Лекция 9
Линейные пространства

1. Линейное пространство

1.1. Определение.

Линейное пространство (ЛП) $V(\mathbb{K})$ над числовым полем $\mathbb{K}$ — это множество V элементов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots$ произвольной природы (векторов), в котором введены две операции:

(A) сложение векторов $+ : V \times V \to V, \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$,

(B) умножение вектора на число $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V, \quad (\alpha, \boldsymbol{x}) \mapsto \alpha\boldsymbol{x}$,

причем выполнены следующие аксиомы:

(1) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$: $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$ (коммутативность сложения);

(2) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$: $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ (ассоциативность сложения);

(3) $\exists \boldsymbol{0} \in V\ \forall \boldsymbol{x} \in V$: $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}$ (существование нулевого вектора);

(4) $\forall \boldsymbol{x} \in V\ \exists x' \in V$: $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{0}$ (существование противоположного вектора);

(5) $\forall \boldsymbol{x} \in V$: $1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$;

(6) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall \boldsymbol{x} \in V$: $(\alpha \cdot \beta)\boldsymbol{x} = \alpha \cdot (\beta\boldsymbol{x})$;

(7) $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$: $\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}$ (дистрибутивность-1)

(8) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall \boldsymbol{x} \in V$: $(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$ (дистрибутивность-2).

Запись $V(\mathbb{K})$ означает, что рассматривается ЛП V над ЧП $\mathbb{K}$.

1.2. Примеры линейных пространств.

1. $\mathbb{Q}(\mathbb{Q})$, $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$, $\mathbb{C}(\mathbb{Q})$; $\mathbb{R}(\mathbb{R})$, $\mathbb{C}(\mathbb{R})$; $\mathbb{C}(\mathbb{C})$.

2. $\mathbb{Q}(\mathbb{R})$ — не ЛП. Объясните причину и приведите несколько аналогичных примеров.

3. Множества «геометрических векторов» на прямой V_1, на плоскости V_2, в пространстве V_3 — ЛП над $\mathbb{R}$.

4. $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ можно рассматривать как ЛП над различными ЧП (ср. пример 1). Приведите несколько примеров.

5. $\mathbb{K}^{m\times n}$ можно рассматривать как ЛП над различными ЧП (ср. пример 1). Приведите несколько примеров.

6. Множества $C(X)$, $C^p(X)$, состоящие из всех непрерывных (p раз непрерывно дифференцируемых) на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}$ функций, можно рассматривать как ЛП над ЧП $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{R}$. Операции:

$$\forall f, g \in C(X),\ \forall x \in X: \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x);$$
$$\forall f \in C(X),\ \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall x \in X: \quad (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x).$$

7. Множество $\mathrm{Pol}(n, \mathbb{K})$ всех полиномов степени не выше n с коэффициентами из $\mathbb{K}$, т.е. функций вида

$$x(t) = a_0 + a_1 t^1 + \cdots + a_n t^n,$$

где $a_k \in \mathbb{K}$, $k = 0, \ldots, n$.

Вопрос. Является ли **ЛП** множество всех полиномов степени n? Ответ обоснуйте.

8. Множество $\mathrm{Trig}(n, \mathbb{K})$ всех тригонометрических полиномов порядка не выше n с коэффициентами из $\mathbb{K}$, т.е. функций вида

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

где $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{K}$, $k = 1, \ldots, n$.

Вопрос. Является ли **ЛП** множество всех тригонометрических полиномов порядка n? Ответ обоснуйте.

9. $V = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, операции заданы формулами:

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V = \mathbb{R};$$

$$\alpha \odot \boldsymbol{x} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{x}^{\alpha}, \quad \boldsymbol{x} \in V = \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{K} = \mathbb{R}.$$

Проверьте выполнение всех аксиом ЛП.

Этот пример показывает, что операции сложения элементов ЛП и умножения элемента ЛП на число могуь быть совершенно «не похожими» на «обычные» сложение и умножение.

1.3. **Простейшие свойства ЛП.**

Теорема.

Пусть $V(\mathbb{K})$ — произвольное ЛП.

(1) *Нулевой элемент $\mathbf{0} \in V$ единствен.*

(2) *$\forall \boldsymbol{x} \in V$ противоположный элемент $\boldsymbol{x}'$ единствен.*

(3) *$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$: $\quad \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.*

(4) *$\forall \boldsymbol{x} \in V$: $0 \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.*

(5) *$\forall \boldsymbol{x} \in V$ противоположный элемент $\boldsymbol{x}'$ равен $-1 \cdot \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$.*

◀ (1) Допустим, что $\exists \mathbf{0}' \neq \mathbf{0}$ такой, что $\forall \boldsymbol{x} \in V$: $\mathbf{0}' + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$. Положим $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$; тогда $\mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0}$. С другой стороны, по определению $\mathbf{0}$, $\mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0}'$. Итак, $\mathbf{0}' = \mathbf{0}$.

(2) Пусть $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{x}''$ — два различных противоположных элемента для $\boldsymbol{x}$. Тогда

$$\boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{x}'' + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}'' + (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}') = (\boldsymbol{x}'' + \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}' = \mathbf{0} + \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}'.$$

(3) Прибавим к обеим частям равенства $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ единственный противоположный элемент $\boldsymbol{z}'$ для элемента $\boldsymbol{z}$:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} + \boldsymbol{z}' = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} + \boldsymbol{z}' \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \boldsymbol{y} + \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}.$$

(4) $\quad 0 \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} = 0 \cdot \boldsymbol{x} + 1 \cdot \boldsymbol{x} = (0+1)\boldsymbol{x} = 1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} = \mathbf{0} + \boldsymbol{x} \quad \Rightarrow \quad 0 \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

(5) Положим $\boldsymbol{y} = (-1) \cdot \boldsymbol{x}$. Тогда

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 1 \cdot \boldsymbol{x} + (-1) \cdot \boldsymbol{x} = (1 + (-1))\boldsymbol{x} = 0 \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{y}$ — противоположный для $\boldsymbol{x}$. ▶

1.4. **Линейная комбинация.** Пусть $V(\mathbb{K})$ — ЛП, $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p \in V$.

Линейная комбинация (ЛК) векторов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p \in V$ с коэффициентами $\alpha^1, \ldots, \alpha^p \in \mathbb{K}$ — это выражение

$$\alpha^1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha^p \boldsymbol{x}_p \equiv \sum_{k=1}^{p} \alpha^k \boldsymbol{x}_k.$$

ЛК векторов $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_p \in V$ называется тривиальной, если все коэффициенты этой ЛК равны нулю, и нетривиальной, если хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля.

Очевидно, тривиальная ЛК всегда равна нулевому вектору.

1.5. **Линейная зависимость и независимость.**

Векторы $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_p \in V$ называются линейно зависимыми (ЛЗ), если существует их нетривиальная ЛК, равная нулевому вектору.

Пример.

Рассмотрим ЛП $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$.

Элементы $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ЛЗ, так как существует нетривиальная ЛК этих векторов, равная $\mathbf{0}$:

$$-2 \cdot \boldsymbol{x}_1 + 1 \cdot \boldsymbol{x}_2 = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Векторы $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_p \in V$ называются линейно независимыми (ЛН), если из равенства их ЛК нулевому вектору следует, что эта ЛК тривиальна.

Пример.

Рассмотрим ЛП $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$.

Векторы $\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ЛН. Действительно,

$$\alpha^1 \boldsymbol{y}_1 + \alpha^2 \boldsymbol{y}_2 = \alpha^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Последний столбец может быть нулевым тогда и только тогда, когда $\alpha^1 = \alpha^2 = 0$.

1.6. **Линейная оболочка.** Пусть $V(\mathbb{K})$ — ЛП, $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_p \in V$.

Линейная оболочка (ЛО) векторов $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_p \in V$ — это множество всех ЛК этих векторов, т.е. множество

$$L(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_p) = \left\{ \alpha^k \boldsymbol{x}_k \;\middle|\; \alpha^k \in \mathbb{K},\ k = 1, \dots, p \right\}.$$

Теорема.

(1) *Если среди векторов $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_p$ имеется нулевой вектор, то эти векторы ЛЗ.*

(2) *Если система векторов $\boldsymbol{x}_1$, ..., $\boldsymbol{x}_q$, $\boldsymbol{x}_{q+1}$, ..., $\boldsymbol{x}_p$ содержит ЛЗ подсистему $\boldsymbol{x}_1$, ..., $\boldsymbol{x}_q$, то вся система ЛЗ.*

(3) *Если векторы $\boldsymbol{x}_1$, ..., $\boldsymbol{x}_p$ ЛЗ, то среди них имеется вектор, являющийся ЛК остальных векторов.*

(4) *Если $\boldsymbol{x} \in L(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_p)$, то*

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_p) = L(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_p).$$

◀ Пункты (1)–(3) докажите самостоятельно (см. аналогичную теорему для столбцов).

(4) Обозначим

$$L_1 = L(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_p), \quad L_2 = L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_p).$$

Требуется доказать, что $L_1 = L_2$, т.е. что

$$L_1 \subseteq L_2 \quad \text{и} \quad L_2 \subseteq L_1.$$

Первое вложение очевидно:

$$\boldsymbol{y} \in L_1 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{y} = \alpha^1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha^p \boldsymbol{x}_p = 0 \cdot \boldsymbol{x} + \sum_{k=1}^{p} \alpha^k \boldsymbol{x}_k \;\Rightarrow\; \boldsymbol{y} \in L_2.$$

Докажем второе вложение. Имеем:

$$\boldsymbol{x} \in L_1 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x} = \beta^1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \beta^p \boldsymbol{x}_p,$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} \in L_2 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{y} = \alpha \boldsymbol{x} + \alpha^1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha^p \boldsymbol{x}_p &= \\ = \alpha(\beta^1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \beta^p \boldsymbol{x}_p) + \alpha^1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha^p \boldsymbol{x}_p &= \\ = (\alpha\beta^1 + \alpha^1)\boldsymbol{x}_1 + \cdots + (\alpha\beta^p + \alpha^p)\boldsymbol{x}_p \quad &\Rightarrow \quad \boldsymbol{y} \in L_1. \end{aligned}$$ ▶

1.7. **Размерность и базис ЛП.**

Размерность ЛП $V(\mathbb{K})$ — это целое неотрицательное число n, обладающее следующими свойствами:

(1) в V $\exists n$ ЛН векторов;
(2) любые $n+1$ векторов ЛЗ.

Обозначение: $n = \dim V$; пространство V называется n-мерным.

Если в ЛП V имеется как угодно много ЛН векторов, то V называется бесконечномерным, $\dim V = \infty$.

Базис ЛП $V(\mathbb{K})$ — это упорядоченный набор векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, обладающий следующими свойствами:

(1) векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ ЛН;
(2) $\forall \boldsymbol{x} \in V$ $\exists x^1, \ldots, x^n \in \mathbb{K}$ такие, что

$$\boldsymbol{x} = x^1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + x^n \boldsymbol{e}_n = \sum_{k=1}^{n} x^k \boldsymbol{e}_k. \tag{1}$$

Числа $x^1, \ldots, x^n$ называются координатами (компонентами) вектора $\boldsymbol{x}$ относительно базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, а формула (1) — разложением вектора $\boldsymbol{x}$ по базису $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

Правило суммирования Эйнштейна: Если в некотором одночлене индекс появляется ровно два раза, один раз вверху и один раз внизу, то считается, что по этому индексу производится суммирование; пределы изменения индекса либо указываются, либо ясны из контекста. Пример: запись $x^k \boldsymbol{e}_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ эквивалентна сумме (1).

Поскольку

$$\sum_{k=1}^{p} x^k \boldsymbol{e}_k = \sum_{l=1}^{p} x^l \boldsymbol{e}_l,$$

имеем

$$x^k \boldsymbol{e}_k \equiv x^l \boldsymbol{e}_l, \quad k = 1, \ldots, p; \quad l = 1, \ldots, p.$$

Суммирование с символом Кронекера.

Символ Кронекера — это обозначение элементов единичной матрицы:

$$\delta_k^j = \begin{cases} 1, & \text{если} \;\; j = k, \\ 0, & \text{если} \;\; j \neq k. \end{cases}$$

Часто встречаются суммы вида $a_j\delta^j_k$, $b^k\delta^j_k$ и т. п. В развернутом виде первая из этих сумм имеет вид

$$a_1\delta^1_k + a_2\delta^2_k + \dots + a_k\delta^k_k + \dots + a_n\delta^n_k.$$

Из n слагаемых в этой сумме отлично от нуля лишь одно, а именно k-е, поэтому вся сумма равна a_k. Таким образом,

$$a_j\delta^j_k = a_k.$$

Теорема.

Разложение по базису единственно, т.е. $\forall \boldsymbol{x} \in V$ его координаты $x^1, \dots, x^n$ определены однозначно.

Условимся записывать координаты $x^1, \dots, x^n$ вектора $\boldsymbol{x}$ относительно базиса $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ в виде столбца:

$$X_e = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \;\leftrightarrow\; \boldsymbol{x} \text{ в базисе } \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n.$$

Теорема.

Пусть в базисе $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ линейного пространства $V(\mathbb{K})$ имеем

$$\boldsymbol{x} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} \leftrightarrow \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x^1 + y^1 \\ \vdots \\ x^n + y^n \end{pmatrix}, \quad \alpha\boldsymbol{x} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha x^1 \\ \vdots \\ \alpha x^n \end{pmatrix} \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}.$$

Теорема.

ЛП $V(\mathbb{K})$ является n-мерным тогда и только тогда, когда оно имеет базис, состоящий из n векторов.

◀ 1. Пусть $\dim V = n$. Тогда $\exists \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ — ЛН, но $\forall \boldsymbol{x} \in V$ векторы $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ — ЛЗ, т.е. $\exists \alpha, \alpha^1, \dots, \alpha^n$, не все равные нулю, такие, что

$$\alpha\boldsymbol{x} + \alpha^1\boldsymbol{x}_1 + \dots + \alpha^n\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0}.$$

Ясно, что $\alpha \neq 0$; в противном случае получили бы

$$\alpha^1\boldsymbol{x}_1 + \dots + \alpha^n\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0},$$

что возможно лишь при $\alpha^1 = \dots = \alpha^n = 0$ (при этом $\alpha = 0$), противоречие. Таким образом,

$$\boldsymbol{x} = -\frac{\alpha^1}{\alpha}\boldsymbol{x}_1 - \dots - \frac{\alpha^n}{\alpha}\boldsymbol{x}_n,$$

т.е. упорядоченный набор $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ является базисом в V.

2. Пусть $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ — базис в V. Докажем, что любые $n+1$ векторов $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{n+1}$ в V ЛЗ. Разложим каждый из этих векторов по базису:

$$\boldsymbol{x}_1 = x^1_1\boldsymbol{e}_1 + x^2_1\boldsymbol{e}_2 + \dots + x^n_1\boldsymbol{e}_n,$$

$$\dots$$

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = x^1_{n+1}\boldsymbol{e}_1 + x^2_{n+1}\boldsymbol{e}_2 + \dots + x^n_{n+1}\boldsymbol{e}_n.$$

Составим матрицу, столбцами которой являются столбцы координат этих векторов:

$$X = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_{n+1}^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_{n+1}^n \end{pmatrix},$$

и рассмотрим ОСЛУ с этой матрицей в качестве основной матрицы. Поскольку число неизвестных в рассматриваемой ОСЛУ больше числа неизвестных, то она имеет нетривиальное решение, т.е. столбцы матрицы X линейно зависимы. ▶

1.8. **Примеры.**

1. $\dim \mathbb{K}(\mathbb{K}) = 1$; базис состоит из одного элемента, в качестве которого можно взять любое ненулевое число из $\mathbb{K}$. Число 1 образует так называемый стандартный базис.

2. $\dim \mathbb{R}(\mathbb{Q}) = \infty$.

Задача. Объясните почему.

3. $\dim \mathbb{C}(\mathbb{R}) = 2$; базис состоит из двух элементов, в качестве которых можно взять два любых ненулевых комплексных числа, сумма которых не равна нулю. Стандартный базис образуют числа $1, i$.

Задача. Докажите.

4. $\dim \mathbb{K}^n(\mathbb{K}) = n$. Стандартный базис образуют столбцы

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. $\dim \mathbb{C}^n(\mathbb{R}) = 2n$. Стандартный базис состоит из столбцов

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_{n+1} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_{n+2} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \boldsymbol{e}_{2n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ i \end{pmatrix}.$$

6. $\dim \mathbb{K}^{m\times n}(\mathbb{K}) = mn$. Стандартный базис состоит из mn матриц

$$\boldsymbol{e}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} i = 1, \dots, m, \\ j = 1, \dots, n, \end{matrix}$$

где единица стоит на пересечении i-й строки и j-го столбца.

7. $\dim \mathrm{Pol}(n, \mathbb{K}) = n+1$. Стандартный базис состоит из многочленов

$$\boldsymbol{e}_0 = 1, \quad \boldsymbol{e}_1 = t, \quad \boldsymbol{e}_2 = t^2, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{e}_n = t^n.$$

8. $\dim \mathrm{Trig}(n, \mathbb{K}) = 2n+1$. Стандартный базис состоит из тригонометрических многочленов

$$\boldsymbol{e}_0 = 1, \quad \begin{matrix} \boldsymbol{e}_1 = \cos t, & \ldots, & \boldsymbol{e}_n = \cos nt, \\ \boldsymbol{e}_{-1} = \sin t, & \ldots, & \boldsymbol{e}_{-n} = \sin nt. \end{matrix}$$

2. Гомоморфизм и изоморфизм ЛП

Пусть $(V, \mathbb{K})$ (операции $+, \cdot$) и $(W, \mathbb{K})$ (операции $\oplus, \odot$) — два ЛП над одним и тем же ЧП $\mathbb{K}$.

Отображение $f : V \to W$ называется гомоморфизмом, если

$$f(x+y) = f(x) \oplus f(y) \quad \forall x, y \in V,$$
$$f(\alpha \cdot x) = \alpha \odot f(x) \quad \forall x \in V, \quad \alpha \in \mathbb{K}.$$

Множество всех гомоморфизмов ЛП V, W обозначается $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Теорема.

Пусть $f : V \to W$ — гомоморфизм.

(1) $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$;

(2) $\forall \boldsymbol{x} \in V$: $f(-x) = -f(x)$.

Задача. Докажите теорему самостоятельно.

Изоморфизм ЛП V и W — это взаимно однозначный гомоморфизм. ЛП V и W называются изоморфными, если существует изоморфизм $f : V \to W$; в этом случае пишут $V \simeq W$.

Теорема.

Пусть $V \simeq W$, $f : V \to W$ — изоморфизм.

(1) $\forall \boldsymbol{x} \in V$, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}_V$: $f(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0}_W$.

(2) *Если $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p \in V$ — ЛН векторы, то векторы $f(\boldsymbol{x}_1), \ldots, f(\boldsymbol{x}_p) \in W$ также ЛН.*

(3) *Если $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p \in V$ — ЛЗ векторы, причем нетривиальная ЛК этих векторов, равная $\mathbf{0}_V$, имеет коэффициенты $\alpha^1, \ldots, \alpha^p$, то векторы $f(\boldsymbol{x}_1), \ldots, f(\boldsymbol{x}_p) \in W$ также ЛЗ, причем нетривиальная ЛК этих векторов, равная $\mathbf{0}_W$, имеет те же коэффициенты $\alpha^1, \ldots, \alpha^p$.*

◀ (1) Пусть $\boldsymbol{x} \in V$, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}_V$. Предположим, что $f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_W$. Имеем:

$$f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_W = 0 \cdot \boldsymbol{y} = 0 \cdot f(\boldsymbol{z}) = f(0 \cdot \boldsymbol{z}) = f(\mathbf{0}_V).$$

Таким образом, в силу взаимной однозначности отображения f, получаем $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_V$; противоречие.

(2) Пусть $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p \in V$ — ЛН векторы. Предположим, что векторы $f(\boldsymbol{x}_1), \ldots, f(\boldsymbol{x}_p) \in W$ ЛЗ, т.е. $\exists \beta^1, \ldots, \beta^p \in \mathbb{K}$, не все равные 0, такие, что

$$\beta^1 f(\boldsymbol{x}_1) + \cdots + \beta^p f(\boldsymbol{x}_p) = \mathbf{0}_W.$$

Имеем

$$\beta^1 f(\boldsymbol{x}_1) + \cdots + \beta^p f(\boldsymbol{x}_p) = \mathbf{0}_W = f(\beta^1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \beta^p \boldsymbol{x}_p),$$

откуда

$$\beta^1\boldsymbol{x}_1+\dots+\beta^p\boldsymbol{x}_p=\mathbf{0}_V,$$

т.е. векторы $\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_p$ ЛЗ; противоречие.

(3) Докажите самостоятельно. ▶

Отметим, что отношение изоморфности ЛП обладает следующими свойствами:

(1) $V\simeq V$;
(2) $V\simeq W\Rightarrow W\simeq V$;
(3) если $V\simeq W$ и $W\simeq U$, то $V\simeq U$.

Задача. Докажите самостоятельно.

Теорема.

Пусть $V(\mathbb{K})$ — ЛП над ЧП $\mathbb{K}$, $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ — базис в V. Отображение $f:V\to\mathbb{K}^n$, ставящее в соответствие каждому вектору $\boldsymbol{x}\in V$ столбец его координат, является изоморфизмом ЛП V и $\mathbb{K}^n$, $V\simeq\mathbb{K}^n$.

Теорема.

Все ЛП одной размерности над одним и тем же ЧП изоморфны.

Задача. Докажите эти теоремы самостоятельно.

Задача. Докажите, что если $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ — базис в ЛП V, то $V=L(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)$. Обратное утверждение неверно: если $V=L(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_p)$, то нельзя утверждать, что векторы $\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_p$ образуют базис в V. Объясните почему.

3. Линейное подпространство

3.1. **Определение.** Пусть $V(\mathbb{K})$ — ЛП. Подмножество $P\subset V$ называется *линейным подпространством* (ЛПП) пространства V, если выполнены следующие условия:

(1) $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in P$: $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in P$;
(2) $\forall\boldsymbol{x}\in P$, $\forall\alpha\in\mathbb{K}$: $\alpha\boldsymbol{x}\in P$.

В любом ЛП V имеются тривиальные ЛПП: $\{\mathbf{0}\}$ и V.

Обозначения:

- $P\subset V \iff P$ является подмножеством V;
- $P\Subset V \iff P$ является нетривиальным ЛПП V.

Теорема.

Пусть V — ЛП над ЧП $\mathbb{K}$ и $P\Subset V$. Тогда P тоже является ЛП над ЧП $\mathbb{K}$.

Задача. Докажите теорему самостоятельно.

3.2. **Примеры ЛПП.**

1. $V_1\Subset V_2\Subset V_3$.

2. $\mathbb{R}(\mathbb{R})\Subset\mathbb{C}(\mathbb{R})$; $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})\Subset\mathbb{C}^n(\mathbb{R})$.

Задача. Найдите размерность и базис этих ЛПП.

3. Подмножество в $\mathbb{K}^n(\mathbb{K})$, состоящее из столбцов, сумма элементов которых равна нулю, является ЛПП в $\mathbb{K}^n(\mathbb{K})$.

Задача. Найдите размерность и базис этого ЛПП.

4. В ЛП $\mathbb{K}^{n\times n}(\mathbb{K})$ квадратных матриц порядка n линейными подпространствами являются следующие подмножества.

(1) Подмножество симметричных матриц

$$S\mathbb{K}^{n\times n} = \left\{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \;\middle|\; A^T = A\right\}.$$

(2) Подмножество кососимметричных матриц

$$A\mathbb{K}^{n\times n} = \left\{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \;\middle|\; A^T = -A\right\}.$$

(3) Подмножество, состоящее из матриц с нулевым следом:

$$P = \left\{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \;\middle|\; \operatorname{tr} A = 0\right\}.$$

Замечание: след $\operatorname{tr} A$ квадратной матрицы A — это сумма ее диагональных элементов.

$$\operatorname{tr} A = \sum_{k=1}^{n} a_k^k.$$

Задача. Найдите размерность и базис каждого из указанных ЛПП.

5. В ЛП $\mathrm{Pol}(n, \mathbb{K})$ подпространствами являются множества

$$S\,\mathrm{Pol}(n, \mathbb{K}) = \left\{x(t) \in \mathrm{Pol}(n, \mathbb{K}) \;\middle|\; x(-t) = x(t)\right\},$$
$$A\,\mathrm{Pol}(n, \mathbb{K}) = \left\{x(t) \in \mathrm{Pol}(n, \mathbb{K}) \;\middle|\; x(-t) = -x(t)\right\},$$

состоящие из четных и нечетных многочленов.

Задача. Найдите размерность и базис каждого из указанных ЛПП.

6. Рассмотрим ОСЛУ

$$AX = O,$$

где $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $A \in \mathbb{K}^n$, $O \in \mathbb{K}^m$. Известно, что для любых решений X_1, X_2 столбец $c^1X_1 + c^2X_2$ также является решением. Это означает, что множество всех решений ОСЛУ представляет собой ЛПП в $\mathbb{K}^n$. ФСР ОСЛУ представляет собой базис этого ЛПП.

7. Любая ЛО является ЛПП.

Теорема.

Пусть $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_p \in V$. *Тогда* $L(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_p) \Subset V$.

◀ Пусть $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_p) \Subset V$, т.е.

$$\boldsymbol{x} = \alpha^1\boldsymbol{x}_1 + \dots + \alpha^p\boldsymbol{x}_p,$$
$$\boldsymbol{y} = \beta^1\boldsymbol{x}_1 + \dots + \beta^p\boldsymbol{x}_p.$$

Тогда

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (\alpha^1 + \beta^1)\boldsymbol{x}_1 + \dots + (\alpha^p + \beta^p)\boldsymbol{x}_p,$$

т.е. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in L(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_p) \Subset V$. Завершите доказательство самостоятельно. ▶

3.3. **Пополнение базиса.**

Теорема.

Пусть

$$P \Subset V, \quad \dim P = p < \dim V = n,$$

$\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_p$ — *базис в* P. *Тогда* $\exists \boldsymbol{e}_{p+1}, \dots, \boldsymbol{e}_n \in V \setminus P$ *такие, что*

$$\boldsymbol{e}_1,\ \dots,\ \boldsymbol{e}_p,\ \boldsymbol{e}_{p+1},\ \dots,\ \boldsymbol{e}_n$$

— *базис в* V.

◀ Так как $p < n$, то $\exists \boldsymbol{e}_{p+1} \in V$ такой, что векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_p, \boldsymbol{e}_{p+1}$ ЛН; при этом $\boldsymbol{e}_{p+1} \notin P$, так как в противном случае получили бы $\dim P > p$.

Если $p + 1 = n$, пополнение базиса завершено. Если $p + 1 < n$, продолжаем процесс. ▶

3.4. **Пересечение и сумма ЛПП.**

Теорема.

Если $P \Subset V$, $Q \Subset V$, то $P \cap Q \Subset V$.

◀ Проверим выполнение требований определения:

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in P \cap Q \iff \begin{cases} \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in P \\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in Q \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in P \\ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in Q \end{cases} \iff \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in P \cap Q.$$

Второе условие проверяется аналогично. ▶

Замечание. Если $P \Subset V$, $Q \Subset V$, то $P \cup Q$ не является, вообще говоря, ЛПП.

Задача. Приведите соответствующий пример.

Суммой $P + Q$ ЛПП $P, Q \Subset V$ называется ЛО всевозможных векторов вида $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$, где $\boldsymbol{x} \in P$, $\boldsymbol{y} \in Q$, т.е.

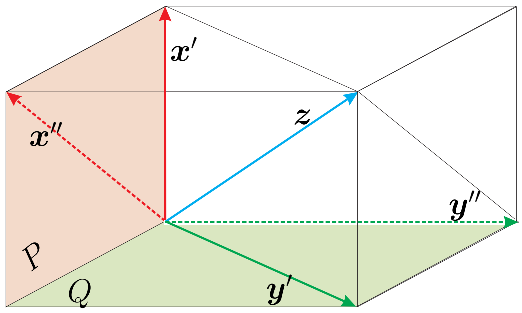
$$P + Q = \left\{ \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \;\middle|\; \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \boldsymbol{x} \in P,\ \boldsymbol{y} \in Q \right\}.$$

Таким образом, $\forall \boldsymbol{z} \in P + Q$: $\exists \boldsymbol{x} \in P$, $\exists \boldsymbol{y} \in Q$ такие, что $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$.

Теорема.

Если $P \Subset V$, $Q \Subset V$, то $P + Q \Subset V$.

Задача. Докажите теорему.



$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{x}'' + \boldsymbol{y}''.$$

Теорема.

Пусть V — ЛП, $P \Subset V$, $Q \Subset V$. Тогда

$$\boxed{\dim(P + Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q).} \tag{2}$$

◀ Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r$ — базис в $P \cap Q$, $\dim(P \cap Q) = r$;
$\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p$ — его дополнение до базиса в P, $\dim P = r + p$;
$\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_q$ — его дополнение до базиса в Q, $\dim Q = r + q$.

Тогда все эти векторы образуют базис в $P + Q$ (объясните почему), и

$$\dim(P + Q) = r + p + q = (p + r) + (q + r) - r = \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q). \qquad ▶$$

3.5. **Прямая сумма ЛПП.**

Пусть $V(\mathbb{K})$ — ЛП, $P \Subset V$, $Q \Subset V$. Тогда для любого вектора $\boldsymbol{z} \in P + Q$ существуют такие $\boldsymbol{x} \in P$, $\boldsymbol{y} \in Q$, что $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$. Такое разложение, вообще говоря, не единственно. Если же оно единственно, то сумма ЛПП называется прямой суммой; $P \oplus Q$.

Теорема.

Сумма ЛПП P и Q является прямой суммой тогда и только тогда, когда $P \cap Q = \{\mathbf{0}\}$.

◀ 1. Пусть $P \cap Q = \{\mathbf{0}\}$. Тогда базиса в $P \cap Q$ не существует, а базисы в P и Q суть

$$\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p, \qquad \boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_q,$$

где $p = \dim P$, $q = \dim Q$. Базис в $P+Q$ состоит из всех этих векторов, поэтому $\forall \boldsymbol{z} \in P+Q$ имеем

$$\boldsymbol{x} = \underbrace{x^1 \boldsymbol{f}_1 + \cdots + x^p \boldsymbol{f}_p}_{=\boldsymbol{x}} + \underbrace{y^1 \boldsymbol{g}_1 + \cdots + y^q \boldsymbol{g}_q}_{=\boldsymbol{y}}.$$

Это разложение единственно (единственность разложения по базису) $\Rightarrow$ $P + Q = P \oplus Q$.

2. Пусть $P + Q = P \oplus Q$. Докажем, что $P \cap Q = \{\mathbf{0}\}$.

Предположим противное, т.е. допустим, что $\exists \boldsymbol{v} \in P \cap Q$, $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$. Тогда $\boldsymbol{v} \in P$, $\boldsymbol{v} \in Q$ и $\forall \boldsymbol{z} \in P \oplus Q$ имеем

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \underbrace{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}}_{\in P} + \underbrace{\boldsymbol{y} - \boldsymbol{v}}_{\in Q},$$

т.е. разложение вида $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ не единственно; противоречие. ▶

Задача. Докажите, что

$$\mathbb{K}^{n \times n} = S\mathbb{K}^{n \times n} \oplus A\mathbb{K}^{n \times n}.$$

Задача. Докажите, что

$$\mathrm{Pol}(n) = S\,\mathrm{Pol}(n) \oplus A\,\mathrm{Pol}(n).$$

3.6. **Ядро и образ гомоморфизма.**

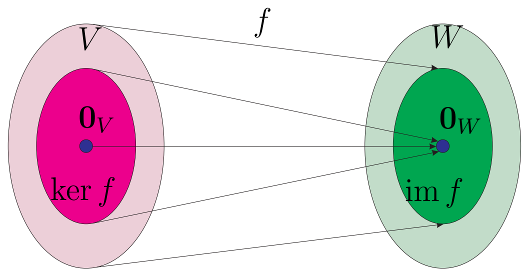
Пусть $V(\mathbb{K})$ и $W(\mathbb{K})$ — два ЛП над ЧП $\mathbb{K}$, $f : V \to W$ — гомоморфизм.

Ядро $\ker f$ гомоморфизма f — это множество векторов из V

$$\ker f = \Big\{ \boldsymbol{x} \in V \;\Big|\; f(x) = \mathbf{0}_W \Big\}.$$

Образ $\operatorname{im} f$ гомоморфизма f — это множество векторов из W

$$\operatorname{im} f = \Big\{ \boldsymbol{y} \in W \;\Big|\; \exists \boldsymbol{x} \in V : \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) \Big\}.$$



Теорема.

Пусть $f : V \to W$ — гомоморфизм ЛП. Тогда

$$\ker f \Subset V, \qquad \operatorname{im} f \Subset W.$$

◀ 1. Проверим, что $\ker f \Subset V$. Имеем:

$$\boldsymbol{x} \in \ker f \quad \Longleftrightarrow \quad f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_W,$$
$$\boldsymbol{y} \in \ker f \quad \Longleftrightarrow \quad f(\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}_W;$$

поэтому

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}_W \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \ker f.$$

Завершите доказательство самостоятельно. ▶

Теорема.

Пусть $f : V \to W$ — гомоморфизм ЛП.

$$\boxed{\dim\ker f + \dim\operatorname{im} f = \dim V.} \qquad (3)$$

◀ Пусть $\dim V = n$, $\dim\ker f = p$, $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_p$ — базис в $\ker f$, $\boldsymbol{e}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — его дополнение до базиса в V.

Имеем $f(\boldsymbol{e}_1) = \cdots = f(\boldsymbol{e}_p) = \mathbf{0}_W$.

Докажем, что векторы $\boldsymbol{f}_{p+1} = f(\boldsymbol{e}_{p+1})$, …, $\boldsymbol{f}_n = f(\boldsymbol{e}_n)$ образуют базис в $\operatorname{im} f$.

Предположим, что эти векторы ЛЗ, т.е. $\exists \alpha^{p+1}, \ldots, \alpha^n \in \mathbb{K}$, не все равные нулю, такие, что

$$\alpha^{p+1}\boldsymbol{f}_{p+1} + \cdots + \alpha^n \boldsymbol{f}_n = \mathbf{0}_W.$$

В таком случае

$$\mathbf{0}_W = \alpha^{p+1}\boldsymbol{f}_{p+1} + \cdots + \alpha^n \boldsymbol{f}_n = \alpha^{p+1} f(\boldsymbol{e}_{p+1}) + \cdots + \alpha^n f(\boldsymbol{e}_n) = f(\alpha^{p+1}\boldsymbol{e}_{p+1} + \cdots + \alpha^n \boldsymbol{e}_n),$$

откуда следует, что

$$\alpha^{p+1}\boldsymbol{e}_{p+1} + \cdots + \alpha^n \boldsymbol{e}_n = \mathbf{0}_V,$$

что противоречит линейной независимости векторов $\boldsymbol{e}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Таким образом, векторы $\boldsymbol{f}_{p+1} = f(\boldsymbol{e}_{p+1})$, …, $\boldsymbol{f}_n = f(\boldsymbol{e}_n)$ ЛН.

Далее, $\forall \boldsymbol{y} \in \operatorname{im} f\ \exists \boldsymbol{x} \in V$ такой, что $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$. Имеем:

$$\boldsymbol{x} = x^1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x^p\boldsymbol{e}_p + x^{p+1}\boldsymbol{e}_{p+1} + \cdots + x^n\boldsymbol{e}_n,$$
$$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = \underbrace{x^1 f(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + x^p f(\boldsymbol{e}_p)}_{=\mathbf{0}_W} + x^{p+1} f(\boldsymbol{e}_{p+1}) + \cdots + x^n f(\boldsymbol{e}_n) =$$
$$= x^{p+1}\boldsymbol{f}_{p+1} + \cdots + x^n \boldsymbol{f}_n,$$

т.е. любой вектор $\boldsymbol{y} \in W$ может быть разложен в ЛК векторов $\boldsymbol{f}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{f}_n$. Таким образом, векторы $\boldsymbol{f}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ образуют базис в $\operatorname{im} f$ и, следовательно, $\dim\operatorname{im} f = n - p$.

Итак,

$$\dim V = n = p + (n-p) = \dim\ker f + \dim\operatorname{im} f. \qquad ▶$$

3.7. **Ядро и образ матрицы.**

Соотношение

$$AX = Y, \quad A \in \mathbb{K}^{m\times n}, \quad X \in \mathbb{K}^n, \quad Y \in \mathbb{K}^m,$$

можно рассматривать как отображение

$$A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \quad X \mapsto Y,$$

задаваемое матрицей A. Очевидно, это отображение является гомоморфизмом ЛП $\mathbb{K}^n$ и $\mathbb{K}^m$.

Тогда задача решения ОСЛУ

$$AX = O$$

эквивалентна нахождению ядра $\ker A$ этого гомоморфизма, которое называют также ядром матрицы A.

Образ указанного гомоморфизма называют образом матрицы A. Так как столбец $Y = AX$ представляет собой ЛК столбцов матрицы A с коэффициентами, равными элементам столбца X, ясно, что образ матрицы есть не что иное, как линейная оболочка ее столбцов.

4. Ранг матрицы

4.1. **Линейная оболочка строк матрицы.**

Теорема.

При ЭП строк размерность ЛО ее строк не меняется.

◀ Пусть матрица B получена из матрицы $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ с помощью ЭП строк. Это означает, что каждая строка матрицы B является некоторой ЛК строк матрицы A, так что

$$L(B^1, \ldots, B^m) \Subset L(A^1, \ldots, A^m).$$

Поскольку ЭП строк обратимы, то

$$L(A^1, \ldots, A^m) \Subset L(B^1, \ldots, B^m).$$

Таким образом,

$$L(A^1, \ldots, A^m) = L(B^1, \ldots, B^m) \iff$$

$$\iff \dim L(A^1, \ldots, A^m) = \dim L(B^1, \ldots, B^m). \qquad \blacktriangleright$$

4.2. **Линейная оболочка столбцов матрицы.**

Линейная оболочка столбцов матрицы $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ — это образ гомоморфизма

$$A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \quad X \mapsto AX.$$

Теорема.

При ЭП строк размерность ЛО ее столбцов не меняется.

◀ Рассмотрим ОСЛУ с матрицей $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$:

$$AX = O$$

Множество ее решений — это ядро $\ker A$ матрицы A. Поскольку при ЭП строк СЛУ переходит в эквивалентную СЛУ, для любой матрицы B, полученной из A такими ЭП, имеем

$$\ker B = \ker A.$$

Поэтому

$$\dim \operatorname{im} B = \dim \mathbb{K}^n - \dim \ker B = \dim \mathbb{K}^n - \dim \ker A = \dim \operatorname{im} A.$$

▶

Теорема.

Для любой матрицы A размерность ЛО ее строк равна размерности ЛО ее столбцов.

◀ Приведем матрицу $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ к упрощенному виду с помощью ЭП строк; размерности ЛО строк и столбцов полученной матрицы B равны размерностям соответствующих ЛО для матрицы A. В матрице B сделаем ЭП типа (4), т.е. удалим из нее нулевые строки; получим матрицу $C \in \mathbb{K}^{r\times n}$, где $r \leqslant m$.

Рассматривая ОСЛУ с матрицей C, видим, что в каждом уравнении имеется базисная неизвестная. Поэтому строки матрицы C ЛН. Таким образом, размерность ЛО строк матрицы C равна количеству базисных неизвестных и равно количеству уравнений r.

Количество свободных неизвестных в системе равно $n-r$, поэтому ФСР ОСЛУ состоит из $n-r$ столбцов, т.е. размерность пространства решений ОСЛУ, равная размерности ядра матрицы, также равна $n - r$. Размерность же ЛО столбцов, равная размерности образа матрицы, равна $n - (n - r) = r$. ▶

Ранг матрицы — это размерность ЛО ее строк (столбцов). Обозначение: $\operatorname{rk} A$.

4.3. Ранг произведения матриц.

Теорема.

$$\operatorname{rk}(AB) \leqslant \operatorname{rk} A, \qquad \operatorname{rk}(AB) \leqslant \operatorname{rk} B.$$

◀ Поскольку столбцы матрицы AB суть линейные комбинации столбцов матрицы A, получаем

$$L(C_1, \dots, C_p) \Subset L(A_1, \dots, A_m) \quad \Rightarrow \quad \dim L(C_1, \dots, C_p) \leqslant \dim L(A_1, \dots, A_m). \qquad ▶$$

4.4. Теорема Кронекера—Капелли.

Теорема.

Система линейных уравнений

$$AX = B$$

совместна тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы равен рангу расширенной матрицы:

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}[A|B].$$

◀ Совместность системы

$$AX = B \iff A_1x^1 + A_2x^2 + \dots + A_nx^n = B$$

означает, что

$$B \in L(A_1, A_2, \dots, A_n)$$

т.е.

$$L(A_1, A_2, \dots, A_n) = L(B, A_1, A_2, \dots, A_n),$$

так что размерности этих линейных оболочек совпадают. ▶

5. Экзаменационные задачи

Задача 1. Доказать, что подмножество в $\mathbb{K}^n(\mathbb{K})$, состоящее из столбцов, сумма элементов которых равна нулю, является линейным подпространством в $\mathbb{K}^n(\mathbb{K})$. Найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.

Задача 2. Доказать, что в линейном пространстве $\mathbb{K}^{n\times n}(\mathbb{K})$ квадратных матриц порядка n подмножество $S\mathbb{K}^{n\times n}$ симметричных матриц является линейным подпространством. Найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.

Задача 3. Доказать, что в линейном пространстве $\mathbb{K}^{n\times n}(\mathbb{K})$ квадратных матриц порядка n подмножество $A\mathbb{K}^{n\times n}$ кососимметричных матриц является линейным подпространством. Найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.

Задача 4. Доказать, что $\mathbb{K}^{n\times n} = S\mathbb{K}^{n\times n} \oplus A\mathbb{K}^{n\times n}$.

Задача 5. Доказать, что в линейном пространстве $\mathbb{K}^{n\times n}(\mathbb{K})$ квадратных матриц порядка n подмножество матриц с нулевым следом является линейным подпространством. Найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.

Задача 6. Доказать, что сумма L двух линейных подпространств P и Q тогда и только тогда будет прямой суммой, когда хотя бы один вектор $\boldsymbol{x} \in L$ однозначно представляется в виде $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$, где $\boldsymbol{y} \in P$, $\boldsymbol{z} \in Q$.

Задача 7. Пусть P и Q — два линейных подпространства конечномерного линейного пространства V. Доказать, что если $\dim P + \dim Q > \dim V$, то пересечение $P \cap Q$ содержит ненулевой вектор.

Задача 8. Пусть P и Q — два линейных подпространства конечномерного линейного пространства V. Доказать, что если $\dim(P + Q) = \dim(P \cap Q) + 1$, то одно из этих подпространств содержится в другом.

Задача 9. Доказать, что для любого линейного подпространства P конечномерного линейного пространства V существует другое подпространство Q такое, что $V = P \oplus Q$.

Задача 10. Пусть A, B, C — три линейных подпространства конечномерного линейного пространства V, $P = (A \cap C) + (B \cap C)$, $Q = (A + B) \cap C$. Доказать, что $P \subseteq Q$. Привести пример, когда $P \neq Q$.

Задача 11. Доказать, что если в n-мерном комплексном линейном пространстве V рассматривать умножение векторов лишь на вещественные числа, то получим $2n$-мерное вещественное линейное пространство $V^{\mathbb{R}}$. (Описанная процедура называется овеществлением комплексного линейного пространства.) Исходя из базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ пространства V, построить базис пространства $V^{\mathbb{R}}$.