Лекция 5
Парабола, эллипс, гипербола

1. Парабола

Парабола — эта линия, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат Oxy координат имеет уравнение

$$y^2 = 2px. \tag{1}$$

Указанная система координат называется канонической, уравнение (1) — каноническим уравнением параболы.

Теорема.

Парабола представляет собой множество точек, равноудаленных от данной прямой (директрисы параболы) и данной точки (фокуса параболы), не лежащей на директрисе.

◀ Пусть парабола задана уравнением (1) Имеем:

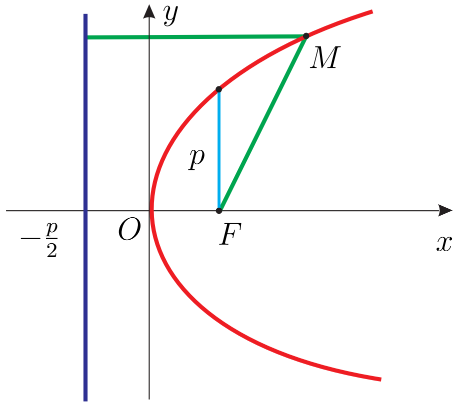
$$y^2 = 2px = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 \iff \left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

т.е. точка (x, y) параболы равноудалена от прямой $x = -p/2$ и точки $(p/2, 0)$, которая является фокусом параболы, поскольку при $x = p/2$ имеем $y^2 = p^2$.

Обратно, рассмотрим прямую $x = -p/2$ и точку $F(p/2, 0)$. Точка $M(x, y)$ удалена от указанной прямой на расстояние $|x+p/2|$, а от точки F — на расстояние $\sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}$. Условие равенства этих расстояний

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

после возведения в квадрат и несложных преобразований дает уравнение (1). ▶



Основные термины, связанные с параболой:

(1) ось Ox — ось параболы;
(2) фокальная хорда — отрезок с концами на параболе, проведенный через фокус перпендикулярно оси;
(3) p — (фокальный) параметр (равен половине длины фокальной хорды);
(4) $p/2$ — фокусное расстояние
(5) точка $F(p/2, 0)$ — фокус;
(6) прямая $x = -p/2$ — директриса.

2. Эллипс

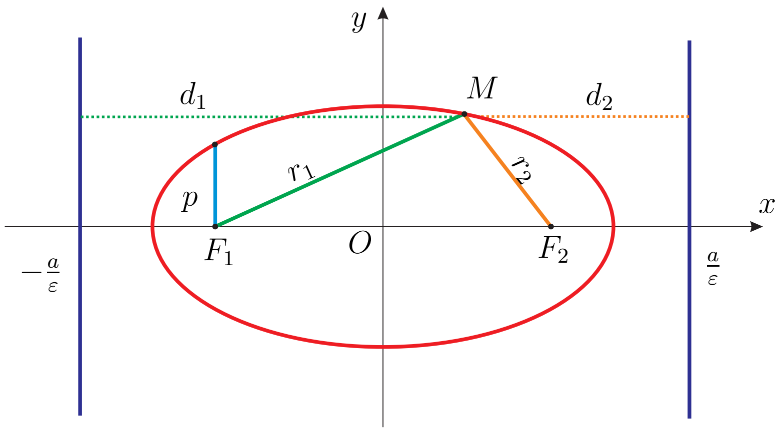
Эллипс — это линия, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат Oxy координат имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2}$$

Указанная система координат называется канонической, уравнение (2) — каноническим уравнением эллипса.

Основные термины, связанные с эллипсом:

(1) a — большая полуось;
(2) b — малая полуось;
(3) $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ — линейный эксцентриситет;
(4) точки $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ — фокусы;
(5) $2c$ — фокусное расстояние;
(6) $\varepsilon = c/a < 1$ — (числовой) эксцентриситет;
(7) прямые $x = \pm a/\varepsilon$ — директрисы;
(8) ось OX — большая (фокальная) ось;
(9) ось OY — малая ось;
(10) фокальная хорда — отрезок с концами на эллипсе, проведенный через фокус перпендикулярно фокальной оси;
(11) $p = b^2/a$ — (фокальный) параметр (равен половине длины фокальной хорды);
(12) точки $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$ — вершины эллипса;
(13) точка $O(0, 0)$ — центр эллипса.



Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка эллипса. Отрезки F_1M, F_2M называются фокальными радиусами точки M.

Теорема.

Фокальное свойство эллипса: Эллипс является множеством точек, сумма расстояний от которых до фокусов постоянна: $F_1M + F_2M = 2a$.

◀ Рассмотрим эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Фокальные радиусы произвольной точки $M(x, y)$ эллипса равны

$$r_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

Имеем

$$r_1^2 = (x+c)^2 + y^2 = (x+c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + 2xc + c^2 + b^2 =$$

$$= \frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2 = \varepsilon^2 x^2 + 2\varepsilon^2 ax + a^2 = (\varepsilon x + a)^2.$$

Поскольку $|x| \leqslant a$, $\varepsilon < 1$, имеем $|\varepsilon x| < a$, так что

$$r_1 = a + \varepsilon x.$$

Аналогично находим

$$r_2 = a - \varepsilon x.$$

Следовательно,

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Обратно, пусть $M(x, y)$ — точка плоскости, для которой сумма $F_1M + F_2M$ постоянна и равна $2a$, т.е.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Уничтожив радикалы, придем к уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \qquad \blacktriangleright$$

Теорема.

Директориальное свойство эллипса: Эллипс является множеством точек, отношение расстояний от которых до фокуса и до соответствующей директрисы постоянно (и равно ε).

$\blacktriangleleft$ Расстояния от произвольной точки $M(x, y)$ эллипса до левой и правой директрис равны

$$d_1 = \left|x + \frac{a}{\varepsilon}\right| = \left|\frac{\varepsilon x + a}{\varepsilon}\right| = \frac{r_1}{\varepsilon}, \quad d_2 = \left|x - \frac{a}{\varepsilon}\right| = \left|\frac{\varepsilon x - a}{\varepsilon}\right| = \frac{r_2}{\varepsilon}.$$

Обратно, если

$$\sqrt{(x \pm c)^2 + y^2} = \varepsilon\left|x \pm \frac{a}{\varepsilon}\right|,$$

то

$$(x \pm c)^2 + y^2 = (\varepsilon x \pm a)^2$$

и поэтому

$$(1 - \varepsilon^2)x^2 + y^2 = a^2 - c^2 \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad \blacktriangleright$$

3. Гипербола

Гипербола — эта линия, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат Oxy координат имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3}$$

Указанная система координат называется канонической, уравнение (3) — каноническим уравнением гиперболы.

Выразим из уравнения гиперболы y:

$$y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}.$$

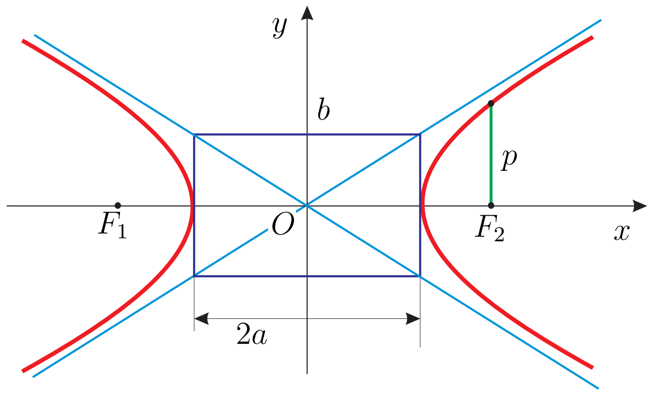
Имеем:

$$y = \pm b\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}} = \pm b\frac{x}{a}\left(1-\frac{a^2}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \pm\frac{b}{a}x+o(1).$$

Таким образом, прямые

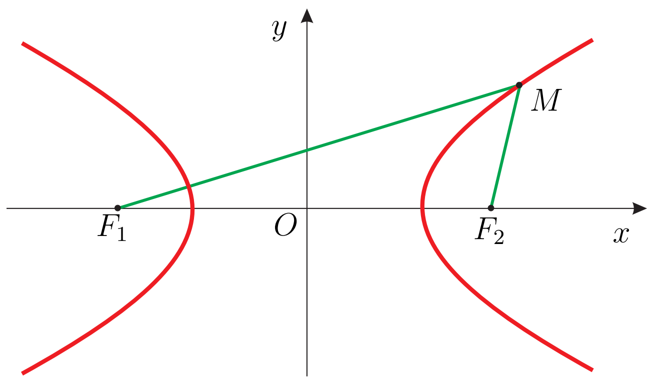
$$y = \pm\frac{b}{a}x \iff ay \pm bx = 0$$

являются асимптотами гиперболы.



Основные термины, связанные с гиперболой:

(1) a — вещественная полуось;
(2) b — мнимая полуось;
(3) $c = \sqrt{a^2+b^2}$ — линейный эксцентриситет;
(4) точки $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ — фокусы;
(5) $2c$ — фокусное расстояние;
(6) $\varepsilon = c/a > 1$ — (числовой) эксцентриситет;
(7) прямые $x = \pm a/\varepsilon$ — директрисы;
(8) ось OX — вещественная (фокальная) ось;
(9) ось OY — мнимая ось;
(10) фокальная хорда — отрезок с концами на гиперболе, проведенный через фокус перпендикулярно фокальной оси;
(11) $p = b^2/a$ — (фокальный) параметр (равен половине длины фокальной хорды);
(12) точки $(\pm a, 0)$ — вершины гиперболы;
(13) точка $O(0,0)$ — центр гиперболы;
(14) прямые $ay \pm bx = 0$ — асимптоты гиперболы.



Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка гиперболы. Отрезки F_1M, F_2M называются фокальными радиусами точки M.

Теорема.

Фокальное свойство гиперболы: Гипербола является геометрическим местом точек, разность расстояний от которых до фокусов по абсолютной величине постоянна: $|F_1M - F_2M| = 2a$.

◀ Рассмотрим гиперболу

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Длины фокальных радиусов точки $M(x, y)$ равны

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Имеем

$$r_1^2 = (x+c)^2 + y^2 = (x+c)^2 + b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) = \left(\frac{b^2}{a^2} + 1\right)x^2 + 2xc + c^2 - b^2 =$$

$$= \frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2 = \varepsilon^2 x^2 + 2\varepsilon^2 ax + a^2 = (\varepsilon a + x)^2.$$

Поскольку $|\varepsilon x| > |x| \geqslant a$, имеем

$$r_1 = \begin{cases} x\varepsilon + a, & x > 0, \\ -x\varepsilon - a, & x < 0. \end{cases}$$

Аналогично получаем

$$r_2 = \begin{cases} x\varepsilon - a, & x > 0, \\ -x\varepsilon + a, & x < 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$|r_1 - r_2| = \begin{cases} 2a, & x > 0, \\ -2a, & x < 0. \end{cases}$$

Обратно, пусть $M(x, y)$ — точка плоскости, для которой $|F_1M - F_2M| = 2a$, т.е.

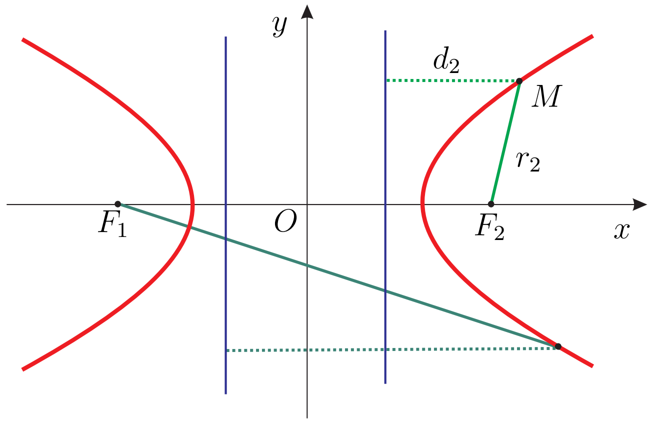
$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

Уничтожив радикалы, придем к уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1. \qquad \blacktriangleright$$

Теорема.

Директориальное свойство гиперболы: Гипербола является геометрическим местом точек, отношение расстояний от которых до фокуса и до соответствующей директрисы постоянно (и равно ε*).*



◀ Расстояния от произвольной точки $M(x, y)$ гиперболы до левой и правой директрис равны

$$d_1 = \left| x + \frac{a}{\varepsilon} \right| = \left| \frac{\varepsilon x + a}{\varepsilon} \right| = \frac{r_1}{\varepsilon}, \quad d_2 = \left| x - \frac{a}{\varepsilon} \right| = \left| \frac{\varepsilon x - a}{\varepsilon} \right| = \frac{r_2}{\varepsilon}.$$

Обратно, если

$$\sqrt{(x \pm c)^2 + y^2} = \varepsilon \left| x \pm \frac{a}{\varepsilon} \right|,$$

то

$$(x \pm c)^2 + y^2 = (\varepsilon x \pm a)^2$$

и поэтому

$$(1 - \varepsilon^2)x^2 + y^2 = a^2 - c^2 \iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad ▶$$

Наряду с гиперболой, заданной каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

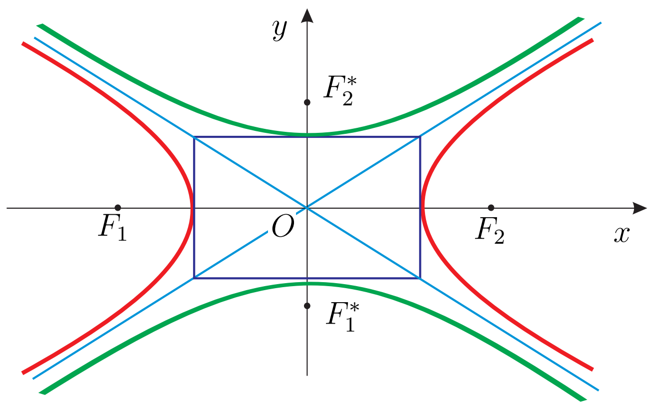
часто рассматривают гиперболу

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

называемую сопряженной по отношению к исходной.

Умножая уравнение сопряженной гиперболы на -1, получим каноническое уравнение, в котором роли координатных осей поменялись:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$



4. Касательные к параболе, эллипсу, гиперболе

Касательная к параболе — это прямая, непараллельная оси параболы, имеющая с параболой одну общую точку.

Пусть (x_0, y_0) — точка касания параболы $y^2 = 2px$ и прямой

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad m \neq 0.$$

Имеем:

$$(y_0 + mt)^2 = 2p(x_0 + lt) \iff y_0^2 + 2my_0t + m^2t^2 = 2px_0 + 2plt \iff$$

$$\iff m^2t^2 + 2t(my_0 - pl) = 0.$$

Это квадратное уравнение должно иметь один (двойной) корень, что возможно лишь при выполнении условия

$$my_0 - pl = 0 \iff l = m\frac{y_0}{p}.$$

Каноническое уравнение касательной имеет вид

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \iff y_0(y - y_0) = p(x - x_0) \iff y_0y - 2px_0 = px - px_0$$

и окончательно

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Касательная к эллипсу (гиперболе) — это прямая, имеющая с эллипсом (гиперболой) одну общую точку.

Пусть (x_0, y_0) — точка касания эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и прямой

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt.$$

Имеем:

$$\underbrace{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}_{=1} + 2t\left(\frac{x_0l}{a^2} + \frac{y_0m}{b^2}\right) + t^2\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) = 1,$$

$$t^2\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) + 2t\left(\frac{x_0l}{a^2} + \frac{y_0m}{b^2}\right) = 0.$$

Это квадратное уравнение должно иметь один (двойной) корень, что возможно при выполнении условия

$$\frac{x_0l}{a^2} + \frac{y_0m}{b^2} = 0,$$

так что можно положить

$$l = \frac{y_0}{b^2}, \quad m = -\frac{x_0}{a^2}.$$

Каноническое уравнение касательной к эллипсу имеет вид

$$\frac{x - x_0}{y_0/b^2} = \frac{y - y_0}{-x_0/a^2} \iff \frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0,$$

откуда, учитывая соотношение $x_0^2/a^2 + y_0^2/b^2 = 1$, получаем

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Аналогично получаем уравнение касательной к гиперболе

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в точке (x_0, y_0):

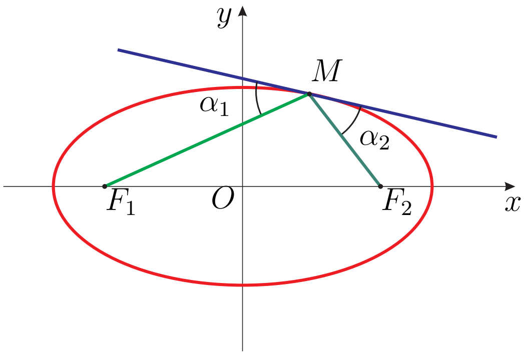
$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

5. Оптические свойства конических сечений

Теорема.

Оптическое свойство эллипса: фокальные радиусы произвольной точки M_0 эллипса составляют равные углы с касательной к эллипсу в точке M_0.

Физическая интерпретация: если в фокусе эллипса поместить точечный источник света, а эллипс считать зеркалом, то отраженный эллипсом луч попадет во второй фокус.



◀ Найдем синусы углов α_1 и α_2, которые фокальные радиусы произвольной точки $M_0(x_0, y_0)$ составляют с касательной к эллипсу в точке M_0.

Расстояние F_1D_1 от фокуса $F_1(-c, 0)$ до касательной, имеющей уравнение

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$

равно

$$F_1D_1 = \frac{\left|\dfrac{(-c)\cdot x_0}{a^2} + \dfrac{0\cdot y_0}{b^2} - 1\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{\varepsilon x_0 + a}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{r_1}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}},$$

так что

$$\sin\alpha_1 = \frac{F_1D_1}{F_1M_0} = \frac{1}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}}.$$

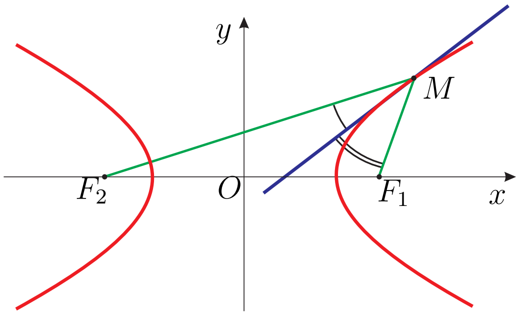
Аналогично получаем

$$\sin\alpha_2 = \frac{F_2D_2}{F_2M_0} = \frac{1}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}}.$$

Таким образом, $\alpha_1 = \alpha_2$. ▶

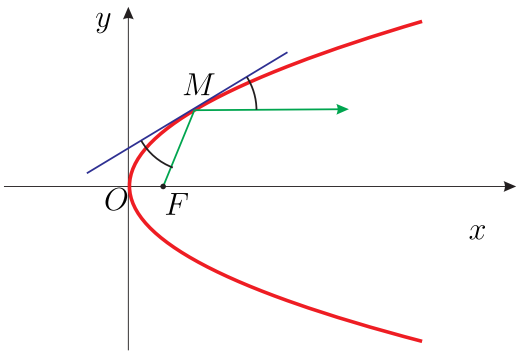
Теорема.

Оптическое свойство гиперболы: фокальные радиусы произвольной точки M_0 гиперболы составляют равные углы с касательной к эллипсу в точке M_0.



Теорема.

Оптическое свойство параболы: касательная к параболе в каждой точке M_0 *составляет равные углы с фокальным радиусом точки* M_0 *и с осью параболы.*



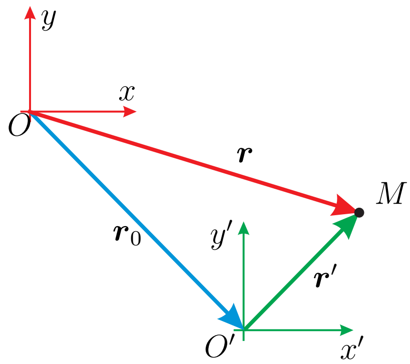
6. Уравнения параболы, эллипса, гиперболы, отнесенные к вершине

Рассмотрим две прямоугольные системы координат с попарно параллельными осями и различными началами: Oxy и $O'x'y'$. Введем обозначения:

$\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки M в Oxy,

$\boldsymbol{r}'$ — радиус-вектор точки M в $O'x'y'$,

$\boldsymbol{r}_0$ — радиус-вектор точки O' в Oxy.



Очевидно,

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}'.$$

В координатной форме

$$\begin{cases} x = x_0 + x', \\ y = y_0 + y'. \end{cases}$$

Пусть $O'x'y'$ — каноническая система координат эллипса

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

Oxy — система координат, начало которой совпадает с левой вершиной эллипса; тогда

$$x = x' + a, \quad y = y'$$

и уравнение эллипса в системе Oxy имеет вид

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Преобразуем:

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{(x-a)^2}{a^2} = \frac{2ax - x^2}{a^2},$$

$$y^2 = 2\frac{b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2;$$

поскольку

$$\frac{b^2}{a} = p, \quad \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2,$$

получаем

$$y^2 = 2px - (1 - \varepsilon^2)x^2.$$

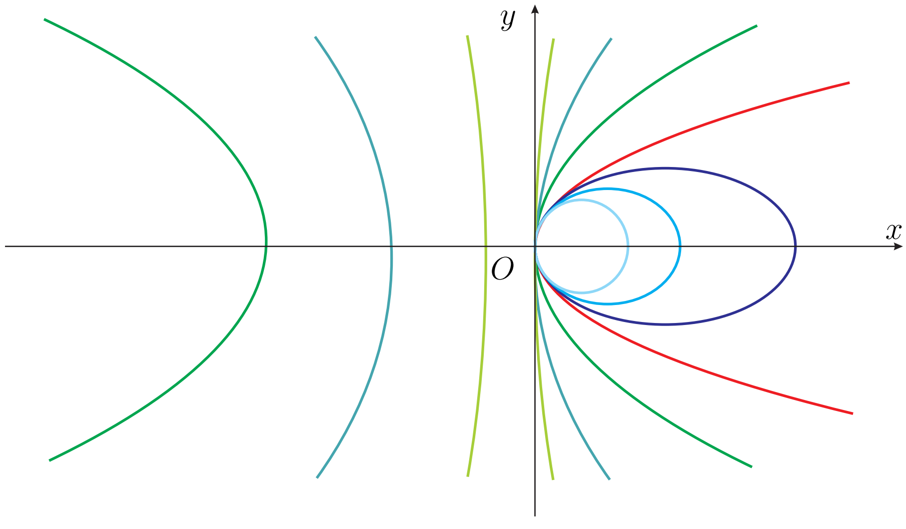
Аналогично, уравнение гиперболы в системе координат, начало которой находится в правой вершине гиперболы, имеет вид

$$y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1)x^2.$$

Таким образом, все три типа кривых задаются одним и тем же уравнением

$$\boxed{y^2 = 2px - (1 - \varepsilon^2)x^2.}$$

При фиксированном p и изменяющемся $\varepsilon \in [0, +\infty)$ мы последовательно получаем:
при $\varepsilon = 0$ окружность;
при $\varepsilon \in (0, 1)$ эллипс;
при $\varepsilon = 1$ параболу;
при $\varepsilon \in (1, +\infty)$ гиперболу.



7. Полярные уравнения параболы, эллипса, гиперболы

Получим уравнения конических сечений в полярной системе координат, ось которой совпадает с главной осью кривой, а полюс находится в фокусе.

Поместим полюс в фокус параболы. Имеем:

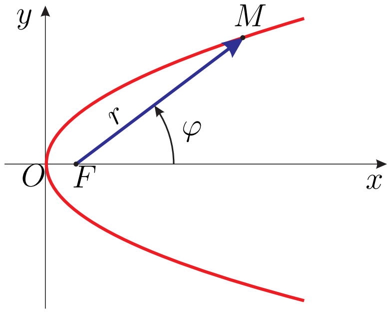
$$x - \frac{p}{2} = r\cos\varphi$$

(связь декартовых и полярных координат) и

$$r = x + \frac{p}{2}$$

(директориальное свойство параболы). Таким образом,

$$r\cos\varphi = r - p \iff r = \frac{p}{1-\cos\varphi}.$$



Поместим полюс в левый фокус эллипса. Имеем:

$$x + c = r\cos\varphi$$

(связь декартовых и полярных координат) и

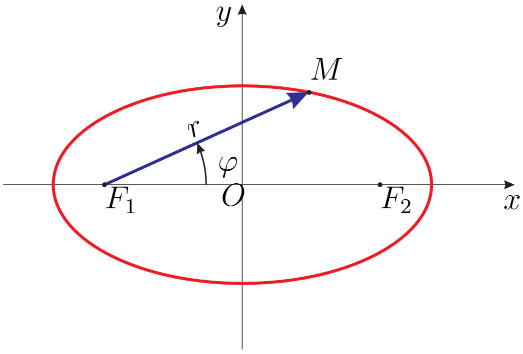
$$r = \varepsilon x + a$$

(выражение для левого фокального радиуса). Таким образом,

$$r = \varepsilon(r\cos\varphi - c) + a \iff r(1 - \varepsilon\cos\varphi) = a - \varepsilon c = p,$$

так что

$$r = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}.$$



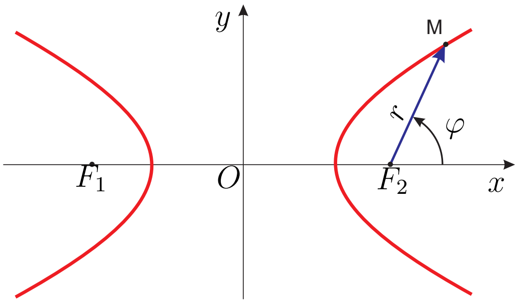
В случае гиперболы поместим полюс в правый фокус и ограничимся рассмотрением правой ветви гиперболы. Имеем:

$$r = \varepsilon x - a, \quad x - c = r\cos\varphi,$$

откуда получаем

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

Таким образом, парабола, эллипс и гипербола (вернее, одна ее ветвь) задаются в полярных координатах одним и тем же уравнением.



8. Парабола, эллипс и гипербола как конические сечения

Каждая из трех указанных линий является плоским сечением некоторого прямого кругового конуса.

Если секущая плоскость параллельна одной из образующих конуса, то в сечении получается парабола.

На чертеже:

π — секущая плоскость, параллельная одной из образующих конуса;

S — вершина конуса;

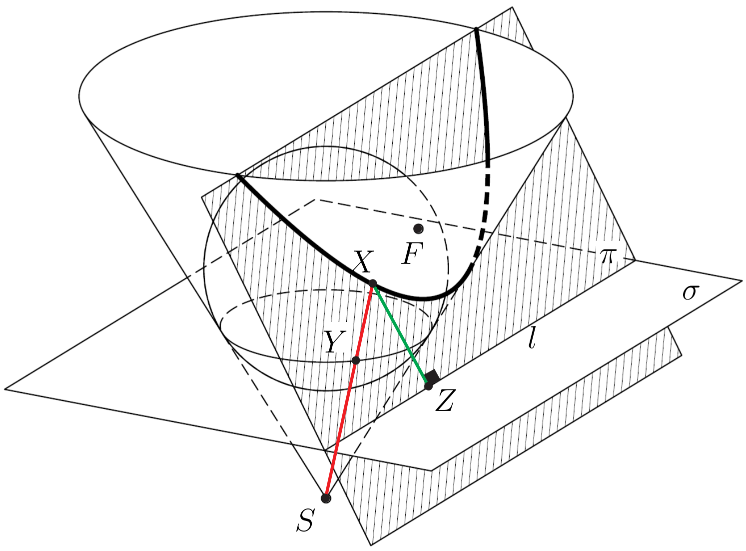
сфера касается конуса по окружности, лежащей в плоскости σ, и секущей плоскости в точке F;

l — линия пересечения плоскостей π и σ;

X — произвольная точка сечения конуса плоскостью π;

Y — точка пересечения образующей SX с плоскостью σ;

Z — проекция точки X на прямую l.



$XF = XY$ как касательные к сфере. Точки Y и Z лежат в плоскости σ, угол между XY и σ равен углу между образующей конуса и плоскостью, перпендикулярной его оси. Угол между XZ и σ равен углу между плоскостями π и σ. В силу выбора плоскости π эти углы равны, так что $XY = XZ$ как наклонные, образующие равные углы с плоскостью σ. Поэтому $XF = XZ$, и точка X лежит на параболе с фокусом F и директрисой l.

Если секущая плоскость π пересекает все образующие конуса и не перпендикулярна его оси, то в сечении получается эллипс.

На чертеже:

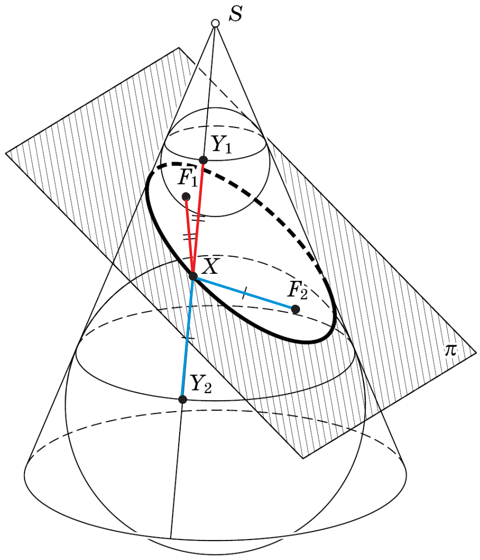
π — секущая плоскость, пересекающая все образующие конуса;

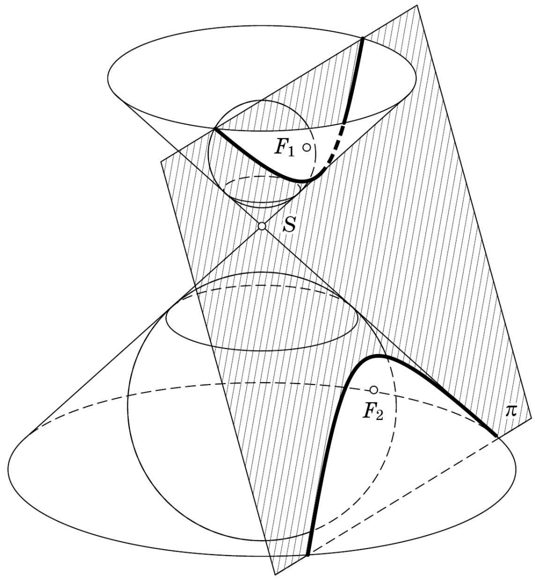
S — вершина конуса;

две сферы касаются конуса по окружностям, лежащим в параллельных плоскостях σ_1 и σ_2 (на чертеже не изображены), и секущей плоскости π в точках F_1 и F_2;

X — произвольная точка сечения конуса плоскостью π;

Y_1, Y_2 — точки пересечения образующей SX с плоскостями σ_1 и σ_2.





Имеем $XF_1 = XY_1$, $XF_2 = XY_2$ (равенство касательных к сфере), так что $XF_1 + XF_2 = Y_1Y_2 = \mathrm{const}$, т.е. точка X лежит на эллипсе с фокусами F_1 и F_2.

Отметим, что прямые l_1 и l_2, получающиеся при пересечении плоскостей σ_1 и σ_2 плоскостью π, являются директрисами эллипса [докажите самостоятельно].

Если секущая плоскость π параллельна двум образующим конуса, то в сечении образуется гипербола.

9. Кривые второго порядка

Парабола, эллипс и гипербола задаются уравнениями второй степени. Общий вид многочлена второй степени от двух переменных

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F.$$

Кривые второго порядка — это линии на плоскости, задаваемые уравнениями вида

$$f(x, y) = 0.$$

Парабола, эллипс и гипербола — примеры кривых второго порядка.

Теорема.

Уравнение кривой второго порядка может быть преобразовано посредством замены координат, состоящей из сдвига начала координат и поворота координатных осей, к одной из следующих девяти канонических форм.

I. Эллиптический тип

I.1. Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

I.2. Точка

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

I.3. Пустое множество

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

II. Гиперболический тип

II.1. Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

II.2. Пара пересекающихся прямых

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

III. Параболический тип

III.1. Парабола

$$y^2 = 2px.$$

III.2. Пара параллельных прямых

$$y^2 = a^2, \quad a \neq 0.$$

III.3. Пустое множество

$$y^2 = -a^2, \quad a \neq 0.$$

III.4. Пара совпадающих прямых

$$y^2 = 0.$$

10. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Пусть O — центр эллипса, a, b — его полуоси, A, B — такие точки эллипса, что прямые OA и OB взаимно перпендикулярны. Найти наибольшее и наименьшее значения длины отрезка AB.

Ответ. $\max AB = \sqrt{a^2+b^2}$, $\min AB = 2ab/\sqrt{a^2+b^2}$.

Задача 2. Вычислить эксцентриситет равносторонней гиперболы (т.е. гиперболы, полуоси которой равны).

Ответ. $\sqrt{2}$.

Задача 3. Доказать, что для данной гиперболы произведение расстояний от любой точки гиперболы до ее асимптот есть величина постоянная. Выразить эту величину через полуоси гиперболы.

Ответ. $\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

Задача 4. Доказать, что для данной гиперболы площадь параллелограмма, одна из вершин которого лежит на гиперболе, а две стороны лежат на асимптотах, есть величина постоянная. Выразить эту величину через полуоси гиперболы.

Ответ. $ab/2$.

Задача 5. Доказать, что вершины гиперболы и четыре точки пересечения ее директрис с асимптотами лежат на одной окружности. Выразить радиус этой окружности через длину действительной полуоси гиперболы.

Ответ. a.

Задача 6. Доказать, что отрезок касательной к гиперболе, заключенный между ее асимптотами, делится точкой касания пополам.

Задача 7. Доказать, что все треугольники, образованные асимптотами гиперболы и произвольной касательной к ней, имеют одну и ту же площадь. Выразить эту площадь через полуоси гиперболы.

Ответ. ab.

Задача 8. Доказать, что касательные в точках пересечения эллипса и гиперболы, имеющих общие фокусы, взаимно перпендикулярны.

Задача 9. Составить уравнение семейств эллипсов с общими директрисами $x = \pm d$ и общим центром в начале координат.

Ответ. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2(d^2-a^2)/d^2} = 1,\ 0 < a < |d|$.

Задача 10. Составить уравнение семейства гипербол с общими фокусами $(\pm c, 0)$.

Ответ. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{c^2-a^2} = 1,\ 0 < a < |c|$.

Задача 11. Составить уравнение семейства гипербол с общими асимптотами $y = \pm kx$.

Ответ. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{k^2a^2} = 1$.

Задача 12. Составить уравнение семейства парабол, имеющих общий фокус $(0,0)$ и симметричных относительно оси Ox.

Ответ. $y^2 = p^2 + 2px,\ p \neq 0$.

Задача 13. Составить уравнение семейства парабол, имеющих общую директрису $x = 0$ и симметричных относительно оси Ox.

Ответ. $y^2 = -p^2 + 2px,\ p \neq 0$.