Лекция 7
Комплексные числа
Многочлены

1. Элементы комбинаторики

Комбинаторика изучает конечные множества и связанные с ними операции.

Пусть N — конечное множество, состоящее из n элементов; число n называется мощностью множества N, $\operatorname{card} N = n$.

$x \in N$ — x является элементом множества N.

$x \notin N$ — x не является элементом множества N.

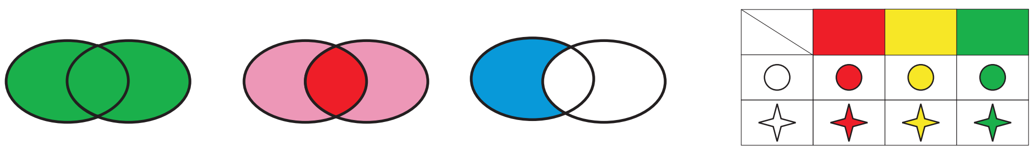
$N \subset M$ — множество N является подмножеством множества M, т.е.

$$\forall x \in N \Longrightarrow x \in M.$$

$\varnothing$ — пустое множество; $\operatorname{card} \varnothing = 0$.

Основные операции над множествами:

(1) объединение $N \cup M = \{x : x \in N \text{ или } x \in M\}$,
(2) пересечение $N \cap M = \{x : x \in N \text{ и } x \in M\}$,
(3) разность $N \setminus M = \{x : x \in N \text{ и } x \notin M\}$,
(4) декартово произведение $N \times M = \{(x, y) : x \in N,\ x \in M\}$.



1.1. **Принцип произведения.**

$$\operatorname{card}(N \times M) = (\operatorname{card} N) \cdot (\operatorname{card} M).$$

Пример.

Найдем количество различных трехзначных чисел, не содержащих одинаковых цифр:

$$\underbrace{\quad A \quad}_{9\text{ способов}} \quad \underbrace{\quad B \quad}_{9\text{ способов}} \quad \underbrace{\quad C \quad}_{8\text{ способов}}$$

$$9 \cdot 9 \cdot 8 = 648.$$

1.2. **Принцип суммы.** Если N и M — непересекающиеся конечные множества, $N \cap M = \varnothing$, то

$$\operatorname{card}(N \cup M) = \operatorname{card} N + \operatorname{card} M.$$

В случае непустого пересечения

$$\operatorname{card}(N \cup M) = \operatorname{card} N + \operatorname{card} M - \operatorname{card}(N \cap M).$$

Пример.

Найдем количество различных трехзначных чисел, содержащих хотя бы две одинаковые цифры.

Всего имеется 900 трехзначных чисел. Каждое из них либо имеет одинаковые цифры, либо нет. Поэтому чисел, содержащих одинаковые цифры, имеется

$$900 - 648 = 252.$$

1.3. **Упорядоченная выборка без повторений: размещения.** Имеется множество N, $\operatorname{card} N = n$. Требуется выбрать из него k элементов с учетом порядка; выбранный элемент в множество не возвращается. Количество различных выборок равно

$$A_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}_{k \text{ сомножителей}} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

В частности, количество различных перестановок множества N

$$P_n = n!.$$

Пример.

Сколькими способами можно из группы в 20 студентов выбрать старосту и профорга?

$$A_{20}^2 = \frac{20!}{18!} = 20 \cdot 19 = 380.$$

1.4. **Неупорядоченная выборка без повторений: сочетания.** Имеется множество N, $\operatorname{card} N = n$. Требуется выбрать из него k элементов без учета порядка; выбранный элемент в множество не возвращается. Обозначим количество всех таких выборок C_n^k.

Выборка объема k может быть упорядочена $k!$ способами. Согласно принципу произведения

$$C_n^k \cdot k! = A_n^k,$$

откуда

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Числа C_n^k называются также биномиальными коэффициентами; другое обозначение:

$$\binom{n}{k} = C_n^k.$$

Пример.

Сколькими способами можно из группы в 20 студентов выбрать двух дежурных?

$$C_{20}^2 = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190.$$

1.5. **Свойства биномиальных коэффициентов.**

$$1. \qquad C_n^0 = C_n^n = 1, \quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n.$$

$$2. \qquad C_n^k = \frac{\overbrace{n(n-1)\ldots(n-k+1)}^{k \text{ сомножителей}}}{\underbrace{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k}_{k \text{ сомножителей}}}.$$

$$3. \qquad C_n^{n-k} = C_n^k.$$

◀ $C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k$. ▶

$$4. \qquad C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

$$\blacktriangleleft \quad C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} =$$
$$= \frac{n!}{k!(n-k-1)!(n-k)} + \frac{n!}{k!(k+1)(n-k-1)!} =$$
$$= \frac{n!(n-k) + n!(k+1)}{k!(n-k-1)!(k+1)(n-k)} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} =$$
$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = C_{n+1}^{k+1}. \quad \blacktriangleright$$

1.6. **Треугольник Паскаля.**

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^0 & & & & \\
 & & & \swarrow & & \searrow & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
 & & \swarrow & \searrow & & \swarrow & \searrow & & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & \swarrow & \searrow & \swarrow & & \searrow & \swarrow & \searrow & \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
\swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \\
C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4
\end{array}$$

$n=0$									1								
$n=1$								1		1							
$n=2$							1		2		1						
$n=3$						1		3		3		1					
$n=4$					1		4		6		4		1				
$n=5$				1		5		10		10		5		1			
$n=6$			1		6		15		20		15		6		1		
$n=7$		1		7		21		35		35		21		7		1	
$n=8$	1		8		28		56		70		56		28		8		1

1.7. **Бином Ньютона.**

Теорема.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k =$$
$$= a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n. \quad (1)$$

◀ Доказательство проведем методом индукции.

База индукции:

$$(a+b)^1 = a + b = C_1^0 a + C_1^1 b.$$

Предположение индукции состоит в том, что формула (1) справедлива при некотором значении n. Наша задача — пользуясь формулой (1), вывести ее справедливость для показателя степени $n+1$.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\cdot(a+b)^n = (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k\ a^{n-k}\ b^k\right) =$$

$$= a\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k\ a^{n-k}\ b^k\right) + b\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k\ a^{n-k}\ b^k\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k\ a^{n-k+1}\ b^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k\ a^{n-k}\ b^{k+1} =$$

$$= a^{n+1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_n^k\ a^{n-k+1}\ b^k}_{\substack{k=p+1,\\ k=1\ldots n,\\ p=0\ldots n-1}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k\ a^{n-k}\ b^{k+1}}_{k=p} + b^{n+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{p=0}^{n-1} C_n^{p+1}\ \underline{a^{n-p}\ b^{p+1}} + \sum_{p=0}^{n-1} C_n^p\ \underline{a^{n-p}\ b^{p+1}} + b^{n+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{p=0}^{n-1} \underbrace{\left(C_n^{p+1} + C_n^p\right)}_{=C_{n+1}^{p+1}}\ a^{n-p}\ b^{p+1} + b^{n+1} =$$

$$= C_{n+1}^0\ a^{n+1} + \underbrace{\sum_{p=0}^{n-1} C_{n+1}^{p+1}\ a^{(n+1)-(p+1)}\ b^{p+1}}_{\substack{k=p+1,\\ p=0...n-1,\\ k=1...n}} + C_{n+1}^{n+1}\ b^{n+1} =$$

$$= C_{n+1}^0\ a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^{k}\ a^{(n+1)-k}\ b^{k} + C_{n+1}^{n+1}\ b^{n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{k}\ a^{(n+1)-k}\ b^{k}. \qquad \blacktriangleright$$

1.8. **Дальнейшие свойства биномиальных коэффициентов.** Взяв в формуле (1) $a = b = 1$, получим

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\ 1^{n-k}\ 1^k,$$

откуда

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$$

Аналогично, взяв $a = 1$, $b = -1$, находим

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0.$$

2. Комплексные числа

2.1. **Числовое поле.** Числовое поле — множество чисел, в котором корректны арифметические операции: сложение, вычитание, умножение, деление на ненулевое число.

Примеры числовых полей: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

Не являются числовыми полями: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Нетривиальный пример: числа вида $a + b\sqrt{2}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$, образуют числовое поле:

$$\left(a + b\sqrt{2}\right)\left(c + d\sqrt{2}\right) = (ac + 2bd) + (bc + ad)\sqrt{2},$$

$$\frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \frac{\left(a + b\sqrt{2}\right)\left(c - d\sqrt{2}\right)}{\left(c + d\sqrt{2}\right)\left(c - d\sqrt{2}\right)} = \frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2} + \frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2}\sqrt{2},$$

причем знаменатель $\neq 0$, а все коэффициенты $\in \mathbb{Q}$.

2.2. **Многочлены.** Пусть $\mathbb{K}$ — некоторое числовое поле.

Одночлен (от одной переменной x) над полем $\mathbb{K}$ — выражение вида ax^k, где $a \in \mathbb{K}$ — коэффициент одночлена, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ — степень одночлена; $\deg(ax^k) = k$.

Многочлен степени n (от одной переменной x) над полем $\mathbb{K}$ — сумма одночленов:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n,$$

где $a_0 \neq 0$.

Множество всех многочленов от переменной x над полем $\mathbb{K}$ обозначается $\mathbb{K}[x]$.

Можно рассматривать одночлены и многочлены от нескольких переменных.

Значение многочлена $f(x)$ можно вычислять как при $x \in \mathbb{K}$, так и при $x \notin \mathbb{K}$.

Корень многочлена $f(x)$ — значение x, при котором $f(x) = 0$.

Алгебраически замкнутое поле $\mathbb{K}$ — это такое поле, что любой многочлен из $\mathbb{K}[x]$ имеет корень $x \in \mathbb{K}$.

Поле $\mathbb{Q}$ не является алгебраически замкнутым:

$$(x^2 - 2) \in \mathbb{Q}[x], \qquad x^2 - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Решение проблемы — введение иррациональных чисел.

Поле $\mathbb{R}$ не является алгебраически замкнутым: многочлен $x^2 + 1$ корней не имеет.

Формальное решение проблемы — ввести «новое число» i, обладающее свойством $\boxed{i^2 = -1}$; тогда

$$x^2 + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm i.$$

Пример.

Рассмотрим квадратное уравнение

$$x^2 + 4x + 5 = 0.$$

Имеем:

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 = (-1) \cdot 4, \quad \sqrt{D} = 2i, \quad x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i.$$

Теорема Виета также справедлива:

$$x_1 + x_2 = (-2 - i) + (-2 + i) = -4,$$
$$x_1 x_2 = (-2 - i)(-2 + i) = (-2)^2 - i^2 = 5.$$

Отметим, что мы рассматривали уравнение с вещественными коэффициентами.

Числа вида $a + bi$ называются комплексными числами.

2.3. **Определение комплексных чисел.**

Комплексное число z — упорядоченная пара вещественных чисел (x, y):

$$z = (x, y).$$

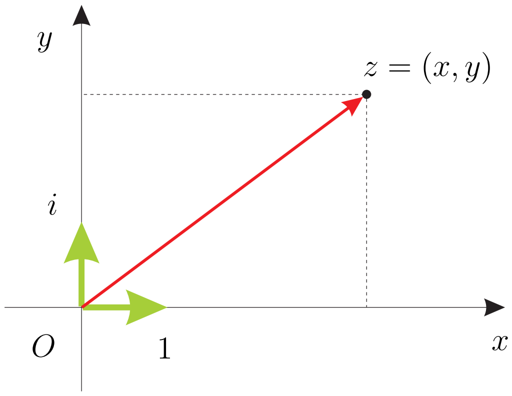
$x = \operatorname{Re} z$ — вещественная часть z.

$y = \operatorname{Im} z$ — мнимая часть z.

Равенство комплексных чисел:

$$z_1 = z_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2, \\ \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2. \end{array} \right\}$$

Комплексное число $z = (x, y)$ можно изобразить точкой координатной плоскости Oxy либо радиус-вектором этой точки. Координатная плоскость называется при такой интерпретации плоскостью комплексных чисел, ось Ox — вещественной осью, ось Oy — мнимой осью.



Арифметические операции над комплексными числами $z_1=(x_1,y_1)$, $z_2=(x_2,y_2)$:

(a) сложение:

$$z:=z_1+z_2=(x_1+x_2,\ y_1+y_2);$$

(b) умножение:

$$z:=z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1).$$

Свойства арифметических операций:

1. $z_1+z_2=z_2+z_1$ (коммутативность сложения);
2. $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ (ассоциативность сложения);
3. $z_1z_2=z_2z_1$ (коммутативность умножения);
4. $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$ (ассоциативность умножения);
5. $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$ (дистрибутивность).

Для чисел вида $z=(x,0)$ имеем:

$$(x_1,0)+(x_2,0)=(x_1+x_2,\ 0),$$
$$(x_1,0)\cdot(x_2,0)=(x_1\cdot x_2-0\cdot 0,\ x_1\cdot 0+0\cdot x_2)=(x_1x_2,0).$$

Такие комплексные числа при арифметических операциях ведут себя как вещественные числа. Поэтому можно отождествить комплексное число $z=(x,0)$ с вещественным числом x и считать множество вещественных чисел подмножеством множества комплексных чисел.

Рассмотрим мнимые числа, $z=(0,y)$. Имеем:

$$(0,y_1)+(0,y_2)=(0,y_1+y_2).$$

Произведение вещественного и мнимого числа:

$$x\cdot(0,y)=(x,0)\cdot(0,y)=(x\cdot 0-0\cdot y,\ x\cdot y+0\cdot 0)=(0,xy);$$

поэтому можно считать, что мнимое число есть произведение вещественного числа и мнимой единицы:

$$(0,y)=y\cdot(0,1).$$

Произведение двух мнимых чисел:

$$(0,y_1)\cdot(0,y_2)=(0\cdot 0-y_1\cdot y_2,\ 0\cdot y_2+y_1\cdot 0)=(-y_1y_2,0).$$

Отсюда вытекает, что квадрат мнимой единицы представляет собой вещественное число, равное -1:

$$(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1.$$

Мнимую единицу обозначим символом i:

$$i=(0,1).$$

Тогда для любого $z=(x,y)$ имеем

$$z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=x+y\cdot(0,1)=x+iy.$$

Это — алгебраическая форма записи комплексного числа.

2.4. **Сопряжение.** Пусть $z=x+iy$.

Сопряженное к z число: $\bar{z}=x-iy$.

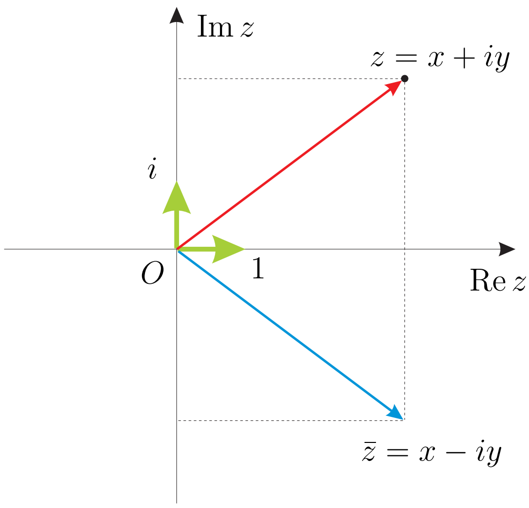
Свойства операции сопряжения:

1. $\bar{\bar{z}}=z$;
2. $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$;
3. $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$;
4. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

Легко получить следующие соотношения:

$$\operatorname{Re} z=\frac{z+\bar{z}}{2},\quad \operatorname{Im} z=\frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

Число $\bar{z}$, сопряженное к z, геометрически изображается точкой, симметричной точке z относительно вещественной оси.



2.5. **Вычитание и деление.** Пусть $z_1=(x_1,y_1)=x_1+iy_1$ и $z_2=(x_2,y_2)=x_2+iy_2$.

Разность $z=z_1-z_2$ определяется как решение уравнения $z+z_2=z_1$.

$$(x_1,y_1)-(x_2,y_2)=(x_1-x_2,\ y_1-y_2),$$
$$(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

Частное $z=z_1/z_2$ определяется решение уравнения $z\cdot z_2=z_1$.

Для вычисления частного заметим, что

$$(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2\in\mathbb{R}.$$

Теперь запишем

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} =$$

$$= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Таким образом, деление возможно на любое ненулевое комплексное число.

Пример.

$$(3 + 4i)(7 - 2i) = 3 \cdot 7 - 3 \cdot 2i + 4i \cdot 7 - 4i \cdot 2i = 29 + 22i,$$

$$\frac{29 + 22i}{7 - 2i} = \frac{(29 + 22i)(7 + 2i)}{(7 - 2i)(7 + 2i)} =$$

$$= \frac{29 \cdot 7 + 29 \cdot 2i + 22i \cdot 7 + 22i \cdot 2i}{7^2 - (2i)^2} = \frac{159 + 212i}{53} = 3 + 4i.$$

В множестве комплексных чисел выполняются операции сложения, вычитания, умножения и деления на ненулевое число. Таким образом, множество комплексных чисел является полем, которое обозначается $\mathbb{C}$.

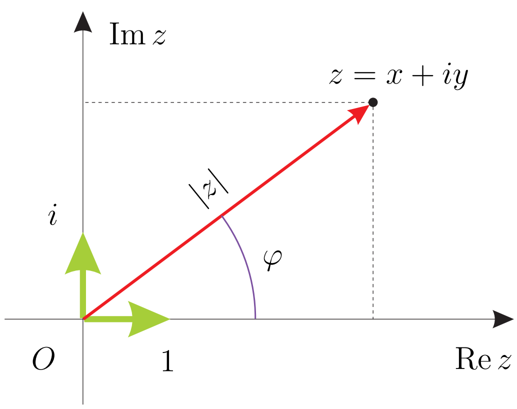
3. Формула Эйлера

3.1. **Тригонометрическая форма записи комплексных чисел.** Точка $z = (x, y)$ на плоскости может быть задана не только декартовыми, но и полярными координатами (r, φ):

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad 0 \leqslant r < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Число r называется модулем числа z, φ — аргументом:

$$r = |z|, \quad \varphi = \arg z.$$



Аргумент определен неоднозначно (с точностью до слагаемого $2\pi n$), поэтому различают

(1) главное значение аргумента $\arg z \in [0, 2\pi)$ или $\arg z \in (-\pi, \pi]$;

(2) (многозначный) аргумент $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; используются также записи

$$\operatorname{Arg} z \equiv \arg z \pmod{2\pi}, \quad \operatorname{Arg} z = \varphi \pmod{2\pi}.$$

Комплексное число можно записать в виде

$$z = x + iy = r\cos\varphi + i\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Это — тригонометрическая форма записи комплексных чисел.

Перемножим два числа:

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2\Big(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2\Big) =$$
$$= r_1 r\Big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\Big).$$

Таким образом,

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \qquad \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2.$$

3.2. **Формула Эйлера.** Рассмотрим функцию

$$f(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Она обладает свойством

$$f(\varphi_1) \cdot f(\varphi_2) = f(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Эта функция обозначается $e^{i\varphi}$:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi;$$

это — формула Эйлера.

Средствами анализа можно доказать, что функция $f(\varphi)$ действительно является показательной функцией.

Показательная форма записи комплексных чисел:

$$z = re^{i\varphi},$$

где

$$r = |z|, \quad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Из формулы Эйлера получаем:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi;$$

складывая/вычитая эти равенства, находим

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

3.3. **Возведение в степень.** Тригонометрическая и показательная формы записи полезны при возведении комплексных чисел в степень:

$$\Big[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\Big]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Эта формула доказана при $n \in \mathbb{N}$, но легко убедиться, что она справедлива и при $n \in \mathbb{Z}$. Действительно, поскольку

$$\frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi - i\sin\varphi)} = \cos\varphi - i\sin\varphi,$$

получаем

$$\Big[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\Big]^{-n} = \left(\frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\right)^n = r^{-n}(\cos\varphi - i\sin\varphi)^n =$$
$$= r^{-n}(\cos n\varphi - \sin n\varphi) = r^{-n}\big(\cos(-n\varphi) + \sin(-n\varphi)\big).$$

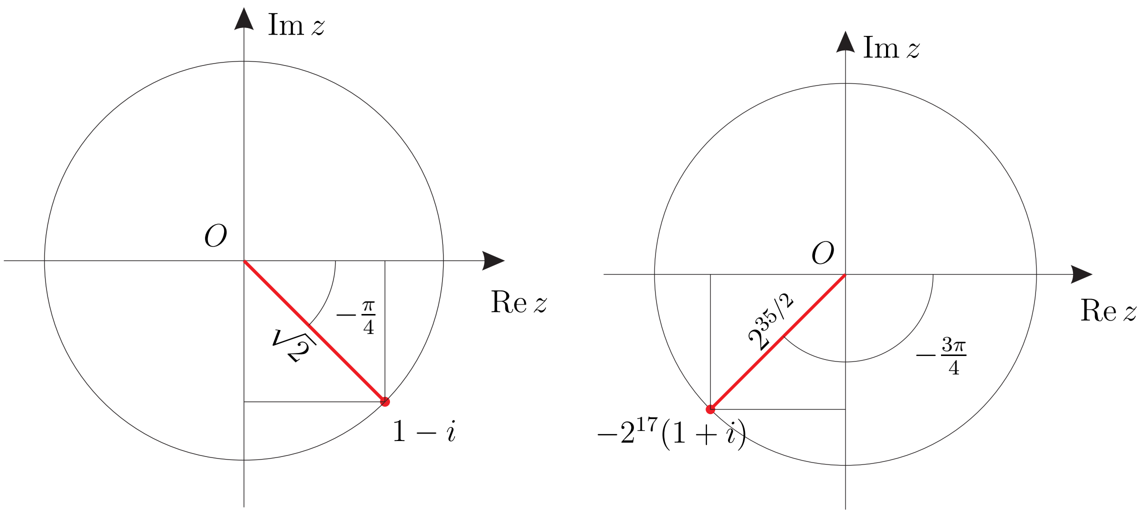
Те же выкладки в показательной форме намного короче:

$$\frac{1}{e^{i\varphi}} = \frac{e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi}\cdot e^{-i\varphi}} = e^{-i\varphi}, \qquad \left(re^{i\varphi}\right)^{-n} = r^{-n}\left(e^{-i\varphi}\right)^n = r^{-n}e^{-in\varphi}.$$

Пример.
Вычислим $(1-i)^{35}$.
Представим число $1-i$ в тригонометрической (показательной) форме:

$$\operatorname{Re}(1-i) = 1, \quad \operatorname{Im}(1-i) = -1, \quad |1-i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$
$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4};$$

здесь мы выбрали диапазон значений $\arg z$ в виде $(-\pi, \pi]$.



Имеем:

$$(1-i)^{35} = \left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^{35} = 2^{\frac{35}{2}}e^{-i\pi\frac{35}{4}} = 2^{\frac{35}{2}}e^{-i\pi\left(8+\frac{3}{4}\right)} =$$
$$= 2^{\frac{35}{2}}e^{-i\pi\frac{3}{4}} = 2^{\frac{35}{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2^{17}(1+i).$$

3.4. **Формула Муавра.** При $r=1$ получаем формулу Муавра:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Формула Муавра полезна при тригонометрических преобразованиях.
Пример.

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi,$$
$$\cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi\cdot i\sin\varphi + 3\cos\varphi\cdot i^2\sin^2\varphi + i^3\sin^3\varphi = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi,$$
$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi, \quad \sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi.$$

Пример.
Преобразуем в произведения следующие суммы:

$$C = \sum_{k=0}^{n}\cos kt = 1 + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos nt,$$
$$S = \sum_{k=0}^{n}\sin kt = \sin t + \sin 2t + \cdots + \sin nt.$$

Запишем

$$C + iS = \sum_{k=0}^{n}\cos kt + i\sum_{k=0}^{n}\sin kt = \sum_{k=0}^{n}(\cos kt + i\sin kt) = \sum_{k=0}^{n}e^{ikt}.$$

Вычислим сумму получившейся геометрической прогрессии:

$$\sum_{k=0}^{n}e^{ikt} = \frac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{ikt}} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}t}\left(e^{-i\frac{n+1}{2}t} - e^{i\frac{n+1}{2}t}\right)}{e^{i\frac{t}{2}}\left(e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}\right)} =$$
$$= e^{i\frac{nt}{2}}\frac{\left(e^{i\frac{n+1}{2}t} - e^{-i\frac{n+1}{2}t}\right)/2i}{\left(e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}\right)/2i} = e^{i\frac{nt}{2}}\ \frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{nt}{2}}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}.$$

В полученных выражениях отделим вещественную и мнимую части:

$$C = \mathrm{Re}\ e^{i\frac{nt}{2}}\ \frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{nt}{2}} = \frac{\cos\frac{nt}{2}\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{nt}{2}}, \qquad S = \mathrm{Im}\ e^{i\frac{nt}{2}}\ \frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{nt}{2}} = \frac{\sin\frac{nt}{2}\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{nt}{2}}.$$

Пример.
Выразим $\cos^5 t$ через кратные углы.

$$\cos^5 t = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^5}\left(e^{5it} + 5e^{4it}e^{-it} + 10e^{3it}e^{-2it} + 10e^{2it}e^{-3it} + 5e^{it}e^{-4it} + e^{-5it}\right) =$$
$$= \frac{1}{2^4}\left(\frac{e^{5it}+e^{-5it}}{2} + 5\frac{e^{3it}+e^{-3it}}{2} + 10\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right) = \frac{1}{16}\cos 5t + \frac{5}{16}\cos 3t + \frac{5}{8}\cos t.$$

3.5. **Извлечение корней.** Число w называется корнем n-й степени из числа z, если $w^n = z$:

$$w = \sqrt[n]{z} \quad \Longleftrightarrow \quad w^n = z.$$

Представим числа w, z в показательной форме:

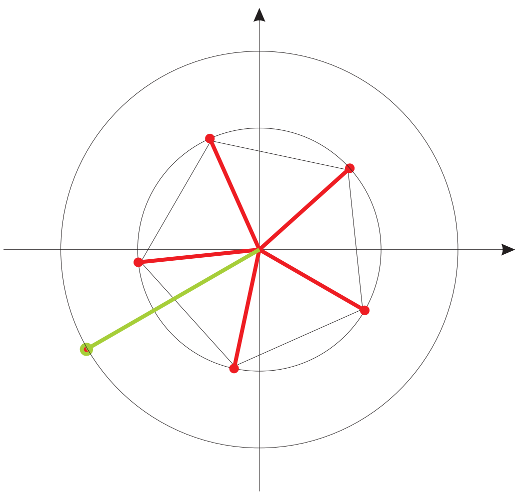
$$w = Re^{i\Phi}, \quad z = re^{i\varphi}.$$

Наша задача — по данным r, φ найти R, Φ.

$$\left(Re^{i\Phi}\right)^n = re^{i\varphi} \quad \Longleftrightarrow \quad R^n e^{in\Phi} = re^{i\varphi} \quad \Longleftrightarrow$$
$$\begin{cases} R^n = r, \\ n\Phi = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} R = r^{1/n}, \\ \Phi = \dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

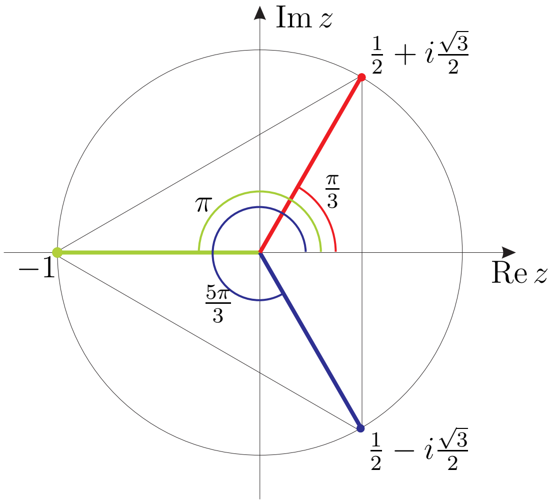
Таким образом, получается не один, а множество корней, однако различными будут только те, которые отвечают значениям $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Геометрически эти корни изображаются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $r^{1/n}$.



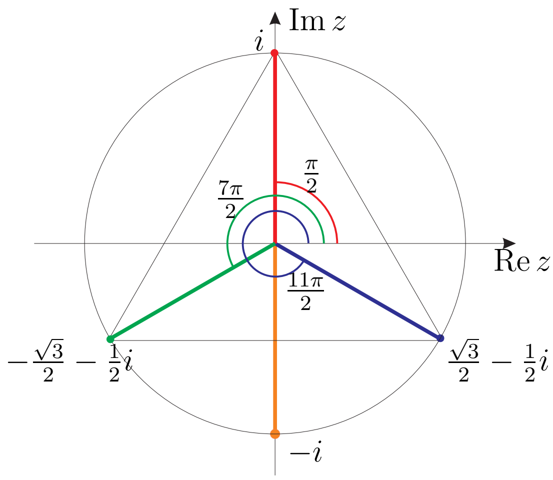
Пример.
$\sqrt[3]{-1}$.

$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{e^{i\pi}} = e^{i\frac{\pi+2\pi k}{3}} = \begin{cases} e^{i\pi/3} & = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, & k = 0, \\ e^{i\pi} & = -1, & k = 1, \\ e^{5i\pi/3} & = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, & k = 2. \end{cases}$$



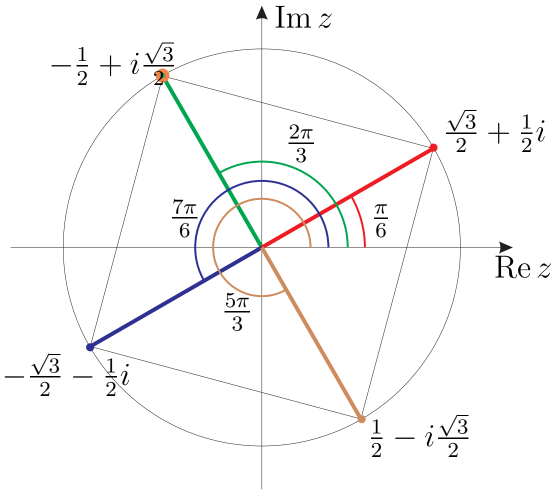
Пример.
$\sqrt[3]{-i}$.

$$\sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{e^{3i\pi/2}} = e^{i\frac{3\pi/2+2\pi k}{3}} = e^{i\frac{3\pi+4\pi k}{6}} = \begin{cases} e^{i\pi/2} = i, & k=0, \\ e^{7i\pi/6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i, & k=1, \\ e^{11i\pi/6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i, & k=2. \end{cases}$$



Пример.
$\sqrt[4]{-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt[4]{e^{2i\pi/3}}$.

$$\sqrt[4]{e^{2i\pi/3}} = e^{i\frac{2\pi/3+2\pi k}{4}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}\right)} = \begin{cases} e^{i\pi/6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i, & k=0, \\ e^{2i\pi/3} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, & k=1, \\ e^{7i\pi/6} = -\dfrac{1}{2}\sqrt{3} - \dfrac{1}{2}i, & k=2, \\ e^{5i\pi/3} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i\sqrt{3}, & k=3. \end{cases}$$



3.6. **Гиперболические функции.** Ранее мы получили соотношения

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

Определим гиперболические функции

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}.$$

Связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями:

$$\cos ix = \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{ch} x = \cos x,$$
$$\sin ix = i \operatorname{sh} x, \quad \operatorname{sh} ix = i \sin x.$$

Все соотношения для гиперболических функций могут быть получены из соответствующих соотношений для тригонометрических функций:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \cos^2 ix - \left(\frac{1}{i}\sin ix\right)^2 = \cos^2 ix + \sin^2 ix = 1,$$
$$\operatorname{ch} 2x = \cos 2ix = \cos^2 ix - \sin^2 ix = \operatorname{ch}^2 x - (i\sin x)^2 = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x,$$
$$\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = \frac{1}{i}(\sin ix + \sin iy) = \frac{1}{i}\cdot 2\sin\frac{i(x+y)}{2}\cos\frac{i(x-y)}{2} =$$
$$= \frac{2}{i}\cdot i \operatorname{sh}\frac{x+y}{2}\operatorname{ch}\frac{x-y}{2} = 2\operatorname{sh}\frac{x+y}{2}\operatorname{ch}\frac{x-y}{2}.$$

4. Многочлены

4.1. **Деление многочленов.**

$$Q(x) = \frac{A(x)}{B(x)} \quad \Longleftrightarrow \quad A(x) = B(x)Q(x).$$

Будем обозначать степень многочлена нижним индексом: запись $A_n(x)$ означает, что $A(x)$ — многочлен степени n. Тогда

$$\frac{A_n(x)}{B_m(x)} = Q_{n-m}(x).$$

Деление многочленов осуществляется алгоритмом «деления уголком».

$$\begin{array}{l|l} 2x^5+4x^4-4x^3+11x^2-13x+3 & x^2+3x-1 \\ \cline{2-2} \underline{2x^5+6x^4-2x^3} & 2x^3-2x^2+4x-3 \end{array}$$

$$
\begin{array}{r}
-2x^4 - 2x^3 + 11x^2 \\
\underline{-2x^4 - 6x^3 + 2x^2} \\
4x^3 + 9x^2 - 13x \\
\underline{4x^3 + 12x^2 - 4x} \\
-3x^2 - 9x + 3 \\
\underline{-3x^2 - 9x + 3} \\
0
\end{array}
$$

4.2. **Деление с остатком.** Деление многочленов нацело выполнимо не всегда, однако всегда возможно «деление с остатком».

Пусть требуется разделить многочлен $A_n(x)$ на многочлен $B_m(x)$. Формула деления с остатком имеет вид

$$A_n(x) = \underbrace{B_m(x)}_{\text{делитель}} \cdot \underbrace{Q_{n-m}(x)}_{\text{частное}} + \underbrace{R_k(x)}_{\text{остаток}}, \quad 0 \leqslant k < m.$$

Отметим, что степень остатка строго меньше степени делителя.

Если делить многочлен $A_n(x)$ на многочлен первой степени $B_1(x) = x - c$, то остаток будет многочленом нулевой степени, т.е. числом:

$$A_n(x) = (x - c)B_{n-1}(x) + R.$$

Теорема.

Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $A_n(x)$ на $x - c$ равен $A_n(c)$.

◀ По формуле деления с остатком

$$A_n(x) = (x - c)B_{n-1}(x) + R.$$

Подставляя сюда $x = c$, получим

$$A_n(c) = \underbrace{(c - c)B_{n-1}(c)}_{=0} + R \quad \Longleftrightarrow \quad R = A_n(c). \qquad ▶$$

Теорема.

Многочлен $A_n(x)$ делится на $x - c$ без остатка тогда и только тогда, когда c — корень многочлена $A_n(x)$, т.е. $A_n(c) = 0$.

◀ 1. Пусть $A_n(x)$ делится без остатка на $x - c$, т.е.

$$A_n(x) = (x - c)B_{n-1}(x).$$

Подставляя сюда $x = c$, получаем $A_n(c) = 0$.

2. Пусть $A_n(c) = 0$. Разделим $A_n(x)$ на $x - c$. По формуле деления с остатком

$$A_n(x) = (x - c)B_{n-1}(x) + R, \quad \text{где} \quad R = A_n(c) = 0. \qquad ▶$$

4.3. **Кратные корни многочлена.** Если $x = c$ — корень многочлена $A_n(x)$, т.е. $A_n(c) = 0$, то многочлен $A_n(x)$ может быть записан в виде

$$A_n(x) = (x - c)B_{n-1}(x).$$

Если число c не является корнем многочлена $B_{n-1}(x)$, то говорят, что $x = c$ — простой корень многочлена $A_n(x)$.

В противном случае можно записать

$$A_n(x) = (x-c)^p B_{n-p}(x),$$

где многочлен $B_{n-p}(x)$ не имеет число c своим корнем. В этом случае говорят, что число $x = c$ является корнем кратности p многочлена $A_n(x)$.

Теорема.

Если число $x = c$ является корнем кратности p многочлена $A_n(x)$, то оно является корнем кратности $p-1$ производной $A_n'(x)$.

◀ Согласно условию имеем

$$A_n(x) = (x-c)^p B_{n-p}(x), \quad \text{где} \quad B_{n-p}(c) \neq 0.$$

Продифференцируем многочлен $A_n(x)$:

$$A_n'(x) = p(x-c)^{p-1} B_{n-p}(x) + (x-c)^p B_{n-p}'(x) =$$

$$= (x-c)^{p-1}\Big[pB_{n-p}(x) + (x-c)B_{n-p}'(x)\Big] = (x-c)^{p-1}\tilde{B}_{n-p}(x).$$

Очевидно, $A_n'(c) = 0$, но при этом

$$\tilde{B}_{n-p}(c) = p\,\underbrace{B_{n-p}(c)}_{\neq 0} + (c-c)B_{n-p}'(c) \neq 0. \qquad ▶$$

4.4. **Основная теорема алгебры.**

Любой многочлен с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.

Эквивалентная формулировка: поле комплексных чисел алгебраически замкнуто.

Легко доказать, что каждый многочлен степени n в поле $\mathbb{C}$ имеет ровно n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

Действительно, рассмотрим многочлен $A_n(z)$. Согласно основной теореме алгебры он имеет корень $z = c_1$ и может быть представлен в виде

$$A_n(z) = (z-c_1)B_{n-1}(z).$$

Многочлен $B_{n-1}(x)$ также имеет корень $x = c_2$, так что

$$A_n(z) = (z-c_1)(z-c_2)D_{n-2}(z).$$

Продолжая процедуру, получаем, что многочлен $A_n(z)$ допускает разложение вида

$$A_n(z) = a(z-c_1)(z-c_2)\cdots(z-c_n),$$

причем среди корней $c_1, \ldots, c_n$ могут быть и совпадающие.

4.5. **Многочлены с вещественными коэффициентами.**

Многочлен степени n с вещественными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней, если считать каждый корень столько раз, какова его кратность.

Теорема.

Пусть $A(z)$ — многочлен с вещественными коэффициентами. Тогда для любого $z \in \mathbb{C}$ имеем

$$A(\bar{z}) = \overline{A(z)}.$$

◀ Пусть

$$A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n.$$

Так как коэффициенты вещественны, то

$$\bar{a}_0 = a_0, \quad \bar{a}_1 = a_1, \quad \dots, \quad \bar{a}_n = a_n.$$

Поэтому

$$\begin{gathered}\overline{A(z)} = \overline{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n} = \\ = \bar{a}_0 \bar{z}^n + \bar{a}_1 \bar{z}^{n-1} + \dots + \bar{a}_{n-1} \bar{z} + \bar{a}_n = \\ = a_0 \bar{z}^n + a_1 \bar{z}^{n-1} + \dots + a_{n-1} \bar{z} + a_n = A(\bar{z}). \qquad \blacktriangleright\end{gathered}$$

Теорема.

Если $A(z)$ — многочлен с вещественными коэффициентами, $z = c$ — его корень, то сопряженное число $\bar{z}$ также является корнем многочлена $A(z)$.

$\blacktriangleleft$ $A(\bar{c}) = \overline{A(c)} = \bar{0} = 0$ $\blacktriangleright$

Таким образом, у многочлена с вещественными коэффициентами комплексные корни могут появляться только сопряженными парами.

Пусть $c, \bar{c}$ — пара сопряженных корней (с ненулевыми мнимыми частями). В разложение многочлена на множители входит произведение

$$(z - c)(z - \bar{c}) = z^2 - (c + \bar{c})z + c\bar{c} = z^2 - 2(\operatorname{Re} c)z + |c|^2,$$

являющееся квадратным трехчленом; отметим, что дискриминант этого трехчлена отрицателен:

$$D = 4(\operatorname{Re} c)^2 - 4|c|^2 < 0, \quad \text{так как} \quad |c|^2 = (\operatorname{Re} c)^2 + (\operatorname{Im} c)^2 > (\operatorname{Re} c)^2.$$

Такие квадратные трехчлены называются неприводимыми.

Таким образом, каждый многочлен с вещественными коэффициентами может быть разложен в произведение линейных множителей и неприводимых квадратных трехчленов:

$$A(x) = a(x - c_1)^{\alpha_1} \cdots (x - c_s)^{\alpha_s} (x + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \cdots (x + p_r x + q_r)^{\beta_r}.$$

5. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти суммы:

(a) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots$;

(b) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots$.

[Указание: Рассмотреть $(1 + i)^n$.]

Ответ. (a) $2^{n/2} \cos \frac{\pi n}{4}$; (b) $2^{n/2} \sin \frac{\pi n}{4}$.

Задача 2. Найти суммы:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k \cos kx$;

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k \sin kx$.

Ответ. (a) $2^n \cos^n \frac{x}{2} \cos \frac{n+2}{2} x$; (b) $2^n \cos^n \frac{x}{2} \sin \frac{n+2}{2} x$.

Задача 3. При каком условии многочлен $x^3 + px + q$ делится на многочлен $x^2 + mx - 1$?

Ответ. $q = m$ и $p = -q^2 - 1$.

Задача 4. Разложить на множители многочлен $x^{2n} - 2x^n + 2$.

Ответ. $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(x^2 - 2\sqrt[2n]{2}x\cos\dfrac{8k+1}{4n}\pi + \sqrt[n]{2}\right).$

Задача 5. Разложить на множители многочлен $x^{2n} + x^n + 1$.

Ответ. $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\dfrac{3k+1}{3n}2\pi + 1\right).$