Вопросы и задачи к зачету и экзамену по курсу
«Теория функций комплексной переменной»

1. Комплексные числа. Элементарные действия с комплексными числами. Геометрическая интерпретация комплексных чисел

1.1 Основные определения, формулы и теоремы.

- Сформулируйте определения комплексного числа, его действительной и мнимой части. Запишите комплексное число z в алгебраической форме.
- Сформулируйте определения модуля и аргумента комплексного числа, дайте их геометрическую интерпретацию. Запишите комплексное число $z \neq 0$ в тригонометрической и показательной формах.
- Сформулируйте определение числа $\overline{z}$, комплексно сопряжённого к числу z. Укажите, как связаны модули и аргументы этих чисел.
- Сформулируйте определение операции умножения комплексных чисел. Укажите, как связаны модуль и аргумент произведения комплексных чисел с модулями и аргументами множителей.
- Сформулируйте определение операции деления комплексных чисел. Укажите, как связаны модуль и аргумент частного комплексных чисел с модулями и аргументами делимого и делителя.
- Запишите формулы произведения и частного двух комплексных чисел, представленных в тригонометрической форме.
- Запишите неравенства треугольника для комплексных чисел.
- Запишите формулу возведения комплексного числа в натуральную степень. Укажите, как меняются модуль и аргумент при возведении комплексного числа в натуральную степень.
- Запишите формулу извлечения корня *n–ой* степени из комплексного числа (*n* – натуральное число). Как меняются модуль и аргумент при извлечении корня *n-ой* степени? Как располагаются значения корня *n-ой* степени на комплексной плоскости?
- Запишите формулу Муавра.
- Запишите формулу Эйлера.

- Сформулируйте определение предела последовательности $\{z_n\}$ комплексных чисел. Приведите примеры последовательности, имеющей предел, и последовательности, не имеющей предела.
- Сформулируйте теорему о связи существования предела последовательности комплексных чисел $\{z_n = x_n + iy_n\}$ с существованием пределов последовательностей действительных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.
- Сформулируйте теорему о связи существования предела последовательности $\{z_n\}$ с существованием предела последовательности $\{|z_n|\}$.

1.2 Задачи к зачету и экзамену.

1.2.1 Выразите действительную и мнимую части комплексного числа через пару комплексно сопряженных чисел.

1.2.2 Запишите комплексное число в алгебраической, тригонометрической и показательной формах:

а) $\frac{1+i}{1-i}$; б) $\frac{1}{i}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{1+i}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{1-i}$;

д) $(1+i)^{20}$; е) $(\sqrt{3}+i)^6$; ж) $(1-i)^{20}$; з) $(1+i)^{10}$.

1.2.3 Найдите модуль и аргумент комплексного числа:

а) $\frac{5i}{i+2}$; б) $\frac{5i-5}{2i+1}$; в) $\frac{4i-2}{i-1}$; г) $\frac{5i+5}{2i-1}$;

д) i^3; е) i^4; ж) $(1-i)^{10}$; з) $(1+i)^{20}$.

1.2.4 Вычислите (результат представьте в форме $a+ib$):

а) $z-\frac{1}{\overline{z}}$, если $z=i-1$; б) $z-\frac{1}{\overline{z}}$, если $z=i+1$; в) $\frac{z}{\overline{z}}$, если $z=3i+1$;

г) $\left|(1+3i)\overline{(3+i)}\right|$; д) $\left|\frac{3+i}{1-3i}\right|$; е) $\left|\left(\frac{2+4i}{3+i}\right)^2\right|$;

ж) $\left|(1+i)^6\right|$; з) $\operatorname{Im}\left(\frac{3-i}{2+i}\right)^{13}$; и) $\operatorname{Re}\left(\frac{2-i}{3+i}\right)^{11}$.

1.2.5 Найдите значение выражения $z = z_1 z_2$, если x – действительное число и

а) $z_1 = x+3i$, $z_2 = 1+2i$ и $\operatorname{Re} z = -4$; б) $z_1 = x+5i$, $z_2 = 2-i$ и $\operatorname{Re} z = 9$;

в) $z_1 = x+3i$, $z_2 = 1+2i$ и $\operatorname{Im} z = 7$; г) $z_1 = 1+ix$, $z_2 = 2x+i$ и $\operatorname{Im} z = 1$;

д) $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 5 + ix$ и $\operatorname{Re} z = 5$.

1.2.6 Изобразите на комплексной плоскости множества точек, задаваемые уравнениями и неравенствами:

а) $|z-i|+|z+i|=4$; б) $|z-i|-|z+i|=2$; в) $|z-1+i|=|z+3|$;

г) $|z|-3\operatorname{Im} z=6$; д) $3|z|-\operatorname{Re} z=12$; е) $\overline{z}=z^2$;

ж) $|z-i|<3$; з) $|z+1+i|>\sqrt{2}$; и) $1<|z-1+2i|<3$;

к) $\dfrac{\pi}{4}<\arg z<\dfrac{\pi}{3}$; л) $\pi<\operatorname{Im} z<2\pi$; м) $\dfrac{\pi}{2}<\arg(z+i)<\dfrac{3\pi}{4}$;

н) $\operatorname{Im} z>0$; о) $\operatorname{Im} iz>2$; п) $\pi<\operatorname{Re} z<2\pi$;

р) $\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z<1$; с) $|z|>\operatorname{Re} z+1$; т) $|z-2|+|z+2|>3$;

у) $|z-i|+|z+i|<5$; ф) $|z+i|>|z-1|$; х) $2|z|>|1+z^2|$.

1.3 Теоремы с доказательством.

- Выведите формулы для произведения комплексных чисел в тригонометрической и показательной форме.
- Выведите формулы для отношения комплексных чисел в тригонометрической и показательной форме.
- Докажите теорему о связи существования предела последовательности комплексных чисел $\{z_n = x_n + iy_n\}$ с существованием пределов последовательностей действительных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.
- Докажите, что из существования предела последовательности $\{z_n\}$ следует
  существование предела последовательности $\{|z_n|\}$.
- Докажите, что из существования пределов последовательностей $\{|z_n|\}$ и $\{\arg z_n\}$
  следует существованием предела последовательности $\{z_n\}$.

1.4 Теоретические задачи и задачи повышенной сложности.

1.4.1 Вычислите, используя формулу Эйлера

а) $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos kx$; б) $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$.

1.4.2 Пусть последовательность $\{z_n\}$ имеет предел. Следует ли отсюда, что
последовательность $\{\arg z_n\}$ имеет предел? Ответ обоснуйте.

1.4.3 Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \neq 0,\ \ z_n \neq 0$ для любого n и $\arg a = \varphi_0$. Докажите, что существует такая последовательность $\{\varphi_n\}$, что $\varphi_n = \arg z_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi_0$.

2. Функции комплексной переменной. Решение простейших уравнений

2.1 Основные определения, формулы и теоремы.

- Сформулируйте определение однозначной функции. Приведите пример.
- Сформулируйте определение многозначной функции. Приведите пример.
- Сформулируйте определение функции, однолистной на некотором множестве. Приведите пример.
- Запишите формулу возведения комплексного числа в целую степень.
- Сформулируйте определение корня n -ой степени из комплексного числа.
- Сформулируйте определение показательной функции e^z.
- Сформулируйте определения тригонометрических функций $\sin z,\ \cos z,\ \operatorname{tg} z,\ \operatorname{ctg} z$.
- Сформулируйте определения гиперболических функций $\operatorname{sh} z,\ \operatorname{ch} z,\ \operatorname{th} z,\ \operatorname{cth} z$.
- Сформулируйте определение логарифмической функции $\operatorname{Ln} z$.
- Сформулируйте определение общей степенной функции $z^a,\ \ a \neq 0$.
- Сформулируйте определение дробно-линейной функции.
- Сформулируйте определение функции Жуковского.

2.2 Задачи к зачету и экзамену.

2.2.1 Вычислите (найдите все значения). Результат представьте в форме $a+ib$, где a и b действительные числа.

а) $\cos(2+i)$; б) $\sin 2i$; в) $\cos \pi i$; г) $\operatorname{tg}(2-i)$;
д) $\operatorname{Ln} 2$; е) $\ln 2$; ж) $\operatorname{Ln} i$; з) $\operatorname{Ln}(2-3i)$;
и) $1^{\left(\frac{1+i}{1-i}\right)}$; к) i^{π}; л) π^{i}; м) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{i}$.

2.2.2 Найдите все решения уравнения. Результат представьте в форме $a+ib$, где a и b действительные числа.

а)	$z^3-8=0$;	б)	$z^4-1=0$;	в)	$z^4+1=0$;
г)	$z^2+z+1=0$;	д)	$z^2-4z+13=0$;	е)	$\lvert z\rvert=z^2$;
ж)	$\sin z=2$;	з)	$\cos z=i$;	и)	$\operatorname{tg} z=2+i$;
к)	$\sin z+\cos z=2$;	л)	$\sin z-\cos z=3$;	м)	$e^{2z}+e^{z}=3$;
н)	$e^{z}+i=0$;	о)	$\operatorname{ch} z=i$;	п)	$\operatorname{ch} z-\operatorname{sh} z=1$;
р)	$\operatorname{sh} z-\operatorname{ch} z=2i$.				

2.3 Теоремы с доказательством.

- Выведите формулу Муавра.
- Сформулируйте и докажите основные свойства комплексной экспоненты $e^{i\varphi}$.

2.4 Теоретические задачи и задачи повышенной сложности.

2.4.1 Найдите сумму и произведение всех корней уравнения $z^n+a^n=0,\ a>0$.

2.4.2 Найдите сумму и произведение всех корней уравнения $z^n-a^n=0,\ a>0$.

2.4.3 Выведите формулы:

а) $\operatorname{Arccos} z=-i\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$; б) $\operatorname{Arcsin} z=-i\operatorname{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)$;

в) $\operatorname{Arctg} z=\dfrac{i}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{i+z}{i-z}$.

2.4.4 Запишите главное значение функции $f(z)=\sqrt{z}$, где $z=x+iy$, в виде $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ в области а) $\operatorname{Im} z>0$; б) $\operatorname{Re} z>0$.

3. Условия Коши-Римана. Аналитические и гармонические функции.

3.1 Основные определения, формулы и теоремы.

- Сформулируйте определение функции комплексной переменной, дифференцируемой в точке. Приведите пример.
- Сформулируйте, в чем состоит геометрический смысл аргумента производной аналитической функции.
- Сформулируйте необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции в точке.
- Сформулируйте определение функции, аналитической в области, не содержащей точку $z=\infty$.
- Сформулируйте необходимые и достаточные условия аналитичности функции в области, не содержащей точку $z=\infty$.

- Сформулируйте определение функции, гармонической в некоторой области.
- Сформулируйте определение сопряжённых гармонических в некоторой области функций.
- Сформулируйте, как связаны аналитичность функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ с гармоничностью функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$.
- Запишите условия Коши–Римана в случае, когда $z=x+iy$, $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.
- Запишите условия Коши–Римана в случае, когда $z=re^{i\varphi}$, $w=f(z)=u(r,\varphi)+iv(r,\varphi)$.
- Запишите условия Коши–Римана в случае, когда $z=x+iy$, $w=f(z)=R(x,y)\cdot e^{i\Phi(x,y)}$.
- Запишите условия Коши–Римана в случае, когда $z=re^{i\varphi}$, $w=f(z)=R(r,\varphi)\cdot e^{i\Phi(r,\varphi)}$.

3.2 Задачи к зачету и экзамену.

3.2.1 Исследуйте на дифференцируемость функции:

а) $f(z)=\operatorname{Re}z+\operatorname{Im}z$; б) $f(z)=z+\overline{z}$; в) $f(z)=\operatorname{Re}z+\operatorname{Im}\overline{z}$;

г) $f(z)=z^2+\left(\overline{z}\right)^2$; д) $f(z)=\operatorname{Im}\overline{z}$; е) $f(z)=\overline{z}\cdot\operatorname{Im}z$;

ж) $f(z)=\operatorname{Re}z\cdot\operatorname{Im}z$.

3.2.2 Определите, является ли функция $f(z)$ аналитической:

а) $f(z)=\operatorname{Re}\left(z^2\right)$; б) $f(z)=\operatorname{Im}\left(z^2\right)$; в) $f(z)=|z|^2\cdot\operatorname{Re}z$;

г) $f(z)=|z|^2\cdot\operatorname{Im}z$; д) $f(z)=\overline{z}\cdot\operatorname{Re}z$; е) $f(z)=z\cdot\operatorname{Im}\overline{z}$;

ж) $f(z)=\left(\overline{z}\right)^2$; з) $f(z)=z^2+|\overline{z}|^2$; и) $f(z)=z^2+\left(\overline{z}\right)^2$.

3.2.3 Проверьте, выполняются ли условия Коши-Римана для функций:

а) $f(z)=\dfrac{i}{z}$; б) $f(z)=z^2$; в) $f(z)=\left(z+2i\right)^3$;

г) $f(z)=e^{iz}$; д) $f(z)=\sin 2z$; е) $f(z)=\operatorname{ch}z$;

ж) $f(z)=\overline{z}$; з) $f(z)=\dfrac{1}{2}\cdot\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$; и) $f(z)=z^n,\ n\in N$;

к) $f(z)=\ln|z|+i\arg z$; л) $f(z)=z\cdot|z|$; м) $f(z)=z\cdot\operatorname{Re}z$.

3.2.4 Докажите, что указанные ниже функции могут быть действительной $u(x,y)$ или мнимой $v(x,y)$ частью аналитической функции комплексной переменной $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, где $z=x+iy$. Найдите функцию $f(z)$.

а) $u(x,y)=x^3-3xy^2-x$;

б) $u(x,y)=x^2-y^2+5x+y-\dfrac{y}{x^2+y^2}$;

в) $v(x,y)=3x^2y-y^3-y$;

г) $v(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$;

д) $v(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)+x^3-2y$.

3.3 Теоремы с доказательством.

- Докажите теорему о необходимых и достаточных условиях дифференцируемости функции в точке.
- Выведите соотношения Коши–Римана в случае, когда $z=x+iy$, $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.
- Выведите соотношения Коши–Римана в случае, когда $z=x+iy$, $w=f(z)=R(x,y)\cdot e^{i\Phi(x,y)}$.
- Выведите соотношения Коши–Римана в случае, когда $z=re^{i\varphi}$, $w=f(z)=u(r,\varphi)+iv(r,\varphi)$.

3.4 Теоретические задачи и задачи повышенной сложности.

3.4.1 Докажите, что $f(z)=z\operatorname{Re}z$ дифференцируема только в точке $z=0$ и найдите $f'(0)$.

3.4.2 Докажите, что для функции $f(z)=\sqrt{|\operatorname{Re}z\cdot\operatorname{Im}z|}$ в точке $z=0$ выполняются условия Коши-Римана, но $f'(0)$ не существует.

3.4.3 Пусть $w=f(z)$ обладает следующими свойствами в точке z: u и v - дифференцируемые функции $(w=u+iv)$; существует $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\arg\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$. Докажите, что функция $w=f(z)$ дифференцируема в точке z.

3.4.4 Пусть $w=f(z)$ обладает следующими свойствами в точке z: u и v - дифференцируемые функции $(w=u+iv)$; существует $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\left|\dfrac{\Delta w}{\Delta z}\right|$. Докажите, что либо функция $w=f(z)$, либо функция $w=\overline{f}(z)$ дифференцируема в точке z.

3.4.5 Пусть в области $D:-\pi<\arg z<\pi$ задана функция $f(z)=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi}{n}}$, $z=re^{i\varphi}$, $n\in N$, $n\geq 2$. Докажите, что $f(z)$ является аналитической в D и $f'(z)=\dfrac{f(z)}{nz}$.

3.4.6 Выясните, будет ли гармонической функция u^2, если u гармоническая функция?

3.4.7 Пусть функция $f(z)$ является аналитической в некоторой области. Является ли указанная ниже функция $u(x,y)$ гармонической в этой области? Ответ обоснуйте.
а) $u(x,y)=|f(z)|$; б) $u(x,y)=\ln|f(z)|$; в) $u(x,y)=\arg f(z)$.

4. Интеграл по кривой на комплексной плоскости. Интегральная формула Коши.

4.1 Основные определения, формулы и теоремы.

- Сформулируйте определение интеграла от непрерывной функции комплексной переменной вдоль кусочно-гладкой кривой.
- Запишите формулу вычисления интеграла от непрерывной функции комплексной
- переменной вдоль кусочно-гладкой кривой через определённый интеграл.
- Запишите неравенство для модуля интеграла.
- Сформулируйте теорему Коши для односвязной области.
- Сформулируйте теорему Коши для ограниченной области.
- Сформулируйте теорему Коши для многосвязной области.
- Сформулируйте теорему об аналитичности интеграла с переменным верхним пределом.
- Сформулируйте определение первообразной для функции $f(z)$, заданной в некоторой области.
- Запишите формулу Ньютона–Лейбница и укажите условия её применимости.
- Запишите интегральную формулу Коши для односвязной области.
- Запишите интегральную формулу для производной порядка n аналитической функции.
- Сформулируйте определение интеграла типа Коши.
- Сформулируйте теорему о среднем.
- Сформулируйте теорему Лиувилля.
- Сформулируйте теорему Морера.
- Сформулируйте принцип максимума модуля аналитической функции.

- Сформулируйте принцип минимума модуля аналитической функции.

4.2 Задачи к зачету и экзамену.

Вычислите интегралы по указанным кривым на комплексной плоскости (первой указана начальная точка интегрирования).

4.2.1 $\int_L z\,dz$ а) по отрезку прямой, соединяющему точки $z=0$ и $z=1+i$;

б) по дуге параболы $y=x^2$, соединяющей точки $z=0$ и $z=1+i$;

в) по кривой, состоящей из двух отрезков прямых, соединяющих точки $z=0$, $z=1$ и $z=1+i$.

4.2.2 $\int_L \overline{z}\,dz$ а) по отрезку прямой, соединяющему точки $z=0$ и $z=1+i$;

б) по дуге параболы $y=x^2$, соединяющей точки $z=0$ и $z=1+i$;

в) по кривой, состоящей из двух отрезков прямых, соединяющих точки $z=0$, $z=1$ и $z=1+i$.

4.2.3 $\int_L |z|^2\,dz$ а) по отрезку прямой, соединяющему точки $z=-2i$ и $z=2i$;

б) по дуге окружности $|z|=2,\ \operatorname{Re} z\ge 0$.

4.2.4 $\int_L z^2\,dz$ а) по отрезку прямой, соединяющему точки $z=-2i$ и $z=2i$;

б) по дуге окружности $|z|=2,\ \operatorname{Re} z\ge 0$.

4.2.5 $\oint\limits_{|z|=R} \frac{dz}{z}$ (обход окружности $|z|=R$ в положительном направлении).

4.2.6 $\oint\limits_{|z|=R} \frac{dz}{\overline{z}}$ (обход окружности $|z|=R$ в положительном направлении).

Вычислите интегралы, используя интегральную формулу Коши:

4.2.7 а) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z dz}{(z+1)^3}$; б) $\oint\limits_{|z+i|=2} \frac{\sin z dz}{z(1-z)^2}$; в) $\oint\limits_{|z-3|=3} \frac{z\,dz}{z^4-1}$.

4.2.8 $\oint\limits_C \dfrac{dz}{z(z^2-1)}$ (C – замкнутая простая кусочно-гладкая кривая, не проходящая через точки $z=0$, $z=1$ и $z=-1$). Найдите все возможные значения указанного интеграла при различных положениях контура C.

4.3 Теоремы с доказательством.

- Докажите теорему Коши для односвязной области.
- Докажите теорему Коши для многосвязной области.
- Докажите теорему об аналитичности интеграла с переменным верхним пределом.
- Докажите интегральную формулу Коши для односвязной области.
- Докажите аналитичность интеграла типа Коши.
- Докажите интегральную формулу для производной порядка n аналитической функции.
- Выведите формулу Ньютона-Лейбница.
- Докажите принцип максимума модуля аналитической функции.
- Докажите теорему Лиувилля.
- Докажите теорему о среднем.
- Докажите теорему Морера.

4.4 Теоретические задачи и задачи повышенной сложности.

4.4.1 Является ли функция $f(z)=\int\limits_L \dfrac{\operatorname{Re}\xi}{\xi-z}d\xi$, где L–окружность $|z|=1$, проходимая против часовой стрелки, аналитической в круге $|z|<1$? Ответ обоснуйте.

4.4.2 Имеет ли функция $f(z)=\dfrac{1}{z}$ первообразную в области $0<|z|<2$? Ответ обоснуйте.

4.4.3 Вычислите интеграл $\oint\limits_{|z-z_0|=R} \dfrac{dz}{z-z_0}$. Объясните, почему ответ не зависит от R и от z_0.

4.4.4 Вычислите интеграл $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{dz}{z}$. Поясните, почему, несмотря на то, что интегрирование ведется по замкнутому контуру, целиком лежащему в области $1<|z|<3$, которая является областью аналитичности функции $f(z)=\dfrac{1}{z}$, интеграл отличен от нуля.

4.4.5 Вычислите интеграл $\oint\limits_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^m\,dz$ для различных целых значений m.

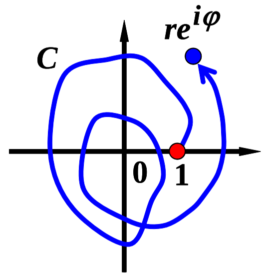
4.4.6 Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $|z|<R$ и непрерывна в замкнутом круге
$|z|\le R$. Докажите, что для любой точки z, принадлежащей кругу $|z|<R$, выполнено неравенство $|f(z)|\le\dfrac{MR}{R-|z|}$, где $M=\max\limits_{|z|=R}|f(z)|$.

4.4.7 Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $|z|<1$ и непрерывна в замкнутом круге
$|z|\le 1$, причем $f(z)\equiv \mathrm{const}\ne 0$ при $|z|=1$. Докажите, что тогда либо $f(z)\equiv \mathrm{const}$ в круге $|z|<1$, либо $f(z)$ имеет нуль в этом круге.
Указание: воспользуйтесь принципом максимума модуля аналитической функции.

4.4.8 Пусть $f(z)$ является аналитической на всей комплексной плоскости, причём $\sup\limits_{z\in\mathbb{C}}|f(z)|\le 2$, $f(1)=1$. Найдите $f(i)$.

4.4.9 Существует ли функция $f(z)$, аналитическая на всей комплексной плоскости и
удовлетворяющая условиям $f(0)=0$ и $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=1$? Ответ
обоснуйте.

4.4.10 Вычислите интеграл $\int\limits_C \dfrac{dz}{z}$, где кусочно-гладкий контур C изображен на рисунке



5. Степенные ряды. Ряд Тейлора.

5.1 Основные определения, формулы и теоремы.

- Сформулируйте определение равномерной сходимости функционального ряда.
- Сформулируйте теорему о почленном интегрировании функционального ряда.

- Сформулируйте первую теорему Вейерштрасса о функциональных рядах.
- Сформулируйте вторую теорему Вейерштрасса о функциональных рядах.
- Сформулируйте определения степенного ряда, радиуса и круга сходимости степенного ряда.
- Сформулируйте теорему Абеля о степенных рядах.
- Сформулируйте теорему Коши–Адамара о степенных рядах.
- Запишите формулу Коши–Адамара для радиуса сходимости степенного ряда.
- Сформулируйте теорему об аналитичности суммы степенного ряда.
- Сформулируйте теорему о представлении аналитической функции рядом Тейлора.
- Запишите дифференциальную и интегральную формулы для коэффициентов разложения аналитической функции в степенной ряд.

5.2 Задачи к зачету и экзамену.

5.2.1 Определите область сходимости степенного ряда, исследуйте сходимость ряда в точках границы:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{1-i}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{in}(z-2)^n$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}i^n(z+1)^n$;

г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\cos(in)(z-i)^n$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi i}{n}(z+1-i)^n$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{ch}\frac{i}{n}(z+i)^n$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n z^n$; з) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(3+(-1)^n\right)^n(z+2)^n$; к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z^{n!}$.

5.2.2 Разложите функцию $f(z)$ в ряд Тейлора с центром в указанной точке. Найдите радиус сходимости полученного ряда.

а) $f(z)=\frac{(1+z)^2}{z}$ с центром в точке $z=1$; с центром в точке $z=-1$.

б) $f(z)=\frac{(z-1)^2}{2-z}$ с центром в точке $z=1$; с центром в точке $z=0$.

в) $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ с центром в точке $z=0$; с центром в точке $z=1$.

г) $f(z)=\cos z$ с центром в точке $z=0$; с центром в точке $z=-\dfrac{\pi}{4}$.

д) $f(z)=\sin(2z+1)$ с центром в точке $z=0$; с центром в точке $z=-1$.

е) $f(z)=\dfrac{1}{3z+1}$ с центром в точке $z=-2$; с центром в точке $z=0$.

ж) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+i}$ с центром в точке $z=0$; с центром в точке $z=-1$.

з) $f(z)=\ln z$ с центром в точке $z=1$; с центром в точке $z=-1$.

и) $f(z)=\ln(2-z)$ с центром в точке $z=0$; центром в точке $z=1$.

5.2.3 Запишите 3 первых ненулевых члена разложения функции $f(z)$ в ряд Тейлора с центром в точке $z=0$:

а) $f(z)=\dfrac{\operatorname{ch}\sqrt{z}}{1+z^2}$; б) $f(z)=\dfrac{\cos\sqrt{z}}{1+z^2}$; в) $f(z)=\operatorname{tg} z$; г) $f(z)=\ln\cos z$.

5.3 Теоремы с доказательством.

- Докажите теорему о почленном интегрировании функционального ряда.
- Докажите первую теорему Вейерштрасса о функциональных рядах.
- Докажите вторую теорему Вейерштрасса о функциональных рядах.
- Докажите теорему об аналитичности суммы степенного ряда.
- Докажите теорему Абеля о степенных рядах.
- Докажите теорему Коши–Адамара о степенных рядах.
- Докажите теорему о представлении аналитической функции рядом Тейлора.

5.4 Теоретические задачи и задачи повышенной сложности.

5.4.1 Исследуйте на равномерную сходимость функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n^2}$ в замкнутом круге $|z|\le 1$.

5.4.2 Опишите множество особых точек суммы степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^{2^n}$ на границе его круга сходимости.

5.4.3 Найдите радиус сходимости ряда Маклорена функции $f(z)=\dfrac{1}{1+e^z}$.

6. Единственность задания аналитической функции. Аналитическое продолжение.

6.1 Основные определения, формулы и теоремы.

- Дайте определение нуля $z_0 \neq \infty$ аналитической функции.
- Дайте определение нуля $z_0 \neq \infty$ порядка m аналитической функции.
- Сформулируйте теорему о нулях аналитической функции.
- Сформулируйте теорему единственности задания аналитической функции.
- Дайте определение аналитического продолжения функции $f(z)$, заданной
первоначально на некотором множестве.
- Сформулируйте принцип аналитического продолжения.
- Запишите формулу аналитического продолжения через границу области.

6.3 Теоремы с доказательством.

- Докажите теорему о нулях аналитической функции.
- Докажите теорему единственности задания аналитической функции.
- Докажите принцип аналитического продолжения.
- Докажите формулу аналитического продолжения через границу области.

6.4 Задачи повышенной сложности и теоретические задачи.

6.4.1 Пусть функция $f(z)$ является аналитической в области D, ограниченной простой замкнутой кусочно гладкой кривой, и непрерывной в замкнутой области $\bar{D}$. Кроме того, $f(z) \equiv 0$ на какой-либо дуге границы. Докажите, что $f(z) \equiv 0$ в $\bar{D}$.

6.4.2 Пусть $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$. Докажите, что функцию $f(z)$ нельзя аналитически продолжить за пределы круга $|z|<1$. Указание: докажите, что $f(z) \to \infty$ при $z \to e^{i\frac{2\pi p}{q}}$ по радиусу, где p и q -- взаимно простые числа.

6.4.3 Пусть $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{2^n}$. Докажите, что функцию $f(z)$ нельзя аналитически продолжить за пределы круга $|z|<1$. Указание:

докажите, что $f(z) \to \infty$ при $z \to 1$ по радиусу, и воспользуйтесь тождеством $f(z) = z^2 + z^4 + ... + z^{2^n} + f\left(z^{2^n}\right), n = 1, 2, ...$

6.4.4 Существует ли в окрестности точки $z_0 = 0$ аналитическая функция, принимающая в точках $z_n = \frac{1}{n}, \ n = 1, 2, 3, ...$ значения $1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \frac{1}{7}, ...$? Ответ обоснуйте.
Указание: воспользуйтесь теоремой единственности задания аналитической функции.

6.4.5 Найдите все функции $f(z)$, аналитические в окрестности точки $z_0 = 0$ и принимающие в точках $z_n = \frac{1}{n}, \ n = 1, 2, 3, ...$ значения $f(z_n) = \frac{1}{n^2}$.
Указание: воспользуйтесь теоремой единственности задания аналитической функции.

6.4.6 Пусть $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n\sqrt{n}}$. Имеет ли функция $f(z)$ особую точку
а) в круге $|z| < 1$; б) в замкнутом круге $|z| \le 1$? Ответ обоснуйте.

6.4.7 Может ли аналитическая и не равная тождественно нулю в некоторой области функция иметь бесконечно много нулей в этой области? Ответ обоснуйте.

7. Ряд Лорана. Классификация особых точек.

7.1 Основные определения, формулы и теоремы.

- Сформулируйте определение ряда Лорана. Какова его область сходимости?
- Сформулируйте определение правильной точки. Приведите пример.
- Сформулируйте определение особой точки. Приведите пример.
- Сформулируйте определение изолированной особой точки однозначной аналитической функции.
- Сформулируйте теорему о представлении функции рядом Лорана.
- Запишите формулу для коэффициентов разложения аналитической функции в ряд Лорана.

- Сформулируйте определение устранимой особой точки аналитической функции. Приведите пример.
- Сформулируйте теорему об устранимой особой точке $z_0 \neq \infty$ аналитической функции.
- Сформулируйте определение полюса. Приведите пример.
- Сформулируйте теорему о полюсе $z_0 \neq \infty$ аналитической функции.
- Сформулируйте определение существенно особой точки. Приведите пример.
- Сформулируйте теорему Сохоцкого-Вейерштрасса о существенно особой точке.

7.2 Задачи к зачету и экзамену.

7.2.1 Разложите функцию $f(z)$ в ряд Лорана в проколотой окрестности точки $z=0$:

а) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$; б) $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z}$; в) $f(z)=\dfrac{e^z}{z}$;

г) $f(z)=z^3 e^{\frac{1}{z}}$; д) $f(z)=z^4\cos\dfrac{1}{z}$; е) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$;

ж) $f(z)=\dfrac{1-e^{-z}}{z^3}$.

7.2.2 Разложите функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанной области.

а) $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$ в кольце $2<|z|<3$; в проколотой окрестности точки $z=3$; $z=\infty$.

б) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z}$ в проколотой окрестности точки $z=0$; $z=1$; $z=\infty$.

в) $f(z)=\dfrac{z^2-z+3}{z^3-3z+2}$ в кольце $1<|z|<2$; в проколотой окрестности точки $z=1$; $z=\infty$.

г) $f(z)=\dfrac{2}{z^2-1}$ в кольце $1<|z+2|<3$, в проколотой окрестности точки $z=-1$; $z=\infty$.

д) $f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)}$ в кольце $1<|z+i|<\sqrt{2}$.

е) $f(z)=\dfrac{1}{\left(z^2+1\right)^2}$ в проколотой окрестности точки $z=-i$; $z=\infty$.

ж) $f(z)=z^2\sin\dfrac{1}{z-1}$ в проколотой окрестности точки $z=1$.

з) $f(z)=\dfrac{z}{\sin z}$ в проколотой окрестности точки $z=0$; $z=\pi$ (выпишите три первых ненулевых слагаемых главной части ряда Лорана).

и) $f(z)=\operatorname{ctg} z$ в проколотой окрестности точки $z=0$ (выпишите (выпишите три первых ненулевых слагаемых главной части ряда Лорана).

7.2.3 Найдите <u>все</u> особые точки (включая $z=\infty$) функции $f(z)$ и определите их тип (если особая точка изолированная):

а) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$; б) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$; в) $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^3}$;

г) $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)^2}$; д) $f(z)=z^2+\dfrac{1}{z^5}$; е) $f(z)=\dfrac{z^4}{1+z^4}$;

ж) $f(z)=\dfrac{\cos z}{e^z+1}$; з) $f(z)=\dfrac{\sin z}{e^z-1}$; и) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{\sin z}$;

к) $f(z)=\dfrac{z}{\sin z}$; л) $f(z)=\dfrac{1}{\cos z}$; м) $f(z)=\dfrac{\operatorname{tg} z}{z^3}$;

н) $f(z)=\cos\left(\dfrac{1}{z^2}\right)$; о) $f(z)=\sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$; п) $f(z)=z^2\cdot\sin\left(\dfrac{1}{z^2}\right)$;

р) $f(z)=\dfrac{z}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$; с) $f(z)=\dfrac{\operatorname{ctg} z}{z^2}$; т) $f(z)=\operatorname{ctg} z-\dfrac{1}{z}$;

у) $f(z)=z\cdot\operatorname{ctg} z$; ф) $f(z)=z\cos z$; х) $f(z)=z\cdot e^z$.

7.3 Теоремы с доказательством.

- Докажите теорему о представлении функции рядом Лорана.
- Докажите теорему об устранимой особой точке $z_0\neq\infty$ аналитической функции.
- Докажите теорему о полюсе $z_0\neq\infty$ аналитической функции.
- Докажите теорему Сохоцкого-Вейерштрасса о существенно особой точке $z_0\neq\infty$.
- Докажите теорему о существовании особой точки суммы степенного ряда на границе круга сходимости.

7.4 Теоретические задачи и задачи повышенной сложности.

7.4.1 Приведите примеры функций, имеющих устранимую особую точку, полюс, существенно особую точку. Ответ обоснуйте.

7.4.2 Приведите пример функции с особой точкой $z_0 \neq \infty$, которая не является изолированной. Ответ обоснуйте.

7.4.3 Приведите пример функции с особой точкой $z_0 = \infty$, которая не является изолированной. Ответ обоснуйте.

7.4.4 Пусть $z_k,\ k = 1, 2, 3, \ldots, n$ – точки, в которых функция $f(z) = \dfrac{\sin\left(z^2 + iz + 2\right)}{z^4 + 3z^2 - 4}$ имеет полюс. Найдите сумму $z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n$.

7.4.5 Пусть $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$. Существует ли такая последовательность $\{z_n\} \to 0$, что последовательность $\{f(z_n)\} \to 1$? Ответ обоснуйте.

7.4.6 Пусть z_0 – существенно особая точка для функции $f(z)$. Какую особенность может иметь в этой точке функция $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$? Ответ обоснуйте.

7.4.7 Может ли предел последовательности $\{f_n\},\ f_n = e^{\frac{1}{z_n}}$ при соответствующем выборе последовательности $\{z_n\} \to 0$ быть равным:

а) 1; б) 2; в) 0; д) $2i$; г) ∞.

Ответ обоснуйте.

8. Вычеты. Вычисление контурных и определенных интегралов с помощью вычетов.

8.1 Основные определения, формулы и теоремы.

- Сформулируйте определение вычета в конечной изолированной особой точке аналитической функции.
- Сформулируйте определение вычета в бесконечно удаленной изолированной особой точке аналитической функции.
- Запишите формулу для вычисления вычета в полюсе $z_0 \neq \infty$ порядка $m \geq 1$ аналитической функции.
- Сформулируйте основную теорему теории вычетов.

- Сформулируйте теорему о вычетах функции, аналитической на всей комплексной
плоскости, за исключением конечного числа особых точек.
- Сформулируйте определение логарифмического вычета.
- Сформулируйте теорему о разности числа нулей и числа полюсов аналитической функции.
- Сформулируйте принцип аргумента.
- Сформулируйте теорему Руше.
- Сформулируйте основную теорему алгебры.

8.2 Задачи к зачету и экзамену.

Найдите вычеты функции $f(z)$ относительно всех изолированных особых точек (включая бесконечно удаленную точку):

8.2.1 а) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2\left(z^2+1\right)}$; б) $f(z)=\dfrac{z}{\left(z+1\right)^3\left(z-2\right)^2}$; в) $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{\left(z^2-1\right)\left(z+2\right)}$;

г) $f(z)=\dfrac{z^2+z-2}{z^3+1}$; д) $f(z)=\dfrac{\sin z}{\left(z+2\right)^3}$.

8.2.2 а) $f(z)=\sin\dfrac{1}{z}$; б) $f(z)=\sin\dfrac{1}{z^2}$; в) $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$;

г) $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z^2}}$; д) $f(z)=\cos\dfrac{1}{z-1}$; е) $f(z)=z^3\cos\dfrac{1}{z-1}$;

8.2.3 а) $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$; б) $f(z)=\dfrac{z}{\sin z}$; в) $f(z)=\dfrac{\operatorname{tg} z}{z^3}$;

г) $f(z)=\operatorname{ctg} z$; д) $f(z)=\operatorname{ctg}^2 z$.

8.2.4 Вычислите интегралы (обход контура – в положительном направлении):

а) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1}\frac{\sin z}{z^3}dz$; б) $\displaystyle\oint\limits_{|z-z_0|=R}\frac{dz}{\left(z-z_0\right)^2}$; в) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^z}{z^2+2z}dz$;

г) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1}\frac{\cos z-1}{z^3}dz$; д) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2}\sin\frac{1}{z}dz$; е) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2}\frac{1}{z^2+z^3}dz$;

ж) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z^2+z^3}dz$; з) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2}\frac{1}{z^3+1}dz$; и) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2}\frac{1}{z^4+1}dz$;

к) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}}z^3e^{\frac{1}{z}}dz$; л) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1}z\cos\frac{1}{z}dz$; м) $\displaystyle\oint\limits_{|z-2|=1}z\sin\frac{1}{z-2}dz$;

н) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1}ze^{\frac{1}{z^2}}dz$; о) $\displaystyle\oint\limits_{|z+1|=1}ze^{\frac{1}{z+1}}dz$; п) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1}\operatorname{ctg} z\,dz$.

8.2.5 Вычислите определенные интегралы, сведя их к интегралам по окружности $|z|=1$ с
помощью замены переменной $z=e^{i\cdot x}$:

а) $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{\cos x-5}$; б) $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{10-6\cos x}$; в) $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{2+\cos x}$;

г) $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{2+\sin x}$; д) $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{5-\sin x}$; е) $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{\sin x-2}$.

8.3 Теоремы с доказательством.

- Докажите основную теорему теории вычетов.
- Докажите теорему о вычетах функции, аналитической на всей комплексной плоскости, за исключением конечного числа особых точек.
- Докажите теорему о разности числа нулей и полюсов аналитической функции.
- Докажите теорему Руше.
- Докажите (методами ТФКП) основную теорему алгебры.

8.4 Теоретические задачи и задачи повышенной сложности.

8.4.1 Найдите сумму вычетов функции $f(z)=\frac{1}{1+z^n}$ $(n\geq 2-$ натуральное число) во всех изолированных особых точках, кроме бесконечно удаленной точки.

8.4.2 Вычислите интегралы (обход контура – в положительном направлении):

а) $\oint\limits_{|z|=2}\frac{dz}{(z^4+1)^5}$; б) $\oint\limits_{|z|=3}\frac{dz}{(z^2+2z+5)^6}$; в) $\oint\limits_{|z|=2}\frac{z^4dz}{(z^3-1)^2}$.

8.4.3 Вычислите интегралы (обход контура – в положительном направлении):

а) $\oint\limits_{|z-1|=3}\operatorname{ctg} z\,dz$; б) $\oint\limits_{|z-i|=2}\operatorname{tg} z\,dz$; в) $\int\limits_{|z-i+2|=5}\frac{dz}{\sin z}$.

8.4.4 Найдите число корней уравнения в круге $|z|<1$:

а) $z^{10}-6z^4+3z-1=0$;

б) $e^z-4z^n-1=0$ (n – натуральное число).

Указание: воспользуйтесь теоремой Руше.

9. Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов.

9.1 Основные определения, формулы и теоремы.

- Сформулируйте лемму Жордана для верхней полуплоскости.
- Сформулируйте лемму Жордана для нижней полуплоскости.
- Сформулируйте лемму Жордана для правой полуплоскости.
- Сформулируйте лемму Жордана для левой полуплоскости.
- Сформулируйте теорему о вычислении сходящегося интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ при помощи вычетов.
- Сформулируйте теорему о вычислении сходящегося интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)\,dx \quad (a>0)$ при помощи вычетов.

9.2 Задачи к зачету и экзамену.

9.2.1 Вычислите несобственные интегралы:

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{\left(x^2-4x+13\right)^2}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$;

г) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\left(x^2-1\right)dx}{x^4+1}$; д) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(x^2+2\right)dx}{\left(x^2+4x+5\right)^2}dx$; е) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}$.

9.2.2 Вычислите несобственные интегралы:

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x\,dx}{x^2+1}$; б) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x^2+1)^2}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{x^2+x+1}$;

г) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\sin x\,dx}{x^2+1}$; д) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin 3x\,dx}{x^2+2x+2}$.

9.2.3 Вычислите несобственные интегралы:

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2+4}$; б) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}\,dx}{x^2+1}$; в) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x}}$;

г) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x}}$; д) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)\cdot\sqrt[3]{x}}$; е) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\cdot\sqrt[4]{x}}$.

9.3 Теоремы с доказательством.

- Докажите лемму Жордана для верхней полуплоскости.
- Докажите лемму Жордана для нижней полуплоскости.
- Докажите лемму Жордана для правой полуплоскости.
- Докажите лемму Жордана для левой полуплоскости.

- Докажите теорему о вычислении сходящегося интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ при помощи вычетов.
- Докажите теорему о вычислении сходящегося интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)\,dx \quad (a>0)$ при помощи вычетов.

9.4 Теоретические задачи и задачи повышенной сложности.

9.4.1 Пусть $f(z)$ – рациональная функция с полюсами $z_1, z_2, ..., z_N$, не лежащими на неотрицательной действительной полуоси, $f(0)\neq 0$, а p такое действительное нецелое число, что $\lim\limits_{z\to 0}|z|^{p+1}\cdot|f(z)| = \lim\limits_{z\to\infty}|z|^{p+1}\cdot|f(z)| = 0.$ Докажите, что $\int\limits_{0}^{+\infty} x^p f(x)\,dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi ip}}\sum\limits_{k=1}^{N}\mathrm{Res}\left[z^p f(z), z_k\right],$ где $z^p = e^{p(\ln|z|+i\arg z)}$, $0<\arg z<2\pi.$

9.4.2 Вычислите несобственные интегралы (значение интеграла Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ считается известным):

а) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$; б) $\int\limits_{0}^{+\infty}\sin x^2\,dx$; в) $\int\limits_{0}^{+\infty}\cos x^2\,dx$;

г) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx, \quad a>0, \quad -\infty<b<+\infty$; д) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x\,dx}{x(x-\pi)}$.

9.4.3 Вычислите $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^n}$, где $n\geq 2$ -- натуральное число. Указание: рассмотрите в качестве контура интегрирования на комплексной плоскости границу сектора $0<\arg z<\frac{2\pi}{n}$, $|z|<R$.

10. Преобразование Лапласа

10.1 Основные определения, формулы и теоремы.

- Запишите формулу преобразования Лапласа функции действительной переменной.
- Сформулируйте достаточные условия, при которых определено преобразование Лапласа.
- Сформулируйте теорему об аналитичности изображения по Лапласу функции

действительной переменной.

- Сформулируйте теорему запаздывания.
- Запишите формулу изображения свертки.
- Запишите формулу изображения производной.
- Запишите формулу изображения интеграла.
- Запишите формулу Меллина.
- Сформулируйте теорему о достаточных условиях существования оригинала функции комплексной переменной.

10.2 Задачи к зачету и экзамену.

10.2.1 Найдите изображение по Лапласу функции $f(t)$ действительной переменной t ($f(t)\equiv 0$ при $t<0$), если при $t\ge 0$:

а) $f(t)=1$; б) $f(t)=t$; в) $f(t)=t^n$ ($n-$ натуральное число);

г) $f(t)=e^{2t}$; д) $f(t)=\sin 3t$; е) $f(t)=\cos t$;

ж) $f(t)=\operatorname{sh} t$; з) $f(t)=\operatorname{ch} 4t$; и) $f(t)=te^{3t}$.

10.2.2 Найдите оригинал $f(t)$, если задано его изображение по Лапласу $F(p)$:

а) $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2}$, $\operatorname{Re} p>1$;

б) $F(p)=\dfrac{1}{p(p+2)}$, $\operatorname{Re} p>0$;

в) $F(p)=\dfrac{p-1}{(p-2)^2+1}$, $\operatorname{Re} p>2$.

10.2.3 Применяя преобразование Лапласа, решите задачу Коши:

а) $\begin{cases} y''+y=t\sin t, & t>0,\\ y(0)=1, & y'(0)=0;\end{cases}$ б) $\begin{cases} y''+y=t\sin t, & t>0,\\ y(0)=0, & y'(0)=1;\end{cases}$

в) $\begin{cases} y''+y=te^t, & t>0,\\ y(0)=1, & y'(0)=0;\end{cases}$ г) $\begin{cases} y''+y=te^t, & t>0,\\ y(0)=0, & y'(0)=1;\end{cases}$

д) $\begin{cases} y''-y=te^{2t}, & t>0,\\ y(0)=1, & y'(0)=0;\end{cases}$ е) $\begin{cases} y''-y=te^{2t}, & t>0,\\ y(0)=0, & y'(0)=1;\end{cases}$

ж) $\begin{cases} y''-y=te^{-2t}, & t>0,\\ y(0)=0, & y'(0)=1;\end{cases}$ з) $\begin{cases} y''+y=te^{-2t}, & t>0,\\ y(0)=0, & y'(0)=1;\end{cases}$

и) $\begin{cases} y''+y'=te^{-t}, & t>0,\\ y(0)=1, & y'(0)=0;\end{cases}$ к) $\begin{cases} y''+y'=te^{-t}, & t>0,\\ y(0)=0, & y'(0)=1.\end{cases}$

10.2.4 Вычислите интегралы:

а) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{1-i\cdot\infty}^{1+i\cdot\infty}\frac{e^{pt}}{p+2}\,dp$, $\underline{t>0}$;

б) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{1-i\cdot\infty}^{1+i\cdot\infty}\dfrac{e^{pt}}{p+2}\,dp$, $\underline{t<0}$;

в) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{1-i\cdot\infty}^{1+i\cdot\infty}\dfrac{e^{pt}}{p^2+4}\,dp$, $\underline{t>0}$;

г) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{1-i\cdot\infty}^{1+i\cdot\infty}\dfrac{pe^{pt}}{p^2+9}\,dp$, $\underline{t>0}$;

д) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{1-i\cdot\infty}^{1+i\cdot\infty}\dfrac{e^{pt}}{p}\,dp$, $\underline{t>0}$;

е) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{1-i\cdot\infty}^{1+i\cdot\infty}\dfrac{e^{pt}}{p^2}\,dp$, $\underline{t>0}$;

ж) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{1-i\cdot\infty}^{1+i\cdot\infty}\dfrac{e^{pt}}{p(p+2)}\,dp$, $\underline{t>0}$;

з) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{1-i\cdot\infty}^{1+i\cdot\infty}\dfrac{e^{pt}}{p(p+3)}\,dp$, $\underline{t<0}$.

10.3 Теоремы с доказательством.

- Докажите теорему об аналитичности изображения по Лапласу функции $f(t)$
  действительной переменной t.
- Докажите теорему запаздывания.
- Выведите формулу изображения производной.
- Выведите формулу изображения интеграла.
- Докажите теорему о достаточных условиях существования оригинала функции $F(p)$
  комплексной переменной p.

10.4 Теоретические задачи и задачи повышенной сложности.

10.4.1 Пусть $F(p)$ – изображение по Лапласу функции $f(t)$. Какая функция переменной t имеет своим изображением n–ю производную $F^{(n)}(p)$ функции $F(p)$ $(n\ge 1)$?

10.4.2 Пусть $F(p)$ – изображение по Лапласу функции $f(t)$. Считая, что изображение n–й
производной $f^{(n)}(t)$ функции $f(t)$ $(n\ge 1)$ существует, выразите его через $F(p)$.

11. Конформные отображения

11.1 Основные определения, формулы и теоремы.

- Сформулируйте определение отображения $w = f(z)$, конформного в точке $z_0 \neq \infty$.
- Сформулируйте определение конформного отображения области комплексной плоскости на область комплексной плоскости.
- Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии конформности отображения.
- Сформулируйте теорему о существовании и аналитичности обратной функции.
- Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии однолистности в окрестности точки $z_0 \neq \infty$ аналитической функции.
- Сформулируйте теорему Римана о существовании конформного отображения.
- Сформулируйте теорему единственности конформного отображения.
- Сформулируйте принцип соответствия границ при конформном отображении.
- Сформулируйте определение дробно–линейной функции.
- Сформулируйте групповое свойство дробно–линейной функции.
- Сформулируйте круговое свойство дробно–линейной функции.
- Сформулируйте свойство сохранения симметрии дробно–линейной функции.
- Сформулируйте определение функции Жуковского.
- Перечислите свойства функции Жуковского.
- Сформулируйте принцип максимума и минимума гармонической функции.
- Сформулируйте постановку задачи Дирихле для уравнения Лапласа в случае односвязной ограниченной области.
- Запишите формулу Пуассона решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге $|z| < R$.

11.2 Задачи к зачету и экзамену.

11.2.1 Найдите дробно-линейные функции, отображающие:

а) точки $-1;\ i;\ 1+i$ соответственно в точки $0;\ 2i;\ 1-i$;

б) точки $-1;\ i;\ 1+i$ соответственно в точки $i;\ \infty;\ 1$;

в) точки $-1;\ \infty;\ i$ соответственно в точки $i;\ 1;\ 1+i$;

г) точки $-1;\ \infty;\ i$ соответственно в точки $\infty;\ i;\ 1$;

д) точки $-1;\ \infty;\ i$ соответственно в точки $0;\ \infty;\ 1$;

е) точки $1;\ i;\ 0$ соответственно в точки $1;\ i;\ -1$;

ж) точки $-1;\ 0;\ 1$ соответственно в точки $1;\ i;\ -1$.

В последнем случае выяснить, какая область является образом полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$?

11.2.2 Найдите образы областей D при заданных дробно-линейных отображениях $w = f(z)$:

а) $D:\ |z|<1,\ \operatorname{Re} z < 0;\quad w = \frac{1}{z}$; б) $D:\ |z|<1,\ \operatorname{Im} z > 0;\quad w = \frac{2z-i}{2+iz}$;

в) $D:\ 0<\operatorname{Re} z<1,\ \operatorname{Im} z>0;\quad w=\frac{1}{z}$; г) $D:\ \operatorname{Re} z>0,\ \operatorname{Im} z>0;\quad w=\frac{z-i}{z+i}$;

д) $D:\ 0<\operatorname{Re} z<1;\quad w=\frac{z-1}{z}$; е) $D:\ 0<\operatorname{Re} z<1;\quad w=\frac{z-1}{z-2}$;

ж) $D:\ 0<\operatorname{Im} z<1;\quad w=\frac{z-i}{z+i}$; з) $D:\ 0<\arg z<\frac{\pi}{4};\quad w=\frac{z}{z-1}$;

и) $D:\ \frac{\pi}{2}<\arg z<\pi;\quad w=\frac{z+1}{z-1}$; к) $D:\ 1<|z|<2;\quad w=\frac{z}{z-1}$.

11.2.3 Найдите дробно-линейную функцию $w = f(z)$, конформно отображающую область D плоскости z на область G плоскости w и удовлетворяющую заданным условиям:

а) $D:\ \operatorname{Im} z>0 \ \to\ G:\ |w|<1,\quad w(z_0)=0$, где $z_0 \in D$;

б) $D:\ \operatorname{Im} z>0 \ \to\ G:\ |w|<1$ и $w(i)=0,\quad \arg w'(i) = -\frac{\pi}{2}$;

в) $D:\ \operatorname{Im} z>0 \ \to\ G:\ |w|<4$ и $w(i)=0,\quad \arg w'(i)=\alpha$;

г) $D:\ \operatorname{Im} z>0 \ \to\ G:\ |w|<1$ и $w(2i)=0,\quad \arg w'(2i)=0$;

д) $D:\ \operatorname{Im} z<0 \ \to\ G:\ \operatorname{Im} w>0$ и $w(1)=0,\quad w(0)=1,\quad w(-1)=\infty$;

е) $D:\ \operatorname{Im} z>0 \ \to\ G:\ |w|<1$ и $w(2i)=0,\quad \arg w'(2i)=0$;

ж) $D:\ |z|<1 \ \to\ G:\ |w|<2$ и $w(0)=i,\quad \arg w'(0)=\frac{\pi}{2}$;

з) $D:\ |z|<2 \ \to\ G:\ |w|<1$ и $w(1)=0,\quad \arg w'(1)=\pi$;

и) $D: |z-1|<1 \quad \to \quad G: |w|<2$ и $w\left(\frac{1}{2}\right)=0, \quad \arg w'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$;

к) $D: |z|<2 \quad \to \quad G: |w-1|<2$ и $w(0)=2i, \quad \arg w'(0)=-\pi$;

л) $D: |z+i|<2 \quad \to \quad G: \operatorname{Re} w > \operatorname{Im} w$ и $w(-i)=2, \quad w(i)=0$.

11.2.4 Найдите образы указанных областей D или кривых L при заданном отображении $w=f(z)$:

а) D: полоса $0<\operatorname{Im} z<\frac{\pi}{3}$, $w=e^z$;

б) D: полоса $0<\operatorname{Re} z<\pi$, $w=e^{iz}$;

в) L: прямая $\operatorname{Im} z=\frac{\pi}{3}$, $w=e^{2z}$;

г) L: отрезок $[1;\ 1+2i]$, $w=e^z$;

д) L: дуга окружности $|z|=1, \quad 0\le \arg z\le \frac{\pi}{4}$, $w=z^2$;

е) D: часть плоскости $|z|>2, \quad -\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{4}$, $w=z^2$;

ж) L: отрезок $[0;\ 1-i]$, $w=z^3$;

з) D: полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$, $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$;

и) D: часть плоскости $\operatorname{Im} z>0, \ |z|>1$, $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$;

к) D: полукруг $\operatorname{Im} z>0, \ |z|<1$, $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$;

л) D: часть плоскости $|z|>1$, $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

11.2.5 Найдите функцию $w=f(z)$, конформно отображающую заданную область D плоскости z на полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$:

а) D: полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ с разрезами по отрезку $[0;i]$ и лучу на мнимой оси $[2i;\ +i\infty)$;

б) D: полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ с разрезом по дуге окружности $|z|=1, \quad 0\le \arg z\le \alpha<\pi$;

в) D: вся плоскость z с разрезом по дуге окружности $|z|=1, \quad -\frac{\pi}{2}\le \arg z\le \frac{\pi}{2}$;

г) D: часть плоскости $\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$;

д) D: вся плоскость с разрезом по лучу $\arg(z-i)=\frac{\pi}{4}$;

е) D: круг $|z|<1$ с разрезом по промежутку $(-1;0]$;

ж) D: сектор $|z|<1, \quad 0<\arg z<\alpha<2\pi$;

з) D: часть плоскости $|z-1|>1, \ |z-2|<2$;

и) D: часть плоскости $\operatorname{Im} z>0, \ |z|>1$;

к) D: часть плоскости $\left|z+\sqrt{3}\right|<2, \ |z|<1$;

л) D: часть плоскости $|z|>1$ с разрезами по отрезку $[1;\,2]$ и лучу $(-\infty;\,-1]$ на действительной оси.

11.3 Теоремы с доказательством.

- Докажите теорему о существовании и аналитичности обратной функции.
- Докажите теорему о необходимом условии однолистности в точке $z_0 \neq \infty$
  аналитической функции.
- Докажите принцип соответствия границ при конформном отображении.
- Докажите круговое свойство дробно–линейной функции.
- Докажите свойство сохранения симметрии дробно–линейной функции.
- Докажите теорему о существовании и единственности дробно–линейной функции,
  переводящей три различные конечные точки $z_1, \ z_2, \ z_3$
  соответственно в три различные конечные точки $w_1, \ w_2, \ w_3$.
- Докажите (методами ТФКП) принцип максимума и минимума гармонической
  функции двух переменных.

11.4 Теоретические задачи и задачи повышенной сложности.

11.4.1 Запишите общий вид дробно–линейной функции, переводящей конечные точки $z_1, \ z_2$ соответственно в точки $w_1=0, \ w_2=\infty$. Ответ обоснуйте.

11.4.2 Запишите общий вид дробно–линейной функции, переводящей точки $z_1=0, \ z_2=\infty$
соответственно в точки $w_1=0, \ w_2=\infty$. Ответ обоснуйте.

11.4.3 Запишите формулу конформного отображения верхней полуплоскости на единичный круг. Ответ обоснуйте.

11.4.4 Запишите формулу конформного отображения единичного круга на единичный круг. Ответ обоснуйте.

11.4.5 Пусть D и G –односвязные области на полной комплексной плоскости с границами, состоящими более, чем из одной точки. Докажите, что существует единственная функция $w=f(z)$, конформно отображающая область D на область G, и удовлетворяющая условиям $f(z_0)=w_0$, $\arg f'(z_0)=\alpha$ ($z_0 \in D,\quad w_0 \in G;\quad z_0 \neq \infty,\quad w_0 \neq \infty$).

11.4.6 Пусть односвязные области D и G состоят из конечных точек, функция $f(z)=\xi(x, y)+i\eta(x, y)$ осуществляет конформное отображение области D на область G, а функция $u(x, y)$ является гармонической в области D. Докажите, что сложная функция $u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$ является гармонической в области G.

11.4.7 Является ли функция Жуковского однолистной в области $\operatorname{Re} z > 0$? Ответ обоснуйте.

11.4.8 Найдите образ области D при отображении $w=f(z)$, осуществляемом однозначной ветвью $f(z)$ многозначной функции $F(z)$, где ветвь выделяется своим значением в указанной точке.

а) D: часть плоскости $|z|<1$, $\operatorname{Im} z>0$; $F(z)=\sqrt{z}$, $f\left(\frac{i}{2}\right)=\frac{1+i}{2}$;

б) D: часть плоскости $|z|>1$, $\operatorname{Re} z>0$; $F(z)=\operatorname{Ln} z$, $f(2)=\ln 2+2\pi i$.

11.4.9 Является ли функция $f(z)$ однолистной в окрестности точки z_0? Ответ обоснуйте.

а) $f(z)=z+\dfrac{4}{z}$, $z_0=2$; б) $f(z)=z^2+\dfrac{2}{z}$, $z_0=1$;

в) $f(z)=z\sin z$, $z_0=0$.

11.4.10 Является ли функция $f(z)=z^3$

а) однолистной в окрестности каждой точки области $\operatorname{Re} z<0$?

б) однолистной во всей области $\operatorname{Re} z<0$?

Ответ обоснуйте.

11.4.11 Докажите, что функция $f(z)=z^2+az$ является однолистной в полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} a \geq 0$.

11.4.12 Является ли отображение $w=f(z)$ конформным в области D? Ответ обоснуйте.

а) $w=z^4$, $D: \operatorname{Im} z>0$; б) $w=e^z$, $D: \operatorname{Re} z>0$;

в) $w=\sin z$, $D: \operatorname{Im} z<0$.

Литература.

- А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. Теория функций комплексной переменной. М.: Изд-во «Наука», 1999.
- Л.И. Волковыский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
- А.В. Кравцов, А.Р. Майков. Пособие к курсу теории функций комплексной переменной. М.: Физический факультет МГУ, 2007.