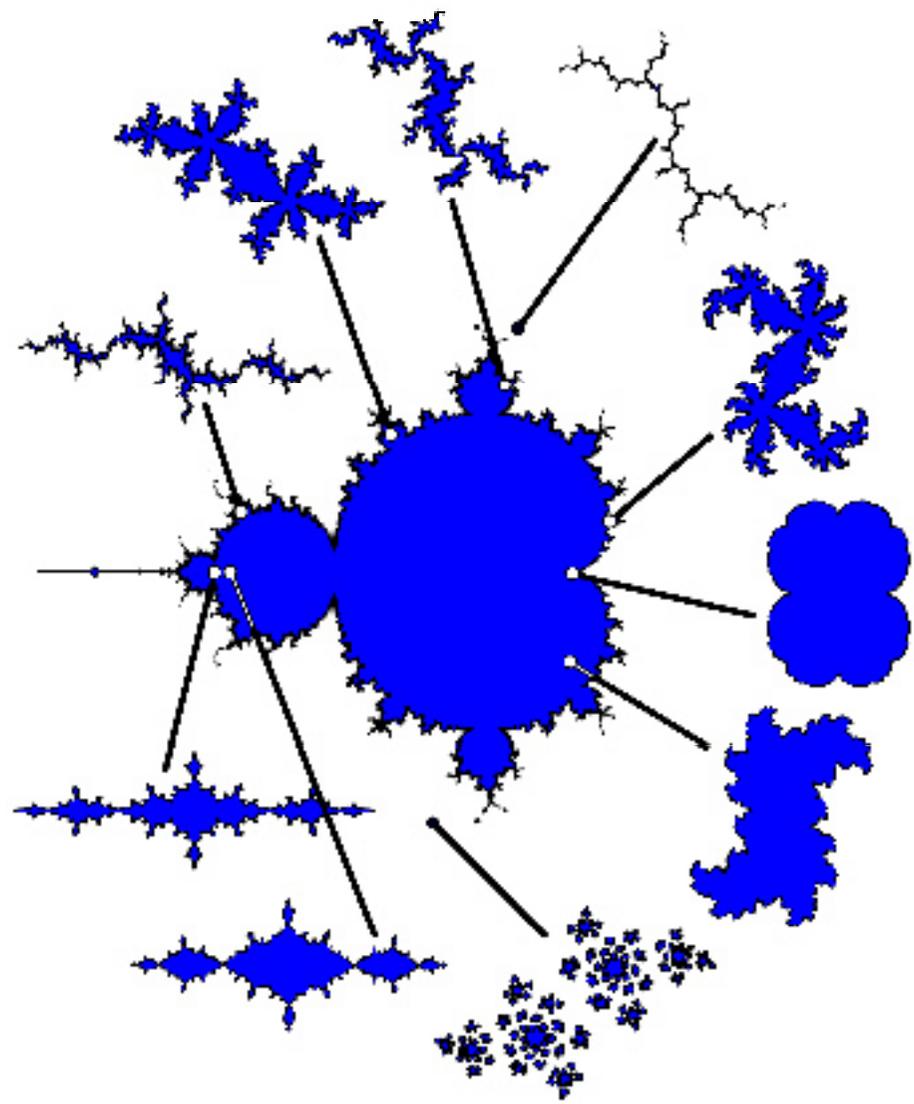
$$z_{n+1} = z_n^2 + C$$

на комплексной плоскости фиксировать значение постоянной C , то в зависимости от выбора начального приближения пределом последовательности будут либо ноль, который является аттрактором, (зоной влияния, множеством притяжения), либо бесконечность (также аттрактор).

Граница, разделяющая области притяжения этих двух аттракторов бесконечно изрезана и является фракталом - множеством Жюлиа.

Одной из характерных особенностей такой линии является самоподобие.: если взглянуть на любой ее поворот, то можно обнаружить, что одна и та же форма встречается в различных местах и имеет разные размеры.

Жюлиа и Фату установили, что эту границу, являющуюся множеством Жюлиа, можно восстановить по любой произвольной ее части. Заметим, что аттрактор, граница которого является фракталом, называется странным аттрактором.



Во второй половине XX века при измерении длины береговой линии Великобритании английский физик и метеоролог Льюис Ричардсон заменил истинную береговую линию ломаной, состоящей из отрезков, длины которых затем устремлялись к нулю. Однако береговая линия, в отличие от линий, описываемых гладкими функциями, оказалась настолько изрезанной вплоть до самых малых масштабов карты, что с уменьшением длины звеньев длина всей линии не стремилась к конечному пределу, а становилась бесконечно большой.

Основным свойством фрактала является самоподобие, или масштабная инвариантность, а фундаментальной характеристикой его является фрактальная размерность или размерность самоподобия. Рассмотрим единичный отрезок, единичный квадрат и единичный куб:

Единичный отрезок, N частей длины $\ell = \frac{1}{N} \Rightarrow 1 = N\ell$

Единичный квадрат, N квадратов со стороной $\ell = \frac{1}{\sqrt{N}} \Rightarrow 1 = N\ell^2$.

Единичный куб, N кубов со стороной $\ell = \frac{1}{\sqrt[3]{N}} \Rightarrow 1 = N\ell^3$

во всех этих случаях получаем $N\ell^d = 1$ где d – **размерность самоподобия:**

$$d = -\frac{\ln N}{\ln \ell}$$

Чтобы построить множество Кантора нужно взять два

множества длины $\frac{1}{3} \Rightarrow$



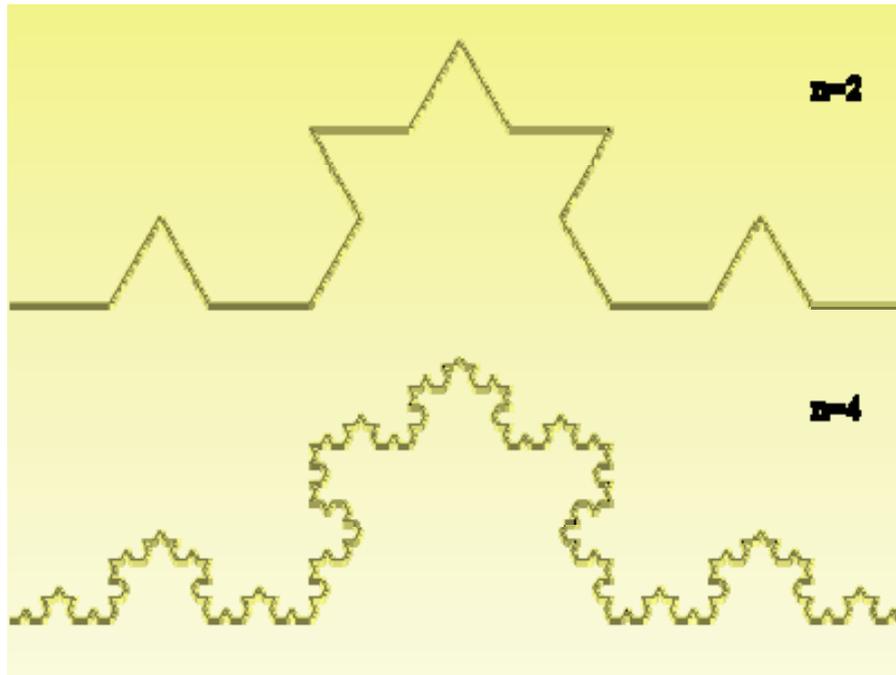
$$\ell = \frac{1}{3^n}, N = 2^n$$

$$d = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6309$$

Для кривой Коха требуется четыре отрезка длиной

$$\frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$d = -\frac{\ln 4}{\ln \frac{1}{2}} = \frac{\ln 4}{\ln 2} \approx 1,2618$$



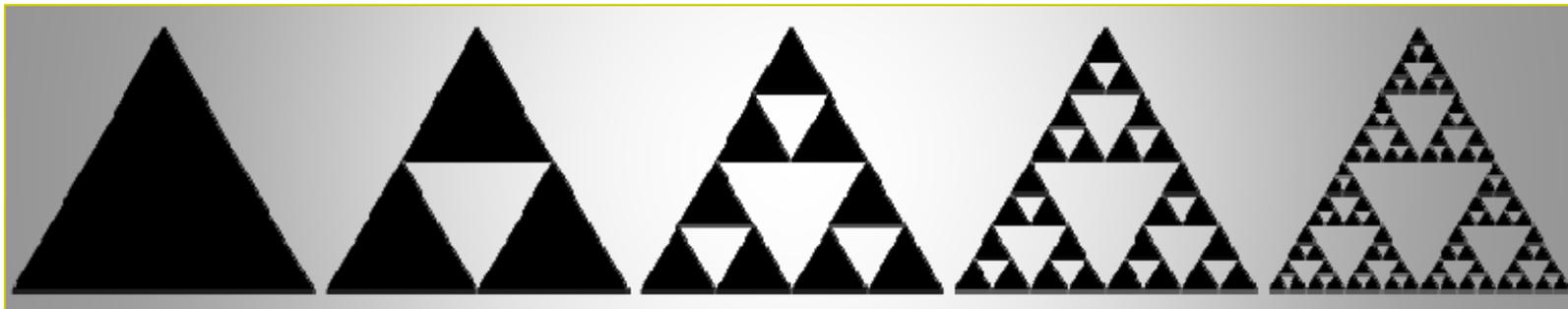
Еще не фигура но уже не отрезок.

Одна салфетка Серпинского состоит из трех
салфеток с

размером стороны $\frac{1}{2} \Rightarrow$

$$d = -\frac{\ln 3}{\ln \frac{1}{2}} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,5850$$

Уже не фигура но еще не отрезок.



Регулярные фракталы: на каждом этапе масштабирования в точности повторяют объект в целом.

Нерегулярные фракталы: на каждом уровне масштаба структура фрактала подобна, но не идентична объекту в целом.

Природные фракталы: деревья, реки, облака, береговая линия.

Человеческий организм: структура дыхательной, кровеносной и нервной системы, губчатая структура костей, нейроны (нервные клетки), фронтальные ответвления и складки поверхности кишечника.

Фрактальные кластеры: комплексные соединения, в основе молекулярной структуры которых лежит объемная ячейка из непосредственно связанных между собой атомов.

Образуются при:

- а) ассоциации твердых аэрозолей в газе при их диффузном движении;**
- б) электролизе;**
- в) кристаллизация жидкости на подложке;**
- г) вытеснение жидкостью с меньшей плотностью жидкости с большей вязкостью (вода вытесняет нефть: «жидкие пальцы»);**
- д) течение в пористых средах.**

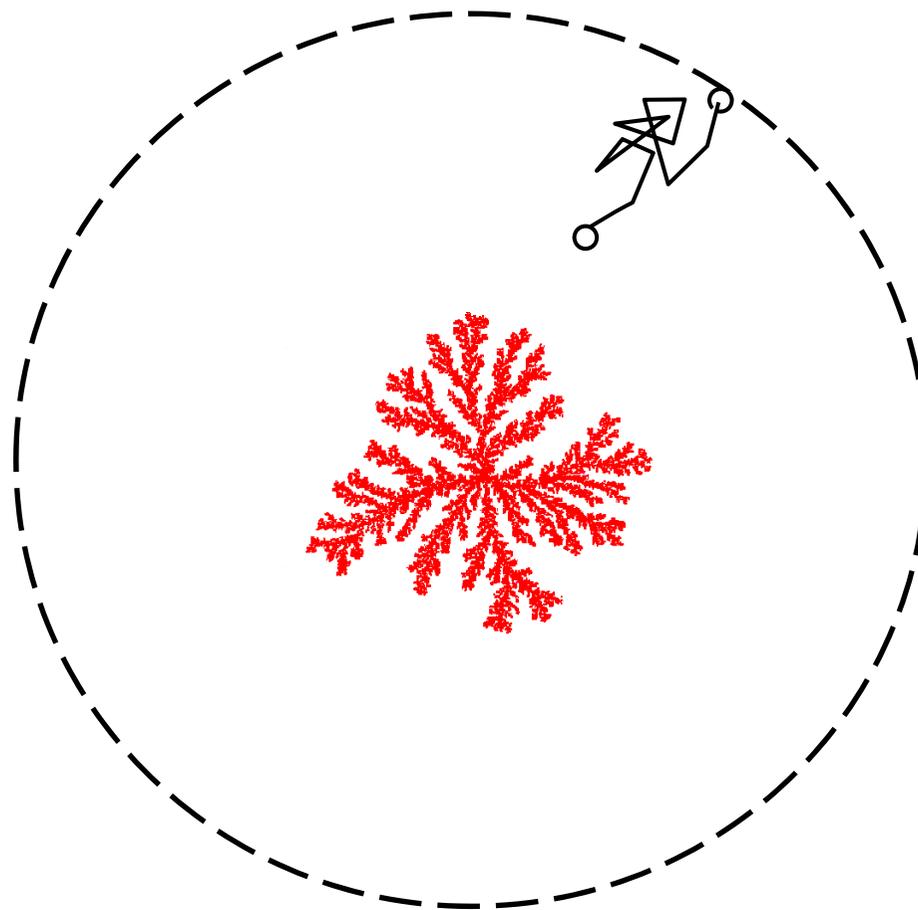
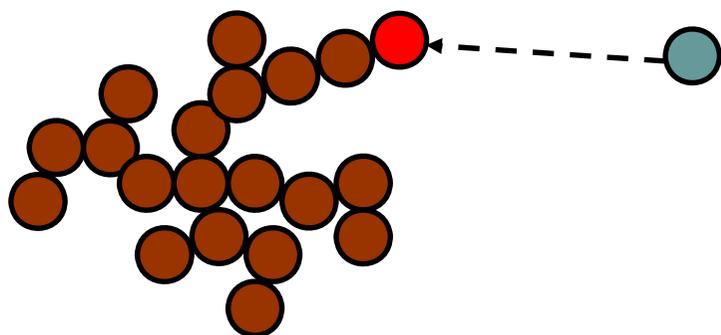
Дендриты (древовидные фракталы):
кристаллы, молния, трещины, разломы.

Одна из широко используемых моделей - модель ОДА - ограниченная диффузией агрегация: случайное движение молекул, которые могут слипаться, образуя кластер. Варианты:

а) случайная частица движется случайным образом с окружности круга, в центре которого расположена затравка, достигнув которой, частица сливается с ней. В результате получается «дендритный кристалл».

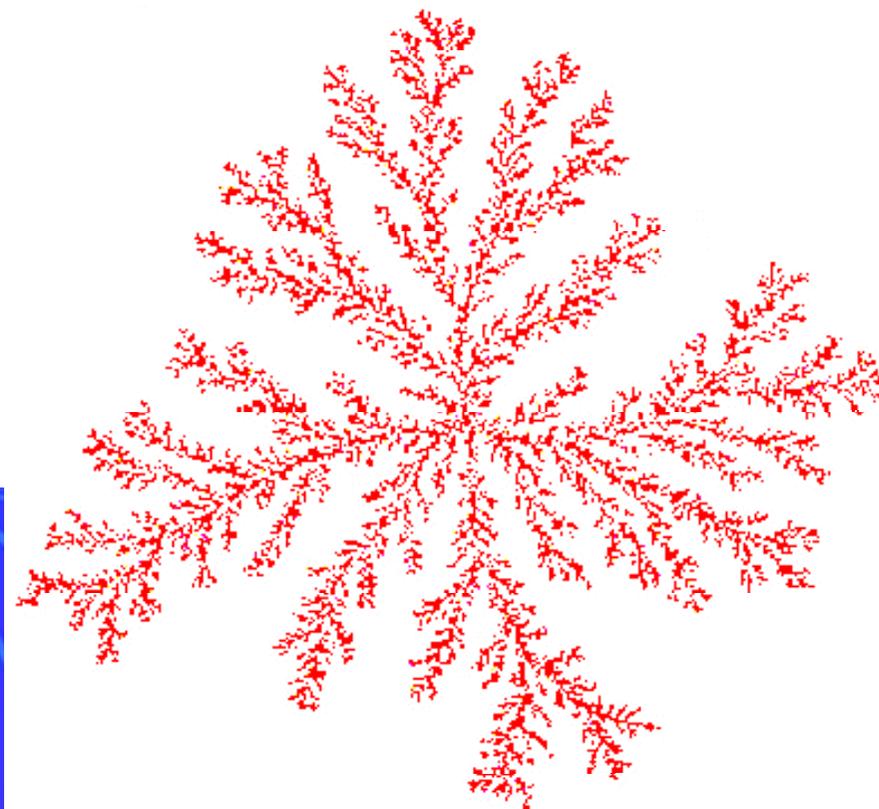
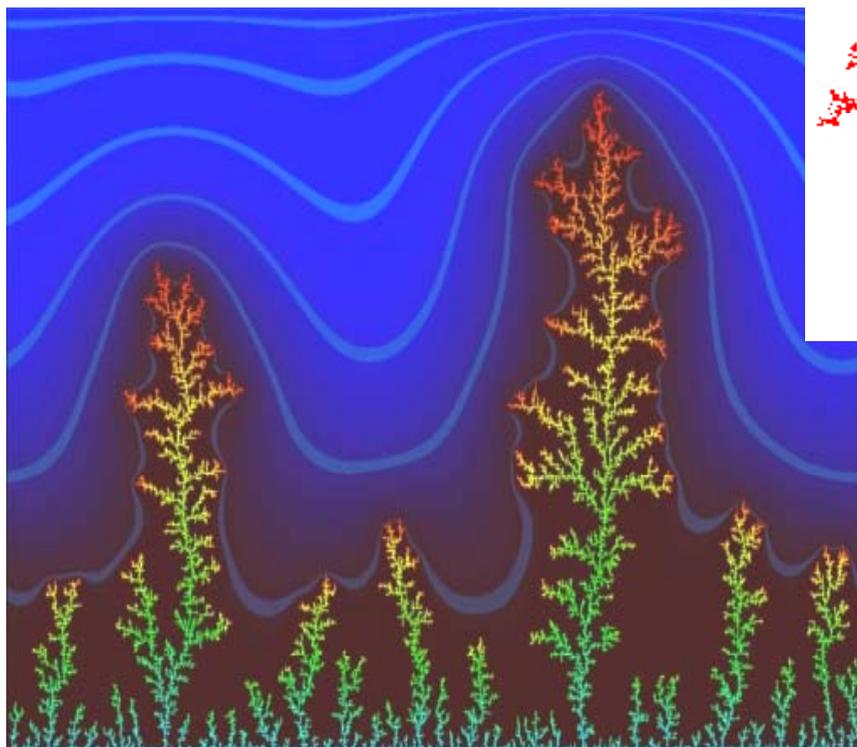
б) случайная частица движется случайным образом с верхней границы прямоугольника. При достижении боковых границ она упруго отражается, а при достижении нижней границы прилипает. В результате образуются «фрактальные водоросли».

Агрегация:



**DLA – агрегация,
протекающая в
условиях случайного
блуждания**

**Центрально
симметричный
случай**



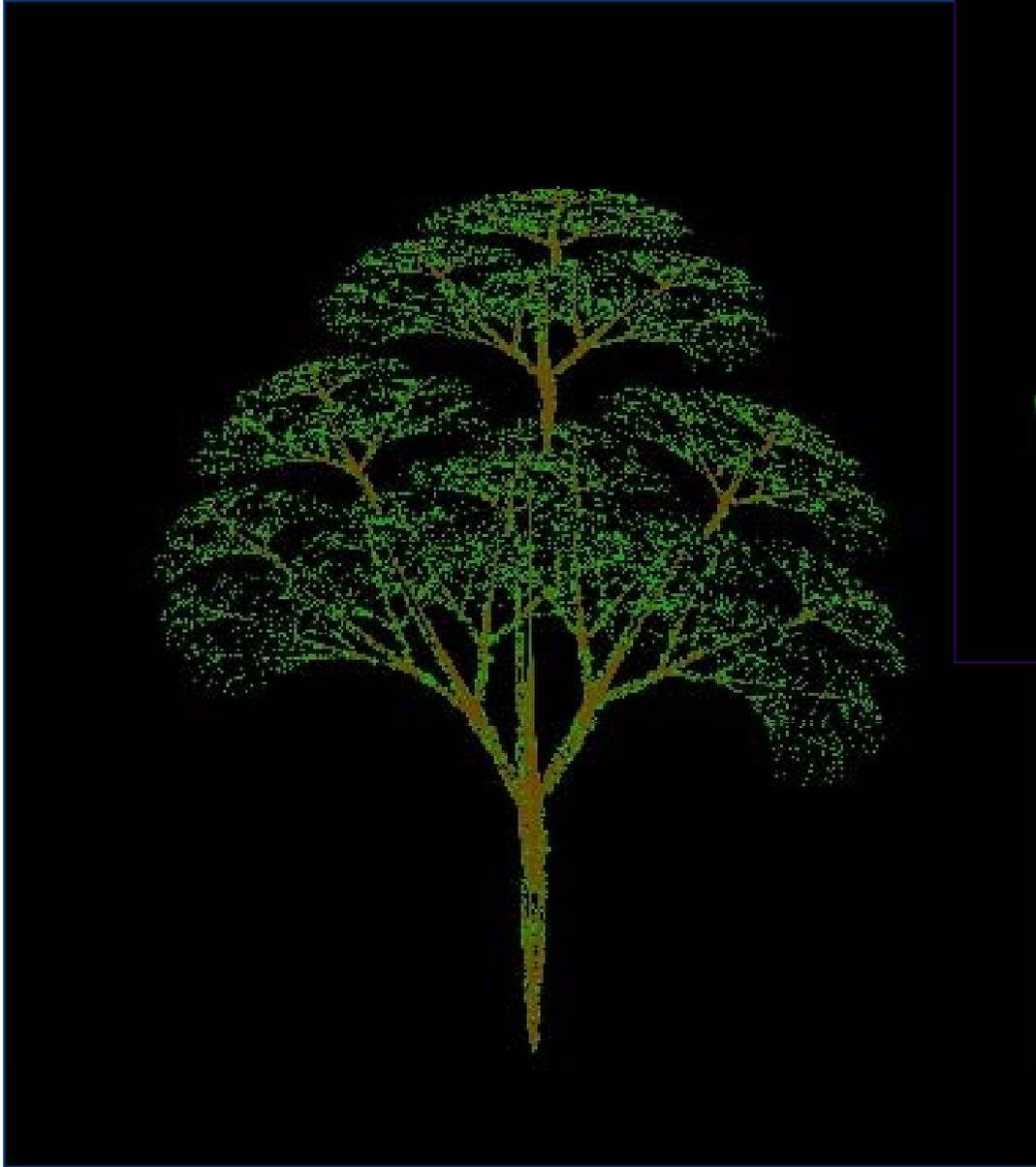
**Прямоугольная
ячейка**

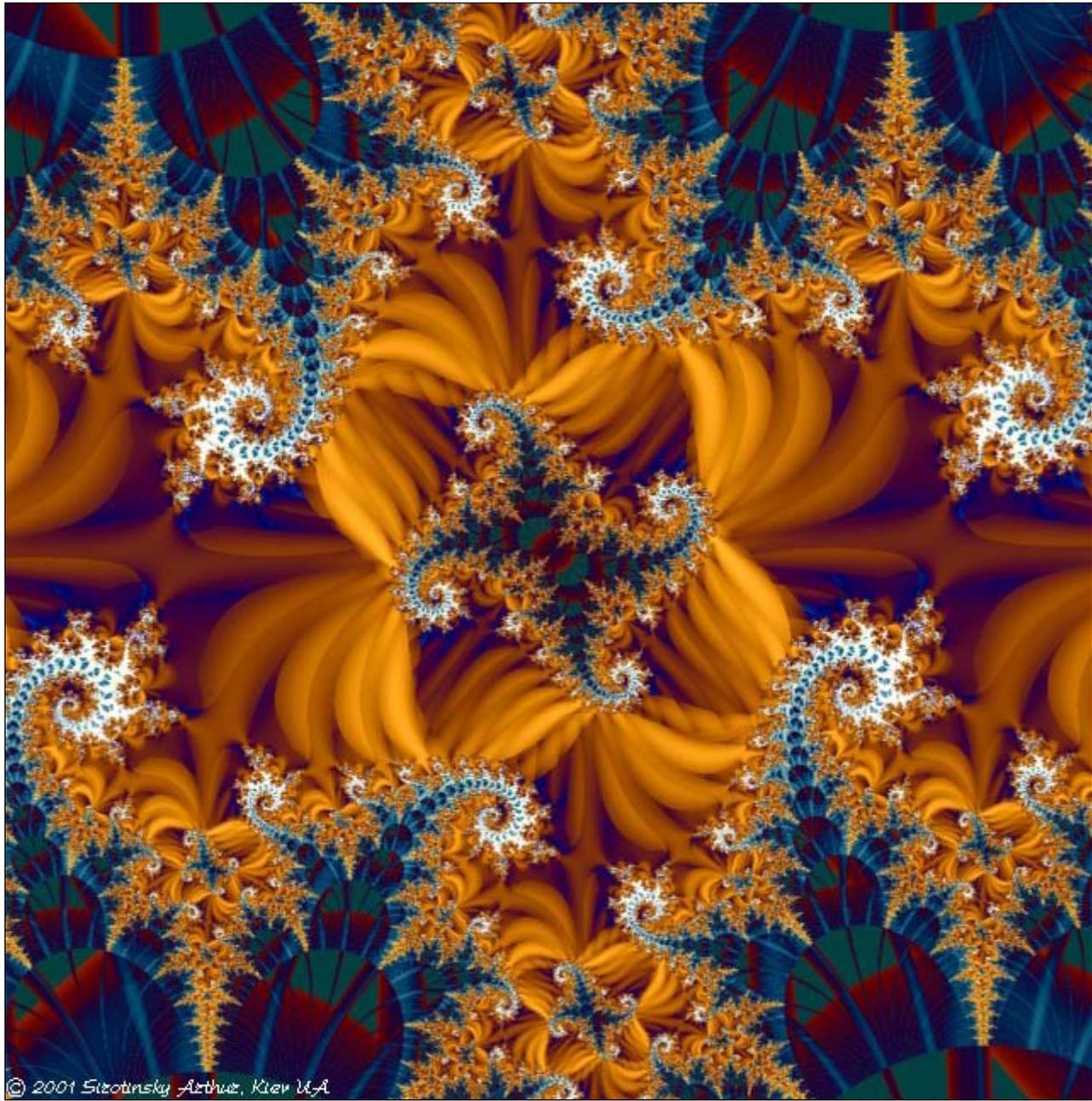
Применения фракталов.

1. Теория турбулентных процессов (газодинамика, гидродинамика): связь с теорией масштабной инвариантности Колмогорова.
2. Вытеснение нефти водой в пористой среде и запирание нефти в водяных ловушках. Фронт вытеснения образует «вязкие пальцы», имеющие фрактальную структуру.
3. Исследование фазовых переходов: фрактальные границы раздела сред.
4. Исследование переходных процессов от упорядоченного состояния к хаосу, границы между которыми носят фрактальный характер.
5. Сжатие изображения: нахождение подобных областей и сохранение в файле только коэффициентов подобия.

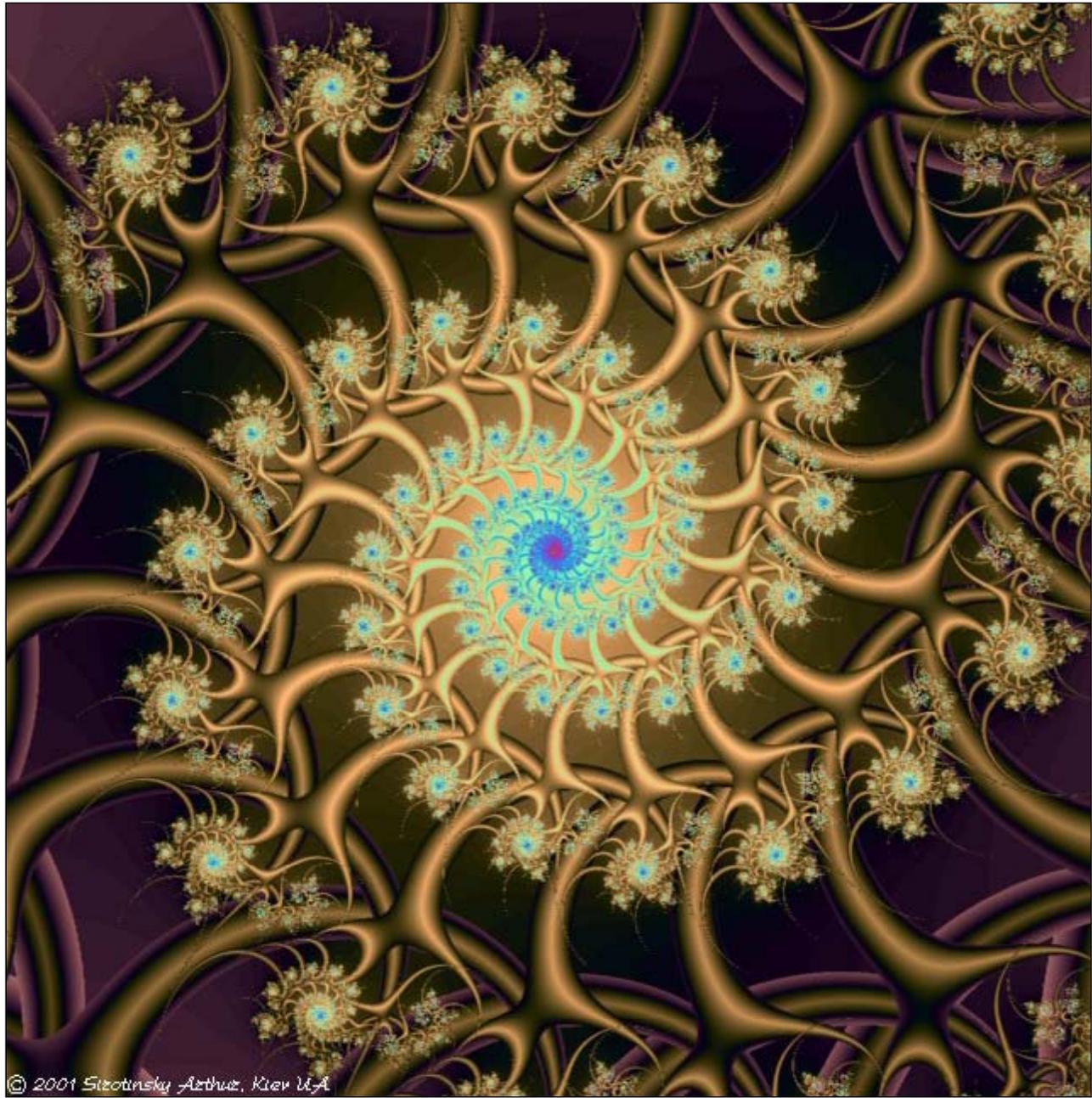
6. Задачи распознавания (радиолокация и т.д.).
7. Создание волноведущих систем с высокими эксплуатационными свойствами на основе фрактальных элементов.
8. Создание малогабаритных фрактальных антенн с высоким качеством диаграммы направленности.
9. Дифракция на фракталах: проектирование отражательных фазовых решеток с интенсивным рассеиванием фазовой энергии в широких частотных диапазонах.
10. Дифракция на фракталах: изучение агрегаций фрактальных кластеров частиц в коллоидах.
11. Дифракция на фракталах: изучение фрактального строения пористых структур.



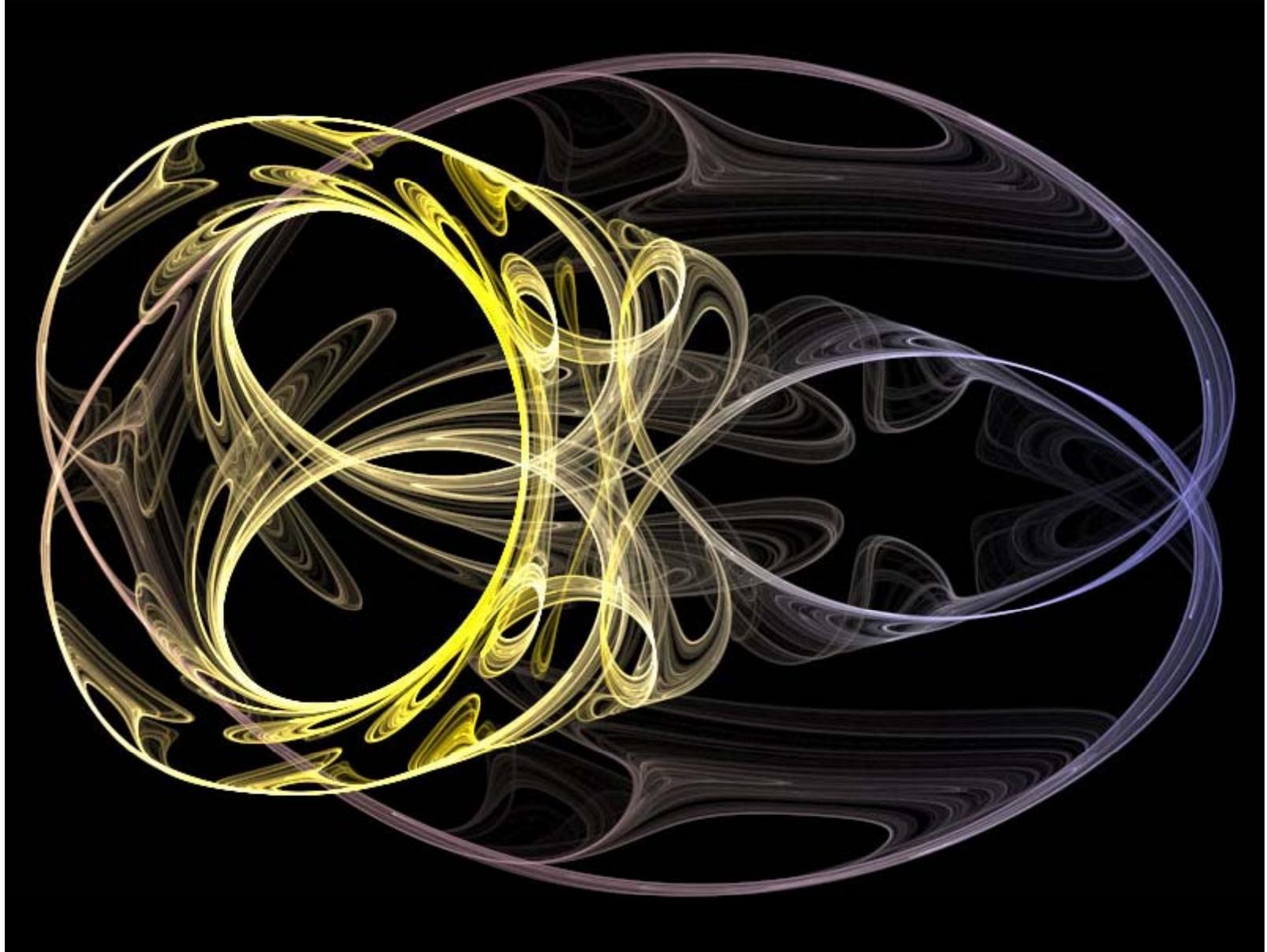




© 2001 Sizotinsky Arthur, Kiev U.A.



© 2001 Sizotinsky Arthur, Kiev U.A.



2. Самоорганизация и образование структур. Синергетика.

1. Диссипативные структуры

Рассмотрим распределенные системы, в которых в результате развития неустойчивости в однородной диссипативной среде могут возникать устойчивые пространственно-неоднородные структуры. Такие структуры называются диссипативными. Основы их теории заложил в 1952 году Алан М. Тьюринг, а сам термин предложил И.Р.Пригожин.

Общим условием развития процессов самоорганизации (самопроизвольного возникновения волн и структур) является появление неустойчивости, возникающее, если отклонение от состояния равновесия превышает критическое.

Диссипативная структура поддерживается за счет постоянного притока энергии и вещества – открытые системы.

Уравнения, описывающие процессы в системе, должны быть **нелинейными**.

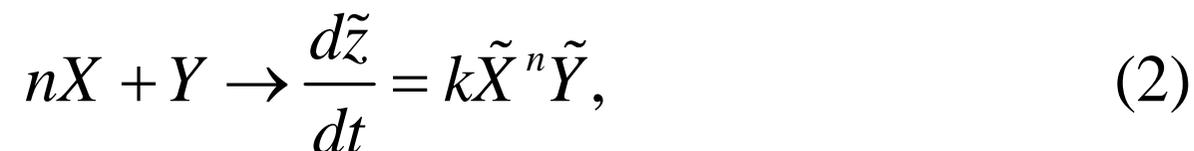
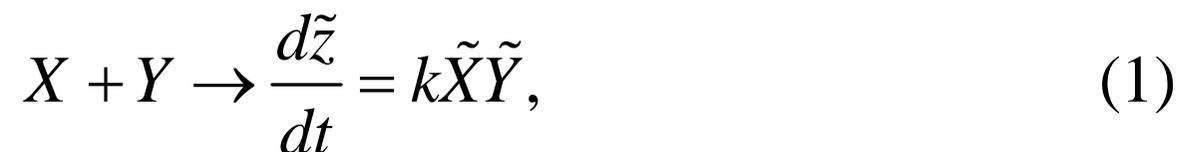
Процессы в среде должны протекать **согласованно**.

Синергетика изучает процессы образования структур в сложных самоорганизующихся системах.

2. Модель брюсселятора.

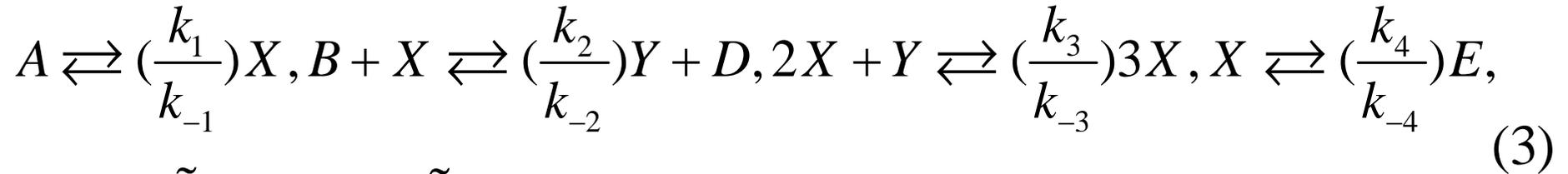
Базовая модель синергетики, предложенная в 1968 году Пригожиным и Лефевром. Позволяет выявить условия возникновения типов самоорганизации в химических и биологических системах. Представляет собой схему гипотетических химических реакций, происходящих в тонком и длинном (одномерном) сосуде-реакторе длиной L .

Закон действующих масс:



где k - постоянная реакции, $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ – концентрации.

Схема реакции:



где $\tilde{A} = const, \tilde{B} = const$, вещества X и Y остаются в реакторе, вещества D и E удаляются (система открытая),

$$k_{-i} \ll k_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Из формул (1)-(3) следует:

$$\tilde{X}_t = k_1 \tilde{A} - (k_2 \tilde{B} + k_4) \tilde{X} + k_3 \tilde{X}^2 \tilde{Y} + \bar{D}_1 \tilde{X}_{xx}, \quad (4)$$

$$\tilde{Y}_t = k_2 \tilde{B} \tilde{X} - k_3 \tilde{X}^2 \tilde{Y} + \bar{D}_2 \tilde{Y}_{xx}, \quad (5)$$

где \bar{D}_1 и \bar{D}_2 – коэффициенты диффузии.

Замена переменных:

$$k_4 t \rightarrow t, X = \left(\frac{k_3}{k_4} \right)^{\frac{1}{2}} \tilde{X}, Y = \left(\frac{k_3}{k_4} \right)^{\frac{1}{2}} \tilde{Y}, A = \left(\frac{k_1^2 k_3}{k_4^3} \right) \tilde{A},$$
$$B = \tilde{B} \frac{k_2}{k_4}, \bar{\bar{D}}_1 = \frac{\bar{D}_1}{k_4}, \bar{\bar{D}}_2 = \frac{\bar{D}_2}{k_4}. \quad (6)$$

Из формул (4)-(6) получаем:

$$X_t = A - (B + 1)X + X^2 Y + \bar{\bar{D}}_1 X_{xx}, \quad (7)$$

$$Y_t = BX - X^2 Y + \bar{\bar{D}}_2 Y_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (8)$$

$$X(x, 0) = X_0(x), \quad Y(x, 0) = Y_0(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (9)$$

$$X_x(0, t) = X_x(L, t) = 0, \quad Y_x(0, t) = Y_x(L, t) = 0. \quad (10)$$

Начально-краевая задача (7)-(10) является моделью брюсселятора.

Исследуем стационарные однородные по пространству решения.

Из формул (7) и (8) следует система:

$$A - (B + 1)X + X^2Y = 0, \quad (11)$$

$$BX - X^2Y = 0. \quad (12)$$

Единственное решение имеет вид:

$$X = A, \quad Y = \frac{B}{A}. \quad (13)$$

Будем менять $X_0(x), Y_0(x), B$. Если B невелико, то независимо от начальных данных через определённое время установятся концентрации:

$$X(x, t) = A, \quad Y(x, t) = \frac{B}{A}. \quad (14)$$

Устойчивые стационарные решения, на которые независимо от начальных данных выходят распределения параметров при небольших внешних воздействиях, называется **термодинамической ветвью**.

Зафиксируем $X_0(x)$ и $Y_0(x)$ и будем увеличивать B . Начиная с критического B_c происходит выход на немонотонные стационарные распределения концентраций, возникающие **вне термодинамической ветви** и названные Пригожиным **диссипативными структурами**.

Стационарные решения (13) удовлетворяют задаче при любом B . При $B > B_c$ появляется несколько нестационарных решений, то есть происходит **ветвление решений или бифуркация**.

Зафиксируем $B > B_c$ и будем менять $X_0(x), Y_0(x)$. При некоторых значениях B с разных классов начальных данных в одной и той же нелинейной среде происходит выход на разные стационары.

Причиной возникновения структур являются внутренние свойства системы, а поводом – вносимые флуктуации.

Для учёта флуктуаций в правые части (7) и (8) добавляют случайные функции.

Резонансные воздействия на систему в окрестности B_c : слабые воздействия вызывают сильный эффект.

Определение B_c . Линеаризуем уравнения (7), (8):

$$X = A + \bar{X}, \quad Y = \frac{B}{A} + \bar{Y}, \quad (15)$$

где $|\bar{X}| \leq A$, $|\bar{Y}| \leq \frac{B}{A}$.

Подставим (15) и (7), (8) и отбросим члены второго порядка и выше:

$$\bar{X}_t = (B-1)\bar{X} + A^2\bar{Y} + \bar{D}_1\bar{X}_{xx}, \quad (16)$$

$$\bar{Y}_t = -B\bar{X} - A^2\bar{Y} + \bar{D}_2\bar{Y}_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (17)$$

$$\bar{X}(x, 0) = X_0(x) - A, \quad \bar{Y}(x, 0) = Y_0(x) - \frac{B}{A}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (18)$$

$$\bar{X}_x(0, t) = \bar{X}_x(L, t) = 0, \quad \bar{Y}_x(0, t) = \bar{Y}_x(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (19)$$

Найдём частные решения вида $g(x) \cdot f(t)$

$$\bar{X}_m = p_m e^{\lambda_m t} \cos \frac{\pi m x}{L},$$

$$\bar{Y}_m = q_m e^{\lambda_m t} \cos \frac{\pi m x}{L}, m = 0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

Для определения $\lambda = \lambda_m$ из (16), (17), (20) получаем уравнение:

$$\lambda^2 + \lambda \left[A^2 - B + 1 + \left(\bar{D}_1 + \bar{D}_2 \right) \left(\frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right) \right] + \left[A^2 B - \left(A^2 + \bar{D}_2 \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right) \left(B - 1 - \bar{D}_1 \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right) \right] = 0, m=0, 1, \dots \quad (21)$$

Если $\operatorname{Re} \lambda_{m_1} < 0, \operatorname{Re} \lambda_{m_2} < 0$ для всех m , то термодинамическая ветвь (14) устойчива (малые B).

Если при $B = B_c$ $\lambda_{m_1} = 0, \lambda_{m_2} < 0$, то при $B > B_c$ возникают структуры.

Если при $B = B_c$ для некоторого m $\operatorname{Re} \lambda_{m_1} = \operatorname{Re} \lambda_{m_2} = 0,$
 $\operatorname{Im} \lambda_{m_1} = -\operatorname{Im} \lambda_{m_2},$ то функции \bar{X}_m и \bar{Y}_m периодические и в системе возникают колебания.

При этом обычно $\bar{D}_1 \approx \bar{D}_2$

Модель брюсселятора отражает общие черты многих систем, где возникают структуры и возможно явление самоорганизации:

- 1) Система является термодинамически открытой, то есть в ней возможен обмен энергией, веществом и т.д. с окружающей средой.**
- 2) Макроскопические процессы происходят согласованно (кооперативно, когерентно). В рассмотренном нами случае такое согласование обеспечивают диффузионные процессы.**
- 3) Отклонения от равновесия превышают критическое значение то есть рассматриваются состояния, лежащие вне термодинамической ветви.**
- 4) Процессы рассматриваются в таком диапазоне параметров, когда для описания этих процессов необходимы нелинейные математические модели.**

Отметим, что образование диссипативных структур лежит в основе дифференцирования тканей при морфогенезе.

3. Вейвлет – анализ.

1. Вейвлеты.

Слово «вейвлет» (wavelet – маленькая волна или рябь) введено А.Гроссманом и Ж.Морле в 1982 году в работе, посвященной проблеме анализа сейсмических сигналов, в которых требуется выделить и время (положение) всплеска в сигнале и его спектральный состав (масштаб).

К началу 90 – х годов вейвлет – анализ нашел широкое применение в задачах анализа временных сигналов, распознавания образов и синтеза изображений, шифровки и дешифровки информации и многих других областях.

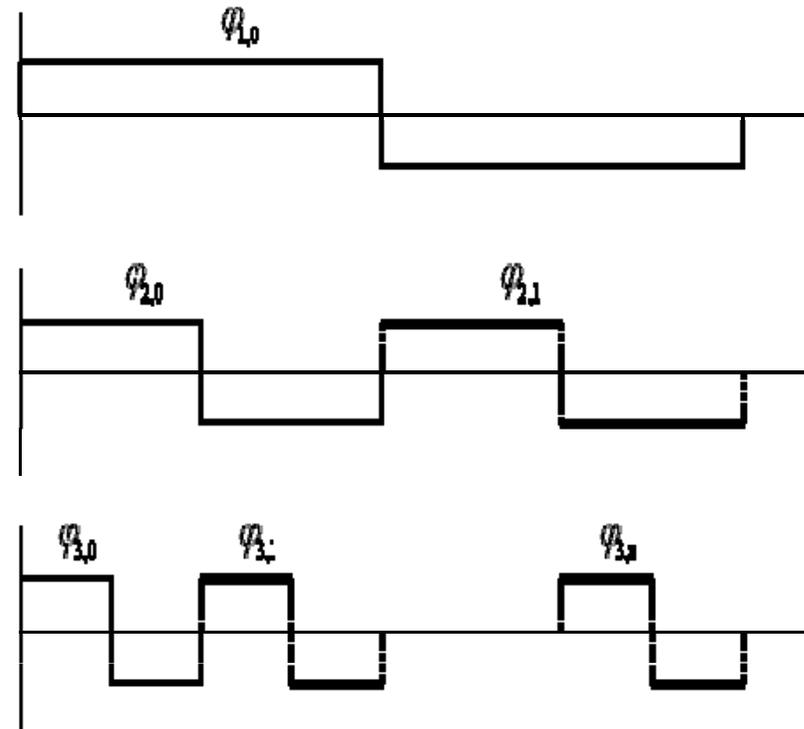
Вейвлет – анализ используется в задачах, связанных с анализом пространственных полей со сложной многомасштабной структурой (турбулентное течение), либо временных сигналов с меняющимся со временем спектральным составом (сейсмические сигналы).

Основная идея: использование базиса, каждая функция которого характеризует как определенную пространственную (временную) частоту, так и место ее локализации в физическом пространстве (во времени).

а) Система Хаара (1909г.)

Совокупность функций Хаара образует полный ортонормированный базис.

Каждая функция строго локализована в физическом пространстве (во времени), но характеризуется медленно спадающим спектром частот (как $1/\nu$).

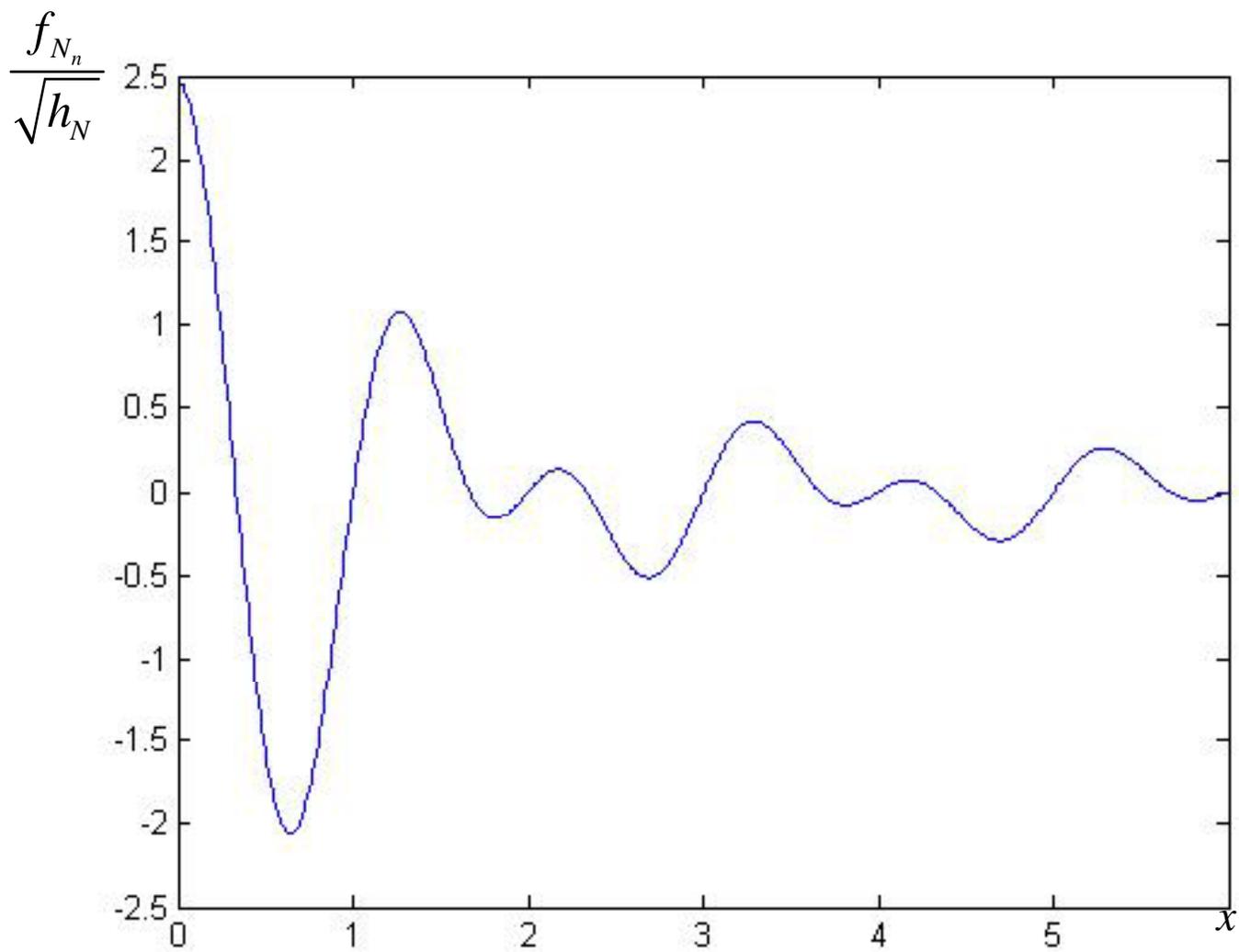


б) Функции Литлвуда – Пелли (1937г.)

Строятся путем вырезания полосы частот в пространстве Фурье.

$$f_{N_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{h_N}} \frac{\sin \left[\frac{\pi}{2h_N} (x - h_N n) \right]}{\frac{\pi}{2} (x - h_N n)} \cos \left[\frac{3\pi}{2h_N} (x - h_N n) \right]$$

Каждая функция строго локализована в пространстве частот, но медленно затухает в физическом пространстве (во времени) функции описывают осцилляции, амплитуда которых падает как 1/t.



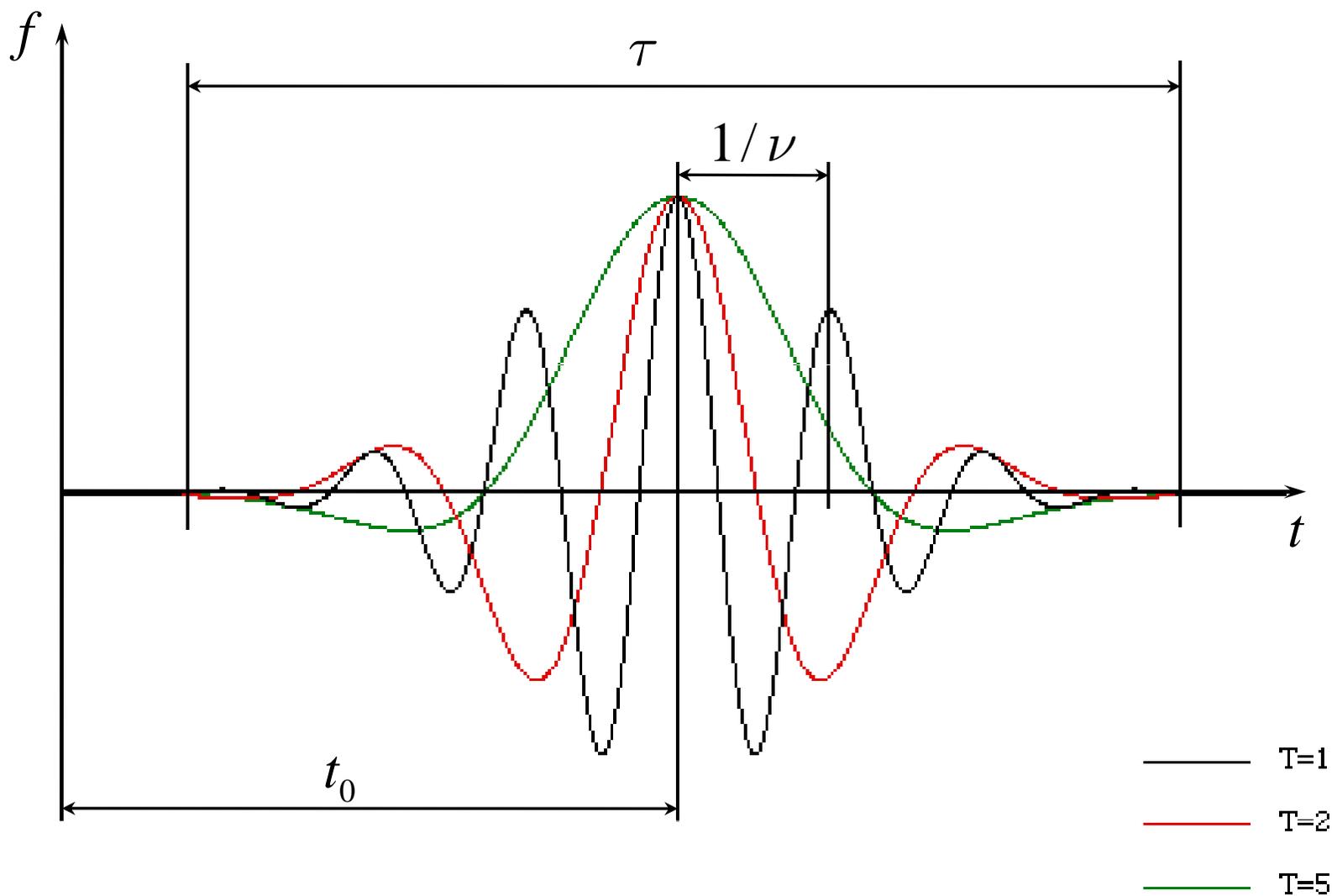
Функция Литлвуда-Пелли для $n=0$.

в) Преобразование Габора (Фурье – преобразование в окнах) (1946г.)

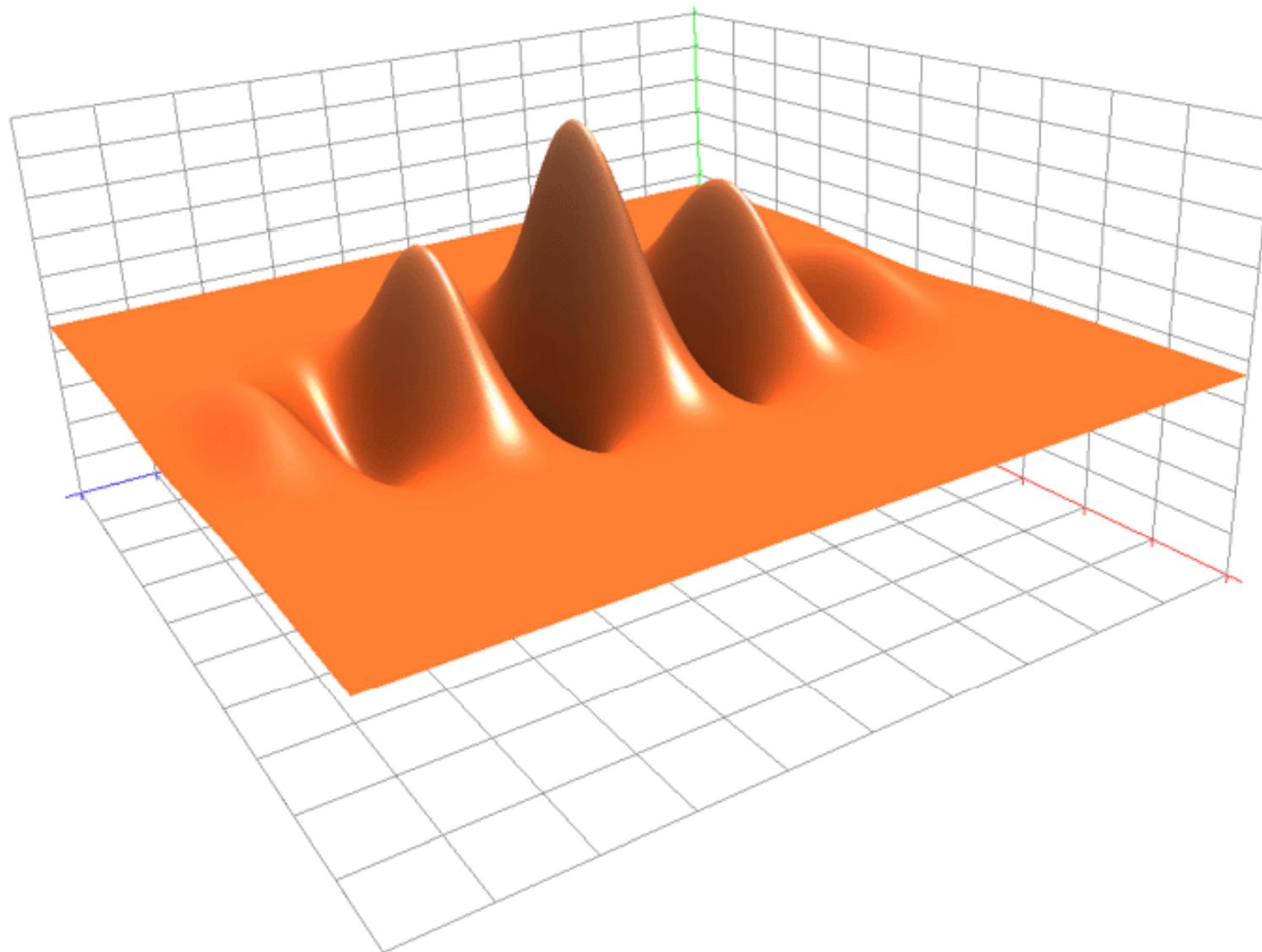
Функция Габора: гармонический сигнал, модулированный функцией Гаусса. Хорошо локализованы и в физическом пространстве (времени) и в пространстве частот. Характеризуются тремя параметрами: положением центра окна t_0 , шириной окна τ и частотой осцилляций ν .

Функции различного масштаба не являются подобными – имеют различное число осцилляций.

1-мерный случай



2-мерный случай



г) Вейвлеты

Объединяют в себе два важных свойства **подобия и выраженную локализацию в пространстве и времени.**

Чтобы быть вейвлетами семейство функций должно удовлетворять следующим требованиям:

1) Допустимость. Анализирующий вейвлет $\psi(t)$, называемый также материнским вейвлетом, должен иметь нулевое среднее значение:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (1)$$

2) Подобие. Все функции семейства получаются из анализирующего вейвлета путем масштабного преобразования и сдвига:

$$\psi_{a,b}(t) = \psi\left(\frac{t-b}{a}\right). \quad (2)$$

Получается двухпараметрическое семейство функций:
параметр a – масштаб (растяжение) функции, параметр b – положение (сдвиг) функции.

3) Обратимость. Существование обратного преобразования, однозначно восстанавливающее исходную функцию по ее вейвлет – преобразованию.

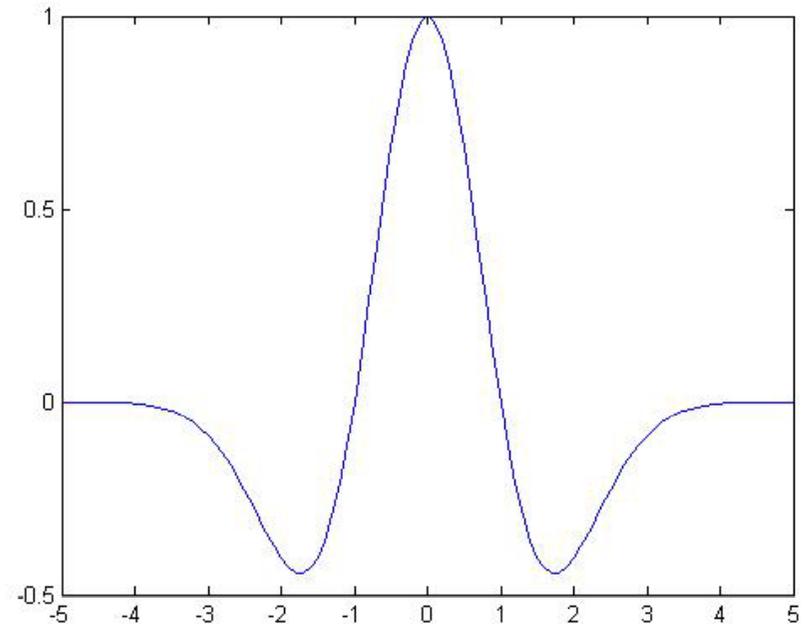
4) Регулярность. Функция $\psi(t)$ должна быть хорошо локализована и в физическом пространстве и в пространстве Фурье.

Выбор конкретного вида вейвлета зависит от целей проведенного анализа.

а) Вещественный вейвлет «мексиканская шляпа»:

$$\psi(t) = (1 - t^2)e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (3)$$

задачи, требующие хорошего пространственного разрешения и не требовательные к спектральному разрешению.

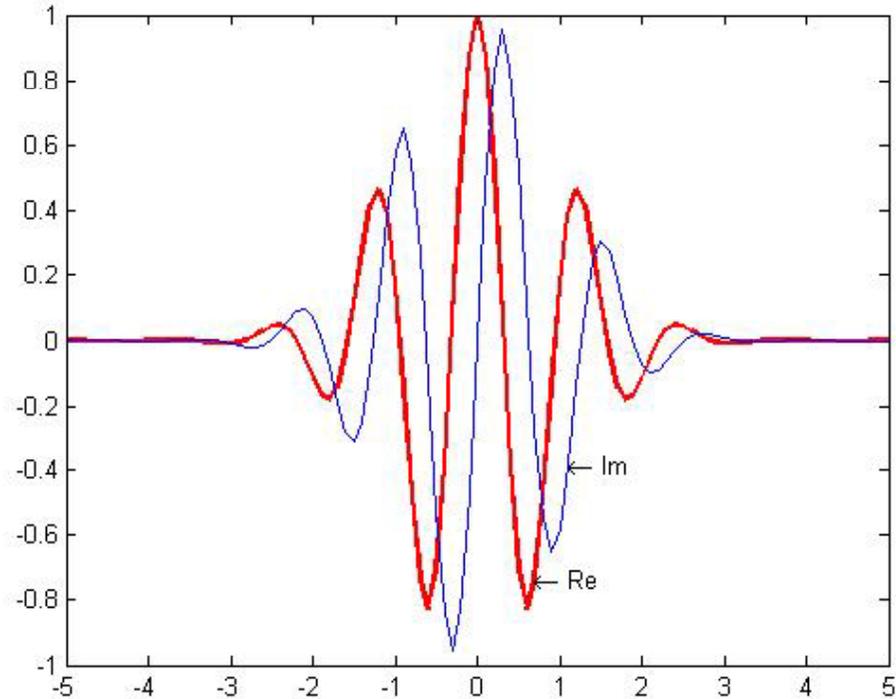


б) Комплексный вейвлет Морле:

$$\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} e^{i\omega_0 t}, \quad (4)$$

задачи, требующие лучшего
спектрального разрешения.

Отличие от функций Габора: **выбрав**
частоту для анализирующего
вейвлета



(задав число осцилляций), сжимаем или растягиваем функцию как **целое**,
не нарушая подобия отдельных функций семейства.

Преимущество вейвлет – преобразования перед преобразованием Фурье состоит в том, что оно позволяет проследить за изменением спектральных свойств сигнала со временем и указать, какие частоты (масштабы) доминируют в сигнале.

2. Непрерывное вейвлет – преобразование.

Непрерывное вейвлет – преобразование одномерной функции:

$$W(a, b) = a^k \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt, \quad (5)$$

где $\psi(t)$ - вещественная или комплексная функция удовлетворяющая условиям 1) – 4).

Если выполняется условие:

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty, \quad (6)$$

где $\hat{\psi}(\omega)$ - фурье – образ анализирующего вейвлета:

$$\hat{\psi}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (7)$$

то для преобразования (5) справедлива **формула обращения**

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) W(a,b) \frac{dadb}{a^{3+k}}. \quad (8)$$

Показатель степени масштабного множителя k выбирается в зависимости от целей анализа. При $k=-1$ равные значения вейвлет - коэффициентов $W(a,b)$ соответствуют равным амплитудам пульсаций сигнала, независимо от масштаба пульсаций.

На рисунках 1) и 2) показаны два примера вейвлет – разложения простых временных сигналов с помощью вейвлета Морле:

сигнал;

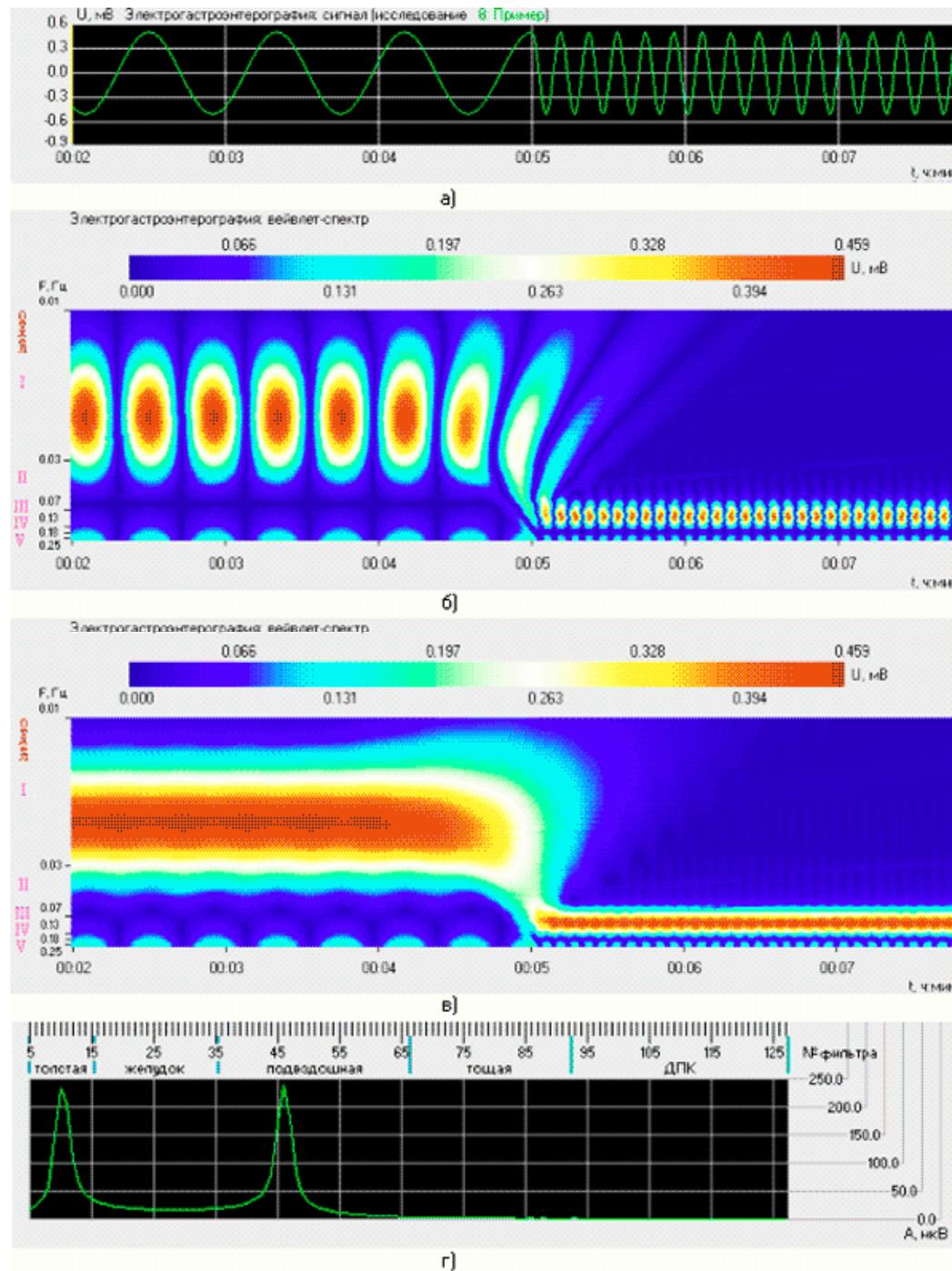
вейвлет преобразование сигнала, полученное с помощью синфазной составляющей вейвлета Морле;

вейвлет преобразование сигнала, полученное с помощью комплексного вейвлета Морле;

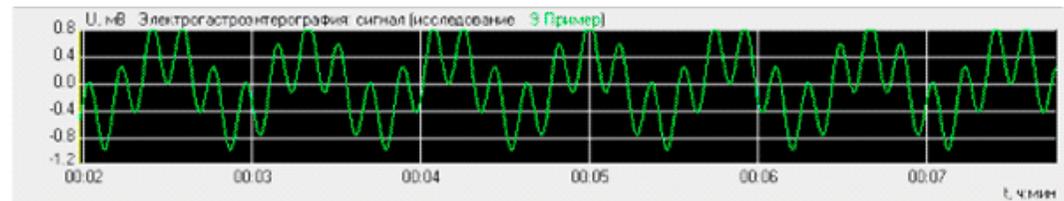
спектр сигнала, полученный с помощью преобразования Фурье.

Фурье – преобразование сигналов 1) и 2) практически не отличаются друг от друга, а вейвлет – анализ позволяет восстановить полную эволюцию спектрального сигнала во времени.

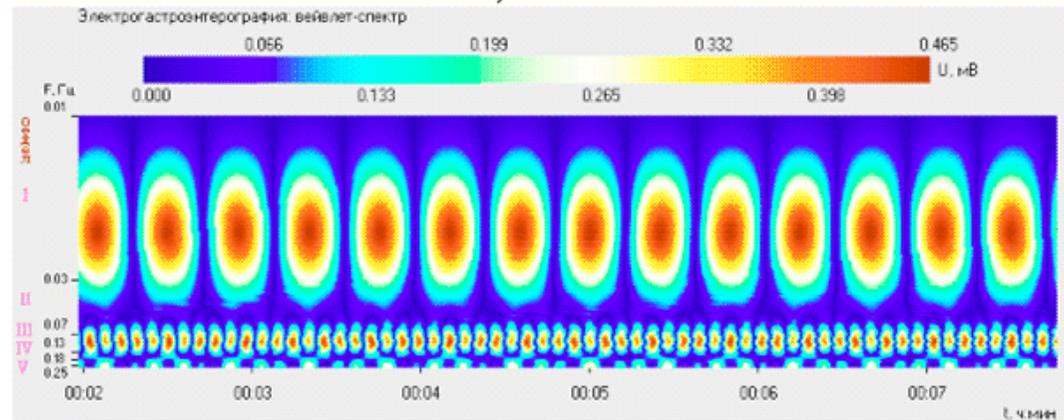
1) сигнал, состоящий из двух гармонических составляющих с разными частотами, следующие друг за другом и его спектр.



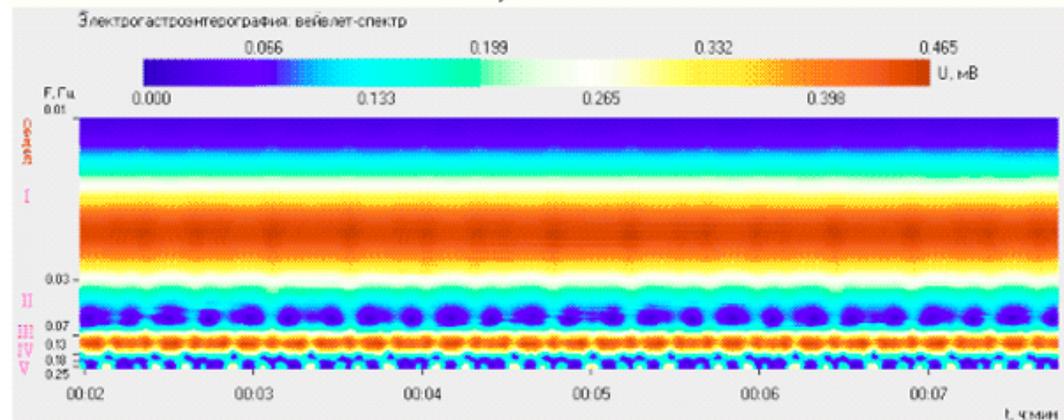
2) сигнал, состоящий из суммы двух гармонических составляющих тех же частот, что и сигнал, представленный на рис. 1), и его аналогичные вейвлеты и спектр.



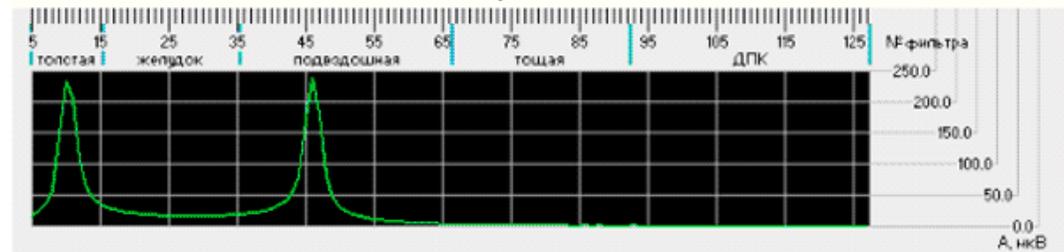
а)



б)

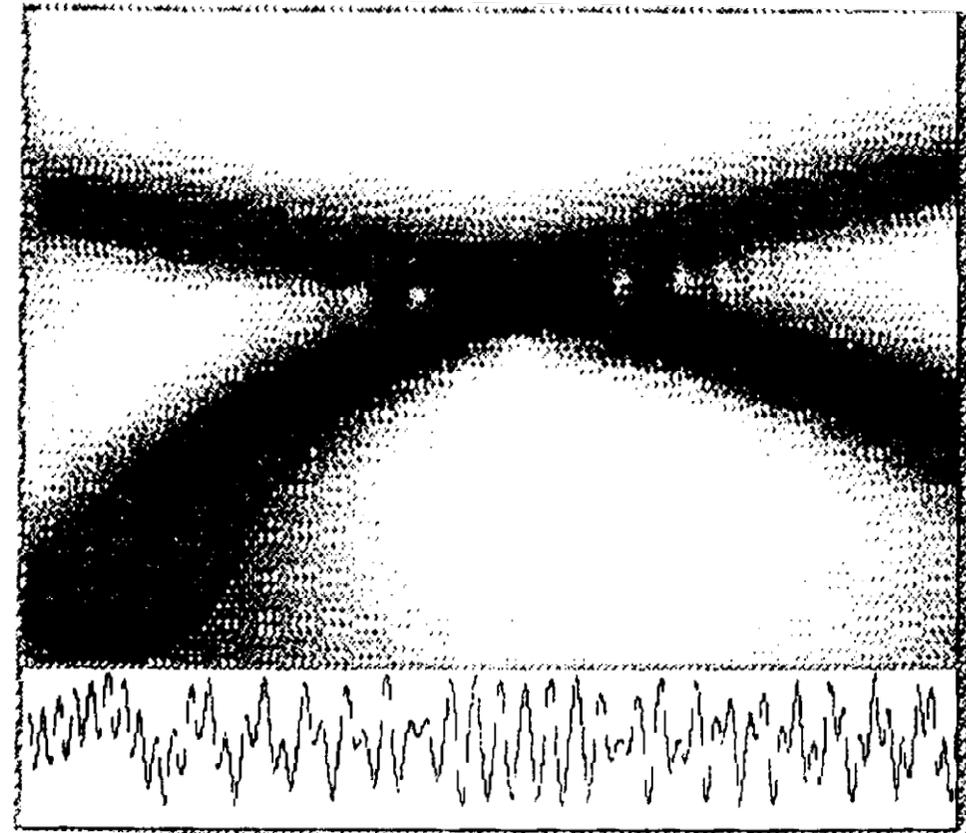


в)



г)

На рисунке 3) показан результат вейвлет – разложения сигнала, представляющего собой суперпозицию двух гармонических составляющих с непрерывно меняющимися частотами (использовался вейвлет



Морле). Вейвлет – представление позволяет получить точный вид эволюции частоты каждого из двух сигналов.

Важное свойство вейвлет – представления функций: на этапе разложения сигнала по вейвлетам и на этапе восстановления исходного сигнала по его вейвлет образу **можно использовать различные свойства вейвлетов.** Условие (6) заменяется на более мягкое условие (9):

$$C_{\phi\psi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)\hat{\phi}^*(\omega)|}{|\omega|} d\omega < \infty, \quad (9)$$

поскольку теперь один из двух вейвлетов может не удовлетворять (6), при условии, что второй вейвлет компенсирует его «недостатки». В этом случае вместо одного из вейвлетов можно использовать **сингулярную функцию** (например, δ – функцию), **не являющуюся вейвлетом.**

3 . Вейвлет – анализ временных колебаний.

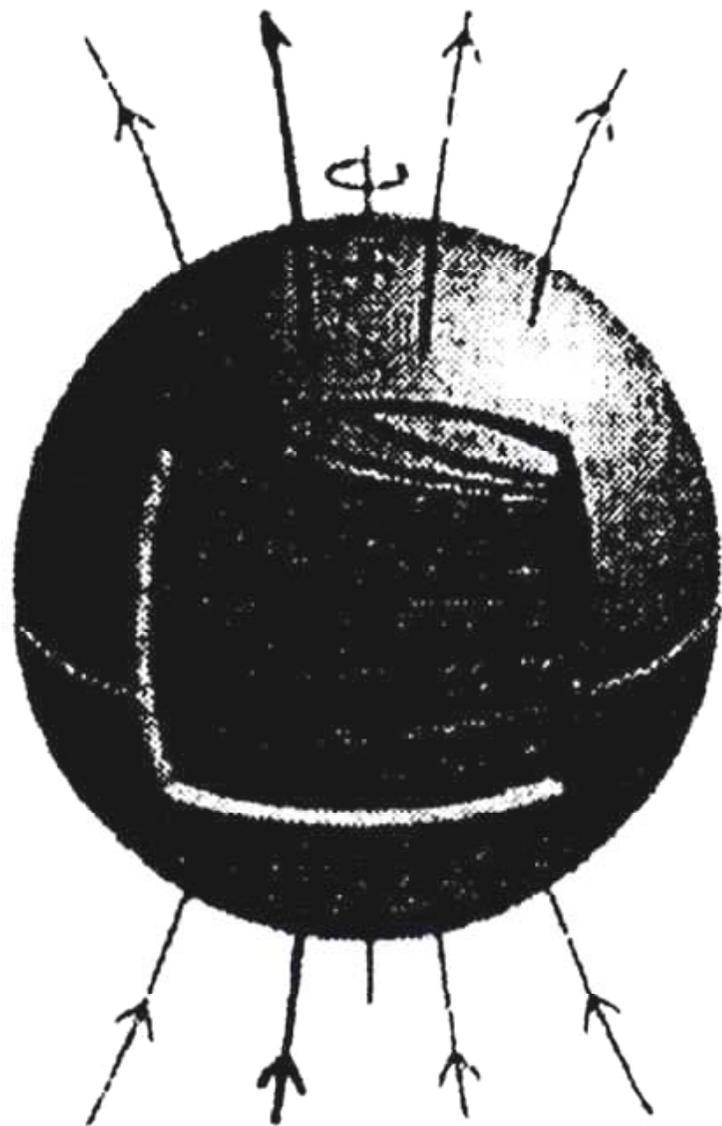
Рассмотрим вейвлет – анализ солнечной активности.

Долговременная запись среднемесячных чисел солнечных пятен начинается с наблюдений Галилея в феврале 1610 года, а с октября 1611 года наблюдения становятся довольно регулярными. Существующий в настоящее время ряд данных не имеет в астрономии аналогов по регулярности и продолжительности наблюдений.

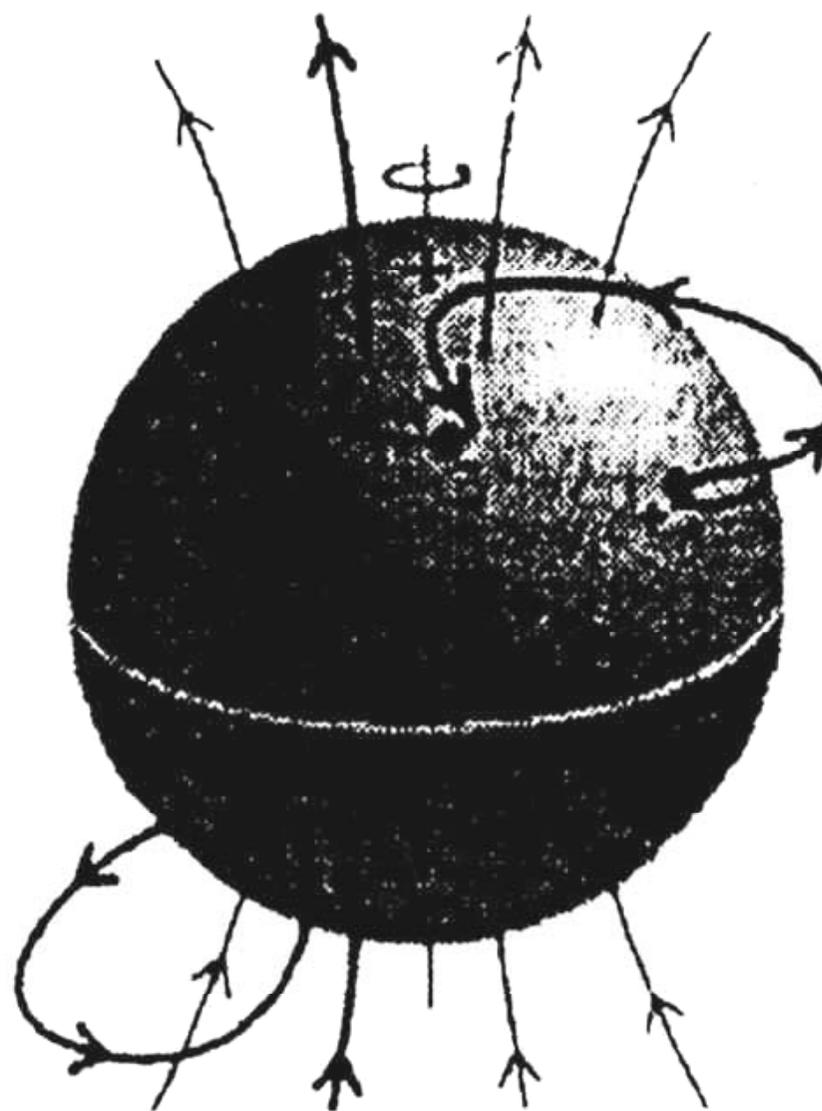
Число пятен связано с интенсивностью магнитного поля Солнца, которое имеет полоидальную компоненту и более мощную азимутальную, образующие замкнутые кольца силовых линий внутри конвективной оболочки Солнца.

Когда напряженность магнитного поля растет, на этих магнитных линиях возникают **гигантские петли**, выходящие за пределы конвективной оболочки. В местах выхода магнитное поле направлено вертикально и подавляет конвективное течение, приносящее горячую плазму из недр Солнца. В результате температура оказывается ниже, чем на остальной поверхности, и область видна как темное пятно. Чем сильнее магнитное поле, тем больше петель и тем больше пятен видно на поверхности.

Северный полюс



Северный полюс



Компоненты силовых линий магнитного поля Солнца

График изменения числа пятен – это череда пиков, каждый из которых охватывает приблизительно 11 лет.

Одиннадцатилетний солнечный цикл характеризует работу солнечного динамо – магнитогидродинамического генератора поля.

Амплитуда циклов непрерывно меняется, а временами возникают сбои. Самый заметный сбой – минимум Маундера – имел место в конце 17 – начале 18 веков.

Другое заметное ослабление солнечной активности было отмечено в начале 19 века – минимум Дальтона.

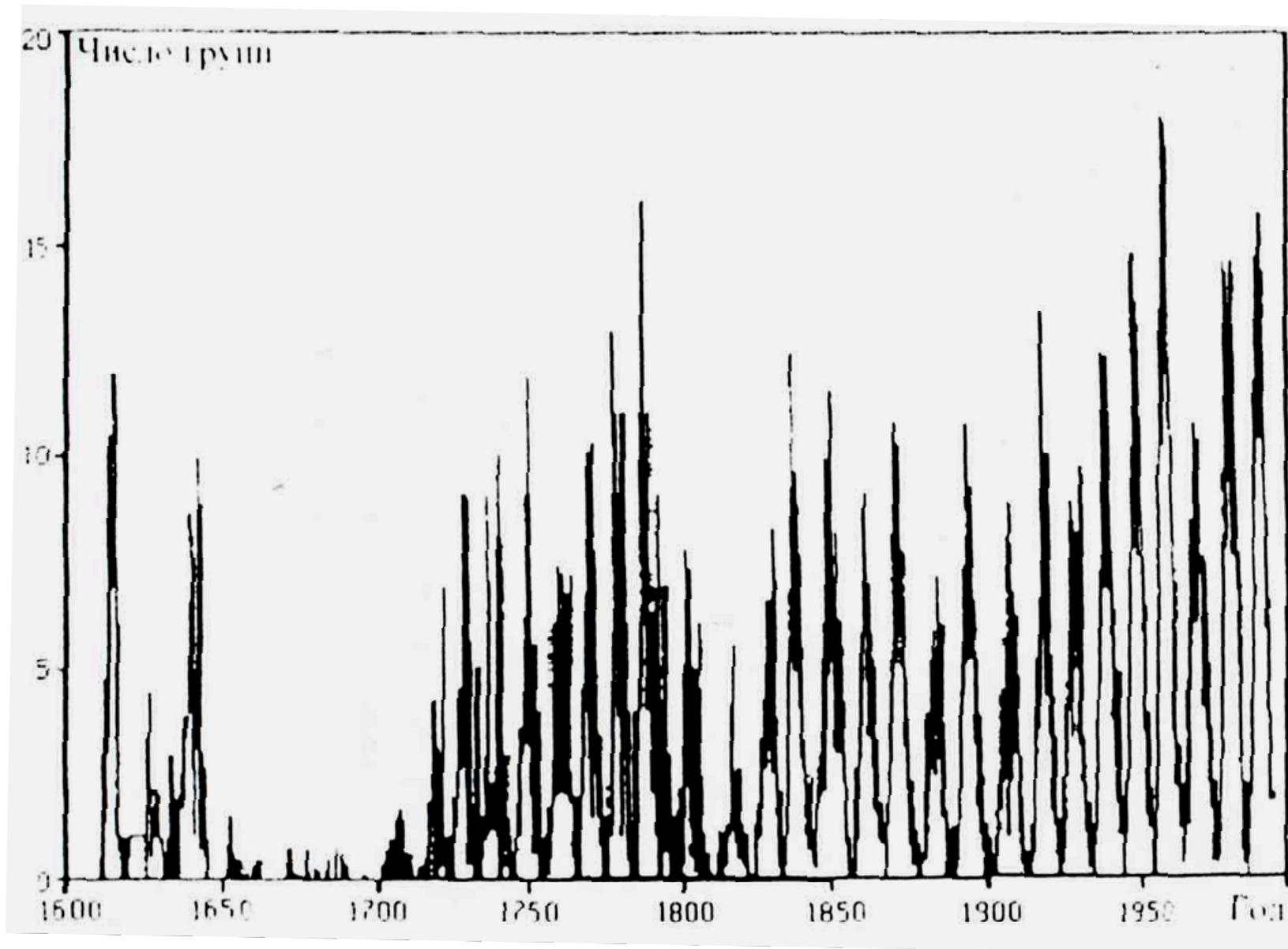
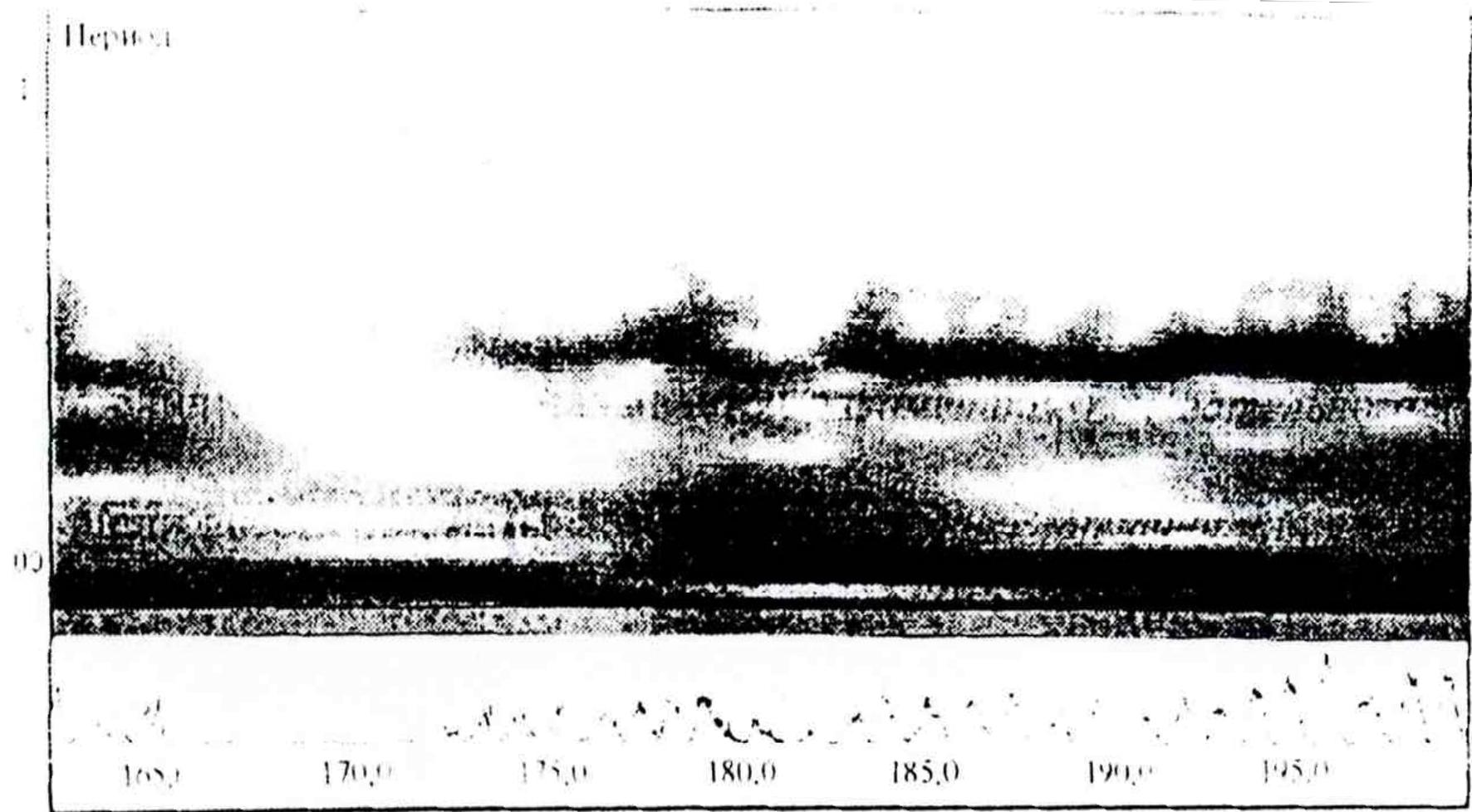


График изменения числа солнечных пятен во времени

Вейвлет – представление проектирует одномерный сигнал (который был функцией только времени) на плоскость время – частота и позволяет увидеть изменение во времени спектральных свойств сигнала. На вейвлет – плоскости одиннадцатилетнему циклу соответствует темная горизонтальная полоса (идеально ровная горизонтальная полоса соответствовала бы чисто гармоническому колебанию). Кроме основного цикла, длительностью около одиннадцати лет, отмечен еще один – приблизительно со столетней периодичностью.



**Модуль вейвлет - преобразования Морле данных графика изменения числа
солнечных пятен**

При изучении графика ранее, без использования вейвлет – метода, предполагалось наличие большого количества циклов с другой периодичностью. Все они оказались артефактами, то есть необоснованными показаниями методов, не очень хорошо приспособленных к рассматриваемой задаче. Вейвлет – анализ позволяет проследить, как меняется длительность номинального одиннадцатилетнего цикла со временем, показывая, что столетний цикл фиксирует периодические попытки механизма генерации солнечного магнитного поля дать сбой и свернуть с обычных одиннадцатилетних колебаний в новый эпизод типа минимума Маундера.

В Парижской обсерватории с 1683 года по 1718 год непрерывно регистрировались вариации видимого солнечного диаметра. Эти измерения были возобновлены в 1978 году.

В результате вейвлет – анализа данных был получен неожиданный результат, состоящий в том , что одиннадцатилетние вариации солнечного диаметра имели наибольшую амплитуду как раз во время глубокого минимума солнечной активности. По мере выхода из минимума вариации числа пятен начинают нарастать, а вариации диаметра спадать