Лекция 3
Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов

1. Преобразование базисов и ориентация

Пусть на плоскости заданы два произвольных базиса (условно назовем их старым и новым)

$$\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2, \qquad \boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_2.$$

Векторы нового базиса можно выразить через векторы старого базиса:

$$\boldsymbol{f}_1 = c_1^1 \boldsymbol{e}_1 + c_1^2 \boldsymbol{e}_2,$$
$$\boldsymbol{f}_2 = c_2^1 \boldsymbol{e}_1 + c_2^2 \boldsymbol{e}_2.$$

Введем матрицы

$$E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2), \quad F = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2), \quad C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_1^2 \\ c_2^1 & c_2^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда можно записать

$$F = EC.$$

Матрица C называется матрицей перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ к базису $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$. Определитель матрицы перехода отличен от нуля в силу линейной независимости векторов базиса.

Базис $F = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$ называется одноименным (разноименным) с базисом $E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, если матрица перехода C от E к F имеет положительный (отрицательный) определитель. Если базис F является одноименным с базисом E, мы пишем $F \simeq E$.

Теорема.

Отношение одноименности базисов обладает следующими свойствами:

(1) $E \simeq E$;

(2) *если* $F \simeq E$, *то* $E \simeq F$;

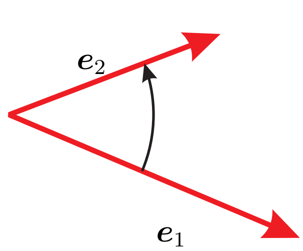
(3) *если* $E \simeq F$ *и* $F \simeq H$, *то* $E \simeq H$.

Множество всех базисов на плоскости разбивается на два класса следующим образом. Пусть E — некоторый базис. К одному классу относятся все базисы, одноименные с E (и при этом одноименные между собой), к другому — разноименные с E (и при этом одноименные между собой).

Каждый из двух классов одноименных базисов называется ориентацией плоскости. На плоскости существует ровно две ориентации, одна из которых называется положительной, а вторая — отрицательной.

Соглашение об ориентации.

Базис на плоскости $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ называется правым, если кратчайший поворот, переводящий вектор $\boldsymbol{e}_1$ в вектор $\boldsymbol{e}_2$, осуществляется против часовой стрелки.

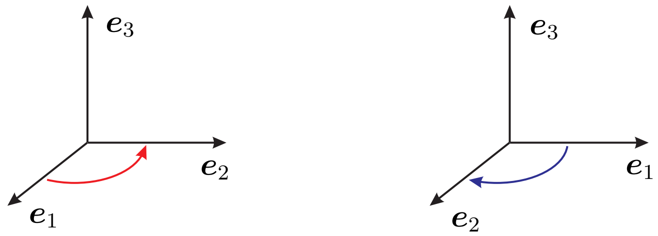


Аналогичные рассуждения можно провести и для базисов в пространстве. В пространстве также существует ровно две ориентации.

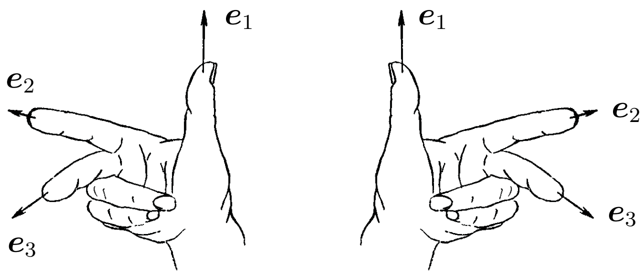
Базис в пространстве $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ называется правым, если выполнено одно из следующих условий:

(1) если смотреть из конца вектора $\boldsymbol{e}_3$, то кратчайший поворот, переводящий вектор $\boldsymbol{e}_1$ в вектор $\boldsymbol{e}_2$, осуществляется против часовой стрелки;

(2) векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ удовлетворяют правилу винта: если вращать винт в направлении поворота, переводящего (кратчайшим образом) вектор $\boldsymbol{e}_1$ в вектор $\boldsymbol{e}_2$, то поступательное движение винта происходит в направлении вектора $\boldsymbol{e}_3$;



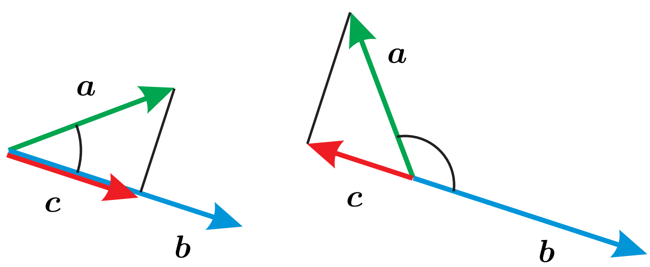
(3) векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ удовлетворяют правилу правой руки: их расположение совпадает с естественным положением большого, указательного и среднего пальцев правой руки.



2. Скалярное произведение векторов

2.1. **Определение.**

Проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ — это вектор $\boldsymbol{c}$, коллинеарный $\boldsymbol{b}$, начало (конец) которого представляет собой ортогональную проекцию начала (конца) вектора $\boldsymbol{a}$ на прямую, параллельную $\boldsymbol{b}$. Обозначение: $\boldsymbol{c} = \mathrm{pr}_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{a}$.



Величиной $\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{a}$ проекции $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{a}$ называется ее длина, взятая со знаком «+», если векторы $\boldsymbol{c} = \mathrm{pr}_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ сонаправлены, и со знаком «−» в противном случае. Ясно, что

$$\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cos\varphi,$$

где φ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Скалярное произведение (СП) двух векторов — это число, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Ясно, что СП равно

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \operatorname{Pr}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} \cdot |\boldsymbol{b}|.$$

Для СП используется также обозначение $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

Скалярный квадрат вектора:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{a}|^2.$$

Длина вектора может быть выражена через его скалярный квадрат:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}.$$

Вычислим проекцию $\boldsymbol{c}$ вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$.

Вектор $\boldsymbol{c}$ коллинеарен $\boldsymbol{b}$, поэтому

$$\boldsymbol{c} = \alpha \boldsymbol{b}.$$

Кроме того,

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \operatorname{Pr}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} \cdot |\boldsymbol{b}| = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = (\alpha \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}),$$

откуда

$$\alpha = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})}.$$

Окончательный результат:

$$\boldsymbol{c} = \operatorname{pr}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})} \boldsymbol{b}.$$

Величина этой проекции

$$\operatorname{Pr}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{b}|}.$$

2.2. **Свойства скалярного произведения.**

Теорема.

Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:

(1) *симметричность*:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a});$$

(2) *линейность*:

$$(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}), \qquad (\alpha \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b});$$

(3) *положительная определенность*:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geqslant 0, \qquad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \iff \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}.$$

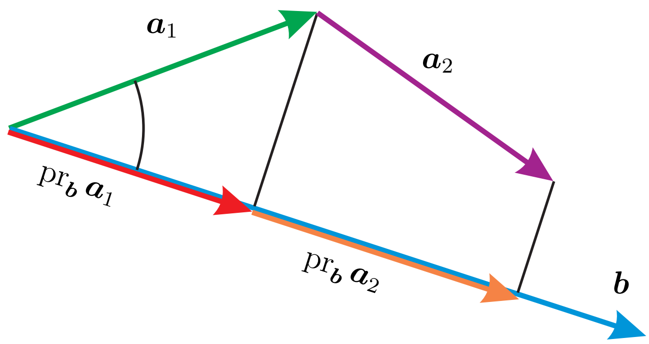
Отметим, что из линейности по первому аргументу и симметричности следует линейность по второму аргументу.

◀ Докажем, что $(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b})$. Это следует из того факта, что

$$\operatorname{pr}_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) = \operatorname{pr}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a}_1 + \operatorname{pr}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a}_2,$$

а следовательно,

$$\operatorname{Pr}_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) = \operatorname{Pr}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a}_1 + \operatorname{Pr}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a}_2. \qquad ▶$$



2.3. **Вычисление СП в ортонормированном базисе.** Пусть в пространстве задан ОНБ $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. Попарные СП векторов этого базиса равны

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3) = 1,$$
$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 0.$$

Символ Кронекера:

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Тогда можно записать

$$(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k) = \delta_{jk}.$$

Разложим векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ по базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$:

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3.$$

Вычислим СП:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3,\ b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3) =$$

$$= (a_1\boldsymbol{e}_1,\ b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3) +$$

$$+ (a_2\boldsymbol{e}_2,\ b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3) +$$

$$+ (a_3\boldsymbol{e}_3,\ b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3) =$$

$$= a_1b_1\underbrace{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)}_{=1} + a_1b_2\underbrace{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)}_{=0} + a_1b_3\underbrace{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3)}_{=0} +$$

$$+ a_2b_1\underbrace{(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1)}_{=0} + a_2b_2\underbrace{(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2)}_{=1} + a_2b_3\underbrace{(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)}_{=0} +$$

$$+ a_3b_1\underbrace{(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1)}_{=0} + a_3b_2\underbrace{(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2)}_{=0} + a_3b_3\underbrace{(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3)}_{=1} =$$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Итак, скалярное произведение векторов выражается через их координаты в ортонормированном базисе формулой

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Длина вектора равна

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Угол между векторами может быть найден по формуле

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Пример.

Найти проекцию вектора $\boldsymbol{a} = (1, 3, -2)^T$ на $\boldsymbol{b} = (3, -6, 2)^T$, величину этой проекции и угол между векторами.

Имеем:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}, \quad |\boldsymbol{b}| = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2} = 7,$$

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-6) + (-2) \cdot 2 = -19,$$

$$\operatorname{pr}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})} \boldsymbol{b} = \frac{-19}{49} \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{Pr}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{b}|} = -\frac{19}{7},$$

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|} = -\frac{19}{7\sqrt{14}}.$$

3. Векторное произведение векторов

3.1. **Определение.**

Векторным произведением (ВП) векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор $\boldsymbol{c}$, удовлетворяющий следующим требованиям:

(1) $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin\varphi$;

(2) вектор $\boldsymbol{c}$ перпендикулярен векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$;

(3) векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ образуют правую тройку.

3.2. **Формула для вычисления векторного произведения.** Пусть векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ заданы координатами относительно некоторого ортонормированного базиса:

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Будем предполагать, что эти векторы ненулевые и неколлинеарные; в противном случае ВП равно нулевому вектору.

Найдем какой-либо ненулевой вектор $\boldsymbol{p}$, перпендикулярный $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Условие перпендикулярности:

$$\boldsymbol{p} \perp \boldsymbol{a} \quad \Longleftrightarrow \quad (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}) = 0.$$

Таким образом, координаты p_1, p_2, p_3 вектора $\boldsymbol{p}$ должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 = 0, \\ b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 = 0. \end{cases}$$

Так как $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$, хотя бы одна из его координат отлична от нуля; предположим, что это p_3. Тогда, разделив оба уравнения системы на p_3 и обозначив

$$x_1 = \frac{p_1}{p_3}, \quad x_2 = \frac{p_1}{p_3},$$

получим систему

$$\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 = -a_3, \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 = -b_3, \end{cases}$$

Ее решение имеет вид

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -a_3 & a_2 \\ -b_3 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad x_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Таким образом, в качестве вектора $\boldsymbol{p}$ можно взять вектор

$$p_1 = \begin{vmatrix} -a_3 & a_2 \\ -b_3 & b_2 \end{vmatrix}, \quad p_2 = \begin{vmatrix} a_1 & -a_3 \\ b_1 & -b_3 \end{vmatrix}, \quad p_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Вектор $\boldsymbol{c}$ пропорционален вектору $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{p}$. Подберем α так чтобы $|\alpha\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\varphi$.

$$|\boldsymbol{c}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\varphi = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2(1-\cos^2\varphi) = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2 =$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 =$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2;$$

получили, что $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{p}|$. Таким образом, $\boldsymbol{c} = \pm\boldsymbol{p}$.

Для выяснения знака вычислим определитель матрицы перехода от исходного ОНБ к базису, состоящему из векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$; этот det-3 состоит из координат векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 > 0.$$

Таким образом, тройка векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ имеет ту же ориентацию, что и исходный ОНБ. Поэтому в случае правого ОНБ $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{p}$, а в случае левого ОНБ $\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{p}$.

Итак, в случае правого ОНБ имеем

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Ясно, что координаты вектора $\boldsymbol{c}$ равны алгебраическим дополнениям элементов первой строки det-3

$$\begin{vmatrix} * & * & * \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Поэтому можно формулу для вычисления ВП представить в виде

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad \text{в правом ОНБ,}$$

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad \text{в левом ОНБ.}$$

Очевидно, эти формулы справедливы и для случаев, когда один (или оба) вектора нулевой и когда векторы коллинеарны (эти случаи в начале рассуждения были исключены из рассмотрения).

3.3. **Свойства векторного произведения.**

Теорема.

Векторное произведение обладает следующими свойствами:

(1) *кососимметричность*:

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = -[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}];$$

(2) *линейность*:

$$[\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}],$$

$$[\alpha \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \alpha [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}].$$

Из линейности по первому аргументу и кососимметричности вытекает линейность и по второму аргументу.

◀ Докажите самостоятельно, используя свойства определителей. ▶

3.4. **Двойное векторное произведение.**

Двойное векторное произведение — это $[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]]$ или $[[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c}]$.

Теорема.

$$[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

◀ В фиксированном ОНБ векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ имеют координаты

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$:

$$[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix}.$$

Далее вычисляем $[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]]$:

$$[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2c_3 - b_3c_2 & b_3c_1 - b_1c_3 & b_1c_2 - b_2c_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_1(a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_2(a_1c_1 + a_3c_3) - c_2(a_1b_1 + a_3b_3) \\ b_3(a_1c_1 + a_2c_2) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_1(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_2(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_3(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \end{pmatrix} =$$

$$= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}. \qquad ▶$$

Теорема.
Имеет место тождество Якоби:

$$[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]] + [\boldsymbol{b}, [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]] + [\boldsymbol{c}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]] = \boldsymbol{0}.$$

◀ Складывая разложение

$$[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

с аналогичными разложениями для $[\boldsymbol{b}, [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]]$, $[\boldsymbol{c}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]]$, получаем требуемое. ▶

4. Смешанное произведение

Смешанное произведение трех векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ — это число

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]).$$

Другие обозначения:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle.$$

Теорема.

Если в ортонормированном базисе

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

то

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \pm \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

где знак «+» выбирается в случае правого базиса, а знак «−» в случае левого.

◄ Введем обозначение

$$\boldsymbol{d} = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \pm \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]) = a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3 =$$

$$= \pm \left(a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right) = \pm \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad ►$$

Теорема.

Смешанное произведение обладает следующими свойствами:

(1) *линейность*:

$$(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c});$$

(2) *циклическая симметрия*:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) =$$

$$= -(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a});$$

(3)

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]) = ([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c}).$$

◄ Докажите самостоятельно, используя свойства скалярного и векторного произведений и свойства det-3. ►

Теорема.

(1) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$ *тогда и только тогда, когда векторы* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ *линейно зависимы.*

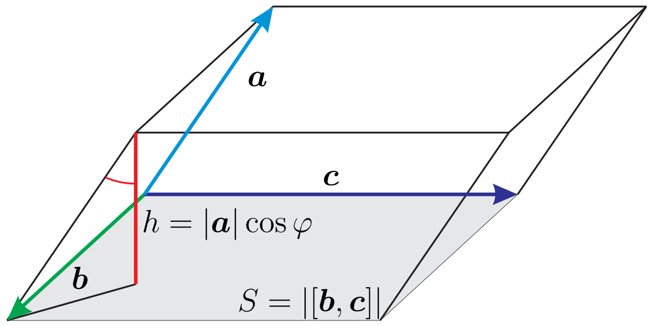
(2) *Векторы* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ *образуют правую тройку при* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) > 0$ *и левую тройку при* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) < 0$.

◀ Докажите самостоятельно, используя выражение смешанного произведения через координаты векторов и то обстоятельство, что матрицу, составленную из координат векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, можно рассматривать как матрицу перехода от исходного ОНБ к базису $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ (в случае, когда эти векторы линейно независимы). ▶

Теорема.

Величина $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ равна объему параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, со знаком «+», если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком «−» в противном случае.

◀ Докажите самостоятельно. ▶



5. Задачи

Пример.

Доказать тождество

$$([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]) = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}) \\ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}) \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \underbrace{[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]}_{\boldsymbol{x}}) = ([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}]) = (\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]]) =$$

$$= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d})(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}).$$

Пример.

Доказать тождество

$$[[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]] = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}).$$

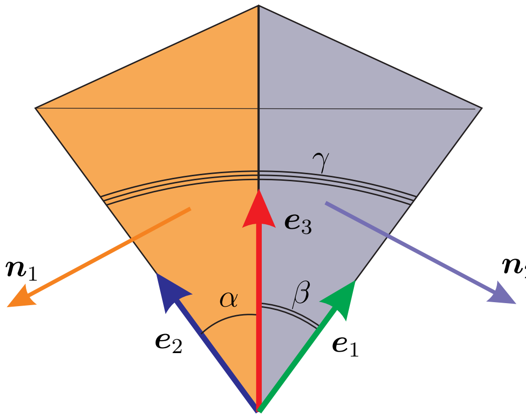
Решение.

$$[\underbrace{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}_{\boldsymbol{x}}, [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]] = [\boldsymbol{x}, [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]] = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) =$$

$$= \boldsymbol{c}([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{d}([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}).$$

Пример.

Даны плоские углы α, β, γ трехгранного угла. Найти его двугранные углы.



Решение.

Направим единичные векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ вдоль ребер двугранного угла. Векторы $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$, перпендикулярные граням, могут быть выражены как

$$\boldsymbol{n}_1 = [\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3], \quad \boldsymbol{n}_2 = [\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1].$$

Очевидно,

$$|\boldsymbol{n}_1| = \sin\alpha, \quad |\boldsymbol{n}_2| = \sin\beta.$$

Угол между рассматриваемыми гранями равен углу между векторами $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$.

$$(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2) = ([\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3], [\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1]) = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) & (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) \\ (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3) & (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\gamma \\ 1 & \cos\beta \end{vmatrix} = \cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma.$$

Поэтому косинус искомого угла равен

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2)}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

6. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Длины соседних сторон параллелограмма относятся как $m : n$, угол между этими сторонами равен α. Найдите острый угол между диагоналями параллелограмма.

Ответ. Острый угол $\arccos \dfrac{|m^2 - n^2|}{\sqrt{m^4 + n^4 - 2m^2n^2\cos 2\alpha}}$.

Задача 2. Докажите следующие тождества:

(а) $\|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\|^2 = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \end{vmatrix}$;

(б) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^2 + \|[[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c}]\|^2 = \|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\|^2 \cdot \|\boldsymbol{c}\|^2$;

(в) $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}) + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d})$;

(г) $([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}], [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^2$.

Задача 3. (а) Докажите, что если векторы $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$ компланарны, то векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарны. (б) Докажите, что если векторы $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$ компланарны, то они коллинеарны.

Задача 4. Известно, что $\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$, $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Найти длины векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и углы между ними.

Ответ. Либо все три вектора нулевые, либо образуют правый ортонормированный базис.

Задача 5. Три некомпланарных вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ отложены из одной точки. Найти объём (а) треугольной призмы, основание которой построено на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, а боковое ребро совпадает с вектором $\boldsymbol{c}$; (б) тетраэдра, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

Ответ. (а) $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$; (б) $\frac{1}{6}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$.

Задача 6. Даны ненулевой вектор $\boldsymbol{a}$ и число p. Найдите все решения уравнения $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) = p$ и объясните их геометрический смысл в плоском и пространственном случаях.

Ответ. $\boldsymbol{x} = \dfrac{p}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{y}$, где $\boldsymbol{y}$ — произвольный вектор, ортогональный вектору $\boldsymbol{a}$. При условии, что все векторы отложены из одной точки O, в плоском случае концы векторов $\boldsymbol{x}$ лежат на прямой, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{a}$; в пространственном случае концы векторов $\boldsymbol{x}$ лежат в плоскости, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{a}$.

Задача 7. Даны ненулевые векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Выясните, при каком условии уравнение $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$ имеет решения, найдите все решения этого уравнения и объясните их геометрический смысл.

Ответ. Уравнение разрешимо при условии $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 0$. Частное решение $\boldsymbol{x}_0 = \dfrac{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}{\|\boldsymbol{a}\|^2}$, Общее решение $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a}$, где t — произвольное число. Множество концов векторов $\boldsymbol{x}$ является прямой с направляющим вектором $\boldsymbol{a}$ (все векторы отложены из некоторой точки O); конец вектора $\boldsymbol{x}_0$ является проекцией точки O на эту прямую.

Задача 8. Даны неколлинеарные векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и число p. Найдите все решения уравнения $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = p$ и объясните их геометрический смысл.

Ответ. Частное решение $\boldsymbol{x}_0 = \dfrac{p}{\|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\|^2}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$; общее решение $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b}$, где t, s — произвольные числа. Множество концов векторов $\boldsymbol{x}$ является плоскостью, параллельной векторам $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ (все векторы отложены из некоторой точки O); вектор $\boldsymbol{x}_0$ является проекцией точки O на эту плоскость.

Задача 9. Две тройки векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ и $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ называются взаимными, если $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_j) = 0$ при $i \neq j$ и $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_i) = 1$. Докажите, что для существования тройки $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$, взаимной к $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ были некомпланарны. Выразите векторы $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ через векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$. Докажите, что если векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ образуют базис, то векторы взаимной тройки $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ образуют базис той же ориентации.

Ответ. $\boldsymbol{b}_1 = \dfrac{[\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]}{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)}$, $\boldsymbol{b}_2 = \dfrac{[\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1]}{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)}$, $\boldsymbol{b}_3 = \dfrac{[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]}{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)}$.

Задача 10. Решите систему векторных уравнений в пространстве: $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) = p$, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}) = q$, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}) = r$, где $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ — некомпланарные векторы, p, q, r — числа. Объясните геометрический смысл решения. [Указание. Воспользуйтесь взаимным базисом, описанным в задаче 9.]

Ответ. $\boldsymbol{x} = \dfrac{p[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}] + q[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}] + r[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}$ — радиус-вектор точки пересечения плоскостей, задаваемых уравнениями системы (см. задачу 6).