Лекция 4
Прямые и плоскости

1. Прямая на плоскости

Сначала получим разные виды уравнения прямой на плоскости в произвольной косоугольной системе координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$.

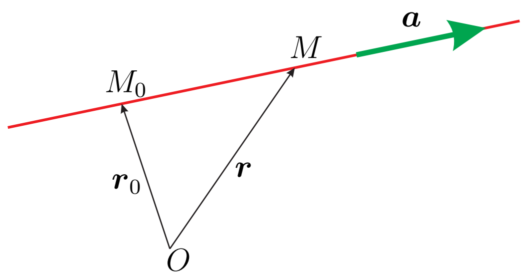
1.1. **Параметрическое уравнение прямой на плоскости.**

Рассмотрим прямую на плоскости, проходящую через точку M_0 с радиус-вектором $\boldsymbol{r}_0$, называемую опорной точкой прямой, и параллельную вектору $\boldsymbol{a}$, называемому направляющим вектором этой прямой. Если $M(\boldsymbol{r})$ — произвольная точка прямой, то вектор $\overrightarrow{M_0M} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$, т.е.

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = t\boldsymbol{a}, \quad t \in \mathbb{R},$$

откуда получаем векторное уравнение прямой:

$$\boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}.}$$



Записывая это уравнение в координатах, получим

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + tl, \\ y = y_0 + tm, \end{cases}}$$

где $\boldsymbol{r} = (x, y)$, $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0)$, $\boldsymbol{a} = (l, m)$.

Исключив параметр t, получим

$$\boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}.}$$

Это уравнение называется каноническим уравнением прямой на плоскости. В знаменателях допускаются нули; в этом случае соотношение следует «перемножить крест-накрест», как пропорцию.

1.2. **Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.**

Напишем уравнение прямой, проходящей через точки

$$M_1(\boldsymbol{r}_1) = M_1(x_1, y_1), \quad M_2(\boldsymbol{r}_2) = M_2(x_2, y_2).$$

В качестве опорной точки можно выбрать любую из точек M_1 или M_2, а в качестве направляющего вектора — вектор

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1).$$

Уравнение в векторном параметрическом виде:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1),$$

в каноническом виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

1.3. **Общее уравнение прямой.**

Из канонического уравнения

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

получаем

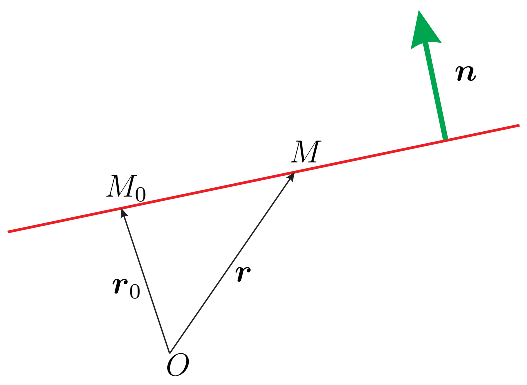
$$m(x - x_0) = l(y - y_0) \iff \boxed{Ax + By = D,}$$

где $A = m$, $B = -l$, $D = mx_0 - ly_0$. Это уравнение называется общим уравнением прямой на плоскости в декартовой (косоугольной) системе координат.

1.4. **Нормальное уравнение прямой.** Пусть теперь система координат прямоугольная, причем базис ортонормированный.

Рассмотрим прямую на плоскости, проходящую через опорную точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ и перпендикулярную вектору $\boldsymbol{n}$, называемому нормальным вектором этой прямой. Если $M(\boldsymbol{r})$ — произвольная точка прямой, то вектор $\overrightarrow{M_0M} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ ортогонален вектору $\boldsymbol{n}$, т.е.

$$\boxed{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}) = 0.}$$



Это уравнение называется нормальным уравнением прямой; его можно записать также в виде

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}) = 0 \iff \boxed{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D,}$$

где $D = (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n})$.

В прямоугольных декартовых координатах нормальное уравнение принимает вид

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,}$$

где $\boldsymbol{r} = (x, y)$, $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0)$, $\boldsymbol{n} = (A, B)$.

Это уравнение можно записать также в виде

$$\boxed{Ax + By = D;}$$

отличие этого уравнения от общего уравнения прямой в произвольной косоугольной системе координат заключается в том, что коэффициенты A, B здесь являются координатами вектора нормали прямой (в косоугольной системе координат это не так!).

1.5. **Основные формулы.**

Теорема.

Даны точка $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ *и прямая* l*, заданная уравнением* $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$.

(1) *Ортогональная проекция* $M_2(\boldsymbol{r}_2)$ *точки* $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ *на прямую* l *выражается формулой*

$$\boxed{\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 - \frac{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) - D}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}.}$$

(2) *Расстояние от точки* $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ *до прямой* l*, выражается формулой*

$$\boxed{d(M_1, l) = \frac{|(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) - D|}{\|\boldsymbol{n}\|}.}$$

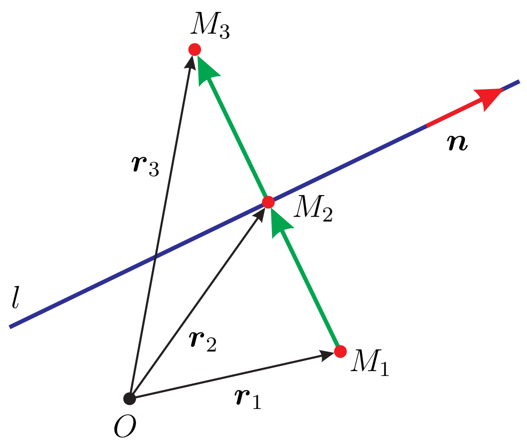
В координатной форме:

$$\boxed{d(M_1, l) = \frac{|Ax_1 + By_1 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2}};}$$

здесь (x_1, y_1) — *координаты точки* M_1*, а прямая* l *задана уравнением* $Ax + By = D$.

(3) *Точка* $M_3(\boldsymbol{r}_3)$*, симметричная точке* $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ *относительно прямой* l*, выражается формулой*

$$\boxed{\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_1 - 2\frac{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) - D}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}.}$$



◀ Имеем:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \lambda\boldsymbol{n}.$$

Умножим обе части равенства скалярно на вектор $\boldsymbol{n}$:

$$\underbrace{(\overrightarrow{OM_2}, \boldsymbol{n})}_{=D} - \underbrace{(\overrightarrow{OM_1}, \boldsymbol{n})}_{=(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n})} = \lambda(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}),$$

откуда

$$\lambda = -\frac{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) - D}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}.$$

Для радиус-вектора $\boldsymbol{r}_2$ проекции M_2 точки M_1 на прямую имеем:

$$\boldsymbol{r}_2 = \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{r}_1 + \lambda\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}_1 - \frac{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) - D}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}.$$

Расстояние от точки M_1 до прямой l:

$$d(M_1,l)=d(M_1,M_2)=\left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\|=\left\|\frac{(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{n})-D}{(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}\right\|=$$

$$=\frac{|(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{n})-D|}{(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})}\|\boldsymbol{n}\|=\frac{|(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{n})-D|}{\|\boldsymbol{n}\|}.$$

Для радиус-вектора $\boldsymbol{r}_3$ точки M_3, симметричной точке M_1 относительно прямой, имеем:

$$\boldsymbol{r}_3=\overrightarrow{OM_3}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1M_3}=\overrightarrow{OM_1}+2\overrightarrow{M_1M_2}=$$

$$=\boldsymbol{r}_1+2\lambda\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}_1-2\frac{(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{n})-D}{(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}. \qquad \blacktriangleright$$

2. Плоскость в пространстве

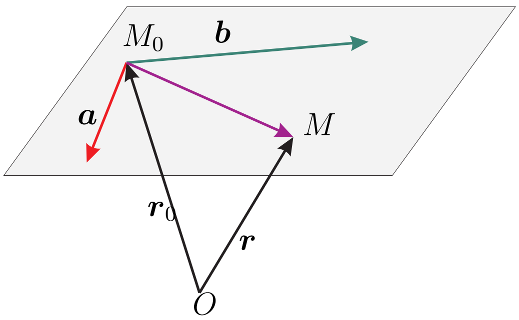
Сначала получим различные виды уравнения плоскости в произвольной косоугольной системе координат.

2.1. **Уравнения плоскостей.**

Рассмотрим плоскость π в пространстве, проходящую через точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ и параллельную двум векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, называемым направляющими векторами. Если $M(\boldsymbol{r})$ — произвольная точка плоскости π, то вектор $\overrightarrow{M_0M}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ компланарен векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, так что

$$\boxed{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b},} \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

Это — векторное параметрическое уравнение плоскости.



В координатах это уравнение принимает вид системы

$$\begin{cases} x=x_0+\alpha a_1+\beta b_1,\\ y=y_0+\alpha a_2+\beta b_2,\\ z=z_0+\alpha a_3+\beta b_3,\end{cases}$$

где $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$, $\boldsymbol{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$, $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$.

Факт компланарности векторов $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ может быть выражен условием равенства нулю определителя, составленного из координат этих векторов:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=0.}$$

Обратите внимание, что здесь мы (пока!) не говорим о смешанном произведении векторов!

Раскрывая определитель по элементам первой строки и вводя сокращенные обозначения для коэффициентов получающегося уравнения, получим общее уравнение плоскости:

$$\boxed{Ax + By + Cz = D.}$$

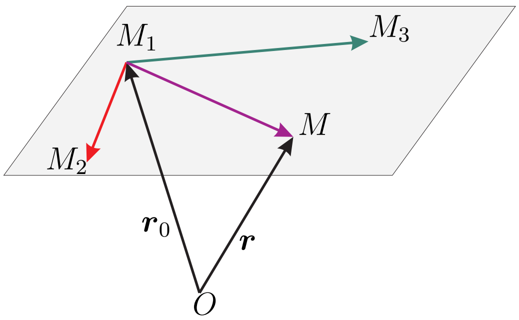
2.2. **Уравнение плоскости, проходящей через три точки.**

Запишем уравнение плоскости, проходящей через точки

$$M_1(\boldsymbol{r}_1) = M_1(x_1, y_1, z_1), \quad M_2(\boldsymbol{r}_2), \quad M_3(\boldsymbol{r}_3).$$

Если $M(\boldsymbol{r}) = M(x, y, z)$ — произвольная точка плоскости, то векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ компланарны, так что

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.}$$



2.3. **Уравнение плоскости, проходящей через две точки параллельно заданному вектору.**

Запишем уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$, $M_2(\boldsymbol{r}_2)$ параллельно вектору $\boldsymbol{l} = (l, m, n)$. Если $M(\boldsymbol{r}) = M(x, y, z)$ — произвольная точка плоскости, то векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{l}$ компланарны, так что

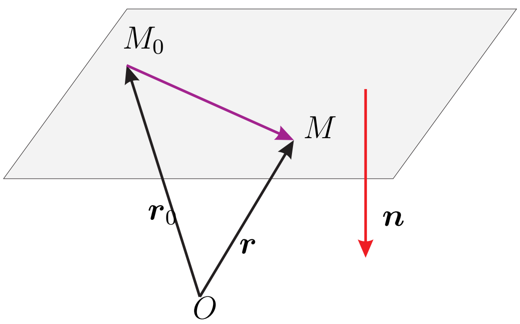
$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.}$$

2.4. **Нормальное уравнение плоскости.**

Рассмотрим плоскость, проходящую через опорную точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n}$. Для произвольной точки $M(\boldsymbol{r})$ этой плоскости вектор $\overrightarrow{M_0M}$ ортогонален вектору $\boldsymbol{n}$, так что

$$\boxed{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}) = 0} \iff \boxed{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D,}$$

где $D = (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n})$. Вектор $\boldsymbol{n}$ называется нормальным вектором плоскости.



2.5. **Основные формулы.**

Теорема.

Даны точка $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ *и плоскость* π, *заданная уравнением* $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$.

(1) *Ортогональная проекция* $M_2(\boldsymbol{r}_2)$ *точки* $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ *на плоскость* π *выражается формулой*

$$\boxed{\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 - \frac{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) - D}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}.}$$

(2) *Расстояние от точки* $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ *до плоскости* π *выражается формулой*

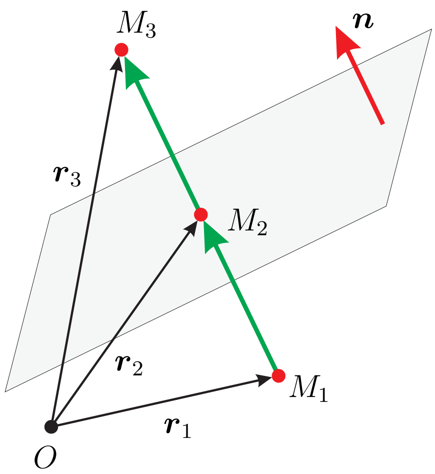
$$\boxed{d(M_1, \pi) = \frac{|(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) - D|}{\|\boldsymbol{n}\|}.}$$

В координатной форме расстояние от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *до плоскости* $\pi : Ax + By + Cz = D$ *выражается формулой*

$$\boxed{d(M_1, \pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.}$$

(3) *Точка* $M_3(\boldsymbol{r}_3)$, *симметричная точке* $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ *относительно плоскости* π, *выражается формулой*

$$\boxed{\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_1 - 2\frac{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) - D}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}.}$$



3. Прямая в пространстве

Как и прямая на плоскости, прямая в пространстве может быть задана векторным параметрическим уравнением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a},$$

где $\boldsymbol{r}_0$ — радиус-вектор опорной точки, $\boldsymbol{a}$ — направляющий вектор прямой.

В косоугольной системе координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ векторное параметрическое уравнение превращается в систему параметрических уравнений

$$\begin{cases} x = x_0 + tl, \\ y = y_0 + tm, \\ z = z_0 + tn, \end{cases}$$

где $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и $\boldsymbol{a} = (l, m, n)$.

Исключая параметр t из параметрических уравнений, получим каноническое уравнение прямой

$$\boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.}$$

Отметим, что это соотношение представляет собой не одно, а несколько (пару) уравнений. Нули в знаменателях допустимы; в соответствующем случае считаем, что в числителе также стоит нуль.

Прямая может быть задана как пересечение двух непараллельных плоскостей, заданных, например, общими уравнениями:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z = D_1, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z = D_2. \end{cases}$$

Понятие векторного произведения позволяет записать еще один тип уравненя прямой в пространстве.

Умножая векторное параметрическое уравнение прямой

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$$

векторно на вектор $\boldsymbol{a}$, получаем

$$[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = [\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}] + t\,\underbrace{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}]}_{=\boldsymbol{0}}.$$

Обозначим $\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}]$; отметим, что $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a}$. Получим уравнение прямой в виде

$$\boxed{[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b},} \quad \text{где} \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0.$$

Обратное преобразование уравнения также нетрудно выполнить. Запишем уравнение прямой $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$ в виде $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$.

◀ Направляющий вектор прямой $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$ можно выбрать равным $\boldsymbol{a}$. Найдем такую опорную точку $\boldsymbol{r}_0$ прямой, что ее радиус-вектор ортогонален вектору $\boldsymbol{a}$, $(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}) = 0$. Умножим соотношение $[\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$ векторно на $\boldsymbol{a}$:

$$[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}]] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}].$$

Раскрывая двойное векторное произведение, получим

$$\boldsymbol{r}_0(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a}\,\underbrace{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}_0)}_{=0} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}],$$

откуда

$$\boldsymbol{r}_0 = \frac{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}.$$

Получаем параметрическое уравнение прямой

$$\boldsymbol{r} = \frac{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} + t\boldsymbol{a}. \qquad \blacktriangleright$$

3.1. **Основные формулы.**

Теорема.

Даны точка $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ и прямая l, заданная уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$.

(1) *Ортогональная проекция $M_2(\boldsymbol{r}_2)$ точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ на прямую l выражается формулой*

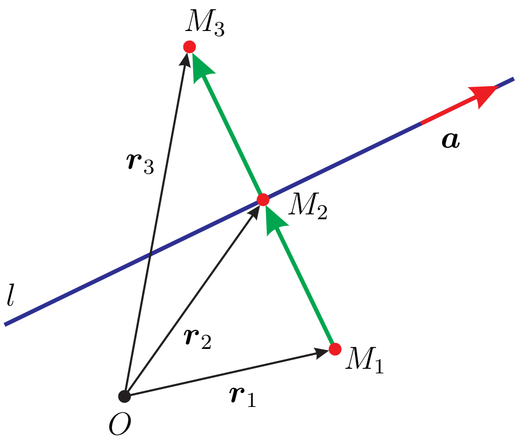
$$\boxed{\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_0 + \frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}.}$$

(2) *Расстояние от точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ до прямой l, выражается формулой*

$$\boxed{d(M_1, l) = \frac{\big\|[\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}]\big\|}{\|\boldsymbol{a}\|}.}$$

(3) *Точка $M_3(\boldsymbol{r}_3)$, симметричная точке $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ относительно прямой l, выражается формулой*

$$\boxed{\boldsymbol{r}_3 = 2\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1 + 2\frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}.}$$



◀ Умножим обе части равенства

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

скалярно на вектор $\boldsymbol{a}$:

$$\underbrace{(\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{a})}_{=0} = \underbrace{(\overrightarrow{OM_2}, \boldsymbol{n})}_{=(\boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} - \underbrace{(\overrightarrow{OM_1}, \boldsymbol{n})}_{=(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a})} =$$
$$= (\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}) + t(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}),$$

откуда

$$t_0 = \frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$$

— значение параметра, отвечающее точке $M_2 \in l$.

Для проекции M_2 точки M_1 на прямую l имеем:

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_0 + t_0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}_0 + \frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}.$$

Для точки M_3, симметричной точке M_1 относительно прямой l, имеем

$$\boldsymbol{r}_3 = \overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OM_1} + 2\overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{r}_1 + 2(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) =$$

$$= 2\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = 2\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1 + 2\frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}.$$

Найдем расстояние от точки M_1 до прямой l:

$$d(M_1, l) = \|\overrightarrow{M_1M_2}\| = \|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1\| = \left\|\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1 + \frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}\right\| =$$

$$= \left\|\frac{(\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1)(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\right\| = \left\|\frac{[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}]]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\right\| =$$

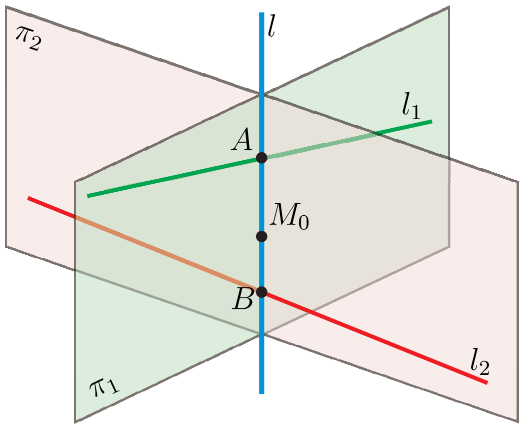
$$= \frac{\|\boldsymbol{a}\| \cdot \big\|[\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}]\big\| \cdot \sin\varphi}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} = \frac{\big\|[\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}]\big\|}{\|\boldsymbol{a}\|},$$

где φ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $[\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}]$; здесь учтено, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $[\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}]$ ортогональны, т.е. $\sin\varphi = 1$. ►

3.2. **Скрещивающиеся прямые.**

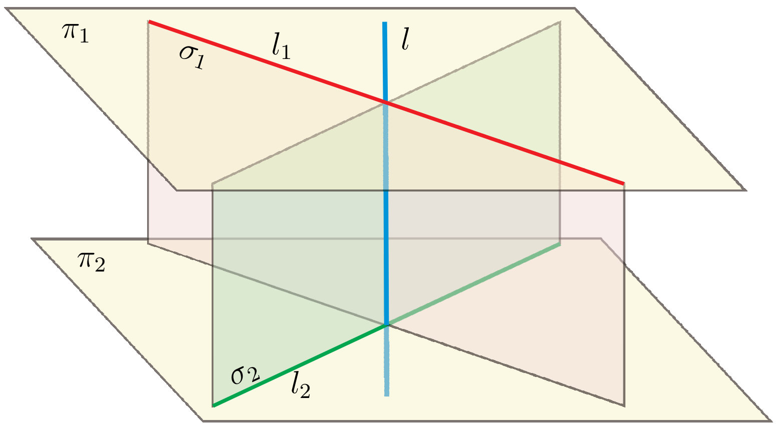
Составим уравнение прямой, пересекающей две скрещивающиеся прямые $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t\boldsymbol{a}_2$ и проходящей через точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$, не лежащую ни на одной из этих прямых.

Ответ. $\begin{cases} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}_1) = 0, \\ (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}_2) = 0. \end{cases}$



Составим уравнение прямой, пересекающей две скрещивающиеся прямые $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t\boldsymbol{a}_2$ под прямыми углами (общего перпендикуляра к этим прямым).

Ответ. $\begin{cases} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1, [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]) = 0, \\ (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{a}_2, [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]) = 0. \end{cases}$



4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}_1, \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t\boldsymbol{a}_2.$$

Ответ. $\arccos \dfrac{|(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)|}{\|\boldsymbol{a}_1\| \cdot \|\boldsymbol{a}_2\|}$.

Задача 2. Найти условие, при котором прямые на плоскости, заданные уравнениями $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$, пересекаются (в единственной точке), и радиус-вектор точки пересечения этих прямых.

Ответ. $\boldsymbol{r}_0 + \dfrac{D - (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{a}$.

Задача 3. Найти угол между плоскостями, заданными уравнениями

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1) = D_1, \quad (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_2) = D_2.$$

Ответ. $\arccos \dfrac{|(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2)|}{\|\boldsymbol{n}_1\| \cdot \|\boldsymbol{n}_2\|}$.

Задача 4. Записать уравнение плоскости $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ в виде $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$.

Ответ. $(\boldsymbol{r}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]) = (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Задача 5. Найти необходимое и достаточное условие, при котором плоскости $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1) = D_1$ и $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_2) = D_2$:

(1) пересекаются по прямой;
(2) параллельны, но не совпадают;
(3) совпадают.

Ответ. (1) $[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] \neq \boldsymbol{0}$; (2) $[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] = \boldsymbol{0}$, и если $\boldsymbol{n}_1 = \lambda \boldsymbol{n}_2$, то $D_1 \neq \lambda D_2$; (3) $[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] = \boldsymbol{0}$, и если $\boldsymbol{n}_1 = \lambda \boldsymbol{n}_2$, то $D_1 = \lambda D_2$.

Задача 6. Найти расстояние между двумя параллельными плоскостями $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D_1$ и $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D_2$.

Ответ. $\dfrac{|D_1 - D_2|}{\|\boldsymbol{n}\|}$.

Задача 7. Найти расстояние между двумя параллельными плоскостями $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$.

Ответ. $\dfrac{|(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|}{\|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\|}$.

Задача 8. Записать уравнение прямой

$$\begin{cases} (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1) = D_1, \\ (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_2) = D_2 \end{cases}$$

в виде $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$.

Ответ. $[\boldsymbol{r}, [\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2]] = D_2\boldsymbol{n}_1 - D_1\boldsymbol{n}_2$.

Задача 9. Записать уравнение прямой

$$\begin{cases} (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1) = D_1, \\ (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_2) = D_2 \end{cases}$$

в виде $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2]$.

Ответ. $\boldsymbol{r} = \dfrac{[\boldsymbol{a}, D_2\boldsymbol{n}_1 - D_1\boldsymbol{n}_2]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} + t\boldsymbol{a}$.

Задача 10. Найти необходимое и достаточное условие, при котором прямые $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t\boldsymbol{a}_2$:

(1) пересекаются (т.е. имеют одну общую точку);
(2) скрещиваются;
(3) параллельны, но не совпадают;
(4) совпадают.

Ответ. (1) $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] \neq \boldsymbol{0}$, $(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = 0$; (2) $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] \neq \boldsymbol{0}$, $(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) \neq 0$; (3) $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = \boldsymbol{0}$, $[\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1] \neq \boldsymbol{0}$; (4) $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = \boldsymbol{0}$, $[\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1] = \boldsymbol{0}$.

Задача 11. Найти расстояние от точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ до прямой $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$.

Ответ. $\dfrac{\big\|[\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}] - \boldsymbol{b}\big\|}{\|\boldsymbol{a}\|}$.

Задача 12. Найти расстояние между параллельными прямыми $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t\boldsymbol{a}$.

Ответ. $\dfrac{\big\|[\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{a}]\big\|}{\|\boldsymbol{a}\|}$.

Задача 13. Найти расстояние между параллельными прямыми $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}_1$ и $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}_2$.

Ответ. $\dfrac{\|\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2\|}{\|\boldsymbol{a}\|}$.

Задача 14. Даны прямая $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$ и плоскость $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$. Найти необходимое и достаточное условие того, что:

(1) прямая и плоскость пересекаются (имеют единственную общую точку);
(2) прямая и плоскость параллельны (не имеют общих точек);
(3) прямая лежит в плоскости.

Ответ. (1) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) \neq 0$; (2) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = 0$, $(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}) \neq D$; (3) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = 0$, $(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}) = D$.

Задача 15. Найти радиус-вектор точки пересечения прямой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$ с плоскостью $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$.

Ответ. $\boldsymbol{r}_0 + \dfrac{D - (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{a}$.

Задача 16. Найти радиус-вектор точки пересечения прямой $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$ с плоскостью $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$.

Ответ. $\dfrac{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} + \dfrac{D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{a}$.

Задача 17. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ перпендикулярно плоскости $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$.

Ответ. $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{n}$.

Задача 18. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ перпендикулярно прямой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$.

Ответ. $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}) = 0$.

Задача 19. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$ и точку $M_1(\boldsymbol{r}_1)$, не лежащую на этой прямой.

Ответ. $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}) = 0$.

Задача 20. Составить уравнение проекции прямой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$ на плоскость $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$ при условии, что прямая не перпендикулярна плоскости.

Ответ. $\begin{cases} (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D, \\ (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = 0. \end{cases}$

Задача 21. Составить уравнение прямой, пересекающей прямую $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$ под прямым углом и проходящей через точку $M_1(\boldsymbol{r}_1)$, не лежащую на данной прямой (перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на прямую).

Ответ. $\begin{cases} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}) = 0, \\ (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}) = 0. \end{cases}$

Задача 22. Найти расстояние между двумя скрещивающимися прямыми $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t\boldsymbol{a}_2$.

Ответ. $\dfrac{|(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)|}{\|[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\|}$.

Задача 23. Найти расстояние между двумя скрещивающимися прямыми $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}_1] = \boldsymbol{b}_1$ и $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}_2] = \boldsymbol{b}_2$.

Ответ. $\dfrac{|(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2) + (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)|}{\|[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\|}$.