МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В.ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

М. О. Корпусов, А. А. Панин

Лекции по линейному и нелинейному функциональному анализу

Часть III. Нелинейный анализ

Москва
Физический факультет МГУ
2015

К о р п у с о в М. О., П а н и н А. А.
Лекции по линейному и нелинейному функциональному анализу. Часть III. Нелинейный анализ. — М.: Физический факультет МГУ, 2015. 364 с.
ISBN

В курсе лекций изложены методы исследования нелинейных операторов, действующих в линейных пространствах.

Материал книги используется в курсе «Линейный и нелинейный функциональный анализ», который авторы читают на кафедре математики физического факультета МГУ.

Данный курс входит в учебный план кафедры математики физического факультета МГУ и представляет интерес для широкого круга студентов и аспирантов, специализирующихся в области функционального анализа.

Библиогр. 165 назв.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лекция 1

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 1. Введение

В этой лекции мы введем важные понятия дифференцируемости по Гато и по Фреше. Эти два понятия носят фундаментальный характер при исследовании вариационных задач, а также при рассмотрении различных нелинейных краевых задач. Будут доказаны важные теоремы о связи этих двух понятий друг с другом и с понятиями непрерывности функций дифференцируемых или по Гато или по Фреше. Рассмотрение данных понятий будет снабжено некоторыми примерами. Наконец, последняя часть этой лекции будет посвящена важному в приложениях оператору Немыцкого. Будет приведен без доказательства фундаментальный результат о сильной непрерывности оператора Немыцкого, который будет неоднократно использоваться в дальнейшем.

§ 2. Производные Гато и Фреше нелинейных операторов

Пусть $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$ — это два банаховых пространства относительно норм $\| \quad \|_1$ и $\| \quad \|_2$ соответственно. Пусть, кроме того, $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ есть соответствующие скобки двойственности.

Рассмотрим некоторый, вообще говоря, нелинейный оператор

$$\mathbb{F} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2.$$

Введем понятие дифференцируемости по Гато оператора $\mathbb{F}$. Дадим соответствующее определение.

Определение 1. *Оператор $\mathbb{F}$ называется дифференцируемым по Гато в точке $u \in \mathbb{B}_1$, если для любого $h \in \mathbb{B}_1$ имеет место предельное равенство*

$$\lim_{\lambda \to 0} \left\| \frac{\mathbb{F}(u + \lambda h) - \mathbb{F}(u)}{\lambda} - \mathbb{F}'_g(u)h \right\|_2 = 0, \tag{2.1}$$

где $\mathbb{F}'_g(u)$ при каждом фиксированном $u \in \mathbb{B}_1$ есть линейный оператор из $\mathbb{B}_1$ в $\mathbb{B}_2$. При этом, вообще говоря, нелинейный по $u \in \mathbb{B}_1$ оператор $\mathbb{F}'_g(u)$ называется производной Гато оператора $\mathbb{F}$.

Замечание 1. Введем $\mathbb{B}_2$–значную функцию

$$\varphi(\lambda) \equiv \mathbb{F}(u + \lambda h),$$

для всех $u, h \in \mathbb{B}_1$ и $\lambda \in \mathbb{R}^1$. Тогда, как нетрудно видеть, согласно определению 1 имеет место равенство

$$\mathbb{F}_g^{'}(u)h = \frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}.$$

Рассмотрим теперь ряд примеров производных Гато отображений.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим теперь случай линейного оператора

$$\mathbb{F} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2.$$

Тогда, очевидно, в силу линейности этого отображения имеет место следующее равенство:

$$\frac{\mathbb{F}(u + \lambda h) - \mathbb{F}(u)}{\lambda} = \mathbb{F}h,$$

т. е.

$$\mathbb{F}_g^{'}(u) = \mathbb{F}.$$

Тем самым, приходим к выводу о том, что линейный оператор из $\mathbb{B}_1$ в $\mathbb{B}_2$ является бесконечное число раз дифференцируемым по Гато, причем всякий раз соответствующая производная Гато совпадает с самим оператором.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим теперь следующее отображение:

$$\mathbb{F} = (\mathbb{F}_1, ..., \mathbb{F}_n) : \mathbb{R}_m \to \mathbb{R}_n,$$

где $\mathbb{R}_m$ и $\mathbb{R}_n$ — это евклидовы пространства строк. Конечно, они являются банаховыми относительно, например, таких норм:

$$\|u\|_1 = \Big(|u_1|^2 + \cdots + |u_m|^2\Big)^{1/2} \quad \text{и} \quad \|v\|_2 = \Big(|v_1|^2 + \cdots + |v_n|^2\Big)^{1/2},$$

где $u = (u_1, ..., u_m) \in \mathbb{R}_m$ и $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}_n$. Вычислим производную Гато отображения $\mathbb{F}$. Действительно, как известно из линейной алгебры, всякое линейное отображение из $\mathbb{R}_m$ в $\mathbb{R}_n$ можно задать некоторой вещественной матрицей $\mathbb{A}$, состоящей из m строк и n столбцов. Поэтому согласно определению 1 имеет место предельное равенство (2.1). Возьмем в этом предельном равенстве в качестве h вектор $e_j \in \mathbb{R}_m$:

$$e_j = (0, ..0, 1, 0, ..., 0),$$

где 1 стоит на j–ом месте. Согласно определению 1 при фиксированном $u \in \mathbb{R}_m$

$$\mathbb{F}_g^{'}(u)$$

есть линейный оператор из $\mathbb{R}_m$ в $\mathbb{R}_n$. Поэтому

$$\mathbb{F}_g'(u)e_j = \mathbb{A}e_j$$

и, значит,

$$(\mathbb{A}e_j)_k = a_{kj} \quad j \in \overline{1, m} \quad \text{и} \quad k \in \overline{1, n}.$$

Тем самым, из (2.1) с учетом выбора норм получаем, что

$$\lim_{\lambda \to 0} \left| \frac{\mathbb{F}_k(u + \lambda e_j) - \mathbb{F}_k(u)}{\lambda} - a_{kj} \right| = 0.$$

Но как хорошо известно

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\mathbb{F}_k(u + \lambda e_j) - \mathbb{F}_k(u)}{\lambda} = \frac{\partial \mathbb{F}_k}{\partial u_j}(u).$$

Таким образом,

$$a_{kj} = \frac{\partial \mathbb{F}_k}{\partial u_j}(u),$$

т. е. производная Гато отображения $\mathbb{F}$ представляет собой якобиан этого отображения.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим оператор Гаммерштейна

$$\mathbb{G}(u) = \int_0^1 k(x, y) g(u(y), y)\, dy \quad \text{для всех} \quad y \in [0, 1].$$

В качестве банаховых пространств $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$ возьмем $\mathbb{C}[0, 1]$ и потребуем, чтобы

$$k(x, y) \in \mathbb{C}([0, 1] \times [0, 1]), \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u, x) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^1 \times [0, 1]).$$

В силу этих предположений имеет место предельное равенство

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{g(u + \lambda h, x) - g(u, x)}{\lambda} = \frac{\partial g}{\partial u}(u, x) h(x).$$

Поэтому производная Гато оператора Гаммерштейна имеет вид

$$\mathbb{G}_g'(u)h = \int_0^1 k(x, y) \frac{\partial g}{\partial u}(u(y), y) h(y)\, dy \quad \text{для всех} \quad h(x) \in \mathbb{C}[0, 1].$$

Теперь приступим к рассмотрению еще одного вида производной от оператора — *производной Фреше*. Дадим определение.

Определение 2. *Оператор $\mathbb{F}$ называется дифференцируемым по Фреше в точке $u \in \mathbb{B}_1$, если в окрестности этой точки для любого $h \in \mathbb{B}_1$ имеет место следующее представление*:

$$\mathbb{F}(u+h) = \mathbb{F}(u) + \mathbb{F}_f^{'}(u)h + \omega(u,h), \tag{2.2}$$

причем

$$\lim_{\|h\|_1 \to 0} \frac{\|\omega(u,h)\|_2}{\|h\|_1} = 0. \tag{2.3}$$

Линейный при фиксированном $u \in \mathbb{B}_1$ оператор

$$\mathbb{F}_f^{'}(u) : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$$

называется производной Фреше оператора $\mathbb{F}$.

Замечание 2. Пусть, кроме того, имеется третье банахово пространство $\mathbb{B}_3$, которое *непрерывно* вложено в банахово пространство $\mathbb{B}_1$, т. е.

$$\exists\ \mathrm{J} \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_3; \mathbb{B}_1)$$

и J — инъективный оператор. Тогда производная Фреше оператора

$$\mathbb{F}(\mathrm{J}\cdot) : \mathbb{B}_3 \to \mathbb{B}_2$$

есть оператор

$$\mathbb{F}_f^{'}(\mathrm{J}\cdot) : \mathbb{B}_3 \to \mathcal{L}(\mathbb{B}_3; \mathbb{B}_2).$$

В случае когда рассматривается функционал

$$\psi(u) : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^1,$$

где $\mathbb{H}$ — это вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$. Тогда дадим определение градиента функционала $\psi(u)$.

Определение 3. *Градиентом функционала $\psi(u)$ называется величина*

$$\mathbf{grad}\,\psi(u) = \mathrm{J}\psi_f^{'}(u) : \mathbb{H} \to \mathbb{H},$$

где $\mathrm{J} : \mathbb{H}^* \to \mathbb{H}$ — оператор Рисса.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим отображение, определенное формулой

$$\mathbb{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1,$$

$$\mathbb{F}(x) = \begin{cases} \frac{x_1^3 x_2}{x_1^4 + x_2^2}, & \text{при} \quad x = (x_1, x_2) \neq 0; \\ 0, & \text{при} \quad x = (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$$

Докажем, что это отображение дифференцируемо по Гато в точке $(0,0)$. Действительно, имеет место следующая цепочка выражений:

$$\frac{\mathbb{F}(x+\lambda h)-\mathbb{F}(x)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\frac{\lambda^4 h_1^3 h_2}{\lambda^4 h_1^4+\lambda^2 h_2^2} = \lambda\frac{h_1^3 h_2}{\lambda^2 h_1^4 + h_2^2} \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to 0$$

в точке $x = (0,0)$. Тем самым, производная Гато этого отображения в точке $(0,0)$ равна нулевому отображению: $\mathbb{F}_g'(0) = \Theta$. Предположим, что производная Фреше этого отображения существует в точке $(0,0)$ и равна нулевому отображению Θ. Действительно, согласно определению 2 производной Фреше и явному виду отображения $\mathbb{F}$ имеет место следующее равенство:

$$\mathbb{F}(h) = \omega(\vartheta, h), \qquad \lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|\omega(\vartheta,h)\|}{\|h\|} = 0 \quad \text{при} \quad \|h\| \to +0.$$

Значит, с необходимостью получаем, что

$$\frac{\|\mathbb{F}(h)\|}{\|h\|} \to 0.$$

Рассмотрим стремление к точке $(0,0)$ вектора $h \in \mathbb{R}^2$ по кривой $h_2 = h_1^2$. Действительно, имеет место равенство

$$\frac{\|\mathbb{F}(h)\|}{\|h\|} = \frac{|h_1|^3|h_2|}{h_1^4+h_2^2}\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \\ = \frac{|h_1|h_1^4}{h_1^4+h_1^4}\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_1^4}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+h_1^2}} \to \frac{1}{2} \neq 0 \quad \text{при} \quad \|h\| \to 0.$$

Полученное предельное равенство означает, что производной Фреше в точке $(0,0)$ не существует. Тем самым, из существования производной Гато в какой-то точке не следует существование производной Фреше в этой же точке.

Возникает естественный вопрос: при каких дополнительных условиях вытекает существование производной Фреше в некоторой точке при условии существования производной Гато в той же точке. Для ответа на этот вопрос нам необходимо доказать следующие два утверждения о среднем значении. Во-первых, справедлив следующий результат.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbb{F} : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$. *Тогда для каждой пары* $u, h \in \mathbb{B}$ *найдется такое число* $\lambda = \lambda(u,h) \in (0,1)$, *что имеет место формула*

$$\mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u) = \left\langle \mathbb{F}_g'(u+\lambda h), h \right\rangle, \tag{2.4}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *— есть скобки двойственности между банаховыми пространствами* $\mathbb{B}$ *и* $\mathbb{B}^*$.

Доказательство.

Введем вещественно-значную функцию

$$\varphi(\lambda) = \mathbb{F}(u + \lambda h).$$

В силу замечания 1 имеем

$$\varphi^{'}(\lambda) = \left\langle \mathbb{F}_g^{'}(u + \lambda h), h \right\rangle.$$

Заметим теперь, что в силу теоремы Лагранжа для вещественных функций имеет место равенство

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi^{'}(\lambda) \quad \text{при некотором} \quad \lambda \in (0, 1).$$

Значит, справедливо равенство (2.4).

Теорема доказана.

Только что доказанная теорема позволит нам доказать следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbb{F} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$, *тогда для каждой пары* $u, h \in \mathbb{B}_1$ *и* $f^* \in \mathbb{B}_2^*$ *найдется такое вещественное число* $\lambda = \lambda(u, h, f^*) \in (0, 1)$, *что имеют место следующие выражения*:

$$\langle f^*, \mathbb{F}(u + h) - \mathbb{F}(u) \rangle_2 = \left\langle f^*, \mathbb{F}_g^{'}(u + \lambda h) h \right\rangle_2 \tag{2.5}$$

и

$$\|\mathbb{F}(u + h) - \mathbb{F}(u)\|_2 \leqslant \left\|\mathbb{F}_g^{'}(u + \lambda h)\right\|_{1 \to 2} \|h\|_1. \tag{2.6}$$

Доказательство.

Рассмотрим вещественнозначную функцию:

$$\varphi(u) \equiv \langle f^*, \mathbb{F}(u) \rangle_2 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{R}^1.$$

Из дифференцируемости по Гато оператора $\mathbb{F}(u)$ вытекает дифференцируемость по Гато функции

$$\varphi(u) : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{R}^1.$$

Причем имеет место равенство

$$\left\langle \varphi_g^{'}(u), h \right\rangle_1 = \left\langle f^*, \mathbb{F}_g^{'}(u) h \right\rangle_2.$$

В силу теоремы 1 имеет место равенство

$$\varphi(u + h) - \varphi(u) = \left\langle \varphi_g^{'}(u + \lambda h), h \right\rangle_1$$

при некотором числе $\lambda = \lambda(u, h, f^*) \in (0, 1)$. Значит, имеет место равенство

$$\langle f^*, \mathbb{F}(u + h) - \mathbb{F}(u) \rangle_2 = \left\langle f^*, \mathbb{F}_g^{'}(u + \lambda h) h \right\rangle_2.$$

В силу следствия из теоремы Хана–Банаха при фиксированных $u, h \in \mathbb{B}_1$ найдется такое $f^* \in \mathbb{B}_2^*$ с $\|f^*\|_{2*} = 1$, что

$$\langle f^*, \mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u)\rangle_2 = \|\mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u)\|_2.$$

Тем самым, имеет место неравенство (2.6).

Теорема доказана.

Наконец, мы в состоянии доказать следующий результат.

Теорема 3. *Пусть оператор $\mathbb{F} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ является дифференцируемым по Гато в некоторой окрестности точки $u \in \mathbb{B}_1$ и производная Гато $\mathbb{F}_g^{'}(\cdot)$ непрерывна в точке $u \in \mathbb{B}_1$. Тогда оператор $\mathbb{F}$ дифференцируем по Фреше в этой же точке $u \in \mathbb{B}_1$ и*

$$\mathbb{F}_g^{'}(u) = \mathbb{F}_f^{'}(u).$$

Доказательство.

Введем обозначение:

$$\omega(u, h) \equiv \mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u) - \mathbb{F}_g^{'}(u)h.$$

Пусть $f^* \in \mathbb{B}_2^*$, тогда имеем

$$\langle f^*, \omega(u, h)\rangle_2 = \langle f^*, \mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u)\rangle_2 - \left\langle f^*, \mathbb{F}_g^{'}(u)h\right\rangle_2.$$

По теореме 2 найдется такое число $\lambda = \lambda(u, h, f^*) \in (0, 1)$, что

$$\langle f^*, \mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u)\rangle_2 = \left\langle f^*, \mathbb{F}_g^{'}(u+\lambda h)h\right\rangle_2.$$

Следовательно,

$$\langle f^*, \omega(u, h)\rangle_2 = \left\langle f^*, \mathbb{F}_g^{'}(u+\lambda h)h - \mathbb{F}_g^{'}(u)h\right\rangle_2.$$

По следствию из теоремы Хана–Банаха при фиксированных $u, h \in \mathbb{B}_1$ найдется такое $f^* \in \mathbb{B}_2^*$ с $\|f^*\|_{*2} = 1$, что

$$\|\omega(u, h)\|_2 = \langle f^*, \omega(u, h)\rangle_2.$$

Значит, имеет место неравенство

$$\|\omega(u, h)\|_2 \leqslant \left\|\mathbb{F}_g^{'}(u+\lambda h) - \mathbb{F}_g^{'}(u)\right\|_{1\to 2} \|h\|_1.$$

Следовательно, в силу непрерывности $\mathbb{F}_g^{'}(\cdot)$ в точке $u \in \mathbb{B}_1$ имеет место неравенство

$$\lim_{\|h\|_1\to 0} \frac{\|\omega(u, h)\|_2}{\|h\|_1} \leqslant \lim_{\|h\|_1\to 0} \left\|\mathbb{F}_g^{'}(u+\lambda h) - \mathbb{F}_g^{'}(u)\right\|_{1\to 2} = 0.$$

Теорема доказана.

Теперь мы можем установить связь между понятиями дифференцируемости по Фреше и непрерывности отображения. Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 4. *Пусть* $\mathbb{F} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ *— это отображение, дифференцируемое по Фреше в некоторой точке* $u \in \mathbb{B}_1$, *тогда отображение* $\mathbb{F}$ *непрерывно в этой точке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о .

Действительно, в силу дифференцируемости по Фреше в точке $u \in \mathbb{B}_1$ имеет место следующее представление:

$$\left\|\mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u) - \mathbb{F}'_f(u)h\right\|_2 \leqslant \|h\|_1$$

при достаточно малом $h \in \mathbb{B}_1$. Но тогда имеет место следующее неравенство:

$$\|\mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u)\|_2 \leqslant \left\|\mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u) - \mathbb{F}'_f(u)h\right\|_2 + \\ + \left\|\mathbb{F}'_f(u)h\right\|_2 \leqslant \left(1 + \left\|\mathbb{F}'_f(u)\right\|_{1\to 2}\right) \|h\|_1.$$

Т е о р е м а д о к а з а н а .

П Р И М Е Р 5 . Приведем пример отображения, дифференцируемого по Гато в некоторой точке, но не непрерывной в этой точке. Пусть

$$\mathbb{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1,$$

$$\mathbb{F}(x) = \begin{cases} \frac{x_1^4 x_2}{x_1^6 + x_2^3}, & \text{при} \quad (x_1, x_2) \neq (0,0); \\ 0, & \text{при} \quad (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$$

Действительно, выражение

$$\frac{\mathbb{F}(x + \lambda h) - \mathbb{F}(x)}{\lambda}$$

в точке $x = (0,0)$ имеет вид

$$\frac{\lambda^5 h_1^4 h_2}{\lambda\left(\lambda^6 h_1^6 + \lambda^3 h_2^3\right)} = \lambda \frac{h_1^4 h_2}{\lambda^3 h_1^6 + h_2^3} \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to 0.$$

Значит, производная Гато указанного отображения существует в точке $x = (0,0)$ и равна нулевому отображению

$$\mathbb{F}'_g(\vartheta) = \Theta.$$

Докажем, что тем не менее отображение $\mathbb{F}$ не непрерывно в нуле. Действительно, рассмотрим кривую в $\mathbb{R}^2$ $x_2 = \lambda x_1^2$ при $\lambda > 0$. И устремим точку (x_1, x_2) к $(0,0)$ вдоль этой кривой. Тогда получим

$$\mathbb{F}(x)\Big|_{x_2 = \lambda x_1^2} = \frac{\lambda}{1 + \lambda^3}.$$

Таким образом, предел при $x \to (0,0)$ вдоль кривой $x_2 = \lambda x_1^2$ зависит от параметра $\lambda > 0$. Следовательно, указанное отображение $\mathbb{F}$ не является непрерывным в точке $(0,0)$.

Однако, в случае дифференцируемости по Гато есть некоторый ослабленный вариант непрерывности. Справедлива следующая лемма.

Л е м м а 1. *Пусть отображение $\mathbb{F}$ дифференцируемо по Гато в некоторой точке $u \in \mathbb{B}_1$. Тогда имеет место следующее неравенство*:

$$\|\mathbb{F}(u+\lambda h) - \mathbb{F}(u)\|_2 \leqslant c|\lambda|, \tag{2.7}$$

где $c = c(u,h) > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о .

В силу дифференцируемости по Гато в точке $u \in \mathbb{B}_1$ имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\left\|\frac{\mathbb{F}(u+\lambda h) - \mathbb{F}(u)}{\lambda}\right\|_2 \leqslant \left\|\frac{\mathbb{F}(u+\lambda h) - \mathbb{F}(u)}{\lambda} - \mathbb{F}'_g(u)h\right\|_2 + \\ + \left\|\mathbb{F}'_g(u)h\right\|_2 \leqslant c_1 + c_2 = c_3,$$

где c_3 не зависит от λ. Отсюда вытекает неравенство (2.7).

Л е м м а д о к а з а н а .

Теперь мы в состоянии доказать формулы дифференцирования по Гато и по Фреше композиции операторов. Именно, справедлив следующий результат.

Т е о р е м а 5. *Пусть $\mathbb{F} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ и $\mathbb{G} : \mathbb{B}_2 \to \mathbb{B}_3$, причем оператор $\mathbb{F}$ дифференцируем по Гато в некоторой точке $u \in \mathbb{B}_1$, а оператор $\mathbb{G}$ дифференцируем по Фреше в точке $\mathbb{F}(u)$. Тогда их композиция*

$$\mathbb{K} \equiv \mathbb{G} \circ \mathbb{F}$$

дифференцируема по Гато в точке $u \in \mathbb{B}_1$, причем имеет место следующее равенство:

$$\mathbb{K}'_g(u) = \mathbb{G}'_f(\mathbb{F}(u))\mathbb{F}'_g(u). \tag{2.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о .

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\frac{1}{|\lambda|}\left\|\mathbb{K}(u+\lambda h) - \mathbb{K}(u) - \lambda \mathbb{G}'_f(\mathbb{F}(u))\mathbb{F}'_g(u)\right\|_3 \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\left\|\mathbb{G}(\mathbb{F}(u+\lambda h)) - \mathbb{G}(\mathbb{F}(u)) - \mathbb{G}'_f(\mathbb{F}(u))(\mathbb{F}(u+\lambda h) - \mathbb{F}(u))\right\|_3 + \\ + \frac{1}{|\lambda|}\left\|\mathbb{G}'_f(\mathbb{F}(u))\left[\mathbb{F}(u+\lambda h) - \mathbb{F}(u) - \lambda\mathbb{F}'_g(u)h\right]\right\|_3 = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2.$$

Рассмотрим сначала выражение I_2. Для него справедлива оценка

$$\mathrm{I}_2 \leqslant \left\|\mathbb{G}'_f(\mathbb{F}(u))\right\|_{2\to 3} \left\|\frac{\mathbb{F}(u+\lambda h)-\mathbb{F}(u)}{\lambda} - \mathbb{F}'_g(u)h\right\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to 0.$$

Теперь рассмотрим выражение для I_1. Для него в силу определения 2 справедлива оценка

$$\mathrm{I}_1 \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\overline{\overline{o}}\left(\|\mathbb{F}(u+\lambda h)-\mathbb{F}(u)\|_2\right) \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\overline{\overline{o}}(|\lambda|) = \overline{\overline{o}}(1),$$

где мы воспользовались результатом леммы 1.

Теорема доказана.

Наконец, справедлив следующий результат.

Теорема 6. *Пусть* $\mathbb{F} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ *и* $\mathbb{G} : \mathbb{B}_2 \to \mathbb{B}_3$, *причем оператор* $\mathbb{F}$ *дифференцируем по Фреше в некоторой точке* $u \in \mathbb{B}_1$, *а оператор* $\mathbb{G}$ *дифференцируем по Фреше в точке* $\mathbb{F}(u)$. *Тогда их композиция*

$$\mathbb{K} \equiv \mathbb{G} \circ \mathbb{F}$$

дифференцируема по Фреше в точке $u \in \mathbb{B}_1$, *причем имеет место следующее равенство*:

$$\mathbb{K}'_f(u) = \mathbb{G}'_f(\mathbb{F}(u))\mathbb{F}'_f(u). \tag{2.9}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&\left\|\mathbb{K}(u+h)-\mathbb{K}(u)-\mathbb{G}'_f(\mathbb{F}(u))\mathbb{F}'_f(u)\right\|_3 \leqslant \\
&\quad\leqslant \left\|\mathbb{G}(\mathbb{F}(u+h))-\mathbb{G}(\mathbb{F}(u))-\mathbb{G}'_f(\mathbb{F}(u))\left[\mathbb{F}(u+h)-\mathbb{F}(u)\right]\right\|_3 + \\
&\qquad + \left\|\mathbb{G}'_f(\mathbb{F}(u))\left[\mathbb{F}(u+h)-\mathbb{F}(u)-\mathbb{F}'_f(u)h\right]\right\|_3 \leqslant \\
&\qquad\leqslant \|\omega_1(\mathbb{F}(u),\mathbb{F}(u+h)-\mathbb{F}(u))\|_3 + \left\|\mathbb{G}'_f(\mathbb{F}(u))\right\|_{2\to 3}\|\omega_2(u,h)\|_3.
\end{aligned}$$

Теперь заметим, что в силу дифференцируемости по Фреше оператора $\mathbb{F}$ имеет место оценка

$$\|\mathbb{F}(u+h)-\mathbb{F}(u)\|_2 \leqslant c\|h\|_1.$$

Поэтому имеет место следующее предельное равенство:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\|h\|_1\to 0}\frac{\|\omega_1(\mathbb{F}(u),\mathbb{F}(u+h)-\mathbb{F}(u))\|_3}{\|h\|_1} = \\
&\quad = \lim_{\|h\|_1\to 0}\frac{\|\omega_1(\mathbb{F}(u),\mathbb{F}(u+h)-\mathbb{F}(u))\|_3}{\|\mathbb{F}(u+h)-\mathbb{F}(u)\|_2}\,\frac{\|\mathbb{F}(u+h)-\mathbb{F}(u)\|_2}{\|h\|_1} = 0.
\end{aligned}$$

Кроме этого, имеет место предельное равенство

$$\lim_{\|h\|_1\to 0}\frac{\|\omega_2(u,h)\|_3}{\|h\|_1}=0.$$

Тем самым, приходим к утверждению теоремы.

Теорема доказана.

§ 3. Оператор Немыцкого

Теперь приступим к рассмотрению одного частного, но важного класса операторов, называемых *операторами Немыцкого*. Для того чтобы ввести оператор Немыцкого нам сначала необходимо рассмотреть так называемые *Каратеодориевы функции*. Пусть $(\Omega,\mathcal{M},\mu)$ — это есть полное измеримое $\sigma-$конечное пространство. Дадим определения.

Определение 4. *Функция*

$$f(x,u):\Omega\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^1$$

называется Каратеодориевой, если она для всех $u\in\mathbb{R}^N$ $\mu-$ *$-$измерима на* Ω *и для* $\mu-$*почти всех* $x\in\Omega$ *непрерывна по* $u\in\mathbb{R}^N$.

Определение 5. *Оператор* $N_f(u)\equiv f(x,u(x))$ *называется оператором Немыцкого.*

Его важность при исследовании нелинейных краевых задач обусловлена тем, что для него справедлива следующая теорема М. А. Красносельского.

Теорема 7. *Оператор Немыцкого* $N_f(u)$ *является ограниченным и непрерывным, действующим из*

$$\prod_{k=1}^{N}L^{p_k}(\Omega,\mu)\quad\text{в}\quad L^q(\Omega,\mu)\quad\text{при}\quad p_k,q\in[1,+\infty)$$

тогда и только тогда, когда для соответствующей Каратеодориевой функции $f(x,u)$ *справедлива оценка*

$$|f(x,u)|\leqslant a(x)+c\sum_{k=1}^{N}|u_k|^{p_k/q}$$

для всех $u=(u_1,...,u_N)\in\mathbb{R}^N$ *и* $\mu-$*почти всех* $x\in\Omega$, *где* $a(x)\in\in L^q(\Omega,\mu)$.

Доказательство этой теоремы достаточно сложное и кропотливое имеется в работе [15].

Рассмотрим теперь следующий важный результат, который будет нами неоднократно использоваться в вариационных задачах.

Пусть

$$f(x,u):\Omega\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^1$$

является Каратеодориевой функцией. Введем так называемую потенциальную функцию

$$F(x,z) = \int_0^z f(x,\xi)\,d\xi, \tag{3.1}$$

а также функционал

$$\psi(u) = \int_\Omega F(x,u(x))\,dx. \tag{3.2}$$

Предположим также, что

$$|f(x,u)| \leqslant a(x) + c|u|^{p/p'} \quad \text{при} \quad p' = \frac{p}{p-1} \quad \text{и} \quad p \in (1,+\infty),$$

где $a(x) \in L_+^{p'}(\Omega)$ и $c > 0$. Тогда для потенциальной функции $F(x,u)$, определенной формулой (3.1), имеет место следующее неравенство:

$$|F(x,u)| \leqslant \left| \int_0^{u(x)} f(x,\xi)\,d\xi \right| \leqslant a(x)|u| + \frac{c}{p}|u|^p \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|a(x)|^{p'}}{p'} + \frac{|u|^p}{p} + \frac{c}{p}|u|^p = a_1(x) + c_1|u|^p, \tag{3.3}$$

где $a_1(x) \in L^1(\Omega)$ и $c_1 > 0$. Очевидно, что по своему определению потенциальная функция $F(x,u)$ является Каратеодориевой и поэтому в силу теоремы М. А. Красносельского и (3.3) приходим к выводу, что соответствующий оператор Немыцкого

$$N_F(u) : L^p(\Omega) \to L^1(\Omega)$$

и является ограниченным и непрерывным. Следовательно, функционал $\psi(u)$, определенный формулой (3.2) является ограниченным и непрерывным из $L^p(\Omega)$ в $\mathbb{R}^1$. Действительно, в силу оценки (3.3) имеет место цепочка неравенств:

$$|\psi(u)| \leqslant \int_\Omega |F(x,u(x))|\,dx \leqslant \int_\Omega a_1(x)\,dx + c_1 \int_\Omega |u|^p\,dx \leqslant c_2 + c_1\|u\|_p^p.$$

Ограниченность доказана. Докажем непрерывность. Пусть

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega).$$

Тогда

$$|\psi(u_n) - \psi(u)| \leqslant \|N_F(u_n) - N_F(u)\|_1 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Итак, непрерывность и ограниченность функционала $\psi(u)$ доказана. Докажем теперь его дифференцируемость по Фреше. Рассмотрим следующее выражение:

$$\omega(u,v) \equiv \psi(u+v) - \psi(u) - \langle N_f(u), v\rangle \quad \text{для} \quad u,v \in L^p(\Omega).$$

$$|\omega(u,v)| \leqslant \left| \int\limits_\Omega [F(x,u(x)+v(x)) - F(x,u(x))]\, dx - \int\limits_\Omega N_f(u)(x)v(x)\, dx \right|.$$

Заметим, что имеет место цепочка равенств

$$F(x,u(x)+v(x)) - F(x,u(x)) = \\ = \int\limits_0^1 \frac{d}{dt} F(x,u(x)+tv(x))\, dt = \int\limits_0^1 f(x,u(x)+tv(x))v(x)\, dt.$$

Поэтому справедлива оценка

$$|\omega(u,v)| \leqslant \int\limits_0^1 dt \int\limits_\Omega dx\, |N_f(u+tv)(x) - N_f(u)(x)|\, |v(x)| \leqslant \\ \leqslant \int\limits_0^1 dt\, \|N_f(u+tv) - N_f(u)\|_{p'}\, \|v\|_p.$$

Следовательно, в силу непрерывности оператора Немыцкого $N_f(\cdot)$ имеет место предельное неравенство

$$\lim_{\|v\|_p \to 0} \frac{|\omega(u,v)|}{\|v\|_p} \leqslant \lim_{\|v\|_p \to 0} \int\limits_0^1 dt\, \|N_f(u+tv) - N_f(u)\|_{p'} = 0.$$

Тем самым, справедлива следующая лемма.
Л е м м а 2. *При сформулированных условиях функционал* $\psi(u)$, *определенный формулой* (3.2), *является дифференцируемым по Фреше, причем имеет место следующее равенство*:

$$\psi'_f(u) = N_f(u) \quad \textit{для всех} \quad u \in L^p(\Omega) \quad \textit{при} \quad p \in (1,+\infty). \tag{3.4}$$

§ 4. Компактные операторы

Важность рассмотрения так называемых компактных операторов обусловлена тем, что это понятие широко используется в топологических методах при обобщении понятия степени конечномерного отображения. Дадим определение. Пусть

$$\mathbb{F} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2,$$

где $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$ — это два банаховых пространства с соответствующими скобками двойственности

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_1 \quad \text{и} \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_2.$$

Определение 6. *Оператор $\mathbb{F}$ называется компактным, если для каждого ограниченного множества $\mathrm{B} \subset \mathbb{B}_1$ замыкание множества $\mathbb{F}(\mathrm{B}) \subset \mathbb{B}_2$ компактно в $\mathbb{B}_2$.*

Справедлив следующий важный результат.

Теорема 8. *Пусть оператор $\mathbb{F}$ является компактным и дифференцируемым по Фреше в точке $u \in \mathbb{B}_1$, тогда $\mathbb{F}'_f(u)$ является также компактным оператором.*

Доказательство.

Пусть нет. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$ и такая последовательность $\|u_n\|_1 \leqslant 1$, что

$$\left\|\mathbb{F}'_f(u)u_n - \mathbb{F}'_f(u)u_m\right\|_2 \geqslant 3\varepsilon. \tag{4.1}$$

С другой стороны, в силу дифференцируемости по Фреше в точке $u \in \in \mathbb{B}_1$ имеет место представление

$$\mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u) = \mathbb{F}'_f(u)h + \omega(u,h) \quad \text{для} \quad h \in \mathbb{B}_1.$$

Тогда для этого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $\|h\|_1 \leqslant \delta$ имеет место неравенство

$$\|\omega(u,h)\|_2 \leqslant \varepsilon \|h\|_1.$$

С другой стороны, справедливы равенства

$$\mathbb{F}(u+\delta u_n) - \mathbb{F}(u) = \mathbb{F}'_f(u)\delta u_n + \omega(u, \delta u_n),$$

$$\mathbb{F}(u+\delta u_m) - \mathbb{F}(u) = \mathbb{F}'_f(u)\delta u_m + \omega(u, \delta u_m),$$

откуда сразу же получаем

$$\mathbb{F}(u+\delta u_n) - \mathbb{F}(u+\delta u_m) = \delta \mathbb{F}'_f(u)(u_n - u_m) + \omega(u,\delta u_n) - \omega(u, \delta u_m).$$

Следовательно, отсюда вытекает неравенство

$$\delta \left\|\mathbb{F}'_f(u)(u_n - u_m)\right\|_2 \leqslant \|\mathbb{F}(u+\delta u_n) - \mathbb{F}(u+\delta u_m)\|_2 + \\ + \|\omega(u,\delta u_n)\|_2 + \|\omega(u,\delta u_m)\|_2 \leqslant \|\mathbb{F}(u+\delta u_n) - \mathbb{F}(u+\delta u_m)\|_2 + 2\varepsilon\delta.$$

Заметим, что в силу (4.1) имеет место неравенство

$$\left\|\mathbb{F}_f'(u)(u_n - u_m)\right\|_2 \geqslant 3\varepsilon.$$

Значит, приходим к неравенству

$$\|\mathbb{F}(u + \delta u_n) - \mathbb{F}(u + \delta u_m)\|_2 \geqslant \varepsilon\delta > 0,$$

что противоречит предположению о компактности отображения $\mathbb{F}$, поскольку из последовательности $\{\mathbb{F}(u_n)\}$ нельзя извлечь сильно сходящуюся подпоследовательность.

Теорема доказана.

Но как правило в приложениях мы сталкиваемся с более узким понятием.

Определение 7. *Оператор $\mathbb{F}$ называется вполне непрерывным, если он непрерывен и компактен.*

Очень важным в приложениях к исследованию нелинейных краевых задач является понятие полностью непрерывного оператора. Дадим определение.

Определение 8. *Оператор $\mathbb{F}$ называется полностью непрерывным, если из условия*

$$u_n \rightharpoonup u \quad \textit{слабо в} \quad \mathbb{B}_1$$

вытекает, что

$$\mathbb{F}(u_n) \to \mathbb{F}(u) \quad \textit{сильно в} \quad \mathbb{B}_2.$$

Естественно, возникает вопрос о связи понятий вполне непрерывности и полной непрерывности операторов. Частично на этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема 9. *Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ — это вполне непрерывный оператор, тогда он является полностью непрерывным.*

Доказательство.

Итак, пусть

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_1,$$

тогда эта последовательность сильно ограничена в $\mathbb{B}_1$. Тогда в силу компактности L из последовательности $\{u_n\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$ такую, что

$$Lu_{n_k} \to v \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_2.$$

Рассмотрим транспонированный к L оператор

$$L^t : \mathbb{B}_2^* \to \mathbb{B}_1^*.$$

Поскольку $L \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$, т. е. является линейным и непрерывным, то и $L^t \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_2^*, \mathbb{B}_1^*)$, причем по определению транспонированного оператора справедливо следующее равенство:

$$\langle f^*, Lu \rangle_2 = \left\langle L^t f^*, u \right\rangle_1 \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathbb{B}_2^*, \quad u \in \mathbb{B}_1.$$

Докажем, что

$$Lu_n \rightharpoonup Lu \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_2.$$

Действительно, имеет место следующее выражение:

$$\langle f^*, Lu_n - Lu \rangle_2 = \left\langle L^t f^*, u_n - u \right\rangle_1 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

поскольку

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_1.$$

Таким образом, приходим к выводу, что

$$Lu_n \rightharpoonup Lu \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_2. \tag{4.2}$$

Докажем теперь, что на самом деле

$$Lu_n \to Lu \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_2.$$

По доказанному,

$$Lu_{n_k} \to v \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_2,$$

значит,

$$Lu_{n_k} \rightharpoonup v \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_2.$$

Следовательно, в силу (4.2) приходим к равенству

$$v = Lu.$$

Теперь предположим, что найдется такая подпоследовательность $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$, что имеет место неравенство

$$\|Lu_{n_k} - Lu\|_2 \geqslant c > 0 \quad \text{для всех} \quad n_k \in \mathbb{N}.$$

С другой стороны, по доказанному, у этой подпоследовательности найдется такая подпоследовательность

$$\left\{u_{n_{k_l}}\right\} \subset \{u_{n_k}\}$$

такая, что

$$\left\|Lu_{n_{k_l}} - Lu\right\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad l \to +\infty.$$

Справедлива цепочка неравенств

$$0 < c \leqslant \|Lu_{n_k} - Lu\|_2 \leqslant \left\|Lu_{n_k} - Lu_{n_{k_l}}\right\|_2 + \left\|Lu_{n_{k_l}} - Lu\right\|_2.$$

Выберем теперь $l \in \mathbb{N}$ настолько большим, чтобы имело место неравенство

$$\left\| Lu_{n_{k_l}} - Lu \right\|_2 \leqslant \frac{c}{2}.$$

С другой стороны, для каждого $l \in \mathbb{N}$ найдется такое $n_k \in \mathbb{N}$, что

$$n_k = n_{k_l} \Rightarrow u_{n_k} = u_{n_{k_l}} \Rightarrow Lu_{n_{k_l}} = Lu_{n_k}$$

и тогда

$$\left\| Lu_{n_k} - Lu_{n_{k_l}} \right\|_2 = 0$$

и мы приходим к противоречивому неравенству

$$0 < c \leqslant \frac{c}{2}.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема доказана.

Заметим, что обратное утверждение, вообще говоря, не справедливо.

ПРИМЕР 6. Как известно, пространство l_1 обладает свойством Шура, т. е. из условия

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad l_1$$

вытекает, что

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad l_1.$$

Поэтому единичный оператор

$$\mathrm{I} : l_1 \to l_1$$

является полностью непрерывным, но, очевидно, не является компактным.

Однако, при дополнительном условии рефлексивности банахова пространства $\mathbb{B}_1$ из полной непрерывности линейного оператора

$$L : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$$

вытекает компактность. Действительно, справедлив следующий результат.

Теорема 10. *Пусть линейный оператор L полностью непрерывен. Тогда, если банахово пространство $\mathbb{B}_1$ рефлексивно, то L — это вполне непрерывный оператор.*

Доказательство.

Непрерывность оператора L вытекает из того факта, что всякая последовательность $\{u_n\} \subset \mathbb{B}_1$ и такая, что

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_1$$

является слабо сходящейся:

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_1.$$

Теперь осталось воспользоваться полной непрерывностью оператора L.

Докажем теперь компактность. Действительно, пусть $\mathrm{B} \subset \mathbb{B}_1$ — это ограниченное множество. Тогда из любой последовательности $\{u_n\} \subset \subset \mathrm{B}$ в силу рефлексивности $\mathbb{B}_1$ можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность:

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_1.$$

Следовательно, в силу полной непрерывности оператора L имеем

$$Lu_{n_k} \to Lu \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_2.$$

Отсюда вытекает компактность.

Теорема доказана.

Важным следствием теорем 9 и 10 является следующее утверждение.

Теорема 11. *Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ и $\mathbb{B}_1$ рефлексивно. Тогда для полной непрерывности оператора L, необходима и достаточна, вполне непрерывность оператора L.*

Для дальнейшего нам необходимо дать еще одно определение и доказать одну вспомогательную лемму. Дадим определение.

Определение 9. *Множество $\mathrm{B} \subset \mathbb{B}$ банахова пространства $\mathbb{B}$ называется относительно компактным или предкомпактным, если его замыкание компактно.*

Справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Подмножество $\mathrm{K} \subset \mathbb{B}$ является относительно компактным, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое относительно компактное множество $\mathrm{K}_\varepsilon \subset \mathbb{B}$, что для каждого $u \in \mathrm{K}$ найдется такое $u_\varepsilon \in \mathrm{K}_\varepsilon$, что*

$$\|u - u_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon.$$

Доказательство.

Пусть $\varepsilon > 0$ выбрано и фиксировано. По условию леммы найдется относительно компактное множество

$$\mathrm{K}_{\varepsilon/2} \subset \mathbb{B},$$

т. е. это в свою очередь означает, что найдутся такие точки

$$u_\varepsilon^k \in \mathbb{B} \quad \text{при} \quad k = \overline{1, n},$$

что

$$\mathrm{K}_{\varepsilon/2} \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{B}_{\varepsilon/2}(u_\varepsilon^k), \tag{4.3}$$

где

$$\mathrm{B}_{\varepsilon/2}(u_\varepsilon^k) \equiv \left\{ u \in \mathbb{B} : \ \|u - u_\varepsilon^k\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \right\},$$

т. е. замкнутый шар в $\mathbb{B}$ радиуса $\varepsilon/2$ с центром в u_ε^k при $k = \overline{1, n}$.

С одной стороны, по условию леммы имеем для каждого $u \in \mathrm{K}$ найдется такое $u_{\varepsilon/2} \in \mathrm{K}_{\varepsilon/2}$, что

$$\|u - u_{\varepsilon/2}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.4}$$

С другой стороны, в силу (4.3) найдется такое $k_0 \in \overline{1, n}$, что

$$\left\|u_{\varepsilon/2} - u_\varepsilon^{k_0}\right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда и из (4.4) приходим к выводу, что

$$\|u - u_\varepsilon^{k_0}\| \leqslant \left\|u_{\varepsilon/2} - u_\varepsilon^{k_0}\right\| + \|u - u_{\varepsilon/2}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это означает, что

$$\mathrm{K} \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{B}_\varepsilon(u_\varepsilon^k),$$

т. е. множество K является относительно компактным.

Лемма доказана.

Теперь мы в состоянии доказать важную для нас в дальнейшем теорему.

Теорема 12. *Пусть* $\mathbb{B}_1$ *и* $\mathbb{B}_2$ *— это банаховы пространства и* $\mathrm{D} \subset \mathbb{B}_1$ *— это ограниченное множество. Пусть, кроме того,*

$$\mathbb{F} : \mathrm{D} \to \mathbb{B}_2$$

это некоторое отображение. Тогда следующие два условия эквивалентны:

(I) $\mathbb{F}$ *— это вполне непрерывное отображение;*

(II) *для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое ограниченное и непрерывное отображение*

$$\mathbb{F}_\varepsilon : \mathrm{D} \to \mathbb{B}_2,$$

что $\mathbb{F}_\varepsilon(\mathrm{D})$ *принадлежит замыканию выпуклой оболочки множества* $\mathbb{F}(\mathrm{D})$ *в* $\mathbb{B}_2$ *и*

$$\dim(\operatorname{span} \mathbb{F}_\varepsilon(\mathrm{D})) < +\infty$$

и

$$\|\mathbb{F}(u) - \mathbb{F}_\varepsilon(u)\|_2 \leqslant \varepsilon \quad \text{для всех} \quad u \in \mathrm{D}.$$

Доказательство.

Докажем сначала, что из (I) вытекает (II). Действительно, пусть отображение $\mathbb{F}$ является вполне непрерывным отображением. Тогда в силу ограниченности $\mathrm{D} \subset \mathbb{B}_1$ множество $\mathbb{F}(\mathrm{D})$ относительно компактно в $\mathbb{B}_2$. Следовательно, для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся такие точки $v_\varepsilon^k \in \mathbb{B}_2$ при $k = \overline{1, n}$, что

$$\overline{\mathbb{F}(\mathrm{D})} \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{B}_\varepsilon(v_\varepsilon^k),$$

где

$$\mathrm{B}_\varepsilon(v_\varepsilon^k) \equiv \left\{ v \in \mathbb{B}_2 : \; \|v - v_\varepsilon^k\|_2 \leqslant \varepsilon \right\}.$$

Введем следующие функции:

$$f_k(v) \equiv \max\{\varepsilon - \|v - v_\varepsilon^k\|_2, 0\}.$$

И рассмотрим следующую функцию

$$\overline{f}_m(v) = \begin{cases} f_m(v) \Big/ \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(v), & \text{при} \quad f_m(v) \neq 0; \\ 0, & \text{при} \quad f_m(v) = 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

при $m \in \overline{1, n}$ и для всех $v \in \overline{\mathbb{F}(\mathrm{D})}$. Теперь мы можем ввести отображение $\mathbb{F}_\varepsilon(u)$ следующим образом:

$$\mathbb{F}_\varepsilon(u) = \sum_{m=1}^{n} \overline{f}_m(\mathbb{F}(u)) v_\varepsilon^m \quad \text{для всех} \quad u \in \mathrm{D}.$$

Ограниченность этого отображения очевидна. Докажем непрерывность. По своему построению (4.5) функция

$$\overline{f}_m = \overline{f}_m(f_1, ..., f_n) \quad \text{при} \quad m = \overline{1, n}$$

непрерывна по совокупности вещественных переменных $f_k \in \mathbb{R}^1$, а функция $f_k = f_k(v)$ непрерывна для всех $v \in \overline{\mathbb{F}(\mathrm{D})}$. Наконец, по условию леммы оператор $\mathbb{F}$ непрерывен на $\mathrm{D} \subset \mathbb{B}_1$. Следовательно, по теореме о композиции непрерывных отображений оператор $\mathbb{F}_\varepsilon(u)$ непрерывен. Наконец, $\mathbb{F}_\varepsilon(u)$ — это конечномерный оператор, поскольку

$$\operatorname{span} \mathbb{F}_\varepsilon(\mathrm{D}) \subset \operatorname{span}\{v_\varepsilon^1, ..., v_\varepsilon^n\},$$

$\overline{\mathbb{F}(\mathrm{D})}$ — компактно в $\mathbb{B}_2$ и имеет место неравенство

$$\|\mathbb{F}(u) - \mathbb{F}_\varepsilon(u)\|_2 = \left\| \sum_{m=1}^{n} \overline{f}_m(\mathbb{F}(u)) \mathbb{F}(u) - \sum_{m=1}^{n} \overline{f}_m(\mathbb{F}(u)) v_\varepsilon^m \right\|_2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{n} \overline{f}_m(\mathbb{F}(u))\|\mathbb{F}(u) - v_\varepsilon^m\|_2 \leqslant \sum_{m=1}^{n} \overline{f}_m(\mathbb{F}(u))\varepsilon = \varepsilon.$$

Докажем теперь, что из (II) вытекает (I). Действительно, возьмем

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n} \quad \text{при} \quad n \in \mathbb{N},$$

тогда, во-первых, $\mathbb{F}_n = \mathbb{F}_{\varepsilon_n}$ имеет своим равномерным пределом отображение $\mathbb{F}$, которое в силу непрерывности и ограниченности операторов $\mathbb{F}_n$ также является непрерывным и ограниченным. С другой стороны, введем обозначение

$$v = \mathbb{F}(u) \quad \text{и} \quad v_n = \mathbb{F}_n(u) \quad \text{для всех} \quad u \in \mathrm{D}.$$

Имеет место следующее неравенство (по условию (II)):

$$\|v - v_n\|_2 \leqslant \frac{1}{n},$$

но множество $\mathbb{F}_n(\mathrm{D})$ относительно компактно, поэтому в силу леммы 3 приходим к выводу, что $\mathbb{F}(\mathrm{D})$ относительно компактно в $\mathbb{B}_2$. Следовательно, отображение $\mathbb{F}$ вполне непрерывно.

Теорема доказана.

Пока мы рассмотрели связь полной непрерывности и вполне непрерывности линейных операторов. Однако, есть некоторые результаты и для нелинейных операторов. Справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть*

$$\mathbb{K} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$$

— это полностью непрерывный оператор. Тогда при условии рефлексивности банахова пространства $\mathbb{B}_1$ *оператор* $\mathbb{K}$ *является вполне непрерывным.*

Доказательство.

Докажем сначала непрерывность оператора $\mathbb{K}$. Действительно, пусть

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_1,$$

но тогда, очевидно,

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_1.$$

Отсюда в силу полной непрерывности оператора $\mathbb{K}$ приходим к выводу, что

$$\mathbb{K}(u_n) \to \mathbb{K}(u) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_2.$$

Тем самым, непрерывность оператора $\mathbb{K}$ доказана.

Докажем теперь компактность оператора $\mathbb{K}$. Действительно, пусть $\mathrm{D} \subset \mathbb{B}_1$ — это некоторое ограниченное множество. Пусть $\{u_n\} \subset \mathrm{D}$.

Тогда в силу рефлексивности $\mathbb{B}_1$ из этой последовательности можно выбрать некоторую подпоследовательность $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$ такую, что

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_1.$$

Поэтому в силу полной непрерывности оператора $\mathbb{K}$ приходим к выводу, что

$$\mathbb{K}(u_{n_k}) \to \mathbb{K}(u) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_2.$$

Тем самым, компактность оператора $\mathbb{K}$ доказана.

Лемма доказана.

Заметим, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

ПРИМЕР 7. Пусть $\mathbb{B}_1 = L^2(0,1)$ и $\mathbb{B}_2 = \mathbb{R}_1$. Рассмотрим следующий нелинейный оператор

$$\mathbb{K}(u) = \int\limits_0^1 u^2(s)\,ds = \|u\|_2^2.$$

Докажем, что он является вполне непрерывным. Сначала докажем непрерывность. Пусть

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad L^2(0,1),$$

но тогда в силу очевидного неравенства

$$|\|u_n\|_2 - \|u\|_2| \leqslant \|u_n - u\|_2$$

приходим к выводу о том, что

$$\|u_n\|_2 \to \|u\|_2 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

поэтому

$$\mathbb{K}(u_n) \to \mathbb{K}(u) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Докажем теперь компактность оператора $\mathbb{K}$. Пусть $\mathrm{D} \subset L^2(0,1)$ — это произвольное ограниченное множество. Докажем, что

$$\overline{\mathbb{K}(\mathrm{D})} \quad \text{компактно в} \quad \mathbb{R}^1.$$

Но для этого достаточно доказать, что $\mathbb{K}(\mathrm{D})$ — это ограниченное множество. В силу ограниченности D в $L^2(0,1)$ имеем следующее неравенство:

$$\|u\|_2 \leqslant c \quad \text{для всех} \quad u \in \mathrm{D}$$

при некотором $c > 0$, не зависящем от u. Тогда

$$0 < \mathbb{K}(u) \leqslant c^2 < +\infty.$$

Тем самым, компактность оператора $\mathbb{K}$ доказана.

Теперь докажем, что, тем не менее, оператор $\mathbb{K}$ не является полностью непрерывным. Действительно, рассмотрим последовательность $\{u_n\} \subset L^2(0,1)$, где

$$u_n(s) = \sin(\pi n s), \quad s \in (0,1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда для любой фиксированной функции

$$v(s) \in L^2(0,1)$$

в силу теоремы Римана–Лебега имеет место выражение

$$\int\limits_0^1 v(s)\sin(\pi n s)\,ds \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

т. е. в силу теоремы представления Рисса

$$u_n \rightharpoonup 0 \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,1).$$

Однако,

$$\mathbb{K}(u_n) = \int\limits_0^1 u_n^2(s)\,ds = \frac{1}{2} \not\to 0 = \mathbb{K}(0) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Теперь мы рассмотрим важное свойство вполне непрерывных операторов, а именно свойство существования вполне непрерывного продолжения всякого вполне непрерывного отображения. Предварительно приведем без доказательства две важные теоремы.

Теорема Мазура *Пусть $\mathbb{B}$ является банаховым пространством и $\mathrm{C} \subset \mathbb{B}$ является компактным множеством, тогда замыкание выпуклой оболочки множества C тоже компактно.*

Теорема Dugundji *Пусть $\mathbb{X}$ — это метрическое пространство, $\mathbb{Y}$ — это локально выпуклое векторное топологическое пространство и $\mathrm{A} \subset \mathbb{X}$ есть замкнутое непустое множество и*

$$\mathbb{F} : \mathrm{A} \to \mathbb{Y}$$

— это непрерывное отображение, тогда существует такое непрерывное отображение, что

$$\widehat{\mathbb{F}}\Big|_{\mathrm{A}} = \mathbb{F} \quad \text{и} \quad \widehat{\mathbb{F}}(\mathbb{X}) \subset \operatorname{absconvex} \mathbb{F}(\mathrm{A}).$$

Наконец, справедлива следующая важная теорема о продолжении.

Т е о р е м а 13. *Пусть* $\mathbb{B}_1$ *и* $\mathbb{B}_2$ *— это два банаховых пространства и* $\mathrm{D} \subset \mathbb{B}_1$ *есть ограниченное и замкнутое множество и*

$$\mathbb{F} : \mathrm{D} \to \mathbb{B}_2$$

— это вполне непрерывное отображение, тогда существует такое вполне непрерывное отображение:

$$\widehat{\mathbb{F}} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2,$$

что

$$\widehat{\mathbb{F}}\Big|_{\mathrm{D}} = \mathbb{F}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

По теореме Dugundji для отображения $\mathbb{F}$ существует такое непрерывное отображение

$$\widehat{\mathbb{F}} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2,$$

что

$$\widehat{\mathbb{F}}\Big|_{\mathrm{D}} = \mathbb{F} \quad \text{и} \quad \widehat{\mathbb{F}}(\mathbb{B}_1) \subset \operatorname{absconvex} \mathbb{F}(\mathrm{D}).$$

Теперь согласно теореме Мазура, поскольку множество $\mathbb{F}(\mathrm{D})$ относительно компактно в $\mathbb{B}_2$, то $\operatorname{absconvex} \mathbb{F}(\mathrm{D})$ тоже относительно компактно в $\mathbb{B}_2$, а вместе с ним относительно компактно и множество $\widehat{\mathbb{F}}(\mathbb{B}_1)$. Таким образом, оператор $\widehat{\mathbb{F}}$ является и компактным.

Т е о р е м а д о к а з а н а.

§ 5. Литературные указания

В данной лекции мы использовали материал, изложенный в работах [2], [15], [47], [49] и [50].

Лекция 2

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ. ПОЛУОГРАНИЧЕННЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

§ 1. Введение

С этой лекции мы начинаем рассмотрение различных вариационных методов исследования нелинейных операторных уравнений. В основном эти методы применяются при исследовании краевых задач для нелинейных уравнений эллиптического типа, хотя они применимы и при исследовании устойчивости стационарных решений различных эволюционных нелинейных уравнений, например, уравнения Кортевега-де-Фриза, Шредингера, а также нелинейного волнового уравнения. В данной лекции мы рассмотрим классические результаты для функционалов, которые полуограничены либо сверху либо снизу.

§ 2. Потенциальные операторы

Прежде чем переходить к исследованию каких-то вариационных задач мы должны установить имеет ли заданная исходная нелинейная операторная задача вариационную постановку, т. е. задачу отыскания минимума или максимума некоторого функционала.

Итак, пусть $\mathbb{B}$ — это некоторое банахово пространство относительно нормы $\|\ \ \|$ и скобками двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$ между $\mathbb{B}$ и его сопряженным $\mathbb{B}^*$. Пусть на этом банаховом пространстве $\mathbb{B}$ задан некоторый (нелинейный) функционал

$$\psi : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1.$$

Будем как и в предыдущей лекции обозначать символами $\psi_g'(u)$ и $\psi_f'(u)$ производные Гато и Фреше, соответственно.

Дадим определение *потенциального оператора.*

Определение 1. *Оператор*

$$\mathbb{F} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$$

называется сильно потенциальным или потенциальным, если найдется такой дифференцируемый по Фреше функционал

$$\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1,$$

что
$$\mathbb{F}(u)=\psi_f^{'}(u). \tag{2.1}$$

Определение 2. *Оператор*
$$\mathbb{F}:\mathbb{B}\to\mathbb{B}^*$$
называется слабо потенциальным, если найдется такой дифференцируемый по Гато функционал
$$\psi(u):\mathbb{B}\to\mathbb{R}^1,$$
что
$$\mathbb{F}(u)=\psi_g^{'}(u). \tag{2.2}$$

Естественно, возникает вопрос о достаточных условиях потенциальности заданного оператора $\mathbb{F}$:
$$\mathbb{F}:\mathbb{B}\to\mathbb{B}^*.$$

Для ответа на этот вопрос нам необходимо ввести понятие *локальной непрерывности* по Липшицу. Дадим определение.

Определение 3. *Оператор* $\mathbb{F}$, *действующий из одного банахова пространства* $\mathbb{B}_1$ *в другое банахово пространство* $\mathbb{B}_2$, *называется локально по Липшицу непрерывным, если для каждого* $R>0$ *имеет место следующее неравенство*:
$$\|\mathbb{F}(u_1)-\mathbb{F}(u_2)\|_2\leqslant c(R)\|u_1-u_2\|_1 \quad \textit{для всех} \quad u_1,u_2\in\mathbb{B}_1 \tag{2.3}$$
таких, что
$$\|u_k\|_1\leqslant R \quad \textit{при} \quad k=1,2.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Оператор* $\mathbb{F}:\mathbb{B}\to\mathbb{B}^*$, *удовлетворяющий условию локальной непрерывности по Липшицу, потенциален тогда и только тогда, когда для всех* $u,v\in\mathbb{B}$ *имеет место равенство*
$$\int\limits_0^1\langle\mathbb{F}(tu),u\rangle\,dt-\int\limits_0^1\langle\mathbb{F}(tv),v\rangle\,dt= \\ =\int\limits_0^1\langle\mathbb{F}(tu+(1-t)v),u-v\rangle\,dt \quad \textit{при} \quad u,v\in\mathbb{B}. \tag{2.4}$$

При условии (2.4) *сильный потенциал* $\psi(u)$ *оператора* $\mathbb{F}$ *имеет вид*:

$$\psi(u) = \psi(\vartheta) + \int\limits_0^1 \langle \mathbb{F}(tu), u\rangle \, dt \quad \textit{для всех} \quad u \in \mathbb{B}, \tag{2.5}$$

где $\vartheta \in \mathbb{B}$ — *нулевой элемент.*

Доказательство.

Итак, пусть оператор $\mathbb{F}$ сильно потенциален, тогда найдется дифференцируемый по Фреше функционал

$$\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$$

такой, что

$$\mathbb{F}(u) = \psi_f^{'}(u).$$

В этом случае справедлива следующая формула:

$$\psi(u) - \psi(v) = \int\limits_0^1 \frac{d}{dt}\psi(tu + (1-t)v)\, dt = \int\limits_0^1 \left\langle \psi_f^{'}(tu + (1-t)v), u - v \right\rangle \, dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \langle \mathbb{F}(tu + (1-t)v), u - v\rangle \, dt \tag{2.6}$$

Положим в равенстве (2.6) сначала $v = \vartheta \in \mathbb{B}$, тогда получим следующее равенство:

$$\psi(u) = \psi(\vartheta) + \int\limits_0^1 \langle \mathbb{F}(tu), u\rangle \, dt. \tag{2.7}$$

Теперь положим в равенстве (2.6) $u = \vartheta$ и получим тогда следующее равенство:

$$\psi(v) = \psi(\vartheta) + \int\limits_0^1 \langle \mathbb{F}(tv), v\rangle \, dt. \tag{2.8}$$

С учетом равенств (2.7) и (2.8) получим следующее выражение:

$$\psi(u) - \psi(v) = \int\limits_0^1 \langle \mathbb{F}(tu), u\rangle \, dt - \int\limits_0^1 \langle \mathbb{F}(tv), v\rangle \, dt.$$

Отсюда и из (2.6) приходим к (2.4).

Пусть теперь для оператора $\mathbb{F}$ выполнено равенство (2.4). Определим функционал $\psi(u)$ равенством

$$\psi(u) = \psi(\vartheta) + \int\limits_0^1 \langle \mathbb{F}(tu), u \rangle \, dt. \tag{2.9}$$

Докажем, что функционал $\psi(u)$ дифференцируем по Фреше и его производная Фреше равна $\mathbb{F}(u)$. Действительно, имеет место цепочка следующих равенств:

$$\psi(u+h) - \psi(u) = \int\limits_0^1 \langle \mathbb{F}(t(u+h)), u+h \rangle \, dt - \int\limits_0^1 \langle \mathbb{F}(tu), u \rangle \, dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \langle \mathbb{F}(t(u+h) + (1-t)u), h \rangle \, dt. \tag{2.10}$$

Введем следующее обозначение:

$$\omega(u,h) \equiv \psi(u+h) - \psi(u) - \langle \mathbb{F}(u), h \rangle .$$

Но тогда для $\omega(u,h)$ справедливо неравенство:

$$|\omega(u,h)| \leqslant \int\limits_0^1 |\langle \mathbb{F}(t(u+h) + (1-t)u) - \mathbb{F}(u), h \rangle| \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^1 \|\mathbb{F}(t(u+h) + (1-t)u) - \mathbb{F}(u)\|_* \, \|h\| \, dt \leqslant$$

$$\leqslant c(R) \int\limits_0^1 \|t(u+h) + (1-t)u - u\| \|h\| \, dt = c(R) \|h\|^2 \frac{1}{2}$$

для всех $u, h \in \mathbb{B}$, для которых

$$\|u\| \leqslant R \quad \text{и} \quad \|h\| \leqslant R.$$

Следовательно, приходим к выводу, что

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{|\omega(u,h)|}{\|h\|} = 0.$$

Тем самым, функционал $\psi(u)$ дифференцируем по Фреше на каждом шаре $\|u\| \leqslant R$ и его производная Фреше равна

$$\psi'_f(u) = \mathbb{F}(u).$$

Теорема доказана.

Давайте зададимся вопросом о нахождении решений следующего операторного уравнения:

$$\mathbb{F}(u) = \vartheta \in \mathbb{B}^*, \quad u \in \mathbb{B}. \tag{2.11}$$

Предположим, что оператор $\mathbb{F}$ потенциален и его потенциал — это функционал $\psi(u)$. Дадим определение.

Определение 3. *Пусть* $\mathrm{M} \subset \mathbb{B}$ — *некоторое непустое и замкнутое подмножество. Точка* $\widehat{u} \in \mathrm{M}$ *называется точкой экстремума функционала* $\psi(u)$ *на* M, *если*

$$\inf_{u\in\mathrm{M}} \psi(u) = \psi(\widehat{u}) \quad \textit{либо} \quad \sup_{u\in\mathrm{M}} \psi(u) = \psi(\widehat{u}).$$

Теперь рассмотрим следующую функцию

$$\varphi(t) = \psi(\widehat{u} + th) \quad \text{при} \quad t \in (-1, 1),$$

где $\widehat{u}$ — это точка экстремума функционала $\psi(\cdot)$ на множестве $\mathrm{M} = \mathbb{B}$. Тогда функция $\varphi(t)$ достигает экстремума в точке $t = 0$. В силу дифференцируемости функционала $\psi(u)$ по Фреше в точке $\widehat{u} \in \mathbb{B}$ приходим к выводу, что $\varphi(t)$ дифференцируема в точке $t = 0$. Но тогда необходимым условием экстремума является следующее

$$\varphi^{'}(0) = 0 \Rightarrow \left\langle \psi^{'}_f(\widehat{u}), h \right\rangle = 0 \ \forall\, h \in \mathbb{B} \Rightarrow \psi^{'}_f(\widehat{u}) = \vartheta \in \mathbb{B}^* \Rightarrow \mathbb{F}(\widehat{u}) = \vartheta.$$

Следовательно, с необходимостью множество всех точек экстремума функционала $\psi(u)$ — есть решения операторного уравнения (2.11). С другой стороны, понятно, что не всякое решение операторного уравнения (2.11) является экстремалью функционала $\psi(u)$, поскольку равенство (2.11) лишь необходимое условие. Попробуем найти достаточные условия существования экстремали у функционала $\psi(u)$. С этой целью нам необходимо получить формулу, аналогичную формуле Тейлора, для функционалов, дважды дифференцируемых по Фреше, причем вторая производная Фреше равномерно непрерывна на M. Итак, пусть M — это замкнутое, непустое подмножество банахова пространства $\mathbb{B}$, на котором рассматривается функционал ψ, дважды дифференцируемый по Фреше на M. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *При сформулированных условиях для каждого* $u \in \mathrm{M}$ *и для каждого* $h \in \mathbb{B}$ *такого, что* $u + th \in \mathrm{M}$ *для всех* $t \in [0, 1]$ *имеет место следующее выражение*:

$$\psi(u + h) = \psi(u) + \left\langle \psi^{'}_f(u), h \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \psi^{''}_{ff}(u)h, h \right\rangle + \omega_2(u, h), \tag{2.12}$$

где для $\omega_2(u, h)$ *выполнено следующее предельное равенство*:

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{|\omega_2(u, h)|}{\|h\|^2} = 0. \tag{2.13}$$

Доказательство.

Итак, пусть
$$\psi''_{ff}(u)$$
существует и равномерно непрерывна на $\mathrm{M} \subset \mathbb{B}$. Заметим, что для $\psi'_f(u)$ в силу дифференцируемости по Фреше справедливо следующее равенство:
$$\psi'_f(u+h) = \psi'_f(u) + \psi''_{ff}(u)h + \omega_1(u,h),$$
где
$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|\omega_1(u,h)\|_*}{\|h\|} = 0$$
при $u \in \mathrm{M}$ и любом $h \in \mathbb{B}$ таком, что $u+h \in \mathrm{M}$ при достаточно малых по норме h. Поэтому справедлива следующая цепочка равенств:
$$\psi(u+h) - \psi(u) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\psi(u+th) = \int_0^1 \left\langle \psi'_f(u+th), h \right\rangle dt =$$
$$= \int_0^1 \left\langle \psi'_f(u) + t\psi''_{ff}(u)h, h \right\rangle dt + \omega_2(u,h),$$
где
$$\omega_2(u,h) = \int_0^1 \langle \omega_1(u,th), h\rangle\, dt.$$
Значит, отсюда приходим к следующему равенству:
$$\psi(u+h) - \psi(u) = \left\langle \psi'_f(u), h \right\rangle + \left\langle \psi''_{ff}(u)h, h \right\rangle \int_0^1 t\,dt + \omega_2(u,h) =$$
$$= \left\langle \psi'_f(u), h \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \psi''_{ff}(u)h, h \right\rangle + \omega_2(u,h),$$
где для $\omega_2(u,h)$ справедливо следующее представление:
$$\omega_2(u,h) = \int_0^1 \langle \omega_1(u,th), h\rangle\, dt.$$
Стало быть, приходим к неравенству
$$|\omega_2(u,h)| \leqslant \int_0^1 \|\omega_1(u,th)\|_* \, \|h\|\, dt.$$

Поэтому справедливо следующее предельное неравенство:

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{|\omega_2(u,h)|}{\|h\|^2} \leqslant \lim_{\|h\|\to 0} \int\limits_0^1 \frac{\|\omega_1(u,th)\|_*}{\|h\|}\,dt = 0.$$

Тем самым, формулы (2.12) и (2.13) доказаны.

Лемма доказана.

Теперь мы в состоянии доказать один результат о необходимом условии экстремума функционала. Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть функционал $\psi(u)$, дважды дифференцируемый по Фреше в некоторой окрестности точки $\widehat{u} \in \mathbb{B}$, имеет равномерно непрерывную в этой окрестности точки $\widehat{u}$ вторую производную Фреше, тогда необходимыми условиями минимума (максимума) в этой точке $\widehat{u}$ являются следующие*

$$\psi'_f(\widehat{u}) = 0 \quad \textit{и} \quad \left\langle \psi''_f(\widehat{u})h, h\right\rangle \geqslant 0 \ \ (\leqslant 0) \quad \forall\, h \in \mathbb{B}. \tag{2.14}$$

Доказательство.

Рассмотрим разложение функционала $\psi(u)$ в окрестности точки экстремума $\widehat{u} \in \mathbb{B}$:

$$\psi(\widehat{u}+h) = \psi(\widehat{u}) + \left\langle \psi'_f(\widehat{u}), h\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h, h\right\rangle + \omega_2(\widehat{u}, h).$$

Но как мы доказали ранее в точке $\widehat{u}$ имеет место равенство

$$\psi'_f(\widehat{u}) = 0,$$

поэтому приходим к следующему равенству:

$$\psi(\widehat{u}+h) - \psi(\widehat{u}) = \frac{1}{2}\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h, h\right\rangle + \omega_2(\widehat{u}, h). \tag{2.15}$$

Предположим, что $\widehat{u}$ — это точка локального минимума (максимума), но для некоторого $h_1 \in \mathbb{B}$ имеет место следующее неравенство:

$$\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h_1, h_1\right\rangle < 0 \ (> 0).$$

Тогда для $h = \varepsilon h_1$ при $\varepsilon > 0$ имеет место следующее выражение:

$$\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h, h\right\rangle = \varepsilon^2 \left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h_1, h_1\right\rangle < 0 \ (> 0).$$

Теперь, выбирая $\varepsilon > 0$ сколь угодно малым, получим, что в любой окрестности точки $\widehat{u} \in \mathbb{B}$ найдется точка $\varepsilon h_1 \in \mathbb{B}$, что

$$\psi(\widehat{u}+\varepsilon h_1) - \psi(\widehat{u}) < 0 \ (> 0),$$

т. е. в точке $\widehat{u} \in \mathbb{B}$ нет минимума (максимума). Следовательно, необходимым условием минимума (максимума) в точке $\widehat{u} \in \mathbb{B}$ есть условие

$$\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h, h \right\rangle \geqslant 0 \ (\leqslant 0) \quad \text{для всех} \quad h \in \mathbb{B}.$$

Лемма доказана.

Заметим, что в отличие от вещественного анализа условие

$$\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h, h \right\rangle \geqslant 0 \ (\leqslant 0) \quad \text{для всех} \quad h \in \mathbb{B}.$$

не является достаточным условием минимума (максимума). Действительно, имеет место следующий пример.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим следующий функционал на банаховом пространстве $\mathbb{C}[0,1]$ относительно стандартной supremum–нормы:

$$\psi(u) = \int\limits_0^1 u^2(x)(x - u(x))\, dx.$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\psi(u+h) = \int\limits_0^1 (u+h)^2(x-u-h)\, dx = \int\limits_0^1 u^2(x-u)\, dx + \\ + \int\limits_0^1 \left(2ux - 3u^2\right) h\, dx + \int\limits_0^1 (x-3u)h^2\, dx - \int\limits_0^1 h^3\, dx.$$

Из этого равенства приходим к выводу, что

$$\psi'_f(u) = 0$$

на двух функциях

$$u(x) = 0 \quad \text{и} \quad u(x) = \frac{2}{3}x.$$

Заметим теперь, что

$$\left\langle \psi''_{ff}(0)h, h \right\rangle = 2\int\limits_0^1 h^2(x)x\, dx \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad h(x) \in \mathbb{C}[0,1],$$

причем,

$$\psi(0) = 0,$$

т. е. на функции $u(x) = 0$ выполнены все необходимые условия локального минимума, но, тем не менее, на функции $u(x) = 0$ функционал не достигает локального минимума. Действительно, рассмотрим следующее однопараметрическое семейство функций:

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon - x, & \text{при} \quad x \in [0, \varepsilon]; \\ 0, & \text{при} \quad x \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Очевидно, что функция $u_\varepsilon(x) \in \mathbb{C}[0,1]$ для всех $\varepsilon \in (0,1)$. Теперь вычислим норму этой функции

$$\sup_{x\in[0,1]} |u_\varepsilon(x)| = \varepsilon \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

т. е. в любой окрестности функции $u(x) = 0 \in \mathbb{C}[0,1]$ содержится функция $u_\varepsilon(x) \in \mathbb{C}[0,1]$ при некотором $\varepsilon > 0$. Теперь вычислим значение функционала $\psi(\cdot)$ на функции $u_\varepsilon(x)$. Действительно, имеем

$$\psi(u_\varepsilon(x)) = \int\limits_0^1 u_\varepsilon^2(x)\,(x - u_\varepsilon(x)) = -\frac{\varepsilon^4}{6} < 0 = \psi(0).$$

Тем самым, минимум у функционала $\psi(u)$ на функции $u(x) = 0$ не достигается.

Тем не менее, можно сформулировать теорему о достаточных условиях экстремума.

Теорема 2. *Пусть $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ — это дважды дифференцируемый по Фреше в некоторой окрестности точки $\widehat{u} \in \mathbb{B}$ функционал, причем вторая производная Фреше равномерно непрерывна в этой окрестности точки $\widehat{u}$. Тогда при условиях*

(I) $\psi'_f(\widehat{u}) = 0$;

(II) $\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h, h \right\rangle \geqslant c\|h\|^2$ *($\leqslant -c\|h\|^2$) для всех $h \in \mathbb{B}$ и $c = c(\widehat{u}) > 0$ в точке $\widehat{u} \in \mathbb{B}$ у функционала $\psi(\widehat{u})$ достигается минимум (максимум).*

Доказательство.

Докажем достаточность условий для минимума функционала $\psi(u)$ в точке $\widehat{u}$, поскольку достаточность условий для максимума проверяется аналогичным образом. Действительно, с одной стороны, в силу условий теоремы имеет место представление в окрестности точки $\widehat{u} \in \mathbb{B}$:

$$\psi(\widehat{u} + h) - \psi(\widehat{u}) = \left\langle \psi'_f(\widehat{u}), h \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h, h \right\rangle + \omega_2(u, h). \tag{2.16}$$

Кроме того, поскольку имеет место предельное равенство

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{|\omega_2(u,h)|}{\|h\|^2} = 0,$$

то при достаточно малом $\|h\|$ для заданного $c > 0$ будет иметь место неравенство

$$|\omega_2(u,h)| < \frac{c}{4}\|h\|^2.$$

Тогда из (2.16) получим неравенство для таких $h \in \mathbb{B}$:

$$\psi(\widehat{u}+h) - \psi(\widehat{u}) \geqslant \frac{1}{2}\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h, h\right\rangle - \frac{c}{4}\|h\|^2 \geqslant \frac{c}{2}\|h\|^2 - \frac{c}{4}\|h\|^2 = \frac{c}{4}\|h\|^2,$$

т. е. в точке $\widehat{u} \in \mathbb{B}$ достигается минимум у функционала ψ.

Теорема доказана.

Замечание 1. При условиях теоремы 2 каждая экстремаль функционала $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ является решением операторного уравнения $\psi'_f(u) = 0$.

Замечание 2. Отметим, что в условии теоремы 2 мы потребовали, что, в частности, для минимума в точке надо потребовать выполнения неравенства (II) *для всех* $h \in \mathbb{B}$. Это условие невозможно ослабить в следующем смысле. Действительно, если потребовать выполнения неравенства

$$\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h, h\right\rangle \geqslant c\|h\|^2 \quad \text{при} \quad \|h\| \leqslant \varepsilon_0. \tag{2.17}$$

Докажем, что из этого условия вытекает, что на самом деле $\varepsilon_0 > 0$ сколь угодно велико. Действительно, предположим противное: пусть существует такое $h_1 \in \mathbb{B}$, что имеет место противоположное неравенство

$$\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h_1, h_1\right\rangle < c\|h_1\|^2.$$

Возьмем теперь

$$h = \varepsilon h_1 \quad \text{при} \quad 0 < \varepsilon \leqslant \frac{\varepsilon_0}{\|h_1\|},$$

тогда

$$\|h\| \leqslant \varepsilon_0,$$

но имеет место неравенство

$$\varepsilon^2 \left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h, h\right\rangle < c\varepsilon^2\|h\|^2.$$

Противоречие с (2.17).

§ 3. Полунепрерывные функционалы

Полученное в теореме достаточное условие (II) (естественно, в совокупности с условием (I)) является очень сильным и на практике ожидать от функционала существования равномерно непрерывной второй производной Фреше не приходится, а если таковая имеется, то требование сильной положительности (отрицательности) $\psi''_{ff}(\widehat{u})$ тем более на практике не выполняется. В частности, если функционал $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ является потенциалом некоторого оператора $\mathbb{F}(u) = \psi'_f(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$, то это требование означает существования равномерно непрерывной производной Фреше этого оператора такой, что

$$\left\langle \mathbb{F}'_f(\widehat{u})h, h \right\rangle \geqslant c\|h\|^2 \ (\leqslant -c\|h\|^2) \quad \text{для всех} \quad h \in \mathbb{B}$$

при $c = c(\widehat{u}) > 0$. Поэтому в этом параграфе мы ослабим требование (II) теоремы 2. Напомним определения выпуклого множества и выпуклого функционала.

Определение 4. *Подмножество* $\mathrm{M} \subset \mathbb{B}$ *банахова пространства называется выпуклым, если для любых* $u, v \in \mathrm{M}$ *и всех* $t \in [0, 1]$ *имеет место вложение* $tu + (1-t)v \in \mathrm{M}$.

Определение 5. *Функционал* $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ *называется выпуклым на выпуклом множестве* $\mathrm{M} \subset \mathbb{B}$, *если для всех* $u, v \in \mathrm{M}$ *и всех* $t \in [0, 1]$ *имеет место неравенство*:

$$\psi(tu + (1-t)v) \leqslant t\psi(u) + (1-t)\psi(v).$$

Теперь дадим определение *слабо секвенциально полунепрерывного снизу* функционала:

Определение 6. *Будем говорить, что функционал* $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ *является слабо секвенциально полунепрерывным снизу в точке* $u_0 \in \mathrm{M} \subset \mathbb{B}$ *по отношению к* $\mathrm{M} \subset \mathbb{B}$, *если для любой последовательности* $\{u_n\} \subset \mathrm{M}$ *такой, что*

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad \textit{слабо в} \quad \mathbb{B}$$

вытекает, что

$$\psi(u_0) \leqslant \liminf_{n \to +\infty} \psi(u_n).$$

Определение 7. *Будем говорить, что функционал* $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ *является слабо секвенциально полунепрерывным снизу на* $\mathrm{M} \subset \mathbb{B}$, *если он является слабо секвенциально полунепрерывным снизу в каждой точке* $u \in \mathrm{M}$.

Напомним определение слабо секвенциально компактного множества M.

Определение 8. *Подмножество* M *банахова пространства* $\mathbb{B}$ *называется слабо секвенциально компактным, если из каждой последовательности* $\{u_n\} \subset \mathrm{M}$ *можно выделить слабо сходящуюся на* M *подпоследовательность* $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$:

$$u_{n_k} \rightharpoonup u_0 \in \mathrm{M} \quad \textit{слабо в} \quad \mathbb{B}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* M — *это слабо секвенциально компактное подмножество банахова пространства* $\mathbb{B}$ *и* $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ *является слабо секвенциально полунепрерывным снизу функционалом на* M. *Тогда функционал* ψ *ограничен снизу на* M *и достигает в некоторой точке* $u_0 \in \mathrm{M}$ *свой минимум на* M :

$$\psi(u_0) = \inf_{u \in \mathrm{M}} \psi(u).$$

Доказательство.

Итак, пусть $\{u_n\} \subset \mathrm{M}$ — это минимизирующая последовательность функционала ψ по отношению к $\mathrm{M} \subset \mathbb{B}$. Тогда

$$\psi(u_n) \to \inf_{u \in \mathrm{M}} \psi(u) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Поскольку M слабо секвенциально компактно, то найдется такая подпоследовательность $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$, что

$$u_{n_k} \rightharpoonup u_0 \in \mathrm{M} \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}.$$

Но тогда в силу слабой секвенциальной полунепрерывности снизу функционала ψ на M имеет место неравенство

$$\psi(u_0) \leqslant \liminf_{k \to +\infty} \psi(u_{n_k}).$$

Тогда справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\inf_{u \in \mathrm{M}} \psi(u) \leqslant \psi(u_0) \leqslant \liminf_{k \to +\infty} \psi(u_{n_k}) = \lim_{n \to +\infty} \psi(u_n) = \inf_{u \in \mathrm{M}} \psi(u),$$

из которой следует, что

$$\psi(u_0) = \inf_{u \in \mathrm{M}} \psi(u) > -\infty.$$

Теорема доказана.

Для дальнейшего нам необходимо ввести понятие *слабой коэрцитивности* функционала $\psi(u)$.

Определение 9. *Функционал* $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$, *удовлетворяющий условию*

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} \psi(u) = \infty,$$

называется слабо коэрцитивным.

Справедлива следующая важная теорема.

Теорема 4. *Пусть* $\mathbb{B}$ — *это рефлексивное банахово пространство, а* $\mathrm{M} \subset \mathbb{B}$ — *это слабо секвенциально замкнутое подмножество, тогда если функционал* $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ *является слабо коэрцитивным на* M *и секвенциально слабо полунепрерывным снизу функционалом на* M, *то он ограничен снизу на* M *и достигает своего минимума на* M :

$$\psi(u_0) = \inf_{u \in \mathrm{M}} \psi(u) > -\infty.$$

Доказательство.

Пусть

$$\alpha_0 = \inf_{u \in \mathrm{M}} \psi(u)$$

и $\{u_n\} \subset \mathrm{M}$ — это минимизирующая последовательность для функционала ψ :

$$\psi(u_n) \to \alpha_0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Поскольку числовая последовательность $\{\psi(u_n)\}$ является сходящейся, то она ограничена, но в силу слабой коэрцитивности функционала ψ на M имеем

$$\psi(u) \to \infty \quad \text{при} \quad \|u\| \to +\infty.$$

Следовательно, $\|u_n\| \leqslant R$ при некотором $R > 0$, не зависящем от $n \in \mathbb{N}$.

Поскольку банахово пространство $\mathbb{B}$ является рефлексивным, то по теореме 4 Лекции 1 каждое ограниченное по норме множество слабо секвенциально относительно компактно. Поэтому без ограничения общности можно считать, что последовательность

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}.$$

Но $\{u_n\} \subset \mathrm{M}$ и M слабо замкнуто, поэтому $u_0 \in \mathrm{M}$. С другой стороны, в силу слабой секвенциальной полунепрерывности снизу функционала ψ на M приходим к выводу, что

$$\psi(u_0) \leqslant \liminf_{n \to +\infty} \psi(u_n).$$

Таким образом, приходим к выводу, что имеет место цепочка неравенств:

$$\inf_{u \in \mathrm{M}} \psi(u) \leqslant \psi(u_0) \leqslant \liminf_{k \to +\infty} \psi(u_{n_k}) = \lim_{n \to +\infty} \psi(u_n) = \inf_{u \in \mathrm{M}} \psi(u),$$

из которой следует, что

$$\psi(u_0) = \inf_{u \in \mathrm{M}} \psi(u) > -\infty.$$

Теорема доказана.

Теперь мы получим необходимые и достаточные условия слабой секвенциальной полунепрерывности снизу функционала $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ на подмножестве $\mathrm{M} \subset \mathbb{B}$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть* $\mathrm{M} \subset \mathbb{B}$, *тогда для того чтобы функционал* ψ *был слабо секвенциально полунепрерывным снизу, необходимо и достаточно, чтобы для каждого* $a \in \mathbb{R}^1$ *множество*

$$\mathrm{E}(a) \equiv \{u \in \mathrm{M} : \ \psi(u) \leqslant a\}$$

было слабо секвенциально замкнуто в M.

Доказательство.

Итак, пусть $\psi(u)$ является слабо секвенциально полунепрерывным снизу на $\mathrm{M} \subset \mathbb{B}$. Пусть $\{u_n\} \subset \mathrm{E}(a)$ при некотором $a \in \mathbb{R}^1$. Тогда из условия, что

$$u_n \rightharpoonup u_0 \in \mathrm{M} \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}$$

вытекает, что

$$\psi(u_0) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \psi(u_n) \leqslant a,$$

т. е. $u_0 \in \mathrm{E}(a)$ и, следовательно, множество $\mathrm{E}(a)$ является слабо секвенциально замкнутым в M.

Пусть теперь для каждого $a \in \mathbb{R}^1$ множество $\mathrm{E}(a)$ слабо секвенциально замкнуто в M и пусть $\{u_n\} \subset \mathrm{M}$, причем

$$u_n \rightharpoonup u_0 \in \mathrm{M} \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}.$$

Тогда введем обозначение

$$\gamma = \liminf_{n\to+\infty} \psi(u_n).$$

Но тогда существует такая подпоследовательность $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$, что

$$\lim_{k\to+\infty} \psi(u_{n_k}) = \gamma.$$

Стало быть, при достаточно большом $k \in \mathbb{N}$

$$u_{n_k} \in \mathrm{E}(\gamma+\varepsilon) \quad \text{для всех} \quad \varepsilon > 0,$$

но

$$u_{n_k} \rightharpoonup u_0 \in \mathrm{M} \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B},$$

поэтому в силу слабой секвенциальной замкнутости $\mathrm{E}(a)$ для каждого $a \in \mathbb{R}^1$ приходим к выводу, что

$$u_0 \in \mathrm{E}(\gamma+\varepsilon) \quad \text{для каждого} \quad \varepsilon > 0.$$

Значит, $u_0 \in \mathrm{E}(\gamma)$, т. е.

$$\psi(u_0) \leqslant \gamma = \liminf_{n\to+\infty} \psi(u_n),$$

т. е. ψ — это слабо секвенциально полунепрерывный снизу функционал на M.

Лемма доказана.

Теперь можно получить достаточные условия слабой секвенциальной замкнутости множества $\mathrm{E}(a)$ при $a \in \mathbb{R}^1$. Именно, справедлива следующая лемма.

Л е м м а 4. *Пусть* $\mathrm{M} \subset \mathbb{B}$ *— это выпуклое множество, а* $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ *— есть непрерывный и выпуклый функционал. Тогда множество*

$$\mathrm{E}(a) \equiv \{u \in \mathrm{M} : \ \psi(u) \leqslant a\}$$

является слабо секвенциально замкнутым.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

В силу непрерывности ψ множество $\mathrm{E}(a)$ замкнуто, а в силу выпуклости ψ приходим к выводу, что множество $\mathrm{E}(a)$ выпукло. Стало быть, $\mathrm{E}(a)$ является слабо секвенциально замкнутым (см., например, [6]).

Л е м м а д о к а з а н а.

Теперь можно получить некоторые достаточные условия существования минимума функционала $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ на некотором множестве $\mathrm{M} \subset \mathbb{B}$. Справедливы следующие две теоремы.

Т е о р е м а 5. *Пусть* $\mathbb{B}$ *— это рефлексивное банахово пространство и* $\mathrm{M} \subset \mathbb{B}$ *— это выпуклое, замкнутое и ограниченное подмножество, а функционал* ψ *является непрерывным и выпуклым на* M. *Тогда функционал* ψ *ограничен снизу на* M *и существует такая точка* $u_0 \in \mathrm{M}$, *что*

$$\inf_{u \in \mathrm{M}} \psi(u) = \psi(u_0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Является следствием теоремы 3 и леммы 4.

Т е о р е м а д о к а з а н а.

Т е о р е м а 6. *Пусть* $\mathbb{B}$ *— это рефлексивное банахово пространство и* $\psi : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ *— есть выпуклый, слабо коэрцитивный и непрерывный функционал, тогда он ограничен снизу на* $\mathbb{B}$ *и существует такая точка* $u_0 \in \mathbb{B}$, *что*

$$\psi(u_0) = \inf_{u \in \mathbb{B}} \psi(u).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Является следствием теоремы 4 и леммы 4.

Т е о р е м а д о к а з а н а.

Давайте теперь рассмотрим один пример.

П Р И М Е Р 2. Рассмотрим следующую нелинейную краевую задачу:

$$\begin{cases} \Delta_p u = f(x) \in W^{-1,p'}(\Omega), & p \in (2, +\infty), \ p' = p/(p-1), \\ u|_{\partial\Omega} = 0 & u(x) \in W_0^{1,p}(\Omega), \end{cases} \tag{3.1}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0,1)$, а символом $\Delta_p u$ обозначен следующий нелинейный при $p > 2$ оператор:

$$\Delta_p u(x) \equiv \operatorname{div}(|Du(x)|^{p-2} Du(x)).$$

Дадим определение слабого решения задачи (3.1):

Определение 10. *Слабым решением задачи* (3.1) *назовем решение класса* $u(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *удовлетворяющее равенству*

$$\langle -\Delta_p u(x) + f(x), \varphi(x) \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{3.2}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *— это скобки двойственности между банаховыми пространствами* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *и* $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Определение 11. *Слабой производной функции* $v \in L^2(\Omega)$ *в смысле скобок двойственности* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *между банаховыми пространствами* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *и* $W^{-1,p'}(\Omega)$, *называется следующая величина*:

$$\left\langle \frac{\partial v}{\partial x_i}, w \right\rangle \equiv \left\langle v, -\frac{\partial w}{\partial x_i} \right\rangle = -\int\limits_{\Omega} v(x) \frac{\partial w}{\partial x_i}\, dx \ \ \forall\, w \in W_0^{1,p}(\Omega),\ i = \overline{1, N}.$$

В дальнейшем мы будем пользоваться данным определением слабой производной и говорить об интегрировании «по частям» в указанном смысле.

Прежде чем переходить к исследованию соответствующей вариационной задачи рассмотрим оператор Δ_p. Докажем, что он удовлетворяет следующему свойству:

$$\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega) \quad \text{при} \quad p \geqslant 2. \tag{3.3}$$

Действительно, этот оператор можно представить как композицию трех операторов:

$$\xi = Du, \quad \eta = |\xi|^{p-2}\xi, \quad w = \operatorname{div} \eta.$$

Итак, пусть $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, тогда

$$\xi = Du : W_0^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega) \otimes \cdots \otimes L^p(\Omega),$$

$$\eta = |\xi|^{p-2}\xi : L^p(\Omega) \otimes \cdots \otimes L^p(\Omega) \to L^{p'}(\Omega) \otimes \cdots \otimes L^{p'}(\Omega), \quad p' = \frac{p}{p-1},$$

$$w = \operatorname{div} \eta : L^{p'}(\Omega) \otimes \cdots \otimes L^{p'}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega).$$

Тем самым, свойство (3.3) доказано.

Сопоставим задаче (3.1) следующий функционал:

$$\psi(u) \equiv \psi_1(u) + \psi_2(u) = \frac{1}{p} \int\limits_{\Omega} |Du(x)|^p\, dx + \langle f, u \rangle \tag{3.4}$$

Найдем производную Фреше этого функционала. Производная Фреше второго слагаемого вычисляется элементарно:

$$\psi_2(u+h) - \psi_2(u) = \langle f, u+h \rangle - \langle f, u \rangle = \langle f, h \rangle$$

т. е.
$$\psi'_{2f}(u) = f \in W^{-1,p'}(\Omega).$$
Вычислим теперь производную Фреше функционала
$$\psi_1(u) = \frac{1}{p}\int\limits_{\Omega} |Du(x)|^p\,dx : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}^1.$$
Действительно, заметим, что справедлива следующая формула
$$|\xi+\eta|^p = \Big(|\xi+\eta|^2\Big)^{p/2} = \Big(|\xi|^2 + 2(\xi,\eta) + |\eta^2|\Big)^{p/2} =$$
$$= |\xi|^p \left(1 + \frac{2(\xi,\eta)+|\eta|^2}{|\xi|^2}\right)^{p/2} = |\xi|^p + \frac{p}{2}|\xi|^{p-2}2(\xi,\eta) + \overline{\overline{o}}(|\eta|)$$
для всех $\xi,\eta\in\mathbb{R}^N$ и малых $|\eta|$. Из этой формулы вытекает, что если положить
$$\xi = Du \quad \text{и} \quad \eta = Dh,$$
то справедливо следующее равенство:
$$\psi_1(u+h) - \psi_1(u) = \int\limits_{\Omega} |Du|^{p-2}\,(Du, Dh)\;dx + \omega_1(u,h),$$
где
$$\lim_{\|Dh\|_2\to 0} \frac{|\omega_1(u,h)|}{\|Dh\|_2} = 0.$$
Заметим, что поскольку $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, то
$$|Du|^{p-2}Du \in L^{p'}(\Omega)\otimes L^{p'}(\Omega)\otimes\cdots\otimes L^{p'}(\Omega)$$
и поэтому имеет место равенство
$$\int\limits_{\Omega}\Big(|Du(x)|^{p-2}Du(x), Dh(x)\Big)\;dx = \langle -\Delta_p u, h\rangle\,.$$
Таким образом, производная Фреше функционала $\psi(u)$ равна
$$\psi'_f(u) = -\Delta_p u + f,$$
т. е. оператор
$$\mathbb{F}(u) \equiv -\Delta_p u + f : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$$

является сильно потенциальным. Теперь заметим, что по условию $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, поэтому имеет место неравенство

$$|\langle f, u\rangle| \leqslant \|f\|_{-1,p'}\|Du\|_p.$$

Следовательно, для функционала (3.4) справедлива следующая оценка снизу:

$$\psi(u) \geqslant \frac{1}{p}\|Du\|_p^p - \|f\|_{-1,p'}\|Du\|_p.$$

Введем обозначение

$$c = \|f\|_{-1,p'},$$

тогда имеем

$$\psi(u) \geqslant \frac{1}{p}\|Du\|_p^p - c\|Du\|_p. \tag{3.5}$$

Пусть $\varepsilon \in (0,1)$, тогда используя неравенство Юнга с параметром получим цепочку неравенств

$$c\|Du\|_p = \frac{c}{\varepsilon^{1/p}}\varepsilon^{1/p}\|Du\|_p \leqslant \frac{1}{p'}\left(\frac{c}{\varepsilon^{1/p}}\right)^{p'} + \frac{\varepsilon}{p}\|Du\|_p^p.$$

Поэтому продолжим неравенство (3.5)

$$\psi(u) \geqslant \frac{1-\varepsilon}{p}\|Du\|_p^p - c_1, \quad c_1 = \frac{1}{p'}\left(\frac{c}{\varepsilon^{1/p}}\right)^{p'}.$$

Следовательно,

$$\psi(u) \to +\infty \quad \text{при} \quad \|Du\|_p \to +\infty$$

и поэтому функционал (3.4) является слабо коэрцитивным.

Теперь докажем слабую секвенциальную полунепрерывность снизу функционала $\psi(u)$ на $W_0^{1,p}(\Omega)$. Действительно, пусть

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad \text{слабо в} \quad W_0^{1,p}(\Omega),$$

тогда в силу слабой секвенциальной полунепрерывности снизу нормы банахова пространства $W_0^{1,p}(\Omega)$ приходим к выводу, что

$$\liminf_{n\to+\infty}\int\limits_\Omega |Du_n|^p\,dx \geqslant \int\limits_\Omega |Du_0|^p\,dx.$$

Кроме того, поскольку $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ имеет место предельное равенство

$$\langle f, u_n\rangle \to \langle f, u_0\rangle \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Тем самым,
$$\psi(u_0) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \psi(u_n).$$

Теперь можно воспользоваться теоремой 4, в которой следует взять $\mathrm{M} = W_0^{1,p}(\Omega)$ при $p \geqslant 2$.

Для полноты изложения докажем теперь единственность слабого решения рассматриваемой краевой задачи. Пусть единственности нет и u_1, u_2 — это какие-то два разных решения задачи (3.1). Тогда согласно определению 13 слабого решения имеют место следующие два равенства:

$$\langle -\Delta_p u_k(x) + f(x), \varphi(x)\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega),\ k = 1, 2.$$

Тогда, вычитая одно равенство из другого, получим следующее выражение
$$\langle -\Delta_p u_1 + \Delta_p u_2, \varphi\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Теперь возьмем в качестве функции $\varphi(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ следующее выражение
$$\varphi(x) = u_1(x) - u_2(x) \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

тогда сразу же получим равенство

$$\langle -\Delta_p u_1 + \Delta_p u_2, u_1 - u_2\rangle = 0.$$

Откуда интегрируя по «частям», т.е. «перебрасывая» производную D оператора Δ_p, которая понимается в слабом смысле, получим следующее равенство

$$\int\limits_{\Omega} \Big(|Du_1(x)|^{p-2}\, Du_1(x) - |Du_2(x)|^{p-2}\, Du_2(x), Du_1(x) - Du_2(x)\Big)\, dx = 0.$$

Теперь заметим, что для произвольных векторов $a, b \in \mathbb{R}^N$ имеет место цепочка следующих неравенств:

$$(|b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a, b - a) \geqslant 2^{-1}\left(|b|^{p-2} + |a|^{p-2}\right)|b - a|^2 \geqslant$$
$$\geqslant 2^{2-p}|b - a|^p \quad \text{при} \quad p \geqslant 2.$$

Следовательно, приходим к неравенству

$$0 = \int\limits_{\Omega} \Big(\, |Du_1(x)|^{p-2}\, Du_1(x) -$$
$$- |Du_2(x)|^{p-2}\, Du_2(x), Du_1(x) - Du_2(x)\Big)\, dx \geqslant$$
$$\geqslant 2^{2-p}\|Du_1 - Du_2\|_p^p.$$

Откуда легко следует, что $u_1(x) = u_2(x)$ почти всюду на Ω.

Теперь в заключение данного параграфа рассмотрим еще некоторые легко проверяемые на практике достаточные условия слабой секвенциальной полунепрерывности снизу функционала $\psi : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ и достаточные условия слабой коэрцитивности этого функционала. Но сначала дадим определение.

Определение 12. *Оператор $\mathbb{F} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ называется монотонным, если для любых $u, v \in \mathbb{B}$ имеет место следующее неравенство*:

$$\langle \mathbb{F}(u) - \mathbb{F}(v), u - v \rangle \geqslant 0,$$

и называется строго монотонным, если равенство нулю в последнем неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда $u = v$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 5. *Пусть функционал $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ является дифференцируемым по Фреше на $\mathbb{B}$, а его производная Фреше*

$$\psi_f'(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$$

является монотонным отображением, тогда функционал ψ является слабо секвенциально полунепрерывным снизу функционалом на банаховом пространстве $\mathbb{B}$.

Доказательство.

Итак, пусть функционал $\psi : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ является дифференцируемым по Фреше на банаховом пространстве $\mathbb{B}$. Тогда для любых $u, v \in \mathbb{B}$ имеет место цепочка неравенств

$$\psi(u) - \psi(v) = \int\limits_0^1 \frac{d}{dt}\psi(tu + (1-t)v)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \left\langle \psi_f'(tu + (1-t)v), u - v \right\rangle dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \left\langle \psi_f'(v + t(u-v)) - \psi_f'(v), u - v \right\rangle dt + \int\limits_0^1 \left\langle \psi_f'(v), u - v \right\rangle dt,$$

Теперь предположим, что производная Фреше $\psi_f'(u)$ является монотонным оператором, т. е.

$$\left\langle \psi_f'(u) - \psi_f'(v), u - v \right\rangle \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad u, v \in \mathbb{B},$$

но тогда

$$\left\langle \psi_f'(v + t(u-v)) - \psi_f'(v), t(u-v) \right\rangle \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad t \in [0,1].$$

Следовательно,

$$\left\langle \psi'_f(v+t(u-v)) - \psi'_f(v), u-v \right\rangle \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad t \in (0,1]$$

и имеет место неравенство

$$\psi(u) - \psi(v) \geqslant \int\limits_0^1 \left\langle \psi'_f(v), u-v \right\rangle dt = \left\langle \psi'_f(v), u-v \right\rangle. \tag{3.6}$$

Теперь предположим, что у нас имеется произвольная последовательность $\{u_n\} \subset \mathbb{B}$ такая, что

$$u_n \rightharpoonup v \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}.$$

Подставим в неравенство (3.6) вместо u величину u_n и получим неравенство

$$\psi(u_n) \geqslant \psi(v) + \left\langle \psi'_f(v), u_n - v \right\rangle.$$

По условию приходим к выводу, что

$$\lim_{n\to+\infty} \left\langle \psi'_f(v), u_n - v \right\rangle = 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Таким образом справедлива следующее предельное неравенство:

$$\liminf_{n\to+\infty} \psi(u_n) \geqslant \psi(v).$$

Лемма доказана.

Сейчас нам потребуется новое понятие. Дадим определение.

Определение 13. *Оператор*

$$\mathbb{F} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$$

называется коэрцитивным, если

$$\lim_{\|u\|\to+\infty} \frac{\langle \mathbb{F}(u), u \rangle}{\|u\|} = +\infty.$$

Теперь мы можем доказать лемму о достаточных условиях слабой коэрцитивности функционала $\psi : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ при условии его дифференцируемости по Фреше на $\mathbb{B}$.

Лемма 6. *Пусть* $\psi : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ *и*

$$\psi'_f(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$$

определена, тогда если $\psi'_f(u)$ *является коэрцитивным и ограниченным оператором, то функционал* ψ *слабо коэрцитивен на* $\mathbb{B}$.

Доказательство.

В силу дифференцируемости по Фреше функционала $\psi : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ для него справедливо представление (2.5):

$$\psi(u) = \psi(\vartheta) + \int\limits_0^1 \left\langle \psi'_f(tu), u \right\rangle dt \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{B}.$$

Сделаем замену переменных в последнем интеграле

$$t = \frac{\tau}{\|u\|} \quad \text{при} \quad \|u\| \neq 0.$$

Тогда получим равенство

$$\psi(u) = \psi(\vartheta) + \int\limits_0^{\|u\|} \left\langle \psi'_f\left(\frac{u}{\|u\|}\tau\right), \frac{u}{\|u\|}\tau \right\rangle \frac{d\tau}{\tau} \tag{3.7}$$

В силу коэрцитивности оператора ψ'_f для каждой постоянной $c > 0$ найдется такое достаточно большое число $r = r(c) > 0$, что имеет место следующее неравенство:

$$\left\langle \psi'_f\left(\frac{u}{\|u\|}\tau\right), \frac{u}{\|u\|}\tau \right\rangle \frac{1}{\tau} \geqslant c \quad \text{при} \quad \tau \geqslant r > 0.$$

С другой стороны, ограниченность оператора ψ'_f означает, что

$$\sup_{\tau \in [0,r],\ u \in \mathbb{B}} \left\| \psi'_f\left(\frac{u}{\|u\|}\tau\right) \right\|_* = m < +\infty.$$

Теперь получим оценку снизу для выражения $\psi(u)$ из равенства (3.7). Действительно, при $\|u\| > r$ имеет место цепочка выражений

$$\psi(u) = \psi(\vartheta) + \int\limits_0^r \left\langle \psi'_f\left(\frac{u}{\|u\|}\tau\right), \frac{u}{\|u\|}\tau \right\rangle \frac{d\tau}{\tau} +$$

$$+ \int\limits_r^{\|u\|} \left\langle \psi'_f\left(\frac{u}{\|u\|}\tau\right), \frac{u}{\|u\|}\tau \right\rangle \frac{d\tau}{\tau} \geqslant$$

$$\geqslant \psi(\vartheta) - \int\limits_0^r \left\| \psi'_f\left(\frac{u}{\|u\|}\tau\right) \right\|_* \left\| \frac{u}{\|u\|}\tau \right\| \frac{d\tau}{\tau} + c \int\limits_r^{\|u\|} d\tau =$$

$$= \psi(\vartheta) - rm + c\|u\| - cr$$

для всех $u \in \mathbb{B}$ при $\|u\| > r > 0$. Следовательно, функционал $\psi(u)$ является слабо коэрцитивным, причем

$$\psi(u) \geqslant c\|u\| - c_1, \quad \text{где} \quad \mathrm{c}_1 > 0, \quad \|u\| \geqslant r > 0,$$

а $c > 0$ можно сделать сколь угодно большой при достаточно большом $r > 0$.

Лемма доказана.

Тем самым, из лемм 5 и 6 вытекает следующая важная теорема.

Теорема 7. *Пусть $\psi : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ — некоторый функционал, $\mathbb{B}$ — это рефлексивное банахово пространство. Тогда если функционал ψ дифференцируем по Фреше на $\mathbb{B}$, то при условии, что*

$$\psi_f^{'} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$$

является строго монотонным, коэрцитивным и ограниченным отображением, операторное уравнение

$$\psi_f^{'}(u) = h \in \mathbb{B}^* \tag{3.8}$$

имеет единственное решение $u \in \mathbb{B}$ для всех $h \in \mathbb{B}^*$.

Доказательство.

Действительно, рассмотрим функционал

$$\psi_0(u) = \psi(u) - \langle h, u \rangle \,.$$

Введенный функционал удовлетворяет всем условиям теоремы 4, в которой надо положить $\mathrm{M} = \mathbb{B}$. Единственное, что требует разъяснений — так это доказательство слабой коэрцитивности функционала $\psi_0(u)$. Действительно, для него справедлива следующая оценка снизу

$$\psi_0(u) \geqslant \psi(u) - \|h\|_* \|u\| \geqslant c\|u\| - c_1 - \|h\|_* \|u\|,$$

причем из доказательства леммы 6 вытекает, что для каждого $h \in \mathbb{B}^*$ постоянную $c > 0$ можно выбрать большей чем $\|h\|_*$ при условии достаточной величины $r > 0$ такой, что $\|u\| \geqslant r$. Следовательно, приходим к неравенству

$$\psi_0(u) \geqslant (c - \|h\|_*)\, \|u\| - c_1 \quad \text{при} \quad \|u\| \geqslant r > 0.$$

Тем самым, слабая коэрцитивность функционала ψ_0 на $\mathbb{B}$ доказана.

Следовательно, функционал $\psi_0(u)$ является ограниченным снизу и достигает своего минимума в некоторой точке $u_0 \in \mathbb{B}$. Теперь в силу дифференцируемости по Фреше функционала ψ_0 на $\mathbb{B}$ приходим к выводу, что в силу необходимого условия экстремума дифференцируемого по Фреше в точке $u_0 \in \mathbb{B}$ функционала имеет место операторное уравнение

$$\psi_{0f}^{'}(u_0) = 0 \Rightarrow \psi_f^{'}(u_0) - h = \vartheta \in \mathbb{B}^*.$$

Следовательно, операторное уравнение (3.8) имеет решение при всяком $h \in \mathbb{B}^*$. Докажем, что это решение единственное. Действительно, пусть для некоторого $h \in \mathbb{B}^*$ имеется два различных решения $u_1, u_2 \in \mathbb{B}$, причем $u_1 \neq u_2$. Но в силу строгой монотонности $\psi'_f(u)$ имеем следующую цепочку соотношений:

$$0 = \left\langle \psi'_f(u_1) - \psi'_f(u_2), u_1 - u_2 \right\rangle > 0.$$

Полученное противоречие доказывает единственность.

Теорема доказана.

§ 4. Литературные указания

В данной лекции мы использовали материал, изложенный в работах [2], [30], [35], [46], [47], [49], [56] и [61].

Лекция 3

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ. ТЕОРЕМА О ГОРНОМ ПЕРЕВАЛЕ

В этой лекции мы рассмотрим важный в приложениях вариационный метод Амбросетти–Рабиновича, основанный на так называемой теореме о горном перевале и имеющий важные приложения в теории неограниченных функционалов. А также результат С. И. Похожаева о несуществовании нетривиального решения одной нелинейной эллиптической задачи.

§ 1. Теорема о горном перевале

Итак, пусть у нас задан функционал $\psi(u) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{H}; \mathbb{R}^1)$, удовлетворяющий, кроме того, условию, что его градиент

$$\mathbb{F}(u) = \mathbf{grad}\, \psi(u) : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$

является сильно непрерывным по Липшицу и $\mathbb{H}$ вещественное гильбертово пространство.

Теперь введем некоторые обозначения

$$A_c \equiv \Big\{u \in \mathbb{H} : \psi(u) \leqslant c\Big\},$$

$$K_c \equiv \Big\{u \in \mathbb{H} : \psi(u) = c,\ \mathbb{F}(u) = \mathbf{grad}\, \psi(u) = 0\Big\}.$$

Определение 1. *Пусть $\mathcal{F}$ — это совокупность функционалов $\psi(u) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{H}; \mathbb{R}^1)$, градиент которых сильно непрерывен по Липшицу.*

Определение 2.

(i) *Элемент $u \in \mathbb{H}$ называется критической точкой, если* $\mathbf{grad}\, f(u) = 0$;

(ii) *Вещественное число c называется критическим значением, если $K_c \neq \varnothing$*

Теперь докажем, что если число c не является критическим значением, то множество $A_{c+\varepsilon}$ легко деформируется в $A_{c-\varepsilon}$ при некотором $\varepsilon > 0$. Доказательство основано на следующей идее: сначала надо решить соответствующее дифференциальное уравнение в $\mathbb{H}$ и затем провести спуск. Поскольку пространство $\mathbb{H}$, вообще говоря, бесконечномерно, нам понадобится условие компактности.

Определение 3. *Функционал* $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{H};\mathbb{R}^1)$ *удовлетворяет условию компактности Palais–Smale* (PS) *если каждая последовательность* $\{u_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{H}$, *удовлетворяющая условиям*:

(i) $\{\psi(u_k)\}_{k=1}^{+\infty}$ *ограничена*;

(ii) $\mathbf{grad}\,\psi(u_k) \to 0$ *в* $\mathbb{H}$

содержит сильно сходящуюся подпоследовательность в $\mathbb{H}$.

Справедлива следующая теорема о деформации

Теорема 1. *Пусть* $\psi(u) \in \mathcal{F}$ *удовлетворяет условию Пале–Смейла (Palais–Smale). Предположим, что*

$$K_c = \varnothing. \tag{1.1}$$

Тогда для любого достаточного малого $\varepsilon > 0$ *существуют константа* $0 < \delta < \varepsilon$ *и функция* $\eta(t,u) \in \mathbb{C}([0,1] \times \mathbb{H};\mathbb{H})$ *такие, что отображения*

$$\eta_t(u) = \eta(t,u) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1,\ u \in \mathbb{H})$$

удовлетворяет условиям:

(i) $\eta_0(u) = u$ $(u \in \mathbb{H})$;

(ii) $\eta_1(u) = u$ $(u \notin \psi^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]))$;

(iii) $\psi(\eta_t(u)) \leqslant \psi(u)$ $(u \in \mathbb{H},\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$;

(iv) $\eta_1(A_{c+\delta}) \subset A_{c-\delta}$.

Доказательство.

Доказательство проведем в несколько шагов.

Шаг 1. Сначала покажем, что существуют константы $0 < \sigma, \varepsilon < 1$ такие, что

$$\|\mathbf{grad}\,\psi(u)\|_{\mathbb{H}} \geqslant \sigma \quad \text{для всех} \quad u \in A_{c+\varepsilon} \backslash A_{c-\varepsilon}. \tag{1.2}$$

Доказательство ведется от противного. Если (1.2) не выполняется для всех констант $\sigma, \varepsilon > 0$, то существуют последовательности $\sigma_k \to 0$, $\varepsilon_k \to 0$ и элементы

$$u_k \in A_{c+\varepsilon_k} \backslash A_{c-\varepsilon_k} \tag{1.3}$$

такие, что

$$\|\mathbf{grad}\,\psi(u_k)\|_{\mathbb{H}} \leqslant \sigma_k. \tag{1.4}$$

Согласно условию Пале–Смейла существуют подпоследовательность

$$\{u_{k_j}\}_{j=1}^{+\infty}$$

и элемент $u \in \mathbb{H}$ такие, что $u_{k_j} \to u$ сильно в $\mathbb{H}$. Но, так как $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{H};\mathbb{R}^1)$, и из (1.3), (1.4) вытекает, что

$$\psi(u) = c, \quad \mathbf{grad}\,\psi(u) = 0.$$

Следовательно, $K_c \neq \varnothing$, что противоречит нашему предположению (1.1).

Шаг 2. Фиксируем $\delta > 0$ такое, что

$$0 < \delta < \varepsilon, \quad 0 < \delta < \sigma^2/2. \tag{1.5}$$

Положим

$$A \equiv \Big\{ u \in \mathbb{H} \Big| \ \psi(u) \leqslant c - \varepsilon \text{ или } \psi(u) \geqslant c + \varepsilon \Big\},$$

$$B \equiv \Big\{ u \in \mathbb{H} \Big| \ c - \delta \leqslant \psi(u) \leqslant c + \delta \Big\}.$$

Поскольку $\mathbb{F}(u) = \mathbf{grad}\, \psi(u)$ ограничено на ограниченных множествах, можно проверить, что отображение

$$u \mapsto \mathrm{distance}(u, A) + \mathrm{distance}(u, B)$$

ограничено снизу положительной константой на каждом ограниченном подмножестве $\mathbb{H}$. Следовательно, функция

$$g(u) \equiv \frac{\mathrm{distance}(u, A)}{\mathrm{distance}(u, A) + \mathrm{distance}(u, B)} \quad (u \in \mathbb{H})$$

удовлетворяет условиям

$$0 \leqslant g \leqslant 1, \quad g = 0 \quad \text{на} \quad A, \quad g = 1 \quad \text{на} \quad B, \tag{1.6}$$

где g липшицева на ограниченных множествах. Положим

$$h(t) \equiv \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant 1; \\ 1/t, & t \geqslant 1. \end{cases} \tag{1.7}$$

Наконец, определим отображение

$$\mathbb{V} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$

формулой

$$\mathbb{V}(u) \equiv -g(u) h \left(\|\mathbf{grad}\, \psi(u)\|_{\mathbb{H}} \right) \mathbf{grad}\, \psi(u) \quad (u \in \mathbb{H}). \tag{1.8}$$

Заметим, что $\mathbb{V}$ ограничено.

Шаг 3. Для произвольного $u \in \mathbb{H}$ рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\eta}{dt}(t) = \mathbb{V}(\eta(t)) \quad t > 0, \quad \eta(0) = u. \tag{1.9}$$

Поскольку $\mathbb{V}$ ограничено и непрерывно по Липшицу на ограниченных множествах, существует единственное решение для всех $t \geqslant 0$. Пишем $\eta = \eta(t, u) = \eta_t(u)$ $(t \geqslant 0, \ u \in \mathbb{H})$, чтобы подчеркнуть зависимость решения, как от времени t, так и от начального положения $u \in \mathbb{H}$.

Ограничившись случаем $0 \leqslant t \leqslant 1$, мы видим, что таким образом определенное отображение $\eta \in \mathbb{C}([0,1] \times \mathbb{H}; \mathbb{H})$ удовлетворяет утверждениям (i) и (ii). Действительно, это следствие того, что $g = 0$ при $u \in A$.

Шаг 4. Теперь вычислим

$$\frac{d}{dt}\psi(\eta_t(u)) = \left(\mathbf{grad}\,\psi(\eta_t(u)), \frac{d}{dt}\eta_t(u)\right)_{\mathbb{H}} = (\mathbf{grad}\,\psi(\eta_t(u), \mathbb{V}(\eta_t(u))))_{\mathbb{H}} = \\ = -g(\eta_t(u))h\left(\|\mathbf{grad}\,\psi(u)\|_{\mathbb{H}}\right)\|\mathbf{grad}\,\psi(u)\|^2_{\mathbb{H}}. \quad (1.10)$$

В частности,

$$\frac{d}{dt}\psi(\eta_t(u)) \leqslant 0 \quad (u \in \mathbb{H}, 0 \leqslant t \leqslant 1) \Rightarrow \psi(\eta_t(u)) \leqslant \psi(u).$$

Следовательно, утверждение (iii) доказано.

Шаг 5. Теперь фиксируем точку

$$u \in A_{c+\delta} \quad (1.11)$$

Наша цель — доказать соотношение

$$\eta_1(u) \in A_{c-\delta} \quad (1.12)$$

и тем самым проверить утверждение (iv). Если $\eta_t(u) \notin B$ для некоторого $t \in [0,1]$, мы сразу же получаем требуемое утверждение. Действительно, при этом если найдется такое $t^* \in [0,1]$, что

$$\eta_{t^*}(u) \notin B,$$

то в силу (iii)

$$\psi(\eta_{t^*}(u)) \leqslant \psi(u) \leqslant c + \delta.$$

И, значит,

$$\psi(\eta_{t^*}(u)) < c - \delta \quad \text{и} \quad \psi(\eta_t(u)) \leqslant \psi(\eta_{t^*}(u))$$

для всех $t \in [t^*, 1]$. И, следовательно,

$$\psi(\eta_1(u)) < c - \delta.$$

Поэтому предположим, что $\eta_t(u) \in B$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. Тогда $g(\eta_t(u)) = 1$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. Следовательно, из (1.10) вытекает

$$\frac{d}{dt}\psi(\eta_t(u)) = -h\left(\|\mathbf{grad}\,\psi(\eta_t(u))\|_{\mathbb{H}}\right)\|\mathbf{grad}\,\psi(\eta_t(u))\|^2_{\mathbb{H}}. \quad (1.13)$$

Если

$$\|\mathbf{grad}\,\psi(\eta_t(u))\|_{\mathbb{H}} \leqslant 1,$$

то из (1.7) и (1.2) вытекает

$$\frac{d}{dt}\psi(\eta_t(u)) = -\|\mathbf{grad}\,\psi\|^2_{\mathbb{H}} \leqslant -\sigma^2.$$

С другой стороны, если

$$\|\mathbf{grad}\,\psi\|_{\mathbb{H}} \geqslant 1,$$

то из (1.7) и (1.2) получаем

$$\frac{d}{dt}\psi(\eta_t(u)) \leqslant -\sigma^2.$$

В силу этих неравенств, (1.13) и (1.5) выводим оценку

$$\psi(\eta_1(u)) \leqslant \psi(u) - \sigma^2 \leqslant c + \delta - \sigma^2 \leqslant c - \delta,$$

из которой следует (1.12), и требуемое утверждение доказано.

Теорема доказана.

Используя «минимаксную» технику и построенную деформацию η, докажем существование критической точки. С этой целью докажем утверждение, которое носит название «теорема о горном перевале».

Предварительно дадим определение *множества допустимых путей*

Определение 4. $\Gamma \equiv \left\{g \in \mathbb{C}([0,1];\mathbb{H}) \,\middle|\, g(0)=0,\ g(1)=v\right\}.$

Теорема 2. *Пусть* $\psi \in \mathcal{F}$ *удовлетворяет условию Пале–Смейла. Предположим также, что*

(i) $\psi(0) = 0$,

(ii) *существуют константы* $r, a > 0$ *такие, что* $\psi(u) \geqslant a$, *если* $\|u\| = r$,

(iii) *существует элемент* $v \in \mathbb{H}$ *такой, что* $\|v\| > r$, $\psi(v) \leqslant 0$.

Тогда

$$c = \inf_{g\in\Gamma}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\psi(g(t))$$

является критическим значением функционала ψ.

Доказательство.

Прежде всего имеем $c \geqslant a$, поскольку

$$\max_{t\in[0,1]}\psi(g(t)) \geqslant a.$$

Пусть c не является критическим значением $\psi(\cdot)$, так что

$$K_c = \varnothing.$$

Выберем достаточно малое число

$$0 < \varepsilon < a/2.$$

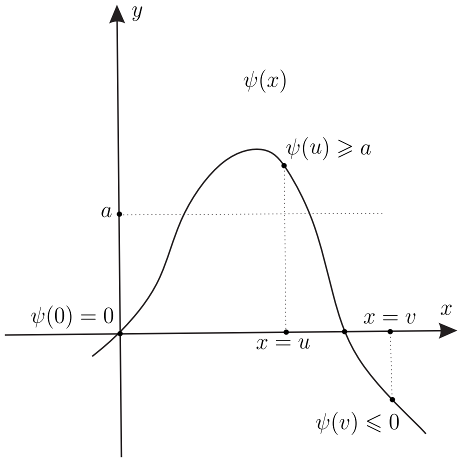

Рис. 1. Теорема о горном перевале.

Согласно теореме 1 о деформации существует константа $0 < \delta < \varepsilon$ и гомеоморфизм

$$\eta : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$

такие, что

$$\eta(A_{c+\delta}) \subset A_{c-\delta}, \tag{1.14}$$

$$\eta(u) = u, \quad \text{если} \quad u \notin \psi^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]). \tag{1.15}$$

Выберем $g \in \Gamma$ так, что

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \psi(g(t)) \leqslant c + \delta. \tag{1.16}$$

Тогда $\widehat{g} \equiv \eta \circ g$ также принадлежит Γ, поскольку $\eta(g(0)) = \eta(0) = 0$ и $\eta(g(1)) = \eta(v) = v$ в силу (1.15). Но тогда из (1.16) следует $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} \psi(\widehat{g}(t)) \leqslant c - \delta$, откуда

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \psi(g(t)) \leqslant c - \delta,$$

что приводит к противоречию.

Теорема доказана.

Замечание 1. Теоремы 1 и 2 остается в точности такими же в случае, когда $\mathbb{H}$ — банахово пространство.

§ 2. Полулинейное эллиптическое уравнение.

1. Теорема о существовании решения.

Для иллюстрации применения теоремы о горном перевале рассмотрим следующую полулинейную краевую задачу

$$-\Delta u = f(u) \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{2.1}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0,1]$, $f(\cdot)$ гладкая и для некоторого $1 < q < (N+2)/(N-2)$ при $N \geqslant 3$

$$|f(x)| \leqslant c(1+|x|^q), \quad |f'(x)| \leqslant c(1+|x|^{q-1}), \quad x \in \mathbb{R}^1, \tag{2.2}$$

где c — константа. Пусть

$$0 \leqslant F(x) \leqslant \alpha f(x)x \quad \text{для некоторой константы} \quad \alpha \in (0,1/2), \tag{2.3}$$

где

$$F(x) \equiv \int\limits_0^x f(s)\,ds$$

и $x \in \mathbb{R}^1$. Предположим, наконец, что $0 < a \leqslant A$,

$$a|x|^{q+1} \leqslant |F(x)| \leqslant A|x|^{q+1} \quad (x \in \mathbb{R}^1). \tag{2.4}$$

Тогда (2.4) влечет $f(0) = 0$ и, очевидно, что $u \equiv 0$ является тривиальным решением (2.1). Но нас интересует другое решение.

Замечание 2. Уравнение с частными производными

$$-\Delta u = |u|^{q-1}u$$

попадает под указанные условия. Позднее мы вернемся к этому виду нелинейности.

Теорема 3. *Краевая задача* (2.1) *имеет хотя бы одно слабое решение и неравное тождественно нулю.*

Доказательство.

Доказательство проведем в несколько шагов.

Шаг 1. Определим функционал

$$\psi(u) \equiv \int\limits_\Omega \left[\frac{1}{2}|Du|^2 - F(u)\right] dx \quad \text{для} \quad u \in H_0^1(\Omega). \tag{2.5}$$

Мы хотим применить теорему о горном перевале к функционалу $\psi(u)$. Будем рассматривать пространство $\mathbb{H} \equiv H_0^1(\Omega)$ относительно одной из эквивалентных норм

$$\|u\| = \left(\int\limits_\Omega |Du|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Тогда

$$\psi(u) \equiv \psi_1(u) - \psi_2(u) \equiv \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int\limits_\Omega F(u)\,dx. \qquad (2.6)$$

Шаг 2. Сначала покажем, что ψ принадлежит классу $\mathcal{F}$. Для этого заметим, что при любых $u, w \in \mathbb{H}$,

$$\psi_1[w] = \frac{1}{2}\|w\|^2 = \frac{1}{2}\|u + w - u\|^2 = \frac{1}{2}\|u\|^2 + (u, w - u) + \frac{1}{2}\|w - u\|^2.$$

Поэтому ψ_1 дифференцируем по Фреше в точке u и $\mathbf{grad}\,\psi_1(u) = u$. Следовательно, $\psi_1 \in \mathcal{F}$.

Шаг 3. Теперь рассмотрим ψ_2. Напомним, что по теореме Браудера–Минти, которую мы рассмотрим позже, в силу равномерной монотонности оператора Лапласа

$$-\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$$

для любого $v^* \in H^{-1}(\Omega)$ задача

$$-\Delta u = v^* \quad \text{в} \quad \Omega, \quad v = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega$$

имеет единственное решение $v \in H_0^1(\Omega)$. Положим $v = Kv^*$, так что

$$K : H^{-1}(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \ - \ \text{изометрия}. \qquad (2.7)$$

Заметим, что если $w \in L^{2N/(N+2)}(\Omega)$, то линейный функционал w^*, определенный формулой

$$\langle w^*, u\rangle \equiv \int\limits_\Omega wu\,dx \quad (u \in H_0^1(\Omega)),$$

принадлежит $H^{-1}(\Omega)$. Заметим, что

$$q\frac{2N}{N+2} < \frac{N+2}{N-2}\frac{2N}{N+2} = 2^*$$

и, таким образом, $f(u) \in L^{2N/(N+2)}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, если $u \in H_0^1(\Omega)$.

Теперь покажем, что для $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\mathbf{grad}\,\psi_2(u) = K[f(u)]. \qquad (2.8)$$

Для этого заметим, что

$$F(a+b) = F(a) + f(a)b + \int\limits_0^1 (1-s)f'(a+sb)\,dsb^2.$$

Таким образом, для любых $w \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}\psi_2(w) = \int_\Omega F(w)\,dx = \int_\Omega F(u+w-u)\,dx = \\ = \int_\Omega \left[F(u) + f(u)(w-u)\right]\,dx + R = \\ = \psi_2(u) + \int_\Omega (DK[f(u)], D(w-u)) + R \quad (2.9)\end{aligned}$$

поскольку

$$\Delta K f(u) = f(u),$$

где остаточный член R удовлетворяет в силу (2.2) оценке

$$|R| \leqslant c\int_\Omega \left(1 + |u|^{q-1} + |w-u|^{q-1}\right)|w-u|^2\,dx \leqslant \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_3,$$

$$\mathrm{L}_1 = c\int_\Omega |w-u|^2\,dx, \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{L}_2 = c\int_\Omega |u|^{q-1}|w-u|^2\,dx \leqslant \\ \leqslant c\left(\int_\Omega |u|^{q+1}\,dx\right)^{(q-1)/(q+1)}\left(\int_\Omega |w-u|^{q+1}\,dx\right)^{2/(q+1)}, \quad (2.11)\end{aligned}$$

$$\mathrm{L}_3 = c\int_\Omega |w-u|^{q+1}\,dx. \tag{2.12}$$

Поскольку $q+1 < 2^*$, из неравенств Соболева следует $R = \overline{\overline{o}}(\|w-u\|)$. Таким образом, в силу (2.9)

$$\psi_2(w) = \psi_2(u) + \langle K[f(u)], w-u\rangle + \overline{\overline{o}}(\|w-u\|),$$

что и требовалось доказать. Наконец, заметим, что если $u, \overline{u} \in H_0^1(\Omega)$, $\|u\|, \|\overline{u}\| \leqslant L$, то

$$\begin{aligned}\|\mathbf{grad}\,\psi_2(u) - \mathbf{grad}\,\psi_2(\overline{u})\| = \|K[f(u)] - K[f(\overline{u})]\|_{H_0^1(\Omega)} = \\ = \|f(u) - f(\overline{u})\|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant c\|f(u) - f(\overline{u})\|_{L^{2N/(N+2)}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Однако поскольку

$$|f(s_1) - f(s_2)| \leqslant |f'(s_3)||s_1 - s_2|, \quad s_3 \in [s_1, s_2],$$

то, очевидно, что в силу (2.2) имеет место неравенство

$$|f(s_1) - f(s_2)| \leqslant c\left(1 + |s_1|^{p-1} + |s_2|^{p-1}\right)|s_1 - s_2|$$

$$\|f(u) - f(\overline{u})\|_{L^{2N/(N+2)}(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant c\left(\int\limits_\Omega \left((1 + |u|^{q-1} + |\overline{u}|^{q-1})|u - \overline{u}|\right)^{2N/(N+2)}\, dx\right)^{(N+2)/(2N)} \leqslant$$
$$\leqslant c\left(\int\limits_\Omega \left(1 + |u|^{q-1} + |\overline{u}|^{q-1}\right)^{2N/(N+2)(N+2)/4}\right)^{2/N} \|u - \overline{u}\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant c(L)\|u - \overline{u}\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leqslant c(L)\|u - \overline{u}\|,$$

где мы воспользовались (2.2) и, кроме того,

$$\frac{2N}{N+2}r = 2^* \Rightarrow r = \frac{N+2}{N-2}, \quad r' = \frac{N+2}{4}.$$

Таким образом, отображение

$$\mathbf{grad}\,\psi_2 : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$$

непрерывно по Липшицу на ограниченных множествах. Следовательно, $\psi_2 \in \mathfrak{F}$ и мы получаем требуемое утверждение.

Шаг 4. Теперь проверим условие Пале–Смейла. Для этого предположим, что

$$\{u_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset H_0^1(\Omega),$$

где

$$\{\psi(u_k)\}_{k=1}^{+\infty} \quad \text{ограничена}, \tag{2.13}$$

$$\mathbf{grad}\,\psi(u_k) \to 0 \quad \text{сильно в} \quad H_0^1(\Omega). \tag{2.14}$$

Согласно вышесказанному

$$u_k - K[f(u_k)] \to 0 \quad \text{сильно в} \quad H_0^1(\Omega). \tag{2.15}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$|\langle \mathbf{grad}\,\psi[u_k], v\rangle| = \left|\int\limits_\Omega ((Du_k, Dv) - f(u_k)v)\, dx\right| \leqslant \varepsilon\|v\| \quad (v \in H_0^1(\Omega))$$

при достаточно больших k. Положим $v = u_k$. Имеем

$$\left|\int\limits_\Omega \left[|Du_k|^2 - f(u_k)u_k\right]\, dx\right| \leqslant \varepsilon \|u_k\|$$

для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших k. При $\varepsilon = 1$, в частности, имеем

$$\int\limits_\Omega f(u_k)u_k\, dx \leqslant \|u_k\|^2 + \|u_k\| \tag{2.16}$$

для всех достаточно больших k. Но поскольку из (2.13) следует

$$\left(\frac{1}{2}\|u_k\|^2 - \int\limits_\Omega F(u_k)\, dx\right) \leqslant c < +\infty$$

для всех k и некоторой константы c, заключаем, что

$$\|u_k\|^2 \leqslant c + 2\int\limits_\Omega F(u_k)\, dx \leqslant c + 2\alpha\left(\|u_k\|^2 + \|u_k\|\right).$$

Так как $2\alpha < 1$, последовательность $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ ограничена в $H_0^1(\Omega)$. Поэтому существуют подпоследовательность $\{u_{k_j}\}_{j=1}^{+\infty}$ и функция $u \in H_0^1(\Omega)$ такие, что $u_{k_j} \rightharpoonup u$ слабо в $H_0^1(\Omega)$ и $u_{k_j} \to u$ сильно в $L^{q+1}(\Omega)$. Последнее утверждение справедливо поскольку $q + 1 < 2^*$. Но тогда $f(u_k) \to f(u)$ сильно в $H^{-1}(\Omega)$, откуда $K[f(u_k)] \to K[f(u)]$ сильно в $H_0^1(\Omega)$. Следовательно, из (2.15) получаем

$$u_{k_j} \to u \quad \text{сильно в} \quad H_0^1(\Omega). \tag{2.17}$$

Значит, функционал $\mathrm{I}(u)$ удовлетворяет условию (PS).

Шаг 5. Наконец, проверим остальные условия теоремы о горном перевале. Очевидно, что $\psi(\vartheta) = 0$. Пусть $u \in H_0^1(\Omega)$, $\|u\| = r$, где $r > 0$ будет выбрано ниже. Тогда

$$\psi(u) = \psi_1(u) - \psi_2(u) = \frac{r^2}{2} - \psi_2(u). \tag{2.18}$$

В силу (2.4)

$$|\psi_2(u)| \leqslant c\int\limits_\Omega |u|^{q+1}\, dx \leqslant c\left(\int\limits_\Omega |u|^{2^*}\, dx\right)^{(q+1)/2^*} \leqslant c\|u\|^{q+1} \leqslant cr^{q+1}.$$

В силу (2.18)

$$\psi(u) \geqslant \frac{r^2}{2} - cr^{p+1} \geqslant \frac{r^2}{4} = a > 0,$$

если $r > 0$ достаточно мало, так как $p + 1 > 2$. Выберем теперь $u \in \in \mathbb{H}$, неравное тождественно нулю. Положим $v \equiv tu$, где $t > 0$ надлежит выбрать соответствующим образом. Тогда

$$\psi(v) = \psi_1(tu) - \psi_2(tu) = t^2\psi_1(u) - \int\limits_\Omega F(tu)\,dx \leqslant \\ \leqslant t^2\psi_1(u) - at^{q+1}\int\limits_\Omega |u|^{q+1}\,dx < 0$$

при достаточно больших $t > 0$, где мы опять воспользовались (2.4).

Шаг 6. Мы проверили все условия теоремы о горном перевале. Поэтому существует функция $u \in H_0^1(\Omega)$, неравная тождественно нулю, такая, что

$$\mathbf{grad}\,\psi(u) = u - K[f(u)] = 0.$$

В частности, для любой $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega (Du, Dv)\,dx = \int\limits_\Omega f(u)v\,dx,$$

откуда следует, что u — слабое решение задачи (2.1).

Теорема доказана.

2. Теорема о несуществовании решения. Результат С. И. Похожаева.

Рассмотрим нелинейное эллиптическое уравнение с частными производными, для которого можно применить различные методы дифференциальных неравенств:

$$-\Delta u = |u|^{q-1}u \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{2.19}$$

Применив развитую в предыдущем разделе технику можно доказать, что существует нетривиальное решение задачи (2.19) в случае

$$1 < q < \frac{N+2}{N-2}. \tag{2.20}$$

Вместо поставленного условия рассмотрим

$$\frac{N+2}{N-2} < q. \tag{2.21}$$

Наша цель показать, что при некотором геометрическом условии на область $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ из (2.20) следует, что $u \equiv 0$ будет единственным гладким решением задачи (2.19). Тогда становится ясно, что ограничение в условии (2.21) из предыдущего пункта в определенном смысле естественно и, следовательно,

$$q = \frac{N+2}{N-2}$$

является критическим показателем.

Определение 5. *Открытое множество* Ω *называется звездным относительно* 0, *если для любой точки* $x \in \overline{\Omega}$ *прямолинейный отрезок* $\{\lambda x | 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$ *лежит в* $\overline{\Omega}$.

Очевидно, что если Ω выпукло и $0 \in \Omega$, то Ω звездно относительно 0. Однако в общем случае звездная область не обязана быть выпуклой.

Лемма 1. *Пусть* ∂U *класса* $\mathbb{C}^1$ *и* Ω *— звездная область относительно* 0. *Тогда*

$$(x, \nu(x)) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \partial U,$$

где ν *— единичная внешняя нормаль.*

Доказательство.

Поскольку $\partial\Omega$ класса $\mathbb{C}^1$, для $x \in \partial\Omega$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $|x - y| < \delta$ и $y \in \overline{\Omega}$ имеем

$$\left(\nu(x), \frac{y-x}{|y-x|}\right) \leqslant \varepsilon.$$

В частности,

$$\limsup_{\overline{\Omega} \ni y \to x} \left(\nu(x), \frac{y-x}{|y-x|}\right) \leqslant 0.$$

Пусть $y = \lambda x$, где $0 < \lambda < 1$. Тогда $y \in \overline{\Omega}$ ввиду звездности Ω. Таким образом,

$$\left(\nu(x), \frac{x}{|x|}\right) = -\lim_{\lambda \to 1-0} \left(\nu(x), \frac{\lambda x - x}{|\lambda x - x|}\right) \geqslant 0.$$

Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть* $u \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega})$ *— решение задачи* (2.19) *и показатель* p *удовлетворяет неравенству* (2.21). *Предположим, что множество* Ω *звездно относительно* 0 *и* $\partial\Omega$ *класса* $\mathbb{C}^1$. *Тогда*

$$u \equiv 0 \quad \text{внутри} \quad \Omega.$$

Доказательство.

Шаг 1. Умножив уравнение на (x, Du) и интегрируя по Ω, находим

$$\int\limits_{\Omega} (-\Delta u)(x, Du)\, dx = \int\limits_{\Omega} |u|^{p-1} u(x, Du)\, dx. \tag{2.22}$$

Перепишем это равенство в виде $A = B$.

Шаг 2. Левая часть имеет вид

$$A \equiv -\sum_{i,j=1,1}^{N,N} \int_\Omega u_{x_i x_i} x_j u_{x_j}\, dx =$$
$$= \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \int_\Omega u_{x_i} (x_j u_{x_j})_{x_i} - \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \int_{\partial\Omega} u_{x_i} \nu^i x_j u_{x_j}\, dx \equiv A_1 + A_2. \quad (2.23)$$

Шаг 3. Имеем

$$A_1 = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \int_\Omega \left(u_{x_i} \delta_{ij} u_{x_j} + u_{x_i} x_j u_{x_i x_j} \right)\, dx =$$
$$= \int_\Omega \left(|Du|^2 + \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{|Du|^2}{2} \right)_{x_j} x_j \right) dx =$$
$$= \left(1 - \frac{N}{2} \right) \int_\Omega |Du|^2\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{|Du|^2}{2} (\nu, x)\, dS. \quad (2.24)$$

С другой стороны, поскольку $u = 0$ на $\partial\Omega$, градиент Du параллелен нормали ν в каждой точке $x \in \partial U$. Таким образом,

$$Du \equiv \pm |Du| \nu.$$

С помощью этого неравенства вычисляем

$$A_2 = -\int_{\partial\Omega} |Du|^2 (\nu, x)\, dS. \quad (2.25)$$

Из (2.23)–(2.25) следует, что

$$A = \frac{2-N}{2} \int_\Omega |Du|^2\, dx - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |Du|^2 (\nu, x)\, dS.$$

Шаг 4. Возвращаясь к (2.22) находим

$$B \equiv \sum_{j=1}^{N} \int_\Omega |u|^{p-1} u x_j u_{x_j}\, dx = \sum_{j=1}^{N} \int_\Omega \left(\frac{|u|^{p+1}}{p+1} \right)_{x_j} x_j\, dx = -\frac{N}{p+1} \int_\Omega |u|^{p+1}\, dx.$$

Шаг 5. Ввиду этого вычисления и (2.22) получаем

$$\frac{N-2}{2} \int_\Omega |Du|^2\, dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |Du|^2 (\nu, x)\, dS = \frac{N}{p+1} \int_\Omega |u|^{p+1}\, dx. \quad (2.26)$$

В силу леммы 1 приходим к неравенству

$$\frac{N-2}{2}\int\limits_{\Omega}|Du|^2\,dx \leqslant \frac{N}{p+1}\int\limits_{\Omega}|u|^{p+1}\,dx. \tag{2.27}$$

Умножая уравнение $-\Delta u = |u|^{p-1}u$ на u и интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_{\Omega}|Du|^2\,dx = \int\limits_{\Omega}|u|^{p+1}\,dx.$$

Подставив в (2.27), находим

$$\left(\frac{N-2}{2}-\frac{N}{p+1}\right)\int\limits_{\Omega}|u|^{p+1}\,dx \leqslant 0.$$

Поэтому, если u неравно тождественно нулю, то

$$\frac{N-2}{2}-\frac{N}{p+1} \leqslant 0,$$

т.е.

$$q \leqslant \frac{N+2}{N-2}.$$

Теорема доказана.

§ 3. Литературные указания

В данной лекции мы использовали материал, изложенный в работах [13], [20]–[22], [39], [41], [42]–[43], [44], [46], [53], [52], [55], [57], [59], [60].

Лекция 4

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ. ТЕОРИЯ ЛЮСТЕРНИКА–ШНИРЕЛЬМАНА

В этой лекции мы акцентируем внимание на рассмотрение вариационных задач для функционалов при некоторых дополнительных ограничениях, т. е. рассмотрим вариационную задачу на условный экстремум.

§ 1. Введение

Довольно часто тот функционал, который непосредственно соответствует исходной нелинейной краевой задаче не является ограниченным не снизу не сверху, поэтому, естественно, у него нет экстремальных точек на заданном банаховом пространстве, но, с другой стороны, исходной краевой задаче можно сопоставить вариационную задачу на условный экстремум такую, что будут выполнены все условия теоремы 4 предыдущей лекции и с необходимостью экстремаль этой вариационной задачи будет удовлетворять уравнению Лагранжа. Кроме того, мы рассмотрим в этой лекции теорию Люстерника–Шнирельмана.

§ 2. Уравнение Лагранжа

Пусть

$$\varphi : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1 \quad \text{и} \quad \psi : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$$

— это функционалы, определенные на банаховом пространстве $\mathbb{B}$. Рассмотрим многообразие в $\mathbb{B}$, задаваемое уравнением

$$\mathrm{V}_c \equiv \{u \in \mathbb{B} : \ \varphi(u) = c\} \quad \text{при} \quad c \in \mathbb{R}^1.$$

Теперь мы можем дать определение условного экстремума.

Определение 1. *Точка $u_0 \in \mathrm{V}_c$ называется точкой минимума (максимума) функционала ψ относительно многообразия V_c, если найдется такая окрестность*

$$\mathrm{U}(u_0) \equiv \{u \in \mathbb{B} : \ \|u - u_0\| \leqslant r\}$$

при некотором $r > 0$, что

$$\psi(u) \geqslant \psi(u_0) \ (\leqslant \psi(u_0)) \quad \textit{для всех} \quad u \in \mathrm{V}_c \cap \mathrm{U}(u_0).$$

Далее мы будем рассматривать тот важный случай, когда функционалы ψ и φ являются дифференцируемыми по Фреше в точке $u_0 \in \mathrm{V}_c$. Дадим определения.

Определение 2. *Точка $u_0 \in \mathrm{V}_c$ называется обыкновенной точкой многообразия V_c, если*

$$\left\|\varphi_f^{'}(u_0)\right\|_* > 0.$$

Определение 3. *Точка $u_0 \in \mathrm{V}_c$ называется условно критической точкой функционала ψ относительно многообразия V_c, если найдется такое число $\mu \in \mathbb{R}^1$, что*

$$\psi_f^{'}(u_0) = \mu\varphi_f^{'}(u_0).$$

Справедлива следующая важная теорема — основная для данной лекции.

Теорема 1. *Пусть функционалы φ и ψ являются дифференцируемыми по Фреше в точке $u_0 \in \mathbb{B}$, причем точка $u_0 \in \mathbb{B}$ является обыкновенной точкой многообразия $\varphi(u) = \varphi(u_0)$:*

$$\left\|\varphi_f^{'}(u_0)\right\|_* > 0,$$

тогда, если точка $u_0 \in \mathbb{B}$ является точкой условного экстремума функционала ψ относительно многообразия

$$\mathrm{V}_{c_0} \equiv \{u \in \mathbb{B} :\ \varphi(u) = \varphi(u_0) = c_0\},$$

то точка $u_0 \in \mathrm{V}_{c_0}$ является условно критической, т. е. найдется такое $\mu \in \mathbb{R}^1$, что

$$\psi_f^{'}(u_0) = \mu\varphi_f^{'}(u_0).$$

Доказательство.

Доказательство в общем случае будет предложено в следующем параграфе в связи с рассмотрением теории категорий Люстерника–Шнирельмана, а сейчас мы докажем ее для одного важного случая, когда $\mathbb{B} = H$ — это вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, а функционал $\varphi(u) = (u,u)$, а точка $u_0 \in \mathbb{S}_a$:

$$\mathbb{S}_a \equiv \left\{u \in H : \varphi(u) = (u,u) = a^2\right\} \quad \text{при} \quad a > 0.$$

Прежде всего докажем, что каждая точка сферы $\mathbb{S}_a$ является обыкновенной точкой. Действительно, введем изометрический оператор Рисса–Фреше

$$\mathrm{J} : H^* \to H,$$

который существует в силу известной теоремы Рисса о представлении линейного непрерывного функционала над гильбертовым пространством, то справедливо равенство

$$\langle f, u\rangle = (\mathrm{J}f, u) \quad \text{для всех} \quad f \in H^*, \quad u \in H,$$

$$\varphi(u+h) - \varphi(u) = (u+h, u+h) - (u,u) = \\ = 2(u,h) + (h,h) = 2\langle \mathrm{J}^{-1}u, h\rangle + \|h\|^2,$$

т. е.

$$\varphi_f'(u) = 2\mathrm{J}^{-1}u \Rightarrow \left\|\varphi_f'(u)\right\|_* = 2\|\mathrm{J}^{-1}u\|_* = 2\|u\| = 2a > 0.$$

Предположим, что точка $u_0 \in H$ является точкой условного экстремума функционала

$$\psi : H \to \mathbb{R}^1$$

относительно многообразия $\mathbb{S}_a$. Докажем, что в этом случае найдется такое число $\mu \in \mathbb{R}^1$, что

$$\psi_f'(u_0) = \frac{\mu}{2}\varphi_f'(u_0) = \mu \mathrm{J}^{-1}u_0.$$

Введем оператор градиента Фреше

$$\mathbf{grad}\,\psi(u_0) = \mathrm{J}\psi_f'(u_0),$$

тогда нам нужно доказать следующее равенство:

$$\mathbf{grad}\,\psi(u_0) = \mu u_0. \tag{2.1}$$

С этой целью рассмотрим одномерное подпространство $H_1 \subset H$, где

$$H_1 \equiv \left\{\lambda u_0 : \ \lambda \in \mathbb{R}^1\right\}.$$

Пусть H_2 — это ортогональное дополнение H_1 в H, т. е. для H имеет место ортогональное разложение:

$$H = H_1 \oplus H_2.$$

Пусть, кроме того, $h \in H_2$ — это произвольный вектор, принадлежащий сфере $\mathbb{S}_a$, т. е. $\|h\| = a > 0$. Рассмотрим теперь следующий вектор:

$$u = (1 + \alpha\varepsilon)u_0 + \varepsilon h. \tag{2.2}$$

Потребуем, чтобы этот вектор лежал на сфере $\mathbb{S}_a$:

$$\|u\|^2 = a^2 \Rightarrow (1 + \varepsilon\alpha)^2 a^2 + \varepsilon^2 a^2 = a^2,$$

где мы воспользовались тем, что $u_0 \perp h$. Таким образом, приходим к следующему уравнению:

$$(1+\varepsilon\alpha)^2+\varepsilon^2=1 \Rightarrow \varepsilon\alpha^2+2\alpha+\varepsilon=0 \Rightarrow \alpha_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}.$$

Из этих двух корней выбираем

$$\alpha=\frac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}.$$

Заметим, что

$$\alpha=-\frac{1}{2}\varepsilon+\overline{\overline{o}}(\varepsilon) \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0.$$

Теперь, поскольку функционал

$$\psi(u): H\to\mathbb{R}^1$$

является (по условию) дифференцируемым по Фреше в точке $u_0\in\mathbb{S}_a$, то для всех $u\in\mathbb{S}_a$ вида (2.2) справедливо представление

$$\psi(u)-\psi(u_0)=\left\langle\psi'_f(u_0), u-u_0\right\rangle+ \\ +\omega(u_0,u-u_0)=(\mathbf{grad}\,\psi(u_0),u-u_0)+\omega(u_0,u-u_0), \quad (2.3)$$

из которого в силу (2.2) получим равенство

$$\psi(u)-\psi(u_0)=(\mathbf{grad}(u_0),\alpha\varepsilon u_0+\varepsilon h)+\omega(u_0,\alpha\varepsilon u_0+\varepsilon h),$$

причем

$$\alpha\varepsilon=\overline{\overline{o}}(\varepsilon) \quad \text{и} \quad \omega(u_0,\alpha\varepsilon u_0+\varepsilon h)=\overline{\overline{o}}(\varepsilon),$$

поэтому приходим к равенству

$$\psi(u)-\psi(u_0)=\varepsilon\,(\mathbf{grad}\,\psi(u_0),h)+\overline{\overline{o}}(\varepsilon).$$

Но по условию теоремы в точке $u=u_0\in\mathbb{S}_a$ у функционала ψ имеется условный экстремум относительно сферы $\mathbb{S}_a$, поэтому при достаточно малом $\varepsilon>0$ знак левой части должен сохранятся для всех $u\in\mathbb{S}_a$ с такими малыми $\varepsilon>0$, но это с необходимостью возможно при условии, что

$$(\mathbf{grad}\,\psi(u_0),h)=0 \quad \text{для всех} \quad h\in H_2,$$

т. е.

$$\mathbf{grad}\,\psi(u_0)\in H_1 \Rightarrow \mathbf{grad}\,\psi(u_0)=\mu u_0 \quad \text{при некотором} \quad \mu\in\mathbb{R}^1.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь один пример.

П Р И М Е Р 1. Рассмотрим следующую нелинейную краевую задачу:

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2}u & \text{в} \quad \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 3)$ — это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{(2,\delta)}$ при $\delta \in (0, 1]$. Предположим также, что

$$2 < p < \frac{2N}{N-2}, \tag{2.5}$$

тогда в силу теоремы вложения С. Л. Соболева имеет место вполне непрерывное вложение

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega) \quad \text{при} \quad N \geqslant 3.$$

Прежде чем приступать к исследованию этой краевой задачи заметим, что функционал

$$\mathrm{E}(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |Du|^2\, dx + \frac{\lambda}{2}\int\limits_{\Omega} |u|^2\, dx - \frac{1}{p}\int\limits_{\Omega} |u|^p\, dx,$$

производная Фреше $\mathbb{E}_f^{'}(u)$ которого удовлетворяет уравнению

$$\left\langle \mathrm{E}_f^{'}(u), v \right\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad v \in H_0^1(\Omega)$$

и это и есть слабая постановка задачи (2.4), однако, этот функционал не является ограниченным не снизу не сверху, и поэтому, естественно, он не достигает ни минимума ни максимума на $H_0^1(\Omega)$. Тем не менее, рассматриваемая нелинейная краевая задача допускает вариационную постановку на *условный экстремум*. Но сначала, как всегда, дадим определение слабого решения краевой задачи (2.4).

О п р е д е л е н и е 4. *Слабым решением задачи* (2.4) *назовем функцию* $u \in H_0^1(\Omega)$, *удовлетворяющую следующему равенству*:

$$\left\langle -\Delta u + \lambda u - |u|^{p-2}u, v \right\rangle = 0 \quad \textit{для всех} \quad v \in H_0^1(\Omega), \tag{2.6}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *— это скобки двойственности между гильбертовыми пространствами* $H_0^1(\Omega)$ *и* $H^{-1}(\Omega)$.

Заметим, что в примере 2 четвертой лекции нами было доказано, что оператор

$$\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p^{'}}(\Omega) \quad \text{при} \quad p \geqslant 2.$$

Но при $p = 2$ оператор $\Delta_p = \Delta$, поэтому

$$\Delta : H_0^1(\Omega) \equiv W_0^{1,2}(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) \equiv W^{-1,2}(\Omega). \tag{2.7}$$

Теперь заметим, что имеет место следующая цепочка плотных вложений:

$$H_0^1(\Omega) \overset{ds}{\subset} L^p(\Omega) \overset{ds}{\subset} L^2(\Omega) \overset{ds}{\subset} L^{p'}(\Omega) \overset{ds}{\subset} H^{-1}(\Omega) \quad \text{при} \quad p \in [2, 2^*)\,. \qquad (2.8)$$

Действительно, это следствие теоремы 3 второй лекции, поскольку $H_0^1(\Omega)$, $L^p(\Omega)$ при указанных условиях рефлексивные пространства, причем имеют место следующие плотные вложения:

$$H_0^1(\Omega) \overset{ds}{\subset} L^p(\Omega) \Rightarrow L^{p'}(\Omega) \overset{ds}{\subset} H^{-1}(\Omega),$$

$$L^p(\Omega) \overset{ds}{\subset} L^2(\Omega) \Rightarrow L^2(\Omega) \overset{ds}{\subset} L^{p'}(\Omega).$$

Кроме того, в силу теоремы 4 второй лекции имеют место следующие равенства:

$$\langle f, u\rangle = \int\limits_{\Omega} f(x)u(x)\,dx \quad \text{для всех} \quad u(x) \in H_0^1(\Omega),\ f(x) \in L^{p'}(\Omega) \overset{ds}{\subset} H^{-1}(\Omega),$$

$$\langle f, u\rangle = \int\limits_{\Omega} f(x)u(x)\,dx \quad \text{для всех} \quad u(x) \in H_0^1(\Omega),\ f(x) \in L^2(\Omega) \overset{ds}{\subset} H^{-1}(\Omega).$$

Теперь заметим, что нелинейный оператор

$$|u|^{p-2}u : L^p(\Omega) \to L^{p'}(\Omega) \quad \text{при} \quad p > 2, \quad p' = \frac{p}{p-1}.$$

Действительно,

$$\int\limits_{\Omega} \Big||u(x)|^{p-2}u(x)\Big|^{p'}\,dx = \int\limits_{\Omega} |u(x)|^{(p-1)p'}\,dx = \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p\,dx.$$

Следовательно,

$$|u|^{p-2}u : H_0^1(\Omega) \overset{ds}{\subset} L^p(\Omega) \to L^{p'}(\Omega) \overset{ds}{\subset} H^{-1}(\Omega).$$

Наконец, единичный оператор

$$\mathrm{I}u : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega),$$

но опять в силу цепочки вложений (2.8) приходим к выводу, что

$$\mathrm{I}u : H_0^1(\Omega) \overset{ds}{\subset} L^2(\Omega) \to L^2(\Omega) \overset{ds}{\subset} H^{-1}(\Omega).$$

Таким образом, приходим к выводу, что при условии (2.5) нелинейный оператор

$$-\Delta u + \lambda u - |u|^{p-2}u : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega).$$

Поэтому определение 4 слабого решения корректно.

Теперь сопоставим краевой задаче (2.6), понимаемой в слабом смысле (2.6) следующую вариационную задачу на условный экстремум. Рассмотрим функционал

$$\psi(u) \equiv \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \Big(|Du(x)|^2 + \lambda|u(x)|^2\Big)\, dx \tag{2.9}$$

на гильбертовом пространстве $H_0^1(\Omega)$ и многообразие

$$\mathrm{V} \equiv \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \varphi(u) \equiv \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p\, dx = 1 \right\}. \tag{2.10}$$

Прежде всего проверим, что функционал $\psi(u)$ слабо секвенциально полунепрерывным снизу на V. Итак, пусть

$$\{u_n\} \subset \mathrm{V} \subset H_0^1(\Omega),$$

причем

$$u_n \rightharpoonup u \in \mathrm{V} \quad \text{слабо в} \quad H_0^1(\Omega),$$

но тогда

$$\liminf_{n\to+\infty} \psi(u_n) \geqslant \psi(u).$$

Действительно, это следствие того факта, что

$$\liminf_{n\to+\infty} \int\limits_{\Omega} |Du_n(x)|^2\, dx \geqslant \int\limits_{\Omega} |Du(x)|^2\, dx,$$

поскольку

$$\left(\int\limits_{\Omega} |Du(x)|^2\, dx\right)^{1/2}$$

— это норма на $H_0^1(\Omega)$. Кроме того, в силу теоремы вложения С. Л. Соболева имеет место вполне непрерывное вложение

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega),$$

поэтому

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega).$$

Значит,

$$\lambda\int\limits_{\Omega} |u_n(x)|^2\, dx \to \lambda\int\limits_{\Omega} |u(x)|^2\, dx \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Слабая секвенциальная полунепрерывность снизу для функционала ψ доказана.

Теперь докажем, что множество V слабо замкнуто. Действительно, пусть $\{u_n\} \subset \mathrm{V}$ и

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad H_0^1(\Omega),$$

но по предположению (2.5) имеет место следующее вполне непрерывное вложение:

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega),$$

поэтому

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega),$$

но тогда

$$1 = \int\limits_\Omega |u_n(x)|^p\,dx \to \int\limits_\Omega |u(x)|^p\,dx.$$

Значит,

$$\int\limits_\Omega |u(x)|^p\,dx = 1,$$

т. е. $u \in \mathrm{V}$. Тем самым, слабая замкнутость доказана.

Теперь докажем слабую коэрцитивность функционала $\psi(u)$ на V. Действительно, в силу неравенства Фридрихса имеет место следующее неравенство:

$$\int\limits_\Omega |Du(x)|^2\,dx \geqslant \lambda_1 \int\limits_\Omega |u(x)|^2\,dx \quad \text{для всех} \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

где $0 < \lambda_1$ — это первое собственное значение оператора $-\Delta$ с однородным условием Дирихле. Поэтому для функционала $\psi(u)$ при $\lambda \in (-\lambda_1, 0)$ справедлива следующая оценка снизу:

$$\psi(u) \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |Du(x)|^2\,dx + \frac{\lambda}{2\lambda_1}\int\limits_\Omega |Du(x)|^2\,dx = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\int\limits_\Omega |Du(x)|^2\,dx.$$

А в случае $\lambda \geqslant 0$ коэрцитивность этого функционала очевидна. Поэтому функционал $\psi(u)$ слабо коэрцитивен при условии, что

$$\lambda > -\lambda_1.$$

Осталось проверить, что все точки многообразия V являются обыкновенными. Действительно, рассмотрим функционал

$$\varphi(u) = \int\limits_\Omega |u(x)|^p\,dx : \quad L^p(\Omega) \to \mathbb{R}^1.$$

Его производная Фреше имеет вид

$$\varphi_f'(u) = p|u|^{p-2}u \in L^{p'}(\Omega).$$

С одной стороны,

$$\left\|\varphi_f'(u)\right\|_* = \sup_{\|Dv\|_2 \leqslant 1} \left|\left\langle \varphi_f'(u), v\right\rangle\right|.$$

С другой стороны, заметим, что

$$\left\langle \varphi_f'(u), u\right\rangle = p\int_\Omega |u(x)|^p\,dx = p > 0 \quad \text{на} \quad \mathrm{V}.$$

Поэтому

$$\left\|\varphi_f'(u)\right\|_* = \sup_{\|Dv\|_2 \leqslant 1} \left|\left\langle \varphi_f'(u), v\right\rangle\right| \geqslant$$
$$\geqslant c\left|\left\langle \varphi_f'(u), u\right\rangle\right| = cp > 0 \quad \text{для всех} \quad u \in \mathrm{V},$$

где $c > 0$ — это некоторая постоянная, не зависящая от $u \in \mathrm{V}$. Тем самым, выполнены все условия теоремы 4 четвертой лекции, а значит, найдется такая точка $u_0 \in \mathrm{V}$, в которой у функционала ψ достигается минимум. Кроме того, отсюда вытекает выполнимость всех условий теоремы 1 настоящей лекции. Следовательно, найдется такое число $\mu \in \mathbb{R}^1$, что будет выполнено следующее равенство:

$$\left\langle \psi_f'(u_0) - \mu\varphi_f'(u_0), v\right\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad v \in H_0^1(\Omega),$$

но это равенство есть не что иное, как следующее равенство:

$$\left\langle -\Delta u_0 + \lambda u_0 - \mu|u_0|^{p-2}u_0, v\right\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.11}$$

Теперь докажем, что $\mu > 0$. Действительно, положим в равенстве (2.11) $v = u_0 \in H_0^1(\Omega)$, тогда после «интегрирования по частям» получим равенства

$$2\psi(u_0) = \int_\Omega \left[|Du_0(x)|^2 + \lambda|u_0(x)|^2\right]\,dx = \mu\int_\Omega |u_0(x)|^p\,dx = \mu,$$

поскольку $u_0 \in \mathrm{V}$. Но, как мы доказали, $\psi(u_0) > 0$, следовательно, и $\mu > 0$. Теперь осталось сделать замену

$$u_0 = c_1 u, \quad c_1 = \left(\frac{1}{\mu p}\right)^{1/(p-2)},$$

чтобы прийти к равенству (2.6).

Тем самым, нелинейная краевая задача (2.4) разрешима в слабом обобщенном смысле при $\lambda > -\lambda_1$.

§ 3. Теория категорий Люстерника–Шнирельмана

В данном параграфе мы рассмотрим важную в приложениях теорию категорий Люстерника–Шнирельмана и ее применение к дифференцируемым по Фреше на $\mathbb{B}$ функционалам. Сначала дадим определение *стягиваемого множества*. Пусть $\mathbb{X}$ — это отделимое топологическое пространство, т. е. *Хаусдорфово* пространство.

Определение 5. *Подмножество $A \subset \mathbb{X}$ называется стягиваемым на $\mathbb{X}$ множеством, если найдется такая функция* (*деформация*):

$$h(t, u) : [0, 1] \times A \to \mathbb{X}$$

класса $\mathbb{C}([0, 1] \times A; \mathbb{X})$ и такая точка $\widehat{u} \in \mathbb{X}$, что

$$h(0, u) = u \quad \text{и} \quad h(1, u) = \widehat{u} \in \mathbb{X} \quad \text{для всех} \quad u \in A.$$

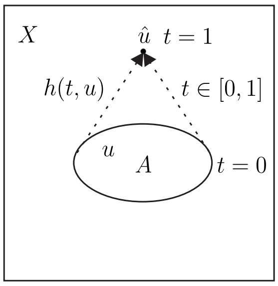

Рис. 2. Стягиваемое множество A.

Теперь мы можем дать определение категории множества $A \subset \mathbb{X}$ относительно Хаусдорфова пространства $\mathbb{X}$.

Определение 6. *Категорией множества $A \subset \mathbb{X}$ как подмножества Хаусдорфова пространства $\mathbb{X}$ называется отображение*

$$\mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(A) : \ 2^{\mathbb{X}} \to \mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\},$$

удовлетворяющее следующим условиям:

(i) $\mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(\varnothing) = 0$;

(ii) $\mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(A) = \min \left\{ k \in \mathbb{N} : \ A \subset \bigcup_{m=1}^{k} \mathrm{A}_m \right\}$, *где каждое множество $A_m \subset \mathbb{X}$ является замкнутым и стягиваемым в $\mathbb{X}$*;

(iii) $\mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(A) = +\infty$, *если нет конечного покрытия.*

Категория $\mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(A)$ множества $A \subset \mathbb{X}$ по отношению к $\mathbb{X}$ обладает следующим набором свойств:

Теорема 2. *Пусть $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ — это два Хаусдорфовых пространства. Справедливы следующие свойства*:

(i) *если $A \subset C$, то $\mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(A) \subset \mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(C)$*;

(ii) $\mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(A \cup C) \leqslant \mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(A) + \mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(C)$;
(iii) $\mathrm{cat}_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}}(A \times \{z\}) = \mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(A)$ *для каждой точки* $z \in \mathbb{Y}$;
(iv) $\mathrm{cat}_X(A) = \mathrm{cat}_X(\overline{A})$;
(v) *если* $\eta : A \to \mathbb{X}$ *является гомеоморфизмом, гомотопичным тождественному отображению* id_A *на* $A \subset \mathbb{X}$, *тогда имеет место неравенство* $\mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(A) \leqslant \mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(\eta(A))$.

Доказательство.

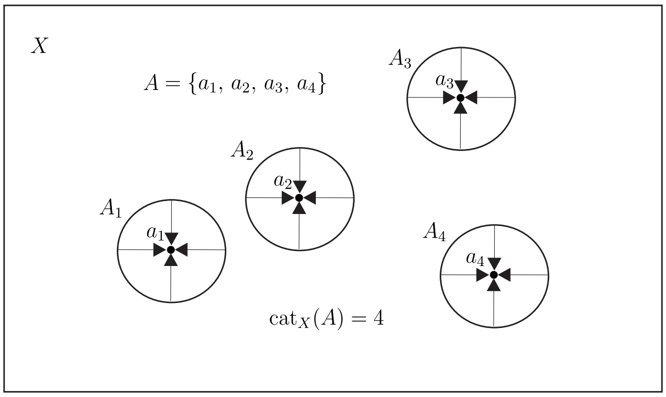

Рис. 3. Категория множества A.

1. Первое свойство вытекает из тех соображений, что покрытие множества C является покрытием множества A.

2. Второе свойство вытекает из того, что объединение покрытий A и C является покрытием и их объединения $A \cup C$.

3. Третье свойство доказывается следующим образом. Пусть $\mathrm{cat}_{\mathbb{B}}(A) = k < +\infty$, поскольку в противном случае и $\mathrm{cat}_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}}(A \times \{z\}) = +\infty$. Пусть

$$\bigcup_{m=1}^{k} A_m$$

— это покрытие множества A. Но тогда, поскольку $\{z\}$ — это замкнутое множество в $\mathbb{Y}$, имеем

$$\bigcup_{m=1}^{k} (A_m \times \{z\})$$

— это покрытие множества $A \times \{z\}$ и обратное тоже верно.

4. Доказательство четвертого свойства основано на том, что, во–первых, $A \subset \overline{A}$, а во–вторых, любое покрытие замкнутыми множествами $\{A_m\}_{m=1}^{n}$ множества A являются согласно определению замыкания $\overline{A}$ и покрытиями множества $\overline{A}$.

5. Приступим к доказательству пятого свойства. Прежде всего предположим, что множество A замкнуто, поскольку в силу четвертого свойства

$$\operatorname{cat}_X(A) = \operatorname{cat}_X(\overline{A}).$$

Итак, пусть

$$\operatorname{cat}_{\mathbb{X}}(\eta(A)) = k < +\infty,$$

поскольку в противном случае сразу же приходим к утверждению.

Пусть $\{C_m\}_{m=1}^k$ замкнутые и стягиваемые в $\mathbb{X}$ множества, покрывающие множество $\eta(A)$ и для которых в силу стягиваемости определены деформации

$$h_m(t,u) \in \mathbb{C}([0,1] \times C_m; \mathbb{X}).$$

Поскольку отображение $\eta : A \to \mathbb{X}$ гомотопично тождественному отображению id_A, то существует такая деформация $h(t,u)$, что

$$h(0,\cdot) = \mathrm{id}_A, \quad h(1,\cdot) = \eta.$$

Введем обозначение:

$$h_{(1)}(\cdot) \equiv h(1,\cdot).$$

Рассмотрим множества

$$A_m = h_{(1)}^{-1}(C_m) \quad \text{при} \quad m = \overline{1,k}.$$

Множества $\{A_m\}_{m=1}^k$ образуют замкнутое покрытие множества A в силу гомеоморфности отображения η. Ясно, что вместе с семейством замкнутых множеств $\{A_m\}$ семейство $\{A_m \cap A\}$ тоже замкнутое покрытие замкнутого множества A.

Докажем, что все эти множества являются стягиваемыми в $\mathbb{X}$. Действительно, рассмотрим следующую деформацию:

$$\widehat{h}_m(t,u) = \begin{cases} h(2t,u) & \text{при} \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ h_m(2t-1, h_{(1)}(u)), & \text{при} \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Понятно, что

$$\widehat{h}_m(t,u) : [0,1] \times A_m \cap A \to \mathbb{X}$$

$$\widehat{h}_m(0,\cdot) = \mathrm{id}_{A_m \cap A}, \quad \widehat{h}_m(1,\cdot) = h_m(1, h_{(1)}(u)) = h_m(1,\eta(u)) = \widehat{u}_m \in \mathbb{X}.$$

Осталось доказать, что

$$\widehat{h}_m(t,u) \in \mathbb{C}([0,1] \times A_m \cap A; \mathbb{X}).$$

Но это сразу же следует из определения деформаций $h(t,u)$ и $h_m(t,u)$ и следующего равенства

$$h(1,u) = \eta(u) = h_{(1)}(u) = \eta(u) = h_m(0, h_{(1)}(u)) \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{X}.$$

Тем самым, семейство множеств $\{A_m \cap A\}_{m=1}^k$ является стягиваемым в $\mathbb{X}$. Следовательно,

$$\mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(A) \leqslant k = \mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(\eta(A)).$$

Теорема доказана.

Дадим определение *ретракции*. Пусть X — топологическое пространство и $A \subset X$.

Определение 7. *Непрерывное отображение*

$$r : X \to A$$

называется ретракцией, если

$$r|_A = \mathrm{id}_A,$$

а множество A ретрактом X.

ПРИМЕР 2. Пусть X — топологическое пространство, тогда любая его точка x является ретрактом X. Действительно, проекция

$$r : X \to x$$

является непрерывным отображением топологического пространства X в топологическое пространство X. Проверьте это в терминах окрестностей.

ПРИМЕР 3. Пусть $Z = X \times Y$ и $p \in X$, $q \in Y$ — фиксированные точки. Рассмотрим множества $A = X \times q$ и $B = p \times Y$. Рассмотрим следующие отображения:

$$r_X : (x, y) \to (x, q), \quad r_Y : (x, y) \to (p, y).$$

Эти отображения являются непрерывными отображениями из $X \times Y$ в $X \times Y$ и поэтому, очевидно, являются ретракциями, а A и B ретракты $X \times Y$.

Наконец, дадим определение *Абсолютного Окрестностного Ретрактора* или ANR.

Определение 8. *Топологическое пространство X называется ANR, если для всякого нормального пространства $Y \supset X$, в котором X замкнуто в Y, X ретракт Y.*

Справедлива следующая важная теорема.

Теорема 3. *Пусть метрическое пространство $\mathbb{X}$ является* ANR *и $A \subset \mathbb{X}$ — это произвольное замкнутое множество, тогда найдется такая окрестность* $\mathrm{U} \subset \mathbb{X}$ *множества A, что имеет место следующее равенство:*

$$\mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(A) = \mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(\overline{\mathrm{U}}).$$

Доказательство.

1. Итак, пусть $\mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(A) = k < +\infty$, поскольку в противном случае утверждение теоремы вытекает из теоремы 2.

Пусть $\{A_m\}_{m=1}^{k}$ — это замкнутое покрытие множества A, причем каждое A_m является стягиваемым в $\mathbb{X}$, т. е. существует такая деформация

$$h_m(t, u) \in \mathbb{C}([0, 1] \times A_m; \mathbb{X}),$$

что

$$h_m(0, u) = u \quad \text{и} \quad h_m(1, u) = \widehat{u}_m \in \mathbb{X} \quad \text{для всех} \quad u \in A_m.$$

2. Докажем, что для каждого множества A_m найдется такая его окрестность U_m, что ее замыкание $\overline{\mathrm{U}}_m$ стягиваемо в $\mathbb{X}$. Действительно, рассмотрим следующее декартово произведение метрических пространств

$$\mathbb{Y} \equiv [0, 1] \times \mathbb{X}.$$

Рассмотрим замкнутое подмножество этого метрического пространства:

$$\mathrm{E}_m \equiv \{[0, 1] \times A_m\} \cup \{\{0\} \times \mathbb{X}\} \cup \{\{1\} \times \mathbb{X}\}.$$

Замечание 1. Отметим, что замкнутые множества $\{\{0\} \times \mathbb{X}\}$ и $\{1\} \times \mathbb{X}$ являются ретрактами $[0, 1] \times X$. Поскольку A_m стягиваемо в X, то $[0, 1] \times A_m$ тоже ретракт в $[0, 1] \times X$.

Рассмотрим на этом замкнутом множестве непрерывную функцию

$$u_m(t, u) = \begin{cases} h_m(t, u) & \text{при} \quad t \in [0, 1], \ u \in A_m; \\ u & \text{при} \quad t = 0, \ u \in \mathbb{X}; \\ \widehat{u}_m & \text{при} \quad t = 1, \ u \in \mathbb{X}. \end{cases}$$

3. Поскольку $\mathbb{X}$ — это ANR, то $[0, 1] \times \mathbb{X}$ — это тоже ANR. Поэтому найдется такая окрестность $\mathrm{V}_m \subset [0, 1] \times \mathbb{X}$ множества E_m, что функция u_m допускает непрерывное продолжение

$$\overline{u}_m(t, u) \in \mathbb{C}(\overline{\mathrm{V}}_m; \mathbb{X}).$$

Следовательно, найдется такая замкнутая окрестность $\overline{\mathrm{U}}_m$ множества A_m, что $[0, 1] \times \overline{\mathrm{U}}_m \subset \overline{\mathrm{V}}_m$. Причем

$$\overline{u}_m(0, u) = u \quad \text{и} \quad \overline{u}_m(1, u) = \widehat{u}_m \in \mathbb{X} \quad \text{для всех} \quad u \in \overline{\mathrm{U}}_m,$$

т. е. замкнутые множества $\overline{\mathrm{U}}_m$ при $m = \overline{1, k}$ являются стягиваемыми в $\mathbb{X}$, причем

$$\overline{\mathrm{U}} = \bigcup_{m=1}^{k} \overline{\mathrm{U}}_m \supset \bigcup_{m=1}^{k} A_m \supset A.$$

и

$$k = \mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(A) \leqslant \mathrm{cat}_{\mathbb{X}} \overline{\mathrm{U}} \leqslant k \Rightarrow \mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(A) = \mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(\overline{\mathrm{U}}).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь ряд примеров.

ПРИМЕР 4. Пусть $\mathbb{X} = \mathbb{B}$ — это банахово пространство, а

$$A = \overline{B_R(0)} \equiv \{u \in \mathbb{B} : \ \|u\| \leqslant R\}.$$

Очевидно, что множество A замкнуто в $\mathbb{B}$. Докажем, что оно стягиваемо в $\mathbb{B}$. Действительно, рассмотрим следующую деформацию:

$$h(t, u) = (1 - t)u \in \mathbb{C}([0, 1] \times A; \mathbb{B}).$$

Ясно, что

$$h(0, u) = u \quad \text{и} \quad h(1, u) = \vartheta \in \mathbb{B} \quad \text{для всех} \quad u \in A.$$

Стало быть,

$$\operatorname{cat}_{\mathbb{B}} \left(\overline{B_R(0)}\right) = 1.$$

Следующий пример очень важен нам для дальнейшего.

ПРИМЕР 5. Символом $\mathbb{S}^{N-1}$ обозначим единичную сферу в эвклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$:

$$\mathbb{S}^{N-1} \equiv \left\{x \in \mathbb{R}^N : \ \|x\|_N = 1\right\}.$$

Символом $\mathbb{P}^{N-1}$ обозначим следующее множество:

$$\mathbb{P}^{N-1} \equiv \left\{(x, -x) = (-x, x); \ x \in \mathbb{S}^{N-1}\right\},$$

которое называется $(N - 1)$−мерным *проективным пространством*.

Замечание 2. Заметим, что при отображении «склейки» диаметрально противоположных точек относительно точки $0 \in \mathbb{R}^N$

$$x \in \mathbb{S}^{N-1} \to (x, -x) = (-x, x) \in \mathbb{P}^{N-1}$$

мы отождествляет все точки, лежащие на пересечении единичной сферы и прямой, проходящей через начало координат.

Справедливо следующее равенство:

$$\operatorname{cat}_{\mathbb{P}^{N-1}}(\mathbb{P}^{N-1}) = N, \tag{3.1}$$

доказательство которого выходит за рамки настоящей книги.

Пусть теперь $\mathbb{S}^{\infty}$ — это сфера в банаховом пространстве $\mathbb{B}$:

$$\mathbb{S}^{\infty} \equiv \{u \in \mathbb{B} : \ \|u\| = 1\}$$

и введем соответствующее проективное пространство

$$\mathbb{P}^{\infty} \equiv \{(u, -u) = (-u, u); \ u \in \mathbb{S}^{\infty}\}.$$

Но тогда в силу равенства (3.1) имеет место следующее равенство:

$$\operatorname{cat}_{\mathbb{P}^{\infty}} \left(\mathbb{P}^{\infty} \cap \mathbb{P}^{N-1}\right) = \operatorname{cat}_{\mathbb{P}^{N-1}} \left(\mathbb{P}^{\infty} \cap \mathbb{P}^{N-1}\right) = \operatorname{cat}_{\mathbb{P}^{N-1}} \left(\mathbb{P}^{N-1}\right) = N.$$

Отсюда в силу произвольности $N \in \mathbb{N}$ приходим к выводу, что

$$\operatorname{cat}_{\mathbb{P}^{\infty}} (\mathbb{P}^{\infty}) = +\infty. \tag{3.2}$$

§ 4. Вариационные задачи на условный экстремум

Пусть $\mathbb{B}$ — это вещественное и сепарабельное банахово пространство с сопряженным $\mathbb{B}^*$. Пусть, кроме того,

$$\varphi \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{B}; \mathbb{R}^1),$$

т. е. функционал φ является дважды дифференцируемым по Фреше, причем вторая его производная

$$\varphi''_{ff}(u) : \mathbb{B} \to \mathcal{L}(\mathbb{B}; \mathbb{B}^*)$$

и, кроме того, является непрерывным отображением, т. е.

$$\varphi''_{ff}(u) \in \mathbb{C}(\mathbb{B}; \mathcal{L}(\mathbb{B}; \mathbb{B}^*)).$$

Рассмотрим следующее множество:

$$\mathcal{V} \equiv \{v \in \mathbb{B} : \ \varphi(v) = 1\}, \tag{4.1}$$

причем предположим, что

$$\left\|\varphi'_f(v)\right\|_* > 0 \quad \text{для всех} \quad v \in \mathcal{V}. \tag{4.2}$$

В силу последнего условия множество $\mathcal{V} \subset \mathbb{B}$ является многообразием. Из теории гладких многообразий вытекает, что многообразие $\mathcal{V}$ является $\mathbb{C}^2$−многообразием, причем норма банахова пространства $\mathbb{B}$ индуцирует метрику на этом многообразии и относительно этой метрики многообразие $\mathcal{V}$ является метрическим пространством, удовлетворяющее ANR условию.

Введем теперь *касательное пространство* в точке $v \in \mathcal{V}$:

$$\mathrm{T}_v\mathcal{V} \equiv \left\{u \in \mathbb{B} : \ \left\langle \varphi'_f(v), u \right\rangle = 0\right\}. \tag{4.3}$$

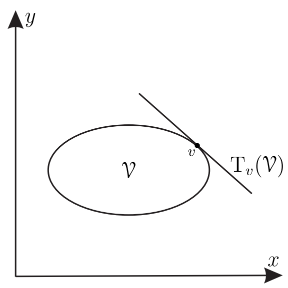

Рис. 4. Касательное многообразие $\mathrm{T}_v\mathcal{V}$.

Замечание 3. Отметим, что это действительно невырожденное касательное пространство, поскольку в силу (4.2) в каждой точке $v \in \in \mathcal{V}$ имеем

$$\varphi'_f(v) \neq 0 \Rightarrow \mathrm{T}_v\mathcal{V} \neq \mathbb{B}.$$

В дальнейшем, как можно заметить, функционал φ и соответствующее многообразие $\mathcal{V}$ являются тем самым ограничением для некоторого функционала ψ, т.е. мы будем рассматривать условный экстремум функционала ψ на многообразии $\mathcal{V}$, порожденном функционалом φ.

Теперь введем в рассмотрение функционал

$$\psi : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1,$$

относительно которого предположим, что он принадлежит классу $\mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B}; \mathbb{R}^1)$, т.е. является дифференцируемым по Фреше на $\mathbb{B}$ и его производная Фреше является непрерывным отображением:

$$\psi'_f(u) \in \mathbb{C}(\mathbb{B}; \mathbb{B}^*).$$

Определение нормы с ограничением. *Норма производной Фреше $\psi'_f(u)$ с ограничением на касательное пространство $\mathrm{T}_v\mathcal{V}$ имеет следующий вид*:

$$\left\|\psi'_f(v)\right\|_* (\mathrm{T}_v\mathcal{V}) \equiv \sup_{\|u\| \leqslant 1,\ u \in \mathrm{T}_v\mathcal{V}} \left|\left\langle \psi'_f(v), u \right\rangle\right|, \tag{4.4}$$

где $v \in \mathcal{V}$.

Замечание 4. Имеет место следующее неравенство:

$$\left\|\psi'_f(v)\right\|_* (\mathrm{T}_v\mathcal{V}) \leqslant \left\|\psi'_f(v)\right\|_*. \tag{4.5}$$

В дальнейшем мы будем постоянно пользоваться следующим неравенством:

$$\langle f^*, w \rangle \leqslant \|f^*\|_* (\mathrm{T}_v\mathcal{V}) \|w\| \quad \text{для всех} \quad w \in \mathrm{T}_v\mathcal{V},$$

которое доказывается следующим образом — в силу (4.4) имеет место неравенство

$$\left\langle f^*, \frac{w}{\|w\|} \right\rangle \leqslant \|f^*\|_* (\mathrm{T}_v\mathcal{V}) \quad \text{для} \quad w \neq \vartheta, \quad w \in \mathrm{T}_v\mathcal{V},$$

поскольку при $w = \vartheta$ доказывать нечего.

Дадим определение.

Определение 9. *Точка $v \in \mathcal{V}$ называется критической точкой функционала ψ по отношению к многообразию $\mathcal{V}$, если имеет место равенство*

$$\left\|\psi'_f(v)\right\|_* (\mathrm{T}_v\mathcal{V}) = 0. \tag{4.6}$$

Замечание 5. Заметим, что многообразие $\mathcal{V}$ искривленно и является, вообще говоря, не банаховым, а только метрическим пространством, то поэтому и необходимое условие экстремума функционала $\psi(u)$ на нем изменилось. И в место условия

$$\psi'_f(u_0) = \vartheta^* \in \mathbb{B}^*, \quad \ker(\vartheta^*) = \mathbb{B}$$

мы имеем условие

$$\psi'_f(u_0) = \vartheta^*_{u_0} \in \mathbb{B}^*, \quad \ker(\vartheta^*_{u_0}) = \ker(\varphi'_f(u_0)) \neq \mathbb{B}.$$

Кроме того, в дальнейшем мы будем пользоваться следующим обозначением:

$$\psi^d \equiv \{v \in \mathcal{V} : \ \psi(v) \leqslant d\}\,. \tag{4.7}$$

Справедлива следующая *лемма о двойственности*.

Лемма 1. *Пусть* $f, g \in \mathbb{B}^*$, *тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\|v\| \leqslant 1,\ \langle g, v\rangle = 0} |\langle f, v\rangle| = \min_{\lambda \in \mathbb{R}^1} \|f - \lambda g\|_*. \tag{4.8}$$

Доказательство.

Действительно, с одной стороны

$$\sup_{\|v\| \leqslant 1,\ \langle g, v\rangle = 0} |\langle f, v\rangle| = \sup_{\|v\| \leqslant 1,\ \langle g, v\rangle = 0} |\langle f - \lambda g, v\rangle|\,,$$

поскольку $\langle g, v\rangle = 0$. С другой стороны,

$$|\langle f - \lambda g, v\rangle| \leqslant \|f - \lambda g\|_* \|v\| \leqslant \|f - \lambda g\|_*,$$

поскольку $\|v\| \leqslant 1$. Кроме того, по теореме Хана–Банаха существует такое продолжение $\overline{f} \in \mathbb{B}^*$ функционала f, что

$$\langle \overline{f}, v\rangle = \langle f, v\rangle \quad \text{для всех} \quad v \in \ker(g), \tag{4.9}$$

т. е. для таких v, что $\langle g, v\rangle = 0$, и имеет место равенство

$$\sup_{\|v\| \leqslant 1,\ \langle g, v\rangle = 0} |\langle f, v\rangle| = \|\overline{f}\|_*.$$

Кроме того, в силу (4.9) имеет место равенство

$$\ker(g) = \ker(\overline{f} - f),$$

из которого в силу линейности функционалов $g, f, \overline{f} \in \mathbb{B}^*$ вытекает существование такого $\lambda_0 \in \mathbb{R}^1$, что

$$\overline{f} - f = \lambda_0 g,$$

но отсюда вытекает, что

$$\|\overline{f}\|_* = \|f - \lambda_0 g\|_*.$$

Лемма доказана.

Из этой леммы сразу же вытекает следующее важное утверждение.
Теорема 4. *Пусть* $\varphi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$ *и* $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$ *и* $u \in \mathcal{V}$, *определенное формулой* (4.1), *тогда имеет место равенство*

$$\left\|\psi'_f(u)\right\|_* (\mathrm{T}_u\mathcal{V}) = \min_{\lambda\in\mathbb{R}^1} \left\|\psi'_f(u) - \lambda\varphi'_f(u)\right\|_*. \tag{4.10}$$

В частности, если $u \in \mathcal{V}$ *— это критическая точка функционала* ψ *относительно многообразия* $\mathcal{V}$, *то найдется такое* $\mu \in \mathbb{R}^1$, *что*

$$\psi'_f(u) - \mu\varphi'_f(u) = \vartheta \in \mathbb{B}^*. \tag{4.11}$$

Доказательство.

Достаточно взять в лемме 1 $f = \psi'_f(u) \in \mathbb{B}^*$ и $g = \varphi'_f(u) \in \mathbb{B}^*$ при фиксированном $u \in \mathbb{B}$ и $\mu = \lambda_0$.

Теорема доказана.

Замечание 6. Доказательство теоремы 4 является обещанным доказательством теоремы 1 в общем случае для функционалов $\varphi, \psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$.

§ 5. Псевдоградиентное векторное поле

Теперь дадим определение псевдоградиентного векторного поля на $\mathcal{V}$. С этой целью рассмотрим следующее подмножество $\mathcal{M} \subset \mathcal{V}$:

$$\mathcal{M} \equiv \left\{u \in \mathcal{V}: \ \left\|\psi'_f(u)\right\|_* (\mathrm{T}_u\mathcal{V}) > 0\right\} \neq \varnothing.$$

Замечание 7. Прежде всего заметим, что поскольку множество дополнительное к $\mathcal{M}$ открыто, то множество $\mathcal{M}$ замкнуто. Можно доказать, что это множество паракомпактно. Кроме того, по смыслу это множество, дополнительное ко множеству условно критических точек функционала $\psi(u)$ относительно многообразия $\mathcal{V}$.

Замечание 8. В дальнейшем мы будем изучать функционалы $\psi \in \mathbb{C}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$, т. е. такие, что

$$\psi'_f(\cdot) \in \mathbb{C}\left(\mathbb{B};\mathbb{B}^*\right).$$

Следовательно, если в некоторой точке $v \in \mathcal{V}$ имеет место неравенство

$$\left\|\psi'_f(v)\right\|_* (\mathrm{T}_u\mathcal{V}) > 0,$$

то и в некоторой малой окрестности из топологии метрического пространства $\mathcal{V}$ будет иметь место это неравенство. В частности, множество $\mathcal{M}$ будет также метрическим пространством относительно стандартной метрики, определяемой следующим стандартным образом: Пусть

$$\Gamma = \left\{ \gamma(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,1];\mathcal{M}) : \ \gamma(0) = u_1, \quad \gamma(1) = u_2 \right\},$$

$$d(u_1, u_2) = \inf_{\gamma(t)\in\Gamma} \int\limits_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt, \quad u_1, u_2 \in \mathcal{M},$$

причем $\dot{\gamma}(t) \in \mathrm{T}_{\gamma(t)}\mathcal{V}$ при $t \in [0,1]$.

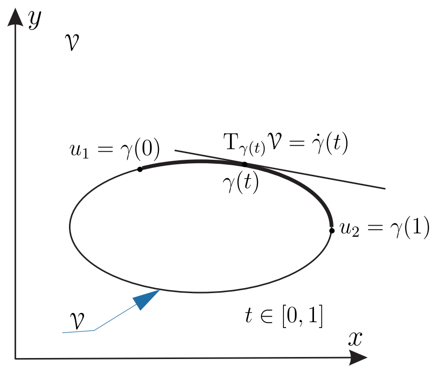

Рис. 5. Касательное многообразие $\mathrm{T}_{\gamma(t)}\mathcal{V}$.

Определение 10. *Локально липшиц–непрерывное на* $\mathcal{M} \subset \subset \mathcal{V} \subset \mathbb{B}$ *отображение*

$$g(\cdot) : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$$

называется псевдоградиентным векторным полем на $\mathcal{M}$, *если* $g(u) \in \in \mathrm{T}_u(\mathcal{V})$ *и для этого отображения выполнены следующие свойства*:

$$\|g(u)\| \leqslant 2 \left\| \psi_f'(u) \right\|_* (\mathrm{T}_u\mathcal{V}), \tag{5.1}$$

$$\left\langle \psi_f'(u), g(u) \right\rangle \geqslant \left\| \psi_f'(u) \right\|_*^2 (\mathrm{T}_u\mathcal{V}) \tag{5.2}$$

для всех $u \in \mathcal{M}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть* $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$ *и* $\varphi \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$, *тогда на* $\mathcal{M}$ *существует псевдоградиентное поле* $g(\cdot) : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$.

Доказательство.

1. Итак, пусть $v \in \mathcal{M} \subset \mathcal{V}$ — это произвольная точка и $\mathrm{T}_v(\mathcal{V})$ — это касательное пространство в этой точке. Напомним, что $x \in \mathrm{T}_v(\mathcal{V})$, если

$$\left\langle \varphi_f'(v), x \right\rangle = 0.$$

Поскольку $\varphi'_f(v) \neq \vartheta \in \mathbb{B}^*$, то найдется такое $x \in \mathrm{T}_v(\mathcal{V})$, что $\|x\| = 1$ и

$$\left\langle \psi'_f(v), x \right\rangle > \frac{2}{3} \left\| \psi'_f(v) \right\|_* (\mathrm{T}_v \mathcal{V}) \,. \tag{5.3}$$

$\square$ Действительно,

$$\psi'_f(v) \neq \vartheta \quad \text{для} \quad v \in \mathcal{M}.$$

Поэтому по следствию из теоремы Хана–Банаха найдется такое $x \in \mathbb{B}$, что

$$\|x\| = 1 \quad \text{и} \quad \left\langle \psi'_f(v), x \right\rangle = \left\| \psi'_f(v) \right\|_* (\mathrm{T}_v \mathcal{V}) \, \|x\| =$$
$$= \left\| \psi'_f(v) \right\|_* (\mathrm{T}_v \mathcal{V}) > \frac{2}{3} \left\| \psi'_f(v) \right\|_* (\mathrm{T}_v \mathcal{V}) \,.$$

Тем самым, неравенство (5.3) доказано. $\boxtimes$

2. По определению многообразия $\mathcal{M}$ в каждой его точке $v \in \mathcal{M}$ имеет место неравенство

$$\psi'_f(v) \neq \vartheta \in \mathbb{B}^*,$$

но тогда в силу того же следствия из теоремы Хана–Банаха вытекает существование такого $z \in \mathrm{T}_v \mathcal{V}$, что

$$\left\langle \psi'_f(v), z \right\rangle = 1. \tag{5.4}$$

$\square$ Действительно, найдется такое $z_1 \in \mathbb{B}$, что имеет место следующее равенство:

$$\left\langle \psi'_f(v), z_1 \right\rangle = \left\| \psi'_f(v) \right\|_* \|z_1\| \quad \text{при} \quad \|z_1\| = 1,$$

т.е.

$$\left\langle \psi'_f(v), z_1 \right\rangle = \left\| \psi'_f(v) \right\|_* .$$

Откуда следует, что если положить

$$z = \frac{z_1}{\left\| \varphi'_f(v) \right\|_*},$$

то получим требуемое равенство. $\boxtimes$

3. Заметим, что эти найденные элементы $x, z \in \mathbb{B}$, естественно, зависят от $v \in \mathcal{M}$. Теперь отметим, что $\varphi \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{B}; \mathbb{R}^1)$, то в окрестности (из топологии метрического пространства $\mathcal{M}$) точки $v \in \mathcal{M} \subset \mathcal{V}$ имеет место следующее разложение:

$$\left\langle \varphi'_f(u), z \right\rangle - \left\langle \varphi'_f(v), z \right\rangle = \left\langle \varphi''_{ff}(v)(u - v), z \right\rangle + \omega(z, v, u - v),$$

где

$$\lim_{\|u-v\|\to 0} \frac{\omega(z,v,u-v)}{\|u-v\|} = 0, \quad u,v \in \mathcal{M}, \quad z \in \mathbb{B},$$

но в силу (5.4) отсюда приходим к равенству

$$\left\langle \varphi_f'(u), z \right\rangle = 1 + \left\langle \varphi_{ff}''(v)(u-v), z \right\rangle + \omega(z,v,u-v),$$

из которого вытекает, что для близких точек $u, v \in \mathcal{M}$ в топологии метрического пространства $\mathcal{M}$ справедливо неравенство

$$\left\langle \varphi_f'(u), z \right\rangle > 0. \tag{5.5}$$

4. Теперь введем следующие обозначения:

$$y = \frac{3}{2} x \left\| \psi_f'(v) \right\|_* (\mathrm{T}_v \mathcal{V}), \quad g_v(u) \equiv y - \frac{\left\langle \varphi_f'(u), y \right\rangle}{\left\langle \psi_f'(u), z \right\rangle} z, \quad g_v(u) \in \mathrm{T}_v \mathcal{V},$$

причем второе равенство рассматривается из достаточно малой окрестности точки $v \in \mathcal{M}$, существование которой следует из (5.5). Заметим теперь, что поскольку

$$x \in \mathrm{T}_v(\mathcal{V}) \Leftrightarrow \left\langle \varphi_f'(v), x \right\rangle = 0,$$

следовательно, поскольку по определению $y \in \mathrm{T}_v(\mathcal{V})$, то и

$$\left\langle \varphi_f'(v), y \right\rangle = 0,$$

но тогда $g_v(v) = y$.

5. Теперь заметим, что в точке $u = v$ отображение $g_v(u)$ удовлетворяет условиям (5.1) и (5.2).

□ Действительно, имеют место следующие выражения

$$\|g_v(v)\| = \|y\| = \frac{3}{2} \|x\| \left\| \psi_f'(v) \right\|_* (\mathrm{T}_v \mathcal{V}) = \\ = \frac{3}{2} \left\| \psi_f'(v) \right\|_* (\mathrm{T}_v \mathcal{V}) < 2 \left\| \psi_f'(v) \right\|_* (\mathrm{T}_v \mathcal{V}),$$

кроме того,

$$\left\langle \psi_f'(v), g_v(v) \right\rangle = \frac{3}{2} \left\langle \psi_f'(v), x \right\rangle \left\| \psi_f'(v) \right\|_* (\mathrm{T}_v \mathcal{V}) > \left\| \psi_f'(v) \right\|_*^2 (\mathrm{T}_v \mathcal{V}) . \boxtimes$$

6. Теперь заметим, что поскольку $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B}; \mathbb{R}^1)$ и $\varphi \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{B}; \mathbb{R}^1)$, то отображение $g_v(u)$ является непрерывным по Липшицу в некоторой окрестности точки $u = v$.

□ Действительно, для этого достаточно доказать локальную непрерывность скалярных функций

$$\left\langle \varphi_f'(u), y \right\rangle \quad \text{и} \quad \left\langle \psi_f'(u), z \right\rangle, \quad \left\langle \psi_f'(u), z \right\rangle = 1$$

в некоторой малой окрестности точки $u = v \in \mathcal{M}$ из топологии метрического пространства $\mathcal{M}$. Это следствие того, что $\varphi \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{B}; \mathbb{R}^1)$ и следующего разложения:

$$\left\langle \varphi_f'(u), w \right\rangle = \left\langle \varphi_f'(v), w \right\rangle + \left\langle \varphi_{ff}''(v)(u-v), w \right\rangle + \omega(w, v, u-v),$$

где

$$\lim_{\|u-v\| \to 0} \frac{|\omega(w, v, u-v)|}{\|u-v\|} = 0, \quad u, v \in \mathcal{M}, \quad w \in \mathbb{B}.$$

Теперь поскольку

$$\varphi_{ff}''(v) \in \mathcal{L}\left(\mathbb{B}; \mathbb{B}^*\right),$$

т. е. при фиксированном $v \in \mathcal{M}$ отображение $\varphi_{ff}''(v)$ является линейным и непрерывным отображением и, значит, ограниченным, поэтому имеет место следующее неравенство:

$$\left| \left\langle \varphi_f'(u), w \right\rangle - \left\langle \varphi_f'(v), w \right\rangle \right| \leqslant \frac{1}{2} \left\| \varphi_{ff}''(v) \right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{B}; \mathbb{B}^*)} \|w\| \|u-v\|$$

при достаточно малой величине $\|u-v\|$, т. е. функция $\left\langle \varphi_f'(u), w \right\rangle$ является липшиц–непрерывной в некоторой малой окрестности точки $v \in \mathcal{V}$. ⊠

7. С другой стороны, $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B}; \mathbb{R}^1)$. Значит, отображение

$$\psi_f'(\cdot) \in \mathbb{C}(\mathbb{B}; \mathbb{B}^*),$$

т. е. непрерывно в некоторой окрестности точки $u = v \in \mathcal{V}$. Следовательно, найдется такая окрестность $\mathcal{N}(v)$ точки $v \in \mathcal{M}$ из топологии метрического пространства $\mathcal{M}$, что будут иметь место следующие неравенства:

$$\|g_v(u)\| \leqslant 2 \left\| \psi_f'(u) \right\|_* (\mathrm{T}_u \mathcal{V}), \tag{5.6}$$

$$\left\langle \psi_f'(u), g_v(u) \right\rangle \geqslant \left\| \psi_f'(u) \right\|_*^2 (\mathrm{T}_u \mathcal{V}) \tag{5.7}$$

для всех $u \in \mathcal{N}(v)$.

8. Рассмотрим теперь семейство

$$\mathcal{W} \equiv \{\mathcal{N}(v);\ v \in \mathcal{M}\}.$$

Это семейство является открытым покрытием метрического пространства $\mathcal{M}$, поэтому в силу паракомпактности $\mathcal{M}$ существует такое локально конечное открытое покрытие метрического пространства $\mathcal{M}$

$$\mathcal{U} \equiv \{\mathcal{N}_i, \ i \in \mathbb{N}\},$$

что для всякого $i \in \mathbb{N}$ найдется такое $v \in \mathcal{V}$, что

$$\overline{\mathcal{N}}_i \subset \mathcal{N}(v).$$

Теперь сопоставим каждому $i \in \mathbb{N}$ некоторое $v_i \in \mathcal{V}$ и соответствующее $\mathcal{N}_i$ и $\mathcal{N}(v_i)$. Тогда введем функцию

$$g_i(u) = \begin{cases} g_{v_i}(u), & \text{при} \quad u \in \mathcal{N}(v_i); \\ 0, & \text{при} \quad u \notin \mathcal{N}(v_i). \end{cases}$$

9. Наконец, введем весовую функцию

$$\rho_i(u) = \mathrm{distance}(u, \mathbb{B}\backslash\mathcal{N}_i), \quad \mathbb{B}\backslash\mathcal{N}_i - \text{замкнуто}.$$

Теперь рассмотрим отображение $g(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, определенное формулой

$$g(u) = \sum_{i=1}^{+\infty} \rho_i(u) g_i(u) \Bigg/ \sum_{j=1}^{+\infty} \rho_j(u).$$

Теперь осталось проверить, что оно удовлетворяет условиям определения 9 псевдоградиентного векторного поля на $\mathcal{M}$.

□ Действительно, для каждого $i \in \mathbb{N}$ и всякого $u \in \mathcal{N}(v_i)$ в силу (5.6) имеет место неравенство

$$\|g_{v_i}(u)\| \leqslant 2 \left\| \psi_f'(u) \right\|_* (\mathrm{T}_u \mathcal{V}).$$

Следовательно,

$$\|g(u)\| \leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \rho_i(u) \|g_i(u)\| \Bigg/ \sum_{j=1}^{+\infty} \rho_j(u) \leqslant 2 \left\| \psi_f'(u) \right\|_* (\mathrm{T}_u \mathcal{V}).$$

Теперь в силу (5.7) имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\left\langle \psi_f'(u), g(u) \right\rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} \rho_i(u) \left\langle \psi_f'(u), g_i(u) \right\rangle \Bigg/ \sum_{j=1}^{+\infty} \rho_j(u) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \rho_i(u) \left\| \psi_f'(u) \right\|_*^2 (\mathrm{T}_u \mathcal{V}) \Bigg/ \sum_{j=1}^{+\infty} \rho_j(u) = \left\| \psi_f'(u) \right\|_*^2 (\mathrm{T}_u \mathcal{V}). \boxtimes$$

Теорема доказана.

§ 6. Лемма о деформации

Теперь докажем следующую важную лемму о деформации.

Лемма о деформации 1. *Пусть* $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$, $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$, $c \in \mathbb{R}^1$ *и* $\varepsilon, \delta > 0$ *таковы, что*

$$\left\|\psi'_f(u)\right\|_* (\mathrm{T}_u\mathcal{V}) \geqslant \frac{8\varepsilon}{\delta} \tag{6.1}$$

для всех

$$u \in \mathcal{A} \equiv \psi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cap \mathcal{S}_{2\delta} \cap \mathcal{V},$$

где

$$\mathcal{S}_{2\delta} \equiv \{u \in \mathbb{B} : \ \mathrm{distance}(u, \mathcal{S}) \leqslant 2\delta\}.$$

Тогда существует такая деформация $\eta(t,u) \in \mathbb{C}([0,1] \times \mathcal{V}; \mathcal{V})$, *что выполнены следующие свойства*:

(i) *либо* $u \in \mathcal{A}$ *и тогда* $\eta(t,u) = u$ *при* $t = 0$ *либо* $u \notin \mathcal{A}$;

(ii) $\eta(1, \psi^{c+\varepsilon} \cap \mathcal{S}) \subset \psi^{c-\varepsilon}$, *где*

$$\psi^{c\pm\varepsilon} \equiv \{u \in \mathbb{B} : \ \psi(u) \leqslant c \pm \varepsilon\};$$

(iii) $\psi(\eta(t,u))$ *является убывающей функцией по* $t \in [0,1]$ *для всех* $u \in \mathcal{V}$.

Доказательство.

1. В силу теоремы 5 на многообразии $\mathcal{M} \equiv \left\{u \in \mathcal{V} : \ \psi'_f(u) \neq \vartheta \in \mathbb{B}^*\right\}$ существует псевдоградиентное векторное поле $g(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, которое по его определению удовлетворяет условиям:

$$\|g(u)\| \leqslant 2\left\|\psi'_f(u)\right\|_* (\mathrm{T}_u\mathcal{V}), \quad \left\langle \psi'_f(u), g(u)\right\rangle \geqslant \left\|\psi'_f(u)\right\|_*^2 (\mathrm{T}_u\mathcal{V})$$

для всех $u \in \mathcal{M}$, в частности, на $\mathcal{S} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{V} \subset \mathbb{B}$.

2. Теперь определим следующие замкнутые множества на $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{A} \equiv \psi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cap \mathcal{S}_{2\delta} \cap \mathcal{V},$$

$$\mathcal{B} \equiv \psi^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]) \cap \mathcal{S}_{\delta} \cap \mathcal{V},$$

где

$$\mathcal{S}_{\delta} \equiv \{u \in \mathbb{B} : \ \mathrm{distance}(u, \mathcal{S}) \leqslant \delta\}.$$

Ясно, что $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

Рассмотрим следующую функцию:

$$\rho(u) \equiv \frac{\mathrm{distance}(u, \mathbb{B}\backslash\mathcal{A})}{\mathrm{distance}(u, \mathbb{B}\backslash\mathcal{A}) + \mathrm{distance}(u, \mathcal{B})}.$$

Понятно, что введенная функция удовлетворяет условию:

$$\rho(u) \equiv \begin{cases} 1, & \text{при} \quad u \in \mathcal{B}; \\ 0, & \text{при} \quad u \in \mathbb{B} \backslash \mathcal{A}. \end{cases} \tag{6.2}$$

Рассмотрим векторное поле на $\mathbb{B}$:

$$f(u) \equiv \begin{cases} -\rho(u) g(u) \Big/ \|g(u)\|^2, & \text{при} \quad u \in \mathcal{A}; \\ 0, & \text{при} \quad u \in \mathbb{B} \backslash \mathcal{A}. \end{cases} \tag{6.3}$$

3. Теперь нам надо доказать, что это векторное поле является локально липшиц–непрерывно на $\mathbb{B}$.

$\square$ Действительно, по определению псевдоградиентного векторного поля $g(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ является локально липшиц–непрерывно, поэтому нам достаточно доказать, что функция $\rho(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ является локально липшиц–непрерывным.

$\square$ Действительно, для любых u_1, u_2 из ограниченного множества банахова пространства $\mathbb{B}$, тогда имеет место неравенство

$$\operatorname{distance}(u_k, \mathbb{B} \backslash \mathcal{A}) + \operatorname{distance}(u_k, \mathcal{B}) \geqslant \delta > 0 \quad \text{при} \quad k = 1, 2,$$

поэтому имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |\rho(u_1) - \rho(u_2)| \leqslant \frac{1}{\delta} \left| \operatorname{distance}(u_1, \mathbb{B} \backslash \mathcal{A}) - \operatorname{distance}(u_2, \mathbb{B} \backslash \mathcal{A}) \right| + \\ + \frac{c}{\delta^2} \left| \operatorname{distance}(u_1, \mathbb{B} \backslash \mathcal{A}) - \operatorname{distance}(u_2, \mathbb{B} \backslash \mathcal{A}) \right| + \\ + \frac{c}{\delta^2} \left| \operatorname{distance}(u_1, \mathcal{B}) - \operatorname{distance}(u_2, \mathcal{B}) \right|. \end{aligned}$$

Теперь нам нужно доказать локальную липшиц–непрерывность функции $\operatorname{distance}(\mathcal{C}, u)$ для u из ограниченного множества $\mathbb{B}$. Действительно, по определению

$$\operatorname{distance}(\mathcal{C}, u) = \inf_{v \in \mathcal{C}} \|u - v\|.$$

Предположим для определенности, что

$$\operatorname{distance}(\mathcal{C}, u_1) \geqslant \operatorname{distance}(\mathcal{C}, u_2).$$

Справедливо неравенство треугольника:

$$\|u_1 - v\| \leqslant \|u_2 - v\| + \|u_1 - u_2\| \quad \text{для всех} \quad v \in \mathcal{C},$$

отсюда взяв $infimum$ от обеих частей неравенства по $v \in \mathcal{C}$, получим следующее неравенство:

$$|\operatorname{distance}(\mathcal{C}, u_1) - \operatorname{distance}(\mathcal{C}, u_2)| \leqslant \|u_1 - u_2\|$$

для всех u_1, u_2 из ограниченного множества банахова пространства $\mathbb{B}$. Следовательно, приходим к выводу о локальной липшиц–непрерывности функции

$$\rho(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1, \boxtimes$$

тем самым, локальная липшиц–непрерывность функции $f(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ доказана. $\boxtimes$

4. Теперь заметим, что справедливо неравенство

$$\|f(u)\| \leqslant \frac{\delta}{8\varepsilon} \quad \text{для} \quad u \in \mathcal{A}.$$

$\square$ Действительно, по условию теоремы

$$\left\|\psi'_f(u)\right\|_* (\mathrm{T}_u \mathcal{V}) \geqslant \frac{8\varepsilon}{\delta} \quad \text{для} \quad u \in \mathcal{A}$$

и, кроме того, по определению псевдоградиентного векторного поля на $\mathcal{M}$ имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\left\|\psi'_f(u)\right\|_*^2 (\mathrm{T}_u \mathcal{V}) \leqslant \left\langle \psi'_f(u), g(u) \right\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \left\|\psi'_f(u)\right\|_* (\mathrm{T}_u \mathcal{V}) \, \|g(u)\| \Rightarrow \|g(u)\| \geqslant \left\|\psi'_f(u)\right\|_* (\mathrm{T}_u \mathcal{V}) \geqslant \frac{8\varepsilon}{\delta}.$$

Теперь из определения (6.3) векторного поля $f(u)$ имеет место неравенство

$$\|f(u)\| \leqslant \frac{\rho(u)}{\|g(u)\|} \leqslant \frac{1}{\|g(u)\|} \leqslant \frac{\delta}{8\varepsilon}. \boxtimes$$

5. Давайте теперь рассмотрим задачу Коши для обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения на многообразии $\mathcal{V}$:

$$\frac{d\sigma}{dt} = f(\sigma), \quad \sigma(0) = u \in \mathcal{A} \subset \mathcal{V}. \tag{6.4}$$

Поскольку нелинейная функция $f(\cdot)$ по–доказанному является локально липшиц–непрерывным и ограниченным отображением на $\mathcal{V}$, то согласно общей теории нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений задача Коши (6.4) имеет единственное классическое решение класса $\sigma(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, 8\varepsilon]; \mathcal{V})$, лежащее на многообразии $\mathcal{V}$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$.

6. Теперь мы определим искомую деформацию и докажем, что она удовлетворяет условиям (i)–(iii). Действительно, пусть

$$\eta(t, u) \equiv \sigma(8\varepsilon t, u) \in \mathbb{C}([0, 1] \times \mathcal{V}; \mathcal{V}).$$

Заметим, что всякое классическое решение задачи (6.4) удовлетворяет следующему интегральному уравнению

$$\sigma(t,u) - u = \int\limits_0^t f(\sigma(\tau,u))\,d\tau,$$

поэтому мы отсюда получаем следующую оценку:

$$\|\sigma(t,u) - u\| \leqslant \int\limits_0^t \|f(\sigma(\tau,u))\|\,d\tau \leqslant \frac{\delta}{8\varepsilon}t \leqslant \delta \quad \text{поскольку} \quad t \in [0, 8\varepsilon].$$

Но тогда отсюда приходим к неравенству

$$\|\eta(t,u) - u\| \leqslant \delta \quad \text{для всех} \quad t \in [0,1]. \tag{6.5}$$

Заметим, что справедлива следующая цепочка неравенств в силу определения псевдоградиентного поля $g(u)$:

$$\begin{gathered}\frac{d\psi(\sigma(t,u))}{dt} = \left\langle \psi_f'(\sigma(t,u)), \frac{d\sigma(t,u)}{dt}\right\rangle = \left\langle \psi_f'(\sigma(t,u)), f(\sigma(t,u))\right\rangle = \\ = -\frac{\rho(\sigma(t,u))}{\|g(\sigma(t,u))\|^2}\left\langle \psi_f'(\sigma(t,u)), g(\sigma(t,u))\right\rangle \leqslant -\rho(\sigma(t,u)) \leqslant \\ \leqslant -\frac{1}{4}\rho(\sigma(t,u)) \leqslant 0. \end{gathered}\tag{6.6}$$

7. Давайте теперь проверим, что выполнены все утверждения теоремы. Итак, если $u \in \mathcal{A}$, то

$$\eta(t,u) = u \quad \text{при} \quad t = 0,$$

поскольку

$$\eta(t,u)|_{t=0} = \sigma(8\varepsilon t, u)|_{t=0} = \sigma(0,u) = u.$$

Таким образом, получаем, что (i) выполнено, поскольку либо $u \in \mathcal{A}$ либо $u \notin \mathcal{A}$. Утверждение (iii) вытекает сразу же из (6.6), поскольку

$$\frac{d\psi(\sigma(t,u))}{dt} \leqslant 0 \Rightarrow \frac{d\psi(\eta(t,u))}{dt} \leqslant 0 \quad \text{при} \quad t \in [0,1]. \tag{6.7}$$

Осталось доказать только утверждение (ii). Итак, возьмем $u \in \psi^{c+\varepsilon} \cap \cap \mathcal{S}$. Тогда, если найдется такое $t \in [0, 8\varepsilon]$, что

$$\psi(\sigma(t,u)) \leqslant c - \varepsilon,$$

то и

$$\psi(\sigma(8\varepsilon,u)) \leqslant c - \varepsilon$$

в силу неравенства (6.7). Пусть теперь $\sigma(t,u) \in \psi^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ для всех $t \in [0, 8\varepsilon]$, но тогда в силу (6.5) мы получим, что

$$\|\eta(t,u) - u\| \leqslant \delta,$$

т. е.

$$\sigma(t,u) \in \mathcal{B} \equiv \psi^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]) \cap \mathcal{S}_\delta \cap \mathcal{V}.$$

Тогда $\rho(\sigma(t,u)) = 1$ и мы получаем из (6.6) неравенство

$$\frac{d\psi(\sigma(t,u))}{dt} \leqslant -\frac{1}{4},$$

следовательно, интегрируя это неравенство по $t \in [0, 8\varepsilon]$, получим неравенство

$$\psi(\sigma(8\varepsilon, u)) \leqslant \psi(u) - \frac{1}{4} 8\varepsilon \leqslant c + \varepsilon - 2\varepsilon = c - \varepsilon,$$

т. е.

$$\psi(\eta(1,u)) = \psi(\sigma(8\varepsilon, u)) \leqslant c - \varepsilon \quad \text{для всех} \quad u \in \mathcal{S} \cap \psi^{c+\varepsilon}.$$

Утверждение (ii) доказано.

Лемма доказана.

§ 7. Минимаксный принцип

Теперь мы можем перейти к рассмотрению общего минимаксного принципа для изучения экстремальных точек функционала $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B}; \mathbb{R}^1)$, ограниченного снизу на многообразии $\mathcal{V}$.

Теперь продолжим рассмотрение теории категорий Люстерника–Шнирельмана.

Введем следующее семейство множеств:

$$\mathcal{A}_j \equiv \{A \subset \mathbb{X} : \operatorname{cat}_{\mathbb{X}}(A) \geqslant j\}, \tag{7.1}$$

где A — это замкнутое и симметричное множество ($A = -A$) в метрическом пространстве $\mathbb{X} \subset \mathbb{B}$,

$$c_j \equiv \inf_{A \subset \mathcal{A}_j} \sup_{u \in A} \psi(u), \tag{7.2}$$

где $\psi : \mathbb{X} \to \mathbb{R}^1$. Совершенно понятно, что имеет место вложение

$$\mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_{j-1} \Rightarrow c_j \geqslant c_{j-1},$$

т. е. последовательность множеств $\{\mathcal{A}_j\}$ является убывающей.

Приступим к рассмотрению важного приложения теории категорий Люстерника–Шнирельмана к вариационным задачам на условный экстремум.

$$\mathcal{A}_j \equiv \{\mathcal{A} \subset \mathcal{V} : \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{A}) \geqslant j\}, \quad c_j \equiv \inf_{\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_j} \sup_{u \in \mathcal{A}} \psi(u),$$

где $\mathcal{A}$ — это замкнутое множество в топологии метрического пространства $\mathcal{V}$. Справедлива следующая основная теорема.

Теорема 6. *Предположим, что функционал* $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$ *и ограничен снизу на многообразии* $\mathcal{V} \subset \mathbb{B}$. *Если*

$$c \equiv c_k = c_{k+1} = \cdots = c_{k+m}, \tag{7.3}$$

тогда для каждого $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\mathcal{A} \in \mathcal{A}_{k+m}$ *и замкнутого в топологии метрического пространства* $\mathcal{V}$ *множества* $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ *таких, что*

$$\sup_{u\in\mathcal{A}} \psi(u) \leqslant c + \varepsilon, \quad \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{B}) \leqslant m \tag{7.4}$$

найдется такая точка $u_0 \in \mathcal{V}$, *что*

(i) $c - 2\varepsilon \leqslant \psi(u_0) \leqslant c + 2\varepsilon$;
(ii) $\operatorname{distance}(u_0, \mathcal{A}\setminus \operatorname{int}\mathcal{B}) \leqslant 2\delta$;
(iii) $\left\|\psi_f'(u_0)\right\|_* (\mathrm{T}_{u_0}\mathcal{V}) \leqslant 8\varepsilon/\delta$.

Доказательство.

1. Прежде всего отметим, что при условиях теоремы множество точек $u_0 \in \mathcal{V}$, для которых выполнены свойства (i) и (ii) не пусто. Действительно, заметим, что $\mathcal{A} \not\subset \mathcal{B}$, поскольку в противном случае

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}} \mathcal{A} \leqslant m \Rightarrow \mathcal{A} \supset \mathcal{A}\setminus \operatorname{int}\mathcal{B} \neq \varnothing.$$

Поэтому согласно определению infimum такая точка $u_0 \in \mathcal{V}$ существует.

2. Теперь предположим, что существуют такие $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\mathcal{A} \in \mathcal{A}_{k+m}$ и замкнутое множество $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$, что

$$\sup_{u\in\mathcal{A}} \psi(u) \leqslant c + \varepsilon, \quad \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{B}) \leqslant m,$$

но утверждение (iii) не выполнено, т. е.

$$\left\|\psi_f'(u_0)\right\|_* (\mathrm{T}_{u_0}\mathcal{V}) > \frac{8\varepsilon}{\delta}.$$

Тогда введем обозначение

$$\mathcal{S} = \mathcal{A}\setminus \operatorname{int}\mathcal{B}$$

и применим лемму о деформации, тогда получим существование такой деформации

$$\eta(t,u) \in \mathbb{C}([0,1]\times\mathcal{V};\mathcal{V}),$$

которая стягивает множество $\psi^{c+\varepsilon}\cap\mathcal{S}$ во множество $\psi^{c-\varepsilon}$, но тогда согласно результату теоремы 2 (v) имеет место неравенство

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}}\left(\psi^{c+\varepsilon}\cap\mathcal{S}\right) \leqslant \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\psi^{c-\varepsilon}). \tag{7.5}$$

3. Теперь заметим, что в силу условия теоремы

$$\psi^{c+\varepsilon} \cap \mathcal{A} = \mathcal{A},$$

поскольку

$$\sup_{u \in \mathcal{A}} \psi(u) \leqslant c + \varepsilon,$$

но тогда, поскольку $\mathcal{S} \equiv \mathcal{A} \setminus \operatorname{int} \mathcal{B}$, получаем

$$\psi^{c+\varepsilon} \cap \mathcal{S} = \mathcal{S}.$$

Таким образом, приходим к выводу, что

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}} \left(\psi^{c+\varepsilon} \cap \mathcal{S}\right) = \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{S}).$$

Следовательно, из (7.5) получаем, что

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{S}) \leqslant \operatorname{cat}_{\mathcal{V}} \left(\psi^{c-\varepsilon}\right).$$

4. Теперь наша задача доказать следующее неравенство:

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\psi^{c-\varepsilon}) \leqslant k - 1. \tag{7.6}$$

□ Действительно, по условию теоремы имеем

$$c = c_k = \inf_{\mathcal{A} \in \mathcal{A}_k} \sup_{u \in \mathcal{A}} \psi(u).$$

Рассмотрим множество

$$\psi^{c-\varepsilon} \equiv \{u \in \mathcal{V} : \ \psi(u) \leqslant c - \varepsilon\}.$$

Предположим, что

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}} \left(\psi^{c-\varepsilon}\right) \geqslant k,$$

но тогда, в силу замкнутости множества $\psi^{c-\varepsilon}$ в топологии метрического пространства $\mathcal{V}$, это множество принадлежит системе множеств $\mathcal{A}_k$. Следовательно,

$$c \equiv c_k = \inf_{\mathcal{A} \in \mathcal{A}_k} \sup_{u \in \mathcal{A}} \psi(u) \leqslant \sup_{u \in \psi^{c-\varepsilon}} \psi(u) \leqslant c - \varepsilon,$$

т. е. $\varepsilon \leqslant 0$, что противоречит исходному условию $\varepsilon \in (0, 1)$. Значит, (7.6) доказано. ⊠

5. Следовательно, в силу теоремы 2 справедлива следующая цепочка неравенств:

$$k + m \leqslant \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{A}) \leqslant \operatorname{cat}_{\mathcal{V}} (\mathcal{A} \setminus \operatorname{int} \mathcal{B}) + \operatorname{cat}_{\mathcal{V}} (\mathcal{B}) \leqslant \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{S}) + m \leqslant$$
$$\leqslant \operatorname{cat}_{\mathcal{V}} \left(\psi^{c-\varepsilon}\right) + m \leqslant k - 1 + m.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема доказана.

Дадим определение.

Определение 11. *Будем говорить, что функционал* $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$ *удовлетворяет условию Пале–Смейла* (PS_c) *на многообразии* $\mathcal{V} \subset \mathbb{B}$, *если у всякой последовательности* $\{u_n\} \subset \mathcal{V}$, *удовлетворяющей условию*

$$\psi(u_n) \to c \quad \text{и} \quad \left\|\psi'_f(u_n)\right\|_* (\mathrm{T}_{u_n}\mathcal{V}) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty \tag{7.7}$$

для $c \in \mathbb{R}^1$, *имеется сильно сходящаяся подпоследовательность*:

$$u_{n_k} \to u \in \mathcal{V} \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть* $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$ *является ограниченным снизу на многообразии* $\mathcal{V}$ *функционалом и удовлетворяет на этом многообразии условию* (PS_c) *при некотором* $c \in \mathbb{R}^1$. *Пусть, кроме того, выполнено условие* (7.3). *Тогда для множества*

$$\mathrm{K}_c \equiv \left\{u \in \mathcal{V}: \ \psi(u) = c, \quad \left\|\psi'_f(u)\right\|_* (\mathrm{T}_u\mathcal{V}) = 0\right\}$$

имеем

$$\mathrm{cat}_{\mathcal{V}}(\mathrm{K}_c) \geqslant m + 1.$$

Замечание 9. Отметим, что условие $\mathrm{cat}_{\mathcal{V}}(\mathrm{K}_c) \geqslant m + 1$ означает, что это множество (множество условно критических точек) состоит по крайней мере из $m + 1$ точки.

Доказательство.

1. Предположим, что

$$\mathrm{cat}_{\mathcal{V}}(\mathrm{K}_c) \leqslant m.$$

Тогда по теореме 3 о ANR (метрическое пространство $\mathcal{V}$ является ANR) для множества K_c существует замкнутая в топологии $\mathcal{V}$ окрестность $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ множества K_c, что

$$\mathrm{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{B}) = \mathrm{cat}_{\mathcal{V}}(\mathrm{K}_c) \leqslant m.$$

2. Сделаем одно терминологическое замечание. Под окрестностью $\mathcal{B}$ множества K_c мы понимаем, что имеет место следующее вложение:

$$\mathrm{K}_c \subset \mathrm{int}\,\mathcal{B} \subset \mathcal{B}. \tag{7.8}$$

Теперь мы применим теорему 6, в которой положим $\mathcal{A} = \mathcal{V}$. Тогда из теоремы 6, в которой нужно взять $\varepsilon = 1/n$ и $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, вытекает существование такой последовательности $\{u_n\} \subset \mathcal{V}$, что

$$\psi(u_n) \to c, \quad \left\|\psi'_f(u_n)\right\|_* (\mathrm{T}_{u_n}\mathcal{V}) \to 0, \quad \mathrm{distance}(u_n, \mathcal{V}\setminus \mathrm{int}\,\mathcal{B}) \to 0$$

при $n \to +\infty$. Поскольку функционал ψ удовлетворяет условию $(\mathrm{PS_c})$ на многообразии $\mathcal{V}$, то существует подпоследовательность

$$\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\} \subset \mathcal{V},$$

что

$$u_{n_k} \to u_0 \in \mathcal{V} \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}.$$

3. Тогда получим, что, во–первых,

$$\psi(u_0) = c, \quad \left\|\psi'_f(u_0)\right\|_* (\mathrm{T}_{u_0}\mathcal{V}) = 0,$$

т. е. $u_0 \in \mathrm{K}_c$, а, во–вторых,

$$u_0 \in \mathcal{V} \backslash \operatorname{int} \mathcal{B}.$$

Следовательно,

$$u_0 \in \mathrm{K}_c \cap (\mathcal{V} \backslash \operatorname{int} \mathcal{B}),$$

но в силу (7.8) имеет место вложение

$$\mathrm{K}_c \subset \operatorname{int} \mathcal{B},$$

но тогда

$$\mathrm{K}_c \cap (\mathcal{V} \backslash \operatorname{int} \mathcal{B}) = \varnothing.$$

Полученное противоречие доказывает, что

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathrm{K}_c) \geqslant m + 1.$$

Теорема доказана.

Важным следствием этой теоремы является следующая теорема.

Теорема 8. *Пусть функционал $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B}; \mathbb{R}^1)$ является ограниченным снизу на $\mathcal{V}$, причем*

$$d \geqslant \inf_{u \in \mathcal{V}} \psi(u).$$

Пусть, кроме того, для всех

$$c \in \left[\inf_{u \in \mathcal{V}} \psi(u), d\right]$$

функционал ψ удовлетворяет условию $(\mathrm{PS_c})$ на многообразии $\mathcal{V}$. Тогда функционал ψ достигает минимума на $\mathcal{V}$, причем ψ имеет по меньшей мере $\operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\psi^d)$ критических точек на $\mathcal{V}$.

Доказательство.

Пусть
$$n = \operatorname{cat}_{\mathcal{V}} \psi^d \in \mathbb{N}, \quad \psi^d \neq \varnothing.$$

Следовательно, множества $\mathcal{A}_j \subset \psi^d$ не пусты для $j = \overline{1, n}$. Рассмотрим соответствующие c_j по своему определению имеет место неравенство

$$c_1 \leqslant c_2 \leqslant \cdots \leqslant c_n$$

Предположим , что для каких-то $m \in \mathbb{N}$ чисел из c_j имеет место равенство. Например, без ограничения общности, можно считать, что это m чисел, например,

$$c_{k+1} = c_{k+2} = \cdots = c_{k+m} = c,$$

$$c_{k+m} < c_{k+m+1} < \cdots < c_n, \quad c_1 < c_2 < \cdots < c_k < c_{k+1},$$

причем согласно теореме 7 имеем

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}} (\mathrm{K}_c) \geqslant m + 1. \tag{7.9}$$

С учетом того, что оставшиеся числа c_j различны мы приходим к тому факту, что точки u_j, в которых достигается minmax функционала ψ все различны. Поэтому этих точек $n - m$. С учетом, (7.9) мы приходим к выводу о том, что критических точек не меньше величины $\operatorname{cat}_{\mathcal{V}} \psi^d$.

Теорема доказана.

Замечание 10. Отметим, что в данной теореме мы не требуем как ранее слабой замкнутости многообразия $\mathcal{V}$.

§ 8. Пример счетного множества решений.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\Delta u + |u|^{p-2} u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad N \geqslant 3. \tag{8.1}$$

Рассмотрим следующие функционалы:

$$\psi(u) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |Du|^2 \, dx, \quad \varphi(u) = \frac{1}{p} \int\limits_{\Omega} |u|^p \, dx. \tag{8.2}$$

Рассмотрим соответствующее многообразие в $H_0^1(\Omega)$

$$\mathcal{V} = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \ \varphi(u) = 1 \right\}. \tag{8.3}$$

Сначала как и ранее применим метод доказательства существования нетривиального слабого решения задачи (8.1).

1. Докажем, что многообразие $\mathcal{V}$ является слабо замкнутым.

□ Действительно, пусть $\{u_n\} \subset \mathcal{V}$, $\varphi(u_n) = 1$,

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega), \quad 1 < p < \frac{2N}{N-2}, \quad N \geqslant 3.$$

Пусть

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad H_0^1(\Omega), \quad \varphi(u_n) = 1,$$

тогда в силу вполне непрерывного вложения $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$ и линейности оператора вложения вытекает полная непрерывность оператора вложения

$$\mathrm{J} : H_0^1(\Omega) \to L^p(\Omega) \Rightarrow \mathrm{J}(u_n) \to \mathrm{J}(u) \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Стало быть, имеем

$$1 = \varphi(u_n) \to \varphi(u) = 1 \quad \text{при} \quad n \to +\infty \Rightarrow u \in \mathcal{V}. \quad \boxtimes$$

2. Функционал $\psi(u)$ является полунепрерывным, потому, что

$$\psi(u) = \frac{1}{2}\|Du\|_2^2,$$

а норма рефлексивного банахова пространства является полунепрерывным снизу функционалом.

3. Функционал $\psi(u)$ является слабо коэрцитивным, потому что

$$\lim_{|Du\|_2 \to +\infty} \psi(u) = \frac{1}{2} \lim_{\|Du\|_2 \to +\infty} \|Du\|_2^2 = +\infty.$$

4. Итак, согласно теореме функционал $\psi(u)$ достигает минимума на многообразии $\mathcal{V}$ в некоторой точке $u \in \mathcal{V}$, в которой

$$\psi_f^{'}(u_1) - \lambda_1 \varphi_f^{'}(u_1) = \vartheta^* \in \mathbb{B}^*,$$

$$\langle \Delta u_1 - \lambda_1 |u_1|^{p-2} u_1, u_1 \rangle = 0 \Rightarrow \|Du_1\|_2^2 = \lambda_1 \|u_1\|_p^p = p\lambda_1 > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \psi(u_1) = \inf_{u \in \mathcal{V}} \psi(u) = \frac{\lambda_1 p}{2}.$$

Однако, для доказательства существования счетного множества линейно независимых слабых решений задачи (8.1) нужно вместо вариационной задачи (8.2), (8.3) рассмотреть следующую вариационную задачу:

$$\inf\left\{\psi_1(u) : \ \varphi_1(u) = 1, \quad u \in H_0^1(\Omega)\right\}, \quad \mathcal{V}_1 = \left\{u \in H_0^1(\Omega) : \ \varphi_1(u) = 1\right\}, \tag{8.4}$$

где
$$\psi_1(u) = \frac{1}{p}\int\limits_\Omega |u|^p\,dx, \quad \varphi_1(u) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |Du|^2\,dx. \tag{8.5}$$

Заметим, что имеют место выражения
$$u \in \mathcal{V}_1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{p}\int\limits_\Omega |u|^p\,dx \leqslant \frac{c_p}{p}\left(\int\limits_\Omega |Du|^2\,dx\right)^{p/2} = \frac{c_p}{p}(2)^{p/2}.$$

5. Докажем, что функционал $\psi_1(u)$ удовлетворяет условию $(PS)_c$ на $\mathcal{V}$ при
$$0 < c \leqslant d, \quad d = \frac{c_p}{p}(2)^{p/2}.$$

□ Действительно, пусть $\{u_n\} \subset \mathcal{V}_1$ и имеют место свойства

a) последовательность $\psi_1(u_n) \to c$ при $n \to +\infty$;

b) для этой последовательности
$$\|\psi'_{1f}(u_n)\|_*\,(\mathrm{T}_{u_n}\mathcal{V}_1) \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Докажем, что $\{u_{n_n}\} \subset \{u_n\}$, которая
$$u_{n_n} \to u \quad \text{сильно в} \quad H^1_0(\Omega) \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{8.6}$$

Прежде всего отметим, что
$$\varphi_1(u_n) = 1 \Rightarrow \|Du_n\|_2 = \sqrt{2}$$
поэтому имеем найдется такая подпоследовательность
$$\{u_{n_n}\} \subset \{u_n\}, \quad u_{n_n} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad H^1_0(\Omega),$$
а в силу вполне непрерывного вложения $H^1_0(\Omega)$ в $L^p(\Omega)$ имеем
$$u_{n_n} \to u \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Отсюда вытекает, что
$$|u_{n_n}|^{p-2}u_{n_n} \to |u|^{p-2}u \quad \text{сильно в} \quad L^{p'}(\Omega) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Наконец, из второго условия $(PS)_c$ вытекает, что
$$-\Delta u_{n_n} - \mu|u_{n_n}|^{p-2}u_{n_n} \to \vartheta^* \quad \text{сильно в} \quad H^{-1}(\Omega) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Кроме того, по доказанному
$$-\Delta u_{n_n} - \mu|u_{n_n}|^{p-2}u_{n_n} \to -\Delta u - \mu|u|^{p-2}u \quad \text{слабо в} \quad H^{-1}(\Omega)$$

при $n \to +\infty$, поэтому

$$-\Delta u - \mu |u|^{p-2} u = \vartheta^*.$$

Поэтому имеет место цепочка неравенств

$$\begin{aligned}&\|D(u_{n_n} - u)\|_2 = \|\Delta(u_{n_n} - u)\|_* \leqslant \\ &\leqslant \|\Delta u_{n_n} + \mu|u_{n_n}|^{p-2}u_{n_n} - \mu|u_{n_n}|^{p-2}u_{n_n} + \mu|u|^{p-2}u - \mu|u|^{p-2}u - \Delta u\|_* \leqslant \\ &\qquad \leqslant \|\Delta u_{n_n} + \mu|u_{n_n}|^{p-2}u_{n_n}\|_* + \|\mu|u_{n_n}|^{p-2}u_{n_n} - \mu|u|^{p-2}u\|_* \to +0\end{aligned}$$

при $n \to +\infty$. Следовательно,

$$u_{n_n} \to u \quad \text{сильно в} \quad H_0^1(\Omega) \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \boxtimes$$

6. Докажем, что на самом деле существует счетное множество линейно независимых в $H_0^1(\Omega)$ слабых решений задачи (8.1).

Заметим, что функционалы $\varphi_1(w)$ и $\psi_1(w)$ являются четными, поэтому мы можем отождествить диаметрально противоположные точки многообразия $\mathcal{V}$. Поэтому введем в рассмотрение банахово пространство

$$\mathbb{X} \equiv \left\{x = [w, -w] : \ w \in H_0^1(\Omega)\right\}$$

с нормой $\|x\|_{\mathbb{X}} = \|w\|$. Определим функционалы на $\mathbb{X}$ следующим образом:

$$\varphi_2(x) \equiv \varphi_1(w) \quad \text{и} \quad \psi_2(x) \equiv \psi_1(w) \quad \text{для всех} \quad x = [w, -w] \in \mathbb{X}.$$

Рассмотрим теперь многообразие $\mathcal{V}_2 \subset \mathbb{X}$:

$$\mathcal{V}_2 \equiv \{x \in \mathbb{X} : \ \varphi_2(x) = 1\}.$$

Сильным сопряженным пространством $\mathbb{X}^*$ к банахову пространству $\mathbb{X}$ — есть следующее множество:

$$\mathbb{X}^* \equiv \left\{x^* = [f^*, -f^*] : \ f^* \in H^{-1}(\Omega)\right\}.$$

Со следующими скобками двойственности между $\mathbb{X}$ и $\mathbb{X}^*$:

$$(x^*, x) \equiv \langle f^*, w\rangle.$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что функционалы $\psi_2(x)$ и $\varphi_2(x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы 8, в которой функционал $\psi_2(x)$ рассматривается на многообразии $\mathcal{V}_2$.

Теперь наша задача доказать, что

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}_2}(\mathcal{V}_2) = +\infty. \tag{8.7}$$

Заметим, что линейным счетным всюду плотным множеством в $H_0^1(\Omega)$ являются собственные функции $\{w_i\}_{i=1}^{+\infty}$ — слабые решения задачи на собственные функции и собственные значения

$$\langle \Delta w_i + \lambda_i w_i, \varphi\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in H_0^1(\Omega), \quad i \in \mathbb{N},$$

причем ортонормируем все собственные функции следующим образом:

$$\int\limits_{\Omega} (Dw_i, Dw_j)\, dx = 2\delta_{ij}.$$

Определим k–мерное подпространство $H_k \subset H_0^1(\Omega)$ следующим образом:

$$H_k \stackrel{def:}{=} \overline{\{w_1, ..., w_k\}} \tag{8.8}$$

— линейная оболочка первых элементов $\{w_i\}_{i=1}^{k}$. Ясно, что

$$H_k \subset H_{k+1}, \quad H_0^1(\Omega) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} H_k.$$

Введем теперь пространство

$$\mathbb{X}_k \stackrel{def:}{=} \{x = [w, -w] : \ w \in H_k\}, \quad \mathbb{X}_k \subset \mathbb{X}_{k+1}, \quad \mathbb{X} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \mathbb{X}_k,$$

таким образом

$$\mathbb{X} = \operatorname*{induct}_{k\to+\infty} \mathbb{X}_k$$

— это индуктивный предел (нестрогий). Заметим, что на $k-$мерном банаховом пространстве $\mathbb{X}_k \subset \mathbb{X}$ все нормы эквивалентны, поэтому

$$\mathbb{P}^k \equiv \mathbb{X}_k \cap \mathcal{V}_2$$

— это есть конечномерное проективное пространство.

☐ Действительно, имеем

$$u \in H^k \cap \mathcal{V}_1 \Rightarrow u(x) = \sum_{l=1}^{k} \alpha_l w_l(x), \quad \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |Du|^2\, dx = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{l=1}^{k} |\alpha_l|^2 = 1 \Rightarrow u \in \mathbb{S}^k.$$

Поэтому

$$x \in \mathbb{X}_k \cap \mathcal{V}_2 = \mathbb{P}^k. \boxtimes$$

Заметим, что в силу результата примера 3 лекции имеет место равенство

$$\mathrm{cat}_{\mathbb{P}^k}\left(\mathbb{P}^k\right) = k+1.$$

Имеет место предельное равенство

$$\operatorname*{induct}_{k\to+\infty} \mathbb{X}_k \cap \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_2.$$

Следовательно,

$$\lim_{k\to+\infty} \mathrm{cat}_{\mathbb{X}_k\cap\mathcal{V}_2}\left(\mathbb{X}_k\cap\mathcal{V}_2\right) = \mathrm{cat}_{\mathcal{V}_2}\left(\mathcal{V}_2\right),$$

но тогда

$$\mathrm{cat}_{\mathcal{V}_2}\left(\mathcal{V}_2\right) = +\infty,$$

поскольку

$$\mathrm{cat}_{\mathbb{X}_k\cap\mathcal{V}_2}\left(\mathbb{X}_k\cap\mathcal{V}_2\right) = \mathrm{cat}_{\mathbb{P}^k}\left(\mathbb{P}^k\right) = k+1.$$

Стало быть, выполнено равенство (8.7).

Рассмотрим теперь произвольное число $d > 0$ и соответствующее множество:

$$(\psi_2)^d \equiv \left\{x \in \mathbb{X} : \ \psi_2(x) = \psi_1(w) \leqslant d\right\}.$$

Заметим, что имеет место равенство множеств

$$\psi_2^d = (\psi_2)^d \cap \mathcal{V}_2,$$

где напомним

$$\psi_2^d \equiv \left\{x \in \mathcal{V}_2 : \ \psi_2(x) = \psi_1(w) \leqslant d\right\}.$$

Кроме того, очевидно, имеет место вложение

$$(\psi_2)^{d_1} \subset (\psi_2)^{d_2} \quad \text{при} \quad d_1 \leqslant d_2.$$

Заметим, что в силу теоремы вложения С. Л. Соболева имеет место неравенство

$$\int\limits_{\Omega} |u|^p\,dx \leqslant c_p \left(\int\limits_{\Omega} |Du|^2\,dx\right)^p \quad \text{для всех} \quad H_0^1(\Omega), \quad 1 < p \leqslant 2^*.$$

При этом справедливы следующие выражения:

$$u \in \mathcal{V}_1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{p}\int\limits_{\Omega} |u|^p\,dx \leqslant \frac{c_p}{p}\left(\int\limits_{\Omega} |Du|^2\,dx\right)^{p/2} = \frac{c_p}{p}(2)^{p/2}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{V}_1 \subset (\psi_1)^d \quad \text{при} \quad d = \frac{c_p}{p}(2)^{p/2} \Rightarrow \mathcal{V}_2 \subset (\psi_2)^d\,.$$

Заметим, что при таком d имеет место следующее неравенство:

$$\mathrm{cat}_{\mathcal{V}_2}(\mathcal{V}_2) \subset \mathrm{cat}_{\mathcal{V}_2}\psi_2^d.$$

Отсюда сразу же получаем, что

$$\mathrm{cat}_{\mathcal{V}_2}\psi_2^d = +\infty.$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 8 и существует счетное множество линейно независимых слабых решений задачи.

§ 9. Литературные указания

В данной лекции мы использовали материал, изложенный в работах [2], [15], [24], [27], [55], [47], [49] и [61].

Лекция 5

МЕТОД ГЛОБАЛЬНОГО РАССЛОЕНИЯ С. И. ПОХОЖАЕВА

В данной лекции мы рассмотрим метод глобального расслоения С. И. Похожаева, имеющий важные приложения для функционалов, которые, вообще говоря, могут быть неограниченными не снизу не сверху. При этом Исходная вариационная задача сводится к вариационной задаче на условный экстремум относительно некоторого многообразия, связанного с исходной задачей.

§ 1. Метод глобального расслоения С. И. Похожаева

В этом параграфе мы рассмотрим метод глобального расслоения С. И. Похожаева, который позволяет сопоставить исходной нелинейной задаче с однородными нелинейностями, т. е. с такими, что $\mathrm{A}(au) = a^\alpha \mathrm{A}(u)$, некоторую вариационную задачу на условный экстремум. Действительно, довольно часто функционал Эйлера $\psi(u)$, соответствующий исходной задаче в некотором банаховом пространстве, может не быть ограниченным не снизу не сверху. Однако, метод глобального расслоения С. И. Похожаева позволяет сопоставить исходной задаче новый функционал $\mathcal{F}(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ и некоторое многообразие $\mathcal{V} \subset \mathbb{B}$ таким образом, чтобы функционал $\mathcal{F}(u)$ был ограничен снизу на $\mathcal{V}$. После чего можно воспользоваться теорией категорий Люстерника–Шнирельмана.

Давайте детально разберем один простейший пример.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим следующую задачу о собственных колебаниях:

$$\begin{cases} \Delta u + |u|^{p-2}u = 0, & \text{при} \quad x \in \Omega; \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

где Ω — это ограниченная область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$, $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0,1]$. Пусть, кроме того, $p \in (2, 2^*)$:

$$2^* = \begin{cases} 2N/(N-2), & \text{при} \quad N \geqslant 3; \\ +\infty, & \text{при} \quad N = 1, 2. \end{cases} \tag{1.2}$$

Сопоставим краевой задаче (1.1) функционал Эйлера:

$$\psi(u) \equiv \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |Du|^2 \, dx - \frac{1}{p} \int\limits_{\Omega} |u|^p \, dx, \tag{1.3}$$

где функционал рассматривается на банаховом пространстве $\mathbb{B} = H_0^1(\Omega)$.

Давайте докажем, что функционал $\psi(u)$ является неограниченным снизу на $H_0^1(\Omega)$.

$\square$ Действительно, для доказательства неограниченности снизу возьмем в качестве $u \in \mathbb{B}$ величину $u = tv$, где $t > 0$ и $v \in \mathbb{B}$. Тогда получим следующее равенство:

$$\psi(u) = \psi(tv) = \frac{1}{2}t^2 \int\limits_\Omega |Dv|^2\,dx - \frac{1}{p}t^p \int\limits_\Omega |v|^p\,dx \to -\infty \quad \text{при} \quad t \to +\infty$$

и фиксированном $v \in H_0^1(\Omega)$ поскольку $p > 2$. $\boxtimes$

Теперь мы на примере задачи (1.1) опишем метод глобального расслоения С. И. Похожаева. Действительно, представим функцию $u \in \mathbb{B}$ в виде $u = tv$, где $t \in \mathbb{R}^1$ и $v \in \mathbb{B} = H_0^1(\Omega)$. Тогда введем новый функционал

$$\psi_1(t, v) \equiv \psi(tv) : \mathbb{F} \equiv \mathbb{R}^1 \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}^1,$$

причем пространство $\mathbb{F}$ является банаховым относительно стандартной нормы

$$\|w\|_1 = \|(t, v)\|_1 = |t| + \|v\|,$$

где символом $\|\cdot\|$ обозначена норма в банаховом пространстве $H_0^1(\Omega)$.

Замечание 1. Это существенно важный момент!!! Вводится новый параметр $t \in \mathbb{R}^1$ и поэтому можно потребовать выполнения некоторого дополнительного условия, т. е., например, потребовать, чтобы решение задачи принадлежало следующему многообразию:

$$\mathcal{V} \equiv \{w = (t, v) \in \mathbb{F} : \ \varphi(w) = c, \} \tag{1.4}$$

где $c \in \mathbb{R}^1$, $\varphi(w) : \mathbb{F} \to \mathbb{R}^1$.

Теперь мы можем рассматривать функционал $\psi_1(w)$ на многообразии $\mathcal{V}$. Для задачи (1.1) в качестве функционала $\varphi(w)$ удобно взять норму банахова пространства $\mathbb{B} = H_0^1(\Omega)$:

$$\mathcal{V} \equiv \{w = (t, v) \in \mathbb{F} : \ \varphi(t, v) = \|Dv\|_2 = 1\}, \tag{1.5}$$

т. е. пересечение многообразия $\mathcal{V} \subset \mathbb{F}$ с банаховым пространством является единичной сферой в банаховом пространстве $\mathbb{B}$

$$\mathbb{S} \equiv \{v \in \mathbb{B} : \ \|Dv\|_2 = 1\}. \tag{1.6}$$

Для дальнейшего нам необходимо получить явное выражение для производной Фреше произвольного функционала $F(t, v) : \mathbb{F} \to \mathbb{R}^1$ класса $\mathbb{C}^1$.

☐ Действительно, имеет место равенства

$$F(t+\tau, v+h) = F(t,v) + \frac{\partial F}{\partial t}\tau + \left\langle F'_{vf}(t,v), h \right\rangle + \omega((t,v),(\tau,h)),$$

причем

$$\lim_{|\tau|+\|h\|\to+\infty} \frac{\omega((t,v),(\tau,h))}{|\tau|+\|h\|} = 0.$$

Следовательно, производная Фреше функционала F имеет вид

$$F'_f(w) = \left(\frac{\partial F(w)}{\partial t}, F'_{vf}(w)\right) \quad \text{для всех} \quad w=(t,v)\in\mathbb{F}.\boxtimes \tag{1.7}$$

Как нам уже известно, необходимым условием существования критической точки у функционала F относительно многообразия $\mathcal{V}$ — это следующее равенство

$$\left\|F'_f(w)\right\|_*(\mathrm{T}_w\mathcal{V}) = 0 \quad \text{при} \quad w\in\mathcal{V}. \tag{1.8}$$

Прежде всего выясним явный вид касательного пространства $\mathrm{T}_w\mathcal{V}$. Заметим, что это пространство определено в каждой точке многообразия $\mathcal{V}$, поскольку в каждой точке имеет место

$$\varphi'_f(w) \neq \vartheta \in \mathbb{F}^* \equiv \mathbb{R}^1\times H^{-1}(\Omega).$$

☐ Действительно, в силу (1.7) призводная Фреше имеет следующий вид:

$$\varphi'_f(w) = (0, -2\Delta v) \quad \text{для всех} \quad w=(t,v)\in\mathcal{V}.$$

Предположим, что в некоторой точке $w_0=(t_0,v_0)\in\mathcal{V}$ имеет место равенство

$$\varphi'_f(w_0) = \vartheta \in \mathbb{F}^*.$$

Отсюда сразу же вытекает, что

$$-\Delta v_0 = 0 \Rightarrow \langle -\Delta v_0, v_0\rangle = \|v_0\|^2 = 0 \Rightarrow v_0 = 0,$$

но тогда $\varphi(w_0)=0$, что противоречит условию, что $\varphi(w_0)=1$. ☒

Касательное пространство $\mathrm{T}_w\mathcal{V}$ согласно определению имеет следующий вид:

$$\mathrm{T}_w\mathcal{V} \equiv \left\{ z=(\tau,h)\in\mathbb{F} : \left\langle\left\langle \varphi'_f(w), z\right\rangle\right\rangle = \frac{\partial\varphi(w)}{\partial t}\tau + \left\langle \varphi'_{vf}(w), h\right\rangle = 0 \right\},$$

где $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ — это скобки двойственности между $\mathbb{F}$ и $\mathbb{F}^*$. Но согласно определению (1.6) многообразия $\mathcal{V}$ имеют место следующие равенства:

$$\frac{\partial\varphi(w)}{\partial t} = 0, \quad \varphi'_{vf}(w) = -2\Delta v \quad \text{для всех} \quad w=(t,v)\in\mathcal{V}.$$

Поэтому приходим к формуле

$$\mathrm{T}_w\mathcal{V} = \mathbb{R}^1 \oplus \mathrm{T}_v\mathbb{S} \quad \text{для всех} \quad w = (t, v) \in \mathcal{V}, \tag{1.9}$$

где $\mathbb{S}$ определено формулой (1.6).

Теперь займемся изучением равенства

$$\left\| \psi_f'(w) \right\|_* (\mathrm{T}_w\mathcal{V}) = 0, \tag{1.10}$$

которое является необходимым условием экстремали в точке $w \in \mathcal{V}$ функционала $\psi(w)$ относительно многообразия $\mathcal{V}$. Действительно, согласно определению полунормы

$$\|\cdot\|_* (\mathrm{T}_w\mathcal{V})$$

имеет место равенство

$$\left\| \psi_f'(w) \right\|_* (\mathrm{T}_w\mathcal{V}) = \sup_{z=(\tau,h)\in \mathrm{T}_w\mathcal{V}, \|z\|_1 \leqslant 1} \left| \left\langle \left\langle \psi_{1f}'(w), z \right\rangle \right\rangle \right| =$$

$$= \sup_{z=(\tau,h)\in \mathrm{T}_w\mathcal{V}, \|z\|_1 \leqslant 1} \left| \frac{\partial \psi_1(w)}{\partial t}\tau + \left\langle \psi_{1vf}'(w), h \right\rangle \right| =$$

$$= \sup_{|\tau|+\|h\|\leqslant 1,\ \tau\in\mathbb{R}^1,\ h\in \mathrm{T}_v\mathbb{S}} \left| \frac{\partial \psi_1(w)}{\partial t}\tau + \left\langle \psi_{1vf}'(w), h \right\rangle \right|.$$

Но тогда равенство (1.10) равносильно следующим двум равенствам:

$$\frac{\partial \psi_1(w)}{\partial t}\Big|_{v\in\mathbb{S}} = 0, \quad \|\psi_{1vf}'(w)\|_* (\mathrm{T}_v\mathbb{S}) = 0 \quad \text{для всех} \quad t \in \mathbb{R}^1. \tag{1.11}$$

Эти два равенства являются необходимыми условиями существования условно критической точки функционала $\psi_1(w)$ относительно многообразия $\mathcal{V}$.

Теперь заметим, что в нашей задаче

$$\psi_1(t, v)\Big|_{v\in\mathbb{S}} = \frac{t^2}{2} - \frac{|t|^p}{p} \int\limits_\Omega |v|^p\,dx.$$

Следовательно,

$$0 = \frac{\partial \psi_1(w)}{\partial t}\Big|_{v\in\mathbb{S}} \Rightarrow t - t|t|^{p-2} \int\limits_\Omega |v|^p\,dx = 0 \Rightarrow t(v) = \pm \left(\int\limits_\Omega |v|^p\,dx \right)^{-1/(p-2)}.$$

Но тогда в силу того, что второе равенство из (1.11) выполнено для всех $t \in \mathbb{R}^1$ мы можем ввести новый функционал по формуле

$$\mathcal{F}(v) \equiv \psi_1(t(v), v)\Big|_{v\in\mathbb{S}} = \frac{p-2}{2p} \left(\int\limits_\Omega |v|^p\,dx \right)^{-2/(p-2)}, \tag{1.12}$$

который рассматривается на многообразии $\mathbb{S}$, определенному формулой (1.6). Действительно, в силу цепного правила дифференцирования по Фреше имеет место равенство

$$\mathcal{F}'_f(v) = \frac{\partial \psi_1(t(v), v)}{\partial t} t'_f(v) + \psi'_{1vf} = \psi'_{1vf} \quad \text{для всех} \quad v \in \mathbb{S},$$

здесь мы воспользовались первым равенством из формулы (1.11). Но тогда второе равенство из формулы (1.11) эквивалентно следующему равенству:

$$\|\psi'_{1vf}(w)\|_* \, (\mathrm{T}_v\mathbb{S}) = \|\mathcal{F}'_f(v)\|_* \, (\mathrm{T}_v\mathbb{S}) = 0 \quad \text{при} \quad t = t(v), \; v \in \mathbb{S}.$$

Следовательно, задача отыскания условного экстремума функционала $\psi_1(t, v)$ относительно многообразия $\mathcal{V}$ в банаховом пространстве $\mathbb{F} = \mathbb{R}^1 \times H_0^1(\Omega)$ эквивалентна задаче отыскания условного экстремума функционала $\mathcal{F}(v)$ относительно единичной сферы $\mathbb{S}$ банахова пространства $\mathbb{B} = H_0^1(\Omega)$.

Для полученной задачи отыскания условно критических точек функционала $\mathcal{F}(v)$ относительно единичной сферы $\mathbb{S}$ банахова пространства $\mathbb{B} = H_0^1(\Omega)$ в силу четности функционалов $\varphi(v)$ и $\mathcal{F}(v)$ уже можно применить теорию категорий Люстерника–Шнирельмана. Давайте сейчас приступим к этой работе.

Прежде всего докажем, что функционал $\mathcal{F}$ ограничен снизу на единичной сфере $\mathbb{S}$. Действительно, в силу теоремы вложения С. Л. Соболева имеет место следующее неравенство:

$$\|v\|_p \leqslant c_1 \|Dv\|_2, \quad p \in (2, 2^*).$$

Так что

$$\int\limits_{\Omega} |v|^p \, dx \leqslant c_1^p \left(\int\limits_{\Omega} |Dv|^2 \, dx \right)^{p/2} = c_1^p,$$

поскольку $v \in \mathbb{S}$. Таким образом, приходим к оценке снизу для функционала $\mathcal{F}(v)$:

$$\mathcal{F}(v) \geqslant \frac{p-2}{2p} \frac{1}{c_1^{2p/(p-2)}} > 0 \quad \text{для всех} \quad v \in \mathbb{S}. \tag{1.13}$$

Теперь проверим, что функционал $\mathcal{F}(v)$ удовлетворяет на единичной сфере $\mathbb{S}$ условию ($\mathrm{PS_c}$) при всех

$$c \geqslant \inf_{v \in \mathbb{S}} \mathcal{F}(v).$$

□ Действительно, пусть $\{v_n\} \subset \mathbb{S}$ — это произвольная последовательность такая, что имеют место условия

$$\mathcal{F}(v_n) \to c \quad \text{и} \quad \left\| \mathcal{F}'_f(v_n) \right\|_* (\mathrm{T}_{v_n}\mathbb{S}) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{1.14}$$

1. Заметим, что поскольку $\{v_n\} \subset \mathbb{S}$, то эта последовательность ограничена в $\mathbb{B}$ и поэтому у нее в силу рефлексивности $\mathbb{B} = H_0^1(\Omega)$ существует подпоследовательность $\{v_{n_k}\} \subset \{v_n\}$ такая, что

$$v_{n_k} \rightharpoonup v \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Отметим, что в частности $v \in \mathbb{S}$, поскольку единичная сфера вещественного гильбертова пространства $H_0^1(\Omega)$ слабо компактна.

Из вполне непрерывности вложения

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega) \quad \text{при} \quad p \in (2, 2^*)$$

имеем

$$v_{n_k} \rightharpoonup v \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega) \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

В частности,

$$\|v_{n_k}\|_p \to \|v\|_p \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

В силу первого условия ($\mathrm{PS_c}$) приходим к выводу, что

$$\mathcal{F}(v_n) \leqslant K \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N},$$

где $K \in (0, +\infty)$ и не зависит от $n \in \mathbb{N}$. Поэтому приходим к выводу, что

$$\|v\|_p \neq 0, \tag{1.15}$$

и, значит,

$$\mathcal{F}(v_{n_k}) \to \mathcal{F}(v) \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Для сокращения громоздкости выкладок обозначим найденную подпоследовательность $\{v_{n_k}\}$ снова через $\{v_n\}$.

2. Для того, чтобы воспользоваться вторым условием из ($\mathrm{PS_c}$) найдем производную Фреше функционала $\mathcal{F}(v)$. Действительно,

$$\mathcal{F}(v) \equiv \psi_1(t(v), v) = \frac{p-2}{2p} \left(\int_\Omega |v|^p \, dx \right)^{-2/(p-2)},$$

$$\mathcal{F}'_f(v) = -\left(\int_\Omega |v|^p \, dx \right)^{-p/(p-2)} |v|^{p-2} v. \tag{1.16}$$

Производная Фреше функционала $\varphi(v) = \|Dv\|_2^2$ вычисляется элементарно:

$$\varphi'_f(v) = -2\Delta v. \tag{1.17}$$

Теперь перепишем второе условие из (1.14). Действительно, справедлива цепочка выражений

$$\left\|\mathcal{F}_f'(v_n)\right\|_*(\mathrm{T}_{v_n}\mathbb{S}) = \inf_{\mu\in\mathbb{R}^1}\left\|\mathcal{F}_f'(v_n)+\mu\varphi_f'(v_n)\right\|_* =$$
$$= \left\|\mathcal{F}_f'(v_n)+\mu_n\varphi_f'(v_n)\right\|_* = \sup_{z\in\mathbb{B},\ \|z\|\leqslant 1}\left|\left\langle\mathcal{F}_f'(v_n)+\mu_n\varphi_f'(v_n), z\right\rangle\right| \geqslant$$
$$\geqslant \left|\left\langle\mathcal{F}_f'(v_n)+\mu_n\varphi_f'(v_n), v_n\right\rangle\right| = \left|\left\langle\mathcal{F}_f'(v_n), v_n\right\rangle + \mu_n\left\langle\varphi_f'(v_n), v_n\right\rangle\right|.$$

Отдельно вычислим выражения

$$\left\langle\mathcal{F}_f'(v_n), v_n\right\rangle \quad \text{и} \quad \left\langle\varphi_f'(v_n), v_n\right\rangle.$$

Действительно,

$$\left\langle\mathcal{F}_f'(v_n), v_n\right\rangle = -\left(\int\limits_\Omega |v_n|^p\,dx\right)^{-2/(p-2)}, \quad \left\langle\varphi_f'(v_n), v_n\right\rangle = 2\varphi(v_n).$$

Теперь выберем $\{\mu_n\}\subset\mathbb{R}^1_+$ таким образом, чтобы

$$\left\langle\mathcal{F}_f'(v_n), v_n\right\rangle + \mu_n\left\langle\varphi_f'(v_n), v_n\right\rangle = 0,$$

тогда получим, что

$$\mu_n = \frac{1}{2}\left(\int\limits_\Omega |v_n|^p\,dx\right)^{-2/(p-2)}.$$

Но тогда для таких $\{\mu_n\}$ в силу второго условия из (1.14) получим предельную формулу

$$\mathrm{I}_n \equiv \left\langle\mathcal{F}_f'(v_n), z\right\rangle + \mu_n\left\langle\varphi_f'(v_n), z\right\rangle \to 0 \quad \text{при} \quad n\to+\infty. \tag{1.18}$$

Заметим, что имеет место следующее равенство:

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega \left|\mathcal{F}_f'(v_n)\right|^{p'}dx = \mu_n \quad p' = \frac{p}{p-1}.$$

Поэтому последовательность $\{\mathcal{F}_f'(v_n)\}$ ограничена в $L^{p'}(\Omega)$. С другой стороны, имеет место следующая цепочка плотных и непрерывных вложений:

$$H_0^1(\Omega) \overset{ds}{\subset} L^p(\Omega) \overset{ds}{\subset} L^{p'}(\Omega) \overset{ds}{\subset} H^{-1}(\Omega).$$

Поэтому в силу теоремы 3 второй лекции первого тома имеет место равенство

$$\left\langle\mathcal{F}_f'(v_n), w\right\rangle = \int\limits_\Omega \mathcal{F}_f'(v_n)(x)w(x)\,dx \quad \text{для всех} \quad w(x)\in H_0^1(\Omega). \tag{1.19}$$

Ранее мы доказали, что

$$v_n \to v \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega),$$

тогда в силу ограниченности $\{\mathcal{F}'_f(v_n)\}$ в $L^{p'}(\Omega)$ из (1.19) приходим к выводу, что

$$\left\langle \mathcal{F}'_f(v_n), v_n - v \right\rangle \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{1.20}$$

С другой стороны, в силу слабой сходимости $\{v_n\}$ к v в $H^1_0(\Omega)$ приходим к выводу, что

$$\left\langle \varphi'_f(v), v_n - v \right\rangle \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty, \tag{1.21}$$

поскольку $\varphi'_f(v) \in H^{-1}(\Omega)$.

Теперь из выражения (1.18) можно получить следующее равенство:

$$\mu_n \left\langle \varphi'_f(v_n) - \varphi'_f(v), v_n - v \right\rangle =$$
$$= \mathrm{I}_n - \left\langle \mathcal{F}'_f(v_n), v_n - v \right\rangle - \mu_n \left\langle \varphi'_f(v), v_n - v \right\rangle \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

которое вытекает из предельных формул (1.18), (1.20) и (1.21). С другой стороны, по доказанному

$$\mu_n \geqslant \varepsilon > 0 \quad \text{при достаточно большом} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Итак,

$$\left\langle \varphi'_f(v_n) - \varphi'_f(v), v_n - v \right\rangle = \int\limits_\Omega |Dv_n - Dv|^2 \, dx \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

т. е.

$$v_n \to v \quad \text{сильно в} \quad H^1_0(\Omega) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Таким образом, функционал $\mathcal{F}(v)$ удовлетворяет условию ($\mathrm{PS_c}$) относительно единичной сферы $\mathbb{S}$ для всех

$$c \geqslant \inf_{v \in \mathbb{S}} \mathcal{F}(v) > 0. \boxtimes$$

Заметим, что функционалы $\mathcal{F}(v)$ и $\varphi(v)$ четные. Поэтому мы можем отождествить диаметрально противоположные точки единичной сферы $\mathbb{S}$. Введем банахово пространство

$$\mathbb{X} = \left\{ x = [v, -v] : \; v \in \mathbb{B} = H^1_0(\Omega) \right\},$$

функционалы $\mathcal{F}_1(x) \equiv \mathcal{F}(v)$ и $\varphi_1(x) \equiv \varphi(v)$, и многообразие

$$\mathcal{V}_1 \equiv \{ x \in \mathbb{X} : \; \varphi_1(x) = 1 \}.$$

Но многообразие $\mathcal{V}_1$ является бесконечномерным проективным пространством $\mathbb{P}^\infty$, поэтому

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}_1}(\mathcal{V}_1) = +\infty.$$

Рассмотрим множество

$$\mathcal{F}_1^{d_n} \equiv \{x \in \mathcal{V}_1 : \mathcal{F}_1(x) \leqslant d_n\}, \quad d_n \to +\infty \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Заметим, что

$$\mathcal{V}_1 = \operatorname*{induct}_{n\to+\infty} \mathcal{F}_1^{d_n}.$$

Значит,

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{cat}_{\mathcal{V}_1}\left(\mathcal{F}_1^{d_n}\right) = +\infty.$$

Следовательно, в силу теоремы 8 шестой лекции мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1. *Функционал $\mathcal{F}(v)$ имеет не менее, чем счетное множество условно критических линейно независимых точек $\{v_n\} \subset \subset \mathbb{S} \subset H_0^1(\Omega)$ относительно единичной сферы $\mathbb{S} \subset H_0^1(\Omega)$, причем для соответствующих собственных значений $\{\lambda_n\}$ справедлива минимаксная формулировка*:

$$\lambda_n = \inf_{\mathcal{A}\in\mathcal{A}_n} \sup_{v\in\mathcal{A}} \left(\int\limits_\Omega |v|^p\,dx\right)^{-2/(p-2)},$$

где

$$\mathcal{A}_n \equiv \{\mathcal{A} \subset \mathbb{S} : \operatorname{cat}_{\mathbb{S}}(\mathcal{A}) \geqslant n\},$$

причем $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}$ и, кроме того, $\mathcal{A} = -\mathcal{A}$. Наконец, последовательность собственных значений $\{\lambda_n\}$ монотонно неубывающая и имеет единственную предельную точку $\lambda_\infty = +\infty$ и поэтому справедлива предельная формула

$$\int\limits_\Omega |v_n|^p\,dx = \frac{1}{\lambda_n^{(p-2)/2}} \searrow 0 \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

Теперь наша задача заключается в том, чтобы доказать, что последовательность $\{u_k\} \subset H_0^1(\Omega)$ при $u_k = t(v_k)v_k$ является последовательностью критических точек функционала $\psi(u)$. Действительно, по доказанному точки v_k удовлетворяют равенству

$$\psi'_{1fv}(t_k, v_k) - \mu_k\varphi'_f v(t_k, v_k) = \vartheta \in \mathbb{B}^*, \quad \text{где} \quad t_k = t(v_k). \tag{1.22}$$

Умножим «скалярно» равенство (1.22) на v_k относительно скобок двойственности между банаховыми пространствами $H^1_0(\Omega)$ и $H^{-1}(\Omega)$ и получим равенство

$$\left\langle \psi^{'}_{1fv}(w_k), v_k \right\rangle = \mu_k \left\langle \varphi^{'}_{f}(w_k), v_k \right\rangle. \tag{1.23}$$

Заметим, что имеет место следующее цепочка равенств:

$$\left\langle \psi^{'}_{1fv}(w_k), v_k \right\rangle = t_k \left\langle \psi^{'}_{f}(u_k), v_k \right\rangle = t_k \frac{\partial \psi_1(t_k, v_k)}{\partial t} = 0.$$

Последнее равенство имеет место в силу равенства (1.11). Но тогда из (1.23) вытекает, что

$$\mu_k \left\langle \varphi^{'}_{f}(w_k), v_k \right\rangle = 0,$$

но поскольку по построению

$$\left\langle \varphi^{'}_{f}(w_k), v_k \right\rangle \neq 0 \Rightarrow \mu_k = 0.$$

Отсюда в силу (1.22) вытекает равенство

$$\psi^{'}_{1fv}(t_k, v_k) = \vartheta \in \mathbb{B}^* \Rightarrow \vartheta = \psi^{'}_{1fv}(t_k, v_k) = t_k \psi^{'}_{f}(u_k).$$

Следовательно, $u_k = t(v_k)v_k$ — это критические точки функционала $\psi(u)$ на банаховом пространстве $\mathbb{B} = H^1_0(\Omega)$.

Таким образом, исходная краевая задача (1.1) имеет по меньшей мере счетное множество геометрически разных собственных функций вида $u_k = t(v_k)v_k$, где $\|v_k\| = 1$.

§ 2. Задача Л. В. Овсянникова

Рассмотренная краевая задача (1.1) может быть изучено непосредственно без использования метода глобального расслоения С. И. Похожаева, что и было сделано в предыдущей лекции.

Однако, метод глобального расслоения применим тогда, когда другие методы не работают. В этом параграфе мы рассмотрим задачу Л. В. Овсянникова, которая имеет следующий вид:

$$\Delta\Phi + \Phi^2 = 0 \quad \text{на} \quad x \in \Omega, \quad \Phi(x) = h(x) \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega. \tag{2.1}$$

Для этой задачи функционал Эйлера не является коэрцитивным, а нелинейность четная, и поэтому для доказательства существования кратных решений методы, изложенные ранее, неприменимы.

Сделаем предварительные предположения. Пусть $h(x) \in \mathbb{W}^{1/2}_2(\partial\Omega)$ и $H(x) \in H^1(\Omega)$ — это слабое решение следующей задачи:

$$\Delta H(x) = 0 \quad \text{на} \quad x \in \Omega, \quad H(x) = h(x) \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega. \tag{2.2}$$

Сделаем замену переменных
$$u(x) = \Phi(x) + H(x),$$
тогда получим из задачи (2.1) следующую задачу:
$$\Delta u + (u + H(x))^2 = 0 \quad \text{на} \quad x \in \Omega, \quad u(x) = 0 \quad \text{на} \quad x \in \partial\Omega. \tag{2.3}$$
Этой задаче соответствует следующий функционал Эйлера:
$$f(u) = \int\limits_\Omega |Du|^2\,dx + \int\limits_\Omega \left[-\frac{2}{3}(u+H)^3 + \frac{2}{3}H^3\right] dx, \tag{2.4}$$
определенный над пространством С. Л. Соболева $H_0^1(\Omega)$.

Рассмотрим формально метод глобального расслоения С. И. Похожаева. Действительно, представим решение в следующем виде:
$$u(x) = tv, \quad v \in \mathbb{S} = \{w(x) \in H_0^1(\Omega), \quad \|Dw\|_2 = 1\}.$$
Тогда
$$f(tv) = t^2 + \int\limits_\Omega \left[-\frac{2}{3}(tv+H)^3 + \frac{2}{3}H^3\right] dx, \quad v(x) \in \mathbb{S}. \tag{2.5}$$
Уравнение
$$f_f'(u) = 0 \Leftrightarrow f_t'(tv) = 0, \quad f_v'(tv) = 0, \tag{2.6}$$
где
$$f_t'(tv) = 2t - 2\int\limits_\Omega (tv+H)^2 v\,dx = 0, \tag{2.7}$$
$$f_v(tv) = -2(tv+H)^2 t = -\lambda\Delta v, \tag{2.8}$$
λ — множитель Лагранжа вариационной задачи для условно критической точки $v \in \mathbb{S}$ функционала $f(tv)$. Из уравнения (2.7) мы получим два различных решения
$$t_\pm(v) = \left\{1 - 2\int\limits_\Omega Hv^2\,dx \pm \left[\left(1 - 2\int\limits_\Omega Hv^2\,dx\right)^2 - \right.\right.$$
$$\left.\left. - 4\int\limits_\Omega H^2 v\,dx \int\limits_\Omega v^3\,dx\right]^{1/2}\right\} \left(2\int\limits_\Omega v^3\,dx\right)^{-1}.$$
Подстановкой в выражение для $f(tv)$ мы получаем две различные вариационные задачи
$$F_+ = f(t_+(v)v), \quad F_- = f(t_-(v)v), \quad v(x) \in \mathbb{S}.$$

Оказывается оба функционала достигают минимума на $v_{\pm}(x)$ единичной сфере $\mathbb{S}$, причем

$$u_{+}(x) = t(v_{+})v_{+} \neq u_{-} = t_{-}(v_{-})v_{-}.$$

Таким образом задача Л. В. Овсянникова имеет два, причем положительных, слабых решений.

Лекция 6

МЕТОД ГАЛЕРКИНА И МОНОТОННОСТИ

В этой лекции мы рассмотрим применение метода Галеркина в сочетании с методом монотонных операторов, который успешно может быть применен к задачам с главным нелинейным монотонным оператором. Кроме того, мы приведем различные теоремы о существовании решений операторных уравнений с монотонными операторами. Прежде всего теорему Браудера–Минти.

§ 1. Введение

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$-\Delta u = f(x), \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.1}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — это ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0,1]$, понимаемую сначала в так называемом классическом смысле, т. е. поточечно.

Хорошо известно, что если функция $f(x) \in \mathbb{C}^{0,\alpha}(\Omega)$ при $\alpha \in (0,1]$, то существует единственное классическое решение этой задачи в Гельдеровском пространстве

$$u(x) \in \mathbb{C}^{2,\alpha}(\Omega).$$

Однако, довольно часто в физических задачах возникает ситуация, когда функция $f(x)$ теряет свойство быть даже непрерывной на каком-то множестве из области Ω. Поэтому возникает необходимость каким–то образом обобщить понятие решения задачи. С этой целью заметим, что во–первых, многие краевые задачи появляются в физике как некоторое интегральное равенство, а не поточечное, а во–вторых, умножим обе части равенства (1.1) на функцию $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$ и проинтегрируем получившееся равенство по области Ω в смысле Лебега. После чего воспользовавшись формулой интегрирования по частям мы получим следующее равенство:

$$\int\limits_\Omega (Du(x), D\varphi(x))\, dx = \int\limits_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega). \tag{1.2}$$

Заметим, что при такой постановки правая часть равенства (1.2) определена и для разрывных функциях, только бы она была локально интегрируемой. Именно, такого вида интегральное равенство, которое в классическом смысле эквивалентно (в силу основной леммы вариационного исчисления) краевой задаче (1.1), берут за основу при формулировке *слабого решения краевой задачи.*

В следующих параграфах мы рассмотрим различные краевые задачи для нелинейных эллиптических уравнений и рассмотрим некоторые методы их исследования. При этом мы делаем упор на слабую формулировку рассматриваемых задач и на метод *слабой сходимости.*

§ 2. Метод Галеркина и монотонности

ПРИМЕР 1. *Эллиптическое уравнение с p—лапласианом.*

Давайте мы рассмотрим следующую краевую задачу для одного из самых известных нелинейных эллиптических операторов. Действительно, рассмотрим сначала *классическую постановку задачи*:

$$-\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) = f(x), \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{при} \quad p \geqslant 2. \tag{2.1}$$

Очевидно, что при $p = 2$ приходим к задаче (1.1). Поскольку курс лекций адресован в первую очередь физикам мы приведем для полноты изложения вывод краевой задачи (2.1).

Действительно, рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с достаточно гладкой поверхностно–односвязной границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in \in (0, 1]$. Рассмотрим приближение квазистационарного поля, а именно электрическую часть системы уравнений Максвелла в квазистационарном приближении (см., например, [24]):

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi n(x), \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \tag{2.2}$$

где распределение плотности свободных зарядов, описываемое функцией $n = n(x)$ считается заданным. Теперь предположим, что зависимость $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$ является нелинейной, причем соответствует так называемой керровской нелинейности

$$\mathbf{D} = |\mathbf{E}|^{p-2}\mathbf{E} \quad \text{при} \quad p \geqslant 2. \tag{2.3}$$

Поскольку область Ω имеет поверхностно–односвязную границу, то можно ввести потенциал электрического поля согласно формуле

$$\mathbf{E} = -D\varphi. \tag{2.4}$$

Кроме того, предположим, что границы области Ω заземлена, поэтому с учетом известного соглашения о том, что «земля» имеет нулевой потенциал, приходим к граничному условию

$$\varphi|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.5}$$

Следствием системы уравнений (2.2)–(2.5) является задача (2.1), в которой $f(x) = 4\pi n(x)$.

Теперь мы займемся исследованием свойств оператора при $x \in \Omega \subset \subset \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du),$$

который носит название *псевдо–лапласиана*. Прежде всего докажем, что он является оператором, действующим как

$$\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega), \quad p' = \frac{p}{p-1}, \tag{2.6}$$

где, напомним, $W^{-1,p'}(\Omega)$ является пространством линейных непрерывных функционалов над пространством С. Л. Соболева $W_0^{1,p}(\Omega)$. С этой целью заметим, что оператор псевдо–лапласиана можно представить в виде композиции трех отображений следующим образом:

$$\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) = \operatorname{div}(\xi), \quad \xi = |\eta|^{p-2}\eta, \quad \eta = Du. \tag{2.7}$$

Пусть $u(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, тогда справедливы следующие формулы. Во–первых, согласно определению пространства $W_0^{1,p}(\Omega)$ имеем

$$\eta = Du : W_0^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega) \otimes L^p(\Omega) \otimes L^p(\Omega). \tag{2.8}$$

Во–вторых, проверим, что имеет место следующее выражение для оператора $\xi = |\eta|^{p-2}\eta$:

$$\xi = |\eta|^{p-2}\eta : L^p(\Omega) \otimes L^p(\Omega) \otimes L^p(\Omega) \to L^{p'}(\Omega) \otimes L^{p'}(\Omega) \otimes L^{p'}(\Omega). \tag{2.9}$$

Действительно, представим покоординатно выражение для вектора ξ.

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad \eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3),$$

$$\xi_1 = |\eta|^{p-2}\eta_1, \quad \xi_2 = |\eta|^{p-2}\eta_2, \quad \xi_3 = |\eta|^{p-2}\eta_3.$$

Докажем, например, что $\xi_1 = |\eta|^{p-2}\eta_1 \in L^{p'}(\Omega)$. Действительно, справедливо следующее неравенство:

$$|\xi^1|^{p'} = \Big||\eta|^{p-2}\eta_1\Big|^{p'} \leqslant \big||\eta|^{p-1}\big|^{p'} = |\eta|^p,$$

поэтому отсюда вытекает, что если $\eta \in L^p(\Omega) \otimes L^p(\Omega) \otimes L^p(\Omega)$, то $\xi_1 \in \in L^{p'}(\Omega)$. Формула (2.9) доказана. Третий оператор $\operatorname{div}(\xi)$ действует следующим образом:

$$\operatorname{div}(\xi) : L^{p'}(\Omega) \otimes L^{p'}(\Omega) \otimes L^{p'}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega). \tag{2.10}$$

Итак, оператор (2.7) как композиция трех операторов (2.8)–(2.10) действует согласно формуле (2.6).

Введем теперь скобки двойственности между сопряженными банаховыми пространствами $W_0^{1,p}(\Omega)$ и $W^{-1,p'}(\Omega)$ следующим образом:

$$\langle f, u\rangle : W^{-1,p'}(\Omega) \otimes W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}^1. \tag{2.11}$$

Докажем теперь очень важное свойство оператора *псевдо–лапласиана*, а именно свойство *строгой монотонности*. Действительно, введем сначала более короткое обозначение

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|Du|^{p-2} Du) \tag{2.12}$$

и докажем следующее его свойство:

$$\langle -\Delta_p u_1 + \Delta_p u_2, u_2 - u_2\rangle \geqslant 0, \tag{2.13}$$

причем равенство в этом неравенстве имеет место, тогда и только тогда, когда $u_1 = u_2$. Заметим, что скобки двойственности (2.11) определены при

$$f = \Delta_p u,$$

поскольку имеет место формула (2.6). Теперь заметим, что в силу построения оператора псевдо–лапласиана имеет место формула «интегрирования по частям»:

$$\langle \Delta_p u, v\rangle = -\sum_{i=1}^{3} \Big\langle |Du|^{p-2} u_{x_i}, v_{x_i} \Big\rangle_p = \int_\Omega |Du|^{p-2} (Du, Dv)\, dx \tag{2.14}$$

для всех $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, где $\langle \cdot, \cdot\rangle_p$ — это скобки двойственности между банаховыми пространствами $L^p(\Omega)$ и $L^{p'}(\Omega)$ при $p \in [2, +\infty)$, которые имеют следующий явный вид

$$\langle f, u\rangle_p = \int_\Omega f(x) u(x)\, dx \quad \text{для всех} \quad f(x) \in L^{p'}(\Omega), \quad u(x) \in L^p(\Omega),$$

чем мы и воспользовались в формуле (2.14). Итак, теперь мы в состоянии доказать неравенство (2.13). Действительно, пусть $u_1(x), u_2(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, тогда после «интегрирования по частям» получим следующую формулу:

$$\langle -\Delta_p u_1 + \Delta_p u_2, u_2 - u_2\rangle = \\ = \int_\Omega \Big(|Du_1|^{p-2} Du_1 - |Du_2|^{p-2} Du_2, Du_1 - Du_2 \Big)\, dx. \tag{2.15}$$

Справедлива следующая цепочка выражений для всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$:

$$\begin{aligned}\Big(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta, \xi - \eta\Big) = |\xi|^p + |\eta|^p - |\xi|^{p-2}(\xi, \eta) - |\eta|^{p-2}(\xi, \eta) \geqslant \\ \geqslant |\xi|^p + |\eta|^p - |\xi|^{p-1}|\eta| - |\eta|^{p-1}|\xi| = \\ = [|\xi|^{p-1} - |\eta|^{p-1}][|\xi| - |\eta|] \geqslant 0 \quad (2.16)\end{aligned}$$

поскольку функция $f(x) = x^{p-1}$ является монотонной при $x \geqslant 0$ и при $p > 1$. Заметим, что можно доказать более сильное неравенство следующего вида:

$$\Big(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta, \xi - \eta\Big) \geqslant 2^{2-p}|\xi - \eta| \quad \text{для всех} \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^N, \quad (2.17)$$

из которого в применении к неравенству (2.15) вытекает строгая монотонность, определение которой мы сейчас дадим.

Определение 1. *Отображение*

$$\mathbb{F} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$$

называется монотонным относительно скобок двойственности

$$\langle \cdot, \cdot \rangle$$

между сопряженными банаховыми пространствами, если для всех $u, v \in \mathbb{B}$ *имеет место следующее неравенство*:

$$\langle \mathbb{F}(u) - \mathbb{F}(v), u - v \rangle \geqslant 0, \quad (2.18)$$

и называется строго монотонным, если равенство в формуле (2.18) *имеет место, тогда и только тогда, когда* $u = v$.

Теперь как мы и обещали дадим определение слабого решения задачи (2.1).

Определение 2. *Слабым решением задачи* (2.1) *при условии, что* $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, *называется функция* $u(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *удовлетворяющая следующему равенству*:

$$\langle -\Delta_p u, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \textit{для всех} \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (2.19)$$

Давайте обсудим как связаны слабое решение и решение задачи (2.1), понимаемой в классическом смысле. Действительно, пусть решение задачи (2.1) принадлежит к классу $u(x) \in \mathbb{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})$, конечно, при условии, что $f(x) \in \mathbb{C}^{0,\alpha}(\Omega)$ при $\alpha \in (0, 1]$. Тогда такая функция $u(x)$ является решением задачи (2.19). Но, естественно, не всякое слабое решение является классическим.

Для дальнейшего нам нужно ввести новое понятие *коэрцитивности*. Дадим определение.

Определение 3. *Оператор* $\mathbb{F} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ *называется коэрцитивным, если имеет место следующее предельное равенство*:

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} \frac{\langle \mathbb{F}(u), u \rangle}{\|u\|} = +\infty. \tag{2.20}$$

Докажем, что оператор псевдолапласиана является коэрцитивным. Действительно, «интегрированием по частям» доказывается следующая формула:

$$\langle -\Delta_p u, u \rangle = \int_\Omega |Du|^p \, dx = \|Du\|_p^p \quad \text{при} \quad p \geqslant 2. \tag{2.21}$$

Отсюда и вытекает коэрцитивность.

Для дальнейшего нам потребуется следующая *лемма об остром угле*:

Лемма 1. *Пусть* $\mathbb{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— непрерывное отображение, для некоторого* $R > 0$ *удовлетворяющее условию*

$$(\mathbb{T}a, a) \geqslant 0 \quad \textit{при} \quad |a| = R.$$

Тогда существует такое $a \in \mathbb{R}^n$, *что* $|a| \leqslant R$ *и* $\mathbb{T}a = 0$.

Доказательство.

Допустим, что

$$\mathbb{T}a \neq 0 \quad \text{для всех} \quad a \in \mathbb{K}_R = \{a | a \in \mathbb{R}^n, \ |a| \leqslant R\}.$$

Тогда отображение, определяемое по правилу

$$a \to -R \frac{\mathbb{T}a}{|\mathbb{T}a|},$$

является непрерывным отображением из K_R в K_R. В силу теоремы Брауэра о неподвижной точке существует $a \in K_R$, такое, что

$$a = -R \frac{\mathbb{T}a}{|\mathbb{T}a|}.$$

Очевидно, $|a| = R$ и $(\mathbb{T}a, a) = -R|\mathbb{T}a| < 0$, в противоречие с нашим предположением, что $(\mathbb{T}a, a) \geqslant 0$ для $|a| = R$.

Лемма доказана.

Дадим сейчас определение очень полезного в приложениях S^+ свойства оператора Δ_p — псевдолапласиана.

Определение 4. *Будем говорить, что оператор* Δ_p *удовлетворяет так называемому* S^+ *свойству, если из того, что*

$$u_m \rightharpoonup u \quad \textit{слабо в} \quad W_0^{1,p}(\Omega)$$

и условия, что

$$\limsup_{m\to+\infty} \langle -\Delta_p u_m, u_m - u\rangle \leqslant 0, \tag{2.22}$$

вытекает, что

$$u_m \to u \quad \textit{сильно в} \quad W_0^{1,p}(\Omega).$$

Справедлива следующая вспомогательная лемма.

Лемма 2. *Оператор Δ_p удовлетворяет S^+ свойству.*

Доказательство.

Пусть

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad W_0^{1,p}(\Omega).$$

Рассмотрим следующие выражения:

$$\begin{aligned}\langle \Delta_p u - \Delta_p u_m, u_m - u\rangle &= \\ = \int\limits_\Omega \Big(|Du_m|^{p-2}Du_m - |Du|^{p-2}Du, Du_m - Du\Big) &\geqslant \\ \geqslant 2^{p-2}\int\limits_\Omega |Du_m - Du|^p\,dx,\end{aligned} \tag{2.23}$$

где в последнем неравенстве мы воспользовались неравенством (2.17). Теперь заметим, что в силу слабой сходимости последовательности $\{u_m\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ вытекает, что

$$\langle \Delta_p u, u_m - u\rangle \to 0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty, \tag{2.24}$$

поэтому переходя к пределу в неравенстве (2.23) в силу предельного свойства (2.22) получим, что

$$0 \geqslant \lim_{m\to+\infty} \int\limits_\Omega |Du_m - Du|^p\,dx \geqslant 0.$$

Значит,

$$u_m \to u \quad \text{сильно в} \quad W_0^{1,p}(\Omega).$$

Лемма доказана.

Теперь мы приступим к доказательству слабой обобщенной разрешимости задачи (2.1) в смысле определения 2. Действительно, воспользуемся теперь методом Галеркина.

1. С этой целью заметим, что банахово пространство $W_0^{1,p}(\Omega)$ является сепарабельным, т.е. в нем существует счетное всюду плотное множество $\{w_j\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$. Рассмотрим следующее «галеркинское» приближение:

$$u_m(x) = \sum_{k=1}^m c_{mk} w_k(x), \quad c_{mk} \in \mathbb{R}^1, \tag{2.25}$$

причем функции $u_m(x)$ удовлетворяют следующему равенству:

$$\langle -\Delta_p u_m, w_j \rangle = \langle f, w_j \rangle \quad \text{для всех} \quad j = \overline{1, m}. \tag{2.26}$$

2. Теперь наша задача доказать разрешимость этой системы алгебраических уравнений. С этой целью мы и воспользуемся сформулированной и доказанной ранее леммы 1 об остром угле. С этой целью рассмотрим следующий оператор

$$\mathbb{T}(\mathbf{c}_m) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m,$$

где

$$\mathbb{T}(\mathbf{c}_m) = (\mathbb{T}_1(\mathbf{c}_m), ..., \mathbb{T}_m(\mathbf{c}_m)), \quad \mathbf{c}_m = (c_{m1}, ..., c_{mm}).$$
$$\mathbb{T}_j(\mathbf{c}_m) = -\langle \Delta_p u_m, w_j \rangle - \langle f, w_j \rangle \quad \text{при} \quad j = \overline{1, m}.$$

Теперь рассмотрим стандартное скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ в $\mathbb{R}^m$. Справедлива следующая цепочка выражений:

$$(\mathbb{T}(\mathbf{c}_m), \mathbf{c}_m) = -\langle \Delta_p u_m, u_m \rangle - \langle f, w_m \rangle = \|Du_m\|_p^p - \langle f, w_m \rangle \geqslant$$
$$\geqslant \|Du_m\|_p^p - \|f\|_* \|Du_m\|_p = \|Du_m\|_p \left(\|Du_m\|_p^{p-1} - \|f\|_* \right) \geqslant 0$$

при достаточно большом $r : \|Du_m\|_p = r > 0$, где символом $\|\cdot\|_*$ обозначена норма банахова пространства $W^{-1,p'}(\Omega)$, а символом $\|Du\|_p$ обозначена норма банахова пространства $W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\|Du\|_p = \left(\int_\Omega |Du|^p \, dx \right)^{1/p} .$$

и мы воспользовались следующим общим неравенством:

$$|\langle f, u \rangle| \leqslant \|f\|_* \|u\| \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{B}^*, \quad u \in \mathbb{B}.$$

□ Докажем его. Действительно, если $u = \vartheta$ — это нулевой элемент банахова пространства $\mathbb{B}$, то неравенство выполняется. Пусть $u \neq \vartheta$, тогда в силу определения нормы $\|\cdot\|_*$ имеет место следующее равенство

$$\|f\|_* = \sup_{\|w\| \leqslant 1} |\langle f, w \rangle| ,$$

из которого сразу же вытекает неравенство

$$|\langle f, w \rangle| \leqslant \|f\|_* \quad \text{для всех} \quad \|w\| \leqslant 1.$$

Теперь возьмем в качестве w величину

$$w = \frac{u}{\|u\|}$$

и подставим это выражение в предыдущее неравенство и получим искомое неравенство. ⊠

3. Осталось заметить, что на конечномерном эвклидововм пространстве $\mathbb{R}^m$ все нормы эквивалентны, поэтому мы приходим к выводу, что найдется такое достаточно большое $R > 0$, что будет выполнено неравенство

$$(\mathbb{T}(\mathbf{c}_m), \mathbf{c}_m) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{c}_m| = R > 0.$$

Следовательно, в силу леммы об остром угле существует такое $\mathbf{c}_m \in \in \mathbb{R}^m$, что

$$\mathbb{T}(\mathbf{c}_m) = 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{c}_m| \leqslant R,$$

т. е. алгебраическая система (2.26) имеет решение $u_m \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Тем самым, у нас имеется последовательность $\{u_m\}$ «галеркинских» приближений.

4. Здесь заключается важный момент — нужно доказать, что при $m \to +\infty$ для некоторой подпоследовательности $\{u_{m_m}\} \subset \{u_m\}$ имеет место слабая сходимость

$$u_{m_m} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty,$$

причем $u(x)$ удовлетворяет равенству (2.19). Теперь приступим к реализации этой схемы доказательства.

5. Прежде всего умножим равенство (2.26) на c_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1, m}$, тогда получим следующее равенство:

$$\langle -\Delta_p u_m, u_m \rangle = \langle f, u_m \rangle, \tag{2.27}$$

в котором после «интегрирования по частям» мы получим следующую цепочку выражений:

$$\|Du_m\|_p^p = \langle f, u_m \rangle \leqslant \|f\|_* \|Du_m\|_p$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\|Du_m\|_p \leqslant \|f\|_*^{1/(p-1)} \quad \text{для всех} \quad m \in \mathbb{N}. \tag{2.28}$$

Следовательно, последовательность $\{u_m\}$ равномерно ограничена в банаховом пространстве $W_0^{1,p}(\Omega)$, и поэтому в силу теоремы 4 Лекции 1 существует такая ее подпоследовательность $\{u_{m_m}\} \subset \{u_m\}$, для которой

$$u_{m_m} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \tag{2.29}$$

6. Теперь докажем, что выполнено свойство (2.22). Действительно, в силу (2.26) имеет место следующее равенство

$$\langle -\Delta_p u_m, u_m \rangle = \langle f, u_m \rangle \to 0, \tag{2.30}$$

Выберем последовательность вида

$$v_m = \sum_{j=1}^{m} k_{mj} w_j \tag{2.31}$$

такую, что

$$v_m \to u \quad \text{сильно в} \quad W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.32}$$

7. Умножим обе части равенства (2.26) на k_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1, m}$ и в результате получим равенство

$$\langle -\Delta_p u_m, v_m \rangle = \langle f, v_m \rangle . \tag{2.33}$$

Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}
\langle -\Delta_p u_m, u_m - u\rangle &= \langle f, u_m\rangle - \langle -\Delta_p u_m, u\rangle = \\
&= \langle f, u_m\rangle - \langle -\Delta_p u_m, u - v_m\rangle - \langle -\Delta_p u_m, v_m\rangle = \\
&= \langle f, u_m\rangle - \langle -\Delta_p u_m, u - v_m\rangle - \langle f, v_m\rangle = \\
&= \langle f, u_m - v_m\rangle - \langle -\Delta_p u_m, u - v_m\rangle = \mathrm{I}_{1m} + \mathrm{I}_{2m}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим каждое слагаемое в правой части последнего равенства. Действительно, имеет место неравенство

$$|\mathrm{I}_{1m}| \leqslant |\langle f, u_m - v_m\rangle| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty, \tag{2.34}$$

поскольку

$$u_m - v_m = (u_m - u) - (v_m - u) \rightharpoonup 0 \quad \text{слабо в} \quad W_0^{1,p}(\Omega).$$

Оценим второе слагаемое I_{2m}. Действительно, имеет место следующая оценка:

$$|\mathrm{I}_{2m}| \leqslant |\langle -\Delta_p u_m, u - v_m\rangle| \leqslant \|\Delta_p u_m\|_* \|u - v_m\| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty, \tag{2.35}$$

поскольку имеет место свойство (2.32) и, кроме того, так как имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}
\|\Delta_p u_m\|_* &= \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1} |\langle -\Delta_p u_m, \varphi\rangle| = \\
&= \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1} \left| \int_\Omega |Du_m|^{p-2} (Du_m, D\varphi)\, dx \right| \leqslant \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1} \int_\Omega |Du_m|^{p-1} |D\varphi|\, dx \leqslant \\
&\leqslant \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1} \left(\int_\Omega |Du_m|^p \, dx \right)^{1/p'} \left(\int_\Omega |D\varphi|^p \, dx \right)^{1/p} \leqslant
\end{aligned}$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{\Omega} |Du_m|^p\,dx\right)^{1/p'} \leqslant \|f\|_*^p.$$

Следовательно, имеет место свойство (2.22). Теперь осталось воспользоваться леммой 2 и получить следующий важный результат:

$$u_{m_m} \to u \quad \text{сильно в} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \tag{2.36}$$

8. Наша ближайшая задача доказать, что

$$\Delta_p u_{m_m} \to \Delta_p u \quad \text{сильно в} \quad W^{-1,p'}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \tag{2.37}$$

С этой целью нам нужно доказать так называемую *липшиц–непрерывность* оператора псевдолапласиана. Рассмотрим отдельно следующее выражение:

$$\Big||\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta\Big| \quad \text{для любых} \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n$$

и получим для него две «грубые» оценки, из которых потом получим одну «тонкую» оценку. Действительно, имеет место первая оценка

$$\Big||\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta\Big| = \Big||\xi|^{p-2}[\xi-\eta] + \eta\left[|\xi|^{p-2} - |\eta|^{p-2}\right]\Big| \leqslant \\ \leqslant |\xi|^{p-2}|\xi-\eta| + (p-2)|\eta| \max\left\{|\xi|^{p-3}, |\eta|^{p-3}\right\}|\xi-\eta|, \tag{2.38}$$

а теперь вторая

$$\Big||\eta|^{p-2}\eta - |\xi|^{p-2}\xi\Big| = \Big||\eta|^{p-2}[\eta-\xi] + \xi\left[|\eta|^{p-2} - |\xi|^{p-2}\right]\Big| \leqslant \\ \leqslant |\eta|^{p-2}|\eta-\xi| + (p-2)|\xi| \max\left\{|\eta|^{p-3}, |\xi|^{p-3}\right\}|\eta-\xi|, \tag{2.39}$$

из которых вытекает «тонкая» оценка и дальнейшие выражения

$$\Big||\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta\Big| \leqslant \min\left\{|\xi|^{p-2}, |\eta|^{p-2}\right\}|\xi-\eta| + \\ + (p-2)\min\{|\xi|, |\eta|\}\frac{\max\left\{|\xi|^{p-2}, |\eta|^{p-2}\right\}}{\min\{|\xi|, |\eta|\}}|\xi-\eta| = \\ = (p-1)\max\left\{|\xi|^{p-2}, |\eta|^{p-2}\right\}|\xi-\eta| \tag{2.40}$$

для всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ и $p \geqslant 2$.

9. Теперь согласно определению нормы банахова пространства $W^{-1,p'}(\Omega)$ имеют место следующие выражения:

$$\begin{aligned}\|\Delta_p u - \Delta_p u_m\|_* &= \sup_{\|w\|\leqslant 1} |\langle \Delta_p u - \Delta_p u_m, w\rangle| \leqslant \\ &\leqslant \sup_{\|w\|\leqslant 1}\left|\int\limits_\Omega \left||Du|^{p-2}Du - |Du_m|^{p-2}Du_m\right| |Dw|\,dx\right| \leqslant \\ &\leqslant (p-1)\sup_{\|w\|\leqslant 1}\int\limits_\Omega |Du_m - Du| \max\left\{|Du|^{p-2}, |Du_m|^{p-2}\right\}|Dw|\,dx = \mathrm{I},\end{aligned} \tag{2.41}$$

где мы воспользовались неравенством (2.40).

10. Воспользуемся обобщенным неравенством Гельдера для последнего интеграла в цепочке выражений (2.41). Действительно, в обобщенном неравенстве Гельдера положим соответственно

$$p_1 = p, \quad p_2 = \frac{p}{p-2}, \quad p_3 = p, \quad r = 1, \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1.$$

И тогда получим следующее неравенство для выражения I :

$$\begin{aligned}\mathrm{I} \leqslant (p-1)\left(\int\limits_\Omega |Du - Du_m|^p\,dx\right)^{1/p} &\times \\ \times\left(\int\limits_\Omega \max\{|Du|^p, |Du_m|^p\}\,dx\right)^{(p-2)/p} &\left(\int\limits_\Omega |Dw|^p\,dx\right)^{1/p}.\end{aligned} \tag{2.42}$$

Таким образом из неравенств (2.41) и (2.42) вытекает следующая оценка

$$\|\Delta_p u - \Delta_p u_m\|_* \leqslant \mu(\mathrm{R}_m)\|Du - Du_m\|_p, \tag{2.43}$$

$$\mu(\mathrm{R}_m) = c_1\mathrm{R}_m^{p-2}, \quad \mathrm{R}_m = \max\{\|Du\|_p, \|Du_m\|_p\}.$$

В силу свойства (2.28) приходим к выводу, что имеет место неравенство

$$\mu(\mathrm{R}_m) \leqslant c_1 \max\left\{\|Du\|_p, \|f\|_*^{1/(p-1)}\right\},$$

т. е. ограничена величиной, которая не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Тем самым, мы в силу (2.36) и (2.43) приходим к выводу о том, что

$$\Delta_p u_m \to \Delta_p u \quad \text{сильно в} \quad W^{-1,p'}(\Omega). \tag{2.44}$$

11. Осталось перейти к пределу при $m \to +\infty$ в равенстве (2.26) и получить с учетом (2.44) следующий результат:

$$\langle -\Delta_p u, w_j\rangle = \langle f, w_j\rangle \quad \text{для всех} \quad j = \overline{1, +\infty}, \tag{2.45}$$

из которого в силу плотности счетного семейства $\{w_j\}$ в $W_0^{1,p}(\Omega)$ вытекает, что построенная функция $u(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ удовлетворяет равенству (2.19) определения 2 слабого решения.

12. Осталось доказать единственность слабого решения. Для этого воспользуемся неравенством (2.17), из которого вытекает следующее неравенство:

$$\begin{aligned}\langle -\Delta_p u_1 + \Delta_p u_2, u_2 - u_1\rangle = \\ = \int\limits_{\Omega} \Big(|Du_2|^{p-2}Du_2 - |Du_1|^{p-2}Du_1, Du_2 - Du_1\Big)\, dx \geqslant \\ \geqslant 2^{2-p}\int\limits_{\Omega} |Du_1 - Du_2|^p\, dx. \quad (2.46)\end{aligned}$$

Теперь возьмем в неравенстве (2.46) в качестве $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ какие то два слабых решения в смысле определения 2, но тогда из неравенства (2.46) вытекает, равенство

$$\int\limits_{\Omega} |Du_1 - Du_2|^p\, dx = 0.$$

Отсюда вытекает единственность решения задачи (2.1), понимаемого в слабом смысле определения 2. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1. *Для всякой $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ существует единственное слабое обобщенное решение $u(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ задачи* (2.1), *понимаемой в слабом смысле определения* 2.

§ 3. Основные понятия теории монотонных операторов

Пусть $\mathbb{B}$ — это банахово пространство с сильным сопряженным $\mathbb{B}^*$, причем $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — это скобки двойственности между этими банаховыми пространствами. Через $\|\cdot\|$ обозначим норму банахова пространства $\mathbb{B}$, а через $\|\cdot\|_*$ — норму банахова пространства $\mathbb{B}^*$. Дадим некоторые определения.

Определение 5. *Оператор $\mathbb{A} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ называется*

(i) *радиально непрерывным, если при любых фиксированных $u, v \in \mathbb{B}$ вещественная функция $s \to \langle \mathbb{A}(u + sv), v\rangle$ непрерывна на отрезке* $[0, 1]$;

(ii) *деминепрерывным, если из $u_n \to u$ сильно в $\mathbb{B}$ следует, что*

$$\mathbb{A}u_n \rightharpoonup \mathbb{A}u \quad \textit{слабо в} \quad \mathbb{B}^*;$$

(iii) *липшиц-непрерывным, если существует такая постоянная* M, *что*

$$\|\mathbb{A}u - \mathbb{A}v\| \leqslant M\|u - v\|$$

для любых $u, v \in \mathbb{B}$;

(iv) *ограниченно липшиц-непрерывным, если существует неубывающая и ограниченная на компактах функция* μ *на* $[0, +\infty)$, *такая, что для любых* $u, v \in \mathbb{B}$

$$\|\mathbb{A}u - \mathbb{A}v\| \leqslant \mu(R)\|u - v\|,$$

где $R = \max\{\|u\|, \|v\|\}$.

Теперь дадим определения различных вариантов свойства монотонности операторов.

Определение 6. *Пусть* u, v — *произвольные элементы из* $\mathbb{B}$. *Оператор* $\mathbb{A} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ *называется*:

(i) *монотонным, если*

$$\langle \mathbb{A}u - \mathbb{A}v, u - v\rangle \geqslant 0;$$

(ii) *строго монотонным, если*

$$\langle \mathbb{A}u - \mathbb{A}v, u - v\rangle > 0 \quad \textit{для} \quad u \neq v;$$

(iii) *сильно монотонным* (*с постоянной монотонности* m), *если*

$$\langle \mathbb{A}u - \mathbb{A}v, u - v\rangle \geqslant m\|u - v\|^2, \quad m > 0;$$

(iv) *локально ограниченным, если для любого фиксированного* $u \in \mathbb{X}$ *существуют постоянные* $\varepsilon > 0$ *и* M, *такие, что* $\|\mathbb{A}v\|_* \leqslant M$ *при* $\|u - v\| \leqslant \varepsilon$.

Наконец, напомним определение важного свойства операторов — *коэрцитивности* операторов.

Определение 7. *Оператор* $\mathbb{A} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ *называется коэрцитивным, если существует определенная на* $[0, +\infty)$ *вещественная функция* $\gamma(\cdot)$ *с*

$$\lim_{s \to +\infty} \gamma(s) = +\infty,$$

такая, что

$$\langle \mathbb{A}u, u\rangle \geqslant \gamma(\|u\|)\|u\|.$$

Для дальнейшего нам необходимы следующие вспомогательные леммы.

Лемма 3. *Каждый монотонный оператор* $\mathbb{A} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ *локально ограничен.*

Доказательство.

1. Допустим, что $\mathbb{A}$ не является локально ограниченным. Тогда существует последовательность $\{u_n\}$, такая, что $u_n \to u$ сильно в $\mathbb{B}$ и $\|\mathbb{A}u_n\|_* \to +\infty$. Без ограничения общности можно считать, что

$$\|\mathbb{A}u_n\|_* > 1.$$

2. Для $n = 1, 2...$ положим

$$\alpha_n = 1 + \|\mathbb{A}u_n\|_* \|u_n - u\|.$$

В силу монотонности $\mathbb{A}$, для любого $v \in \mathbb{B}$ имеем

$$\langle \mathbb{A}u_n - \mathbb{A}(u+v), u_n - u - v \rangle \geqslant 0$$

и поэтому имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha_n}\langle \mathbb{A}u_n, v\rangle &\leqslant \frac{1}{\alpha_n}\left(\langle \mathbb{A}u_n, v\rangle + \langle \mathbb{A}u_n - \mathbb{A}(u+v), u_n - u - v\rangle\right) \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{\alpha_n}\left(\langle \mathbb{A}u_n, u_n - u\rangle + \langle \mathbb{A}(u+v), v + u - u_n\rangle\right) \leqslant \\ &\leqslant 1 + \frac{1}{\alpha_n}\|\mathbb{A}(u+v)\|_*\left(\|v\| + \|u - u_n\|\right) \leqslant \\ &\leqslant 1 + \frac{1}{\alpha_n}\|\mathbb{A}(u+v)\|_*\left(\|v\| + \|\mathbb{A}u_n\|_*\|u - u_n\|\right) \leqslant M_1, \quad (3.1)\end{aligned}$$

где постоянная M_1 зависит от u, v, но не зависит от n.

3. Соответствующая оценка справедлива и для $-v$. Таким образом,

$$\limsup_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{\alpha_n}\langle \mathbb{A}u_n, v\rangle\right| < +\infty \quad \forall\, v \in \mathbb{B},$$

откуда вытекает следующая цепочка неравенств:

$$\frac{1}{\alpha_n}\|Au_n\|_* = \frac{1}{\alpha_n}\sup_{\|v\|\leqslant 1}|\langle \mathbb{A}u_n, v\rangle| \leqslant M_1$$

т. е.

$$\|\mathbb{A}u_n\|_* \leqslant M_1\alpha_n = M_1\left(1 + \|\mathbb{A}u_n\|_*\|u - u_n\|\right).$$

Пусть n_0 выбрано так, чтобы для $n \geqslant n_0$ выполнялось условие

$$M_1\|u - u_n\| \leqslant 1/2.$$

Тогда из последнего неравенства следует, что при $n \geqslant n_0$

$$\|\mathbb{A}u_n\|_* \leqslant 2M_1.$$

Но это противоречит тому факту, что $\|\mathbb{A}u_n\|_* \to +\infty$.

Лемма доказана.

Справедлива следующая лемма:

Л е м м а 4. *Каждый линейный монотонный оператор* $\mathbb{A} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ *сильно непрерывен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть $u_n \to u$ сильно в $\mathbb{B}$. Положим

$$v_n = \begin{cases} (u_n - u) \Big/ \|u_n - u\|^{1/2}, & \text{при} \quad u_n \neq u; \\ 0, & \text{при} \quad u_n = u. \end{cases}$$

Тогда $v_n \to 0$ сильно в $\mathbb{X}$ и по лемме 3

$$\|\mathbb{A}v_n\|_* \leqslant M = const.$$

Отсюда получаем

$$\|\mathbb{A}u_n - \mathbb{A}u\|_* = \|u_n - u\|^{1/2}\|\mathbb{A}v_n\|_* \leqslant M\|u_n - u\|^{1/2} \to +0.$$

Л е м м а д о к а з а н а.

Справедлива следующая важная лемма.

Л е м м а 5. *Пусть* $\mathbb{A} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ *— монотонный оператор. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1. *оператор* $\mathbb{A}$ *радиально непрерывен*;
2. *из* $\langle f - \mathbb{A}v, u - v\rangle \geqslant 0 \ \forall\, v \in \mathbb{B}$ *следует* $\mathbb{A}u = f$;
3. *из соотношений*

$$u_n \rightharpoonup u \quad \textit{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \textit{при} \quad n \to +\infty,$$

$$\mathbb{A}u_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad * -\textit{слабо в} \quad \mathbb{B}^*,$$

$$\limsup_{n \to +\infty} \langle \mathbb{A}u_n, u_n\rangle \leqslant \langle f, u\rangle$$

следует, что $\mathbb{A}u = f$;

4. *оператор* $\mathbb{A}$ *деминепрерывен*;
5. *если* K *— плотное подмножество в* $\mathbb{B}$, *то из* $\langle f - \mathbb{A}v, u - v\rangle \geqslant 0$ $\forall\, v \in K$ *следует* $\mathbb{A}u = f$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 1. 1. $\Rightarrow$ 2. Пусть v — произвольный элемент из $\mathbb{B}$ и $v_t = u - tv$, $t > 0$. Имеем

$$0 \leqslant \langle f - \mathbb{A}v_t, u - v_t\rangle = \langle f - \mathbb{A}v_t, tv\rangle = t\langle f - \mathbb{A}v_t, v\rangle$$

или, после деления на t, $0 \leqslant \langle f - \mathbb{A}v_t, v\rangle$. Отсюда при $t \to 0$ получаем в силу радиальной непрерывности оператора $\mathbb{A}$ неравенство

$$0 \leqslant \langle f - \mathbb{A}u, v\rangle.$$

Ввиду произвольности $v \in \mathbb{B}$ из этого неравенства следует, что $\mathbb{A}u = f$.

$\square$ Действительно, пусть, например,

$$\langle f - \mathbb{A}u, v\rangle > 0 \quad \text{при некотором} \quad v \in \mathbb{B},$$

но тогда при $-v$ мы получим неравенство

$$0 \leqslant \langle f - \mathbb{A}u, -v\rangle \Rightarrow 0 < \langle f - \mathbb{A}u, v\rangle \leqslant 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что

$$\langle f - \mathbb{A}u, v\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad v \in \mathbb{B} \Rightarrow f - \mathbb{A}u = \vartheta^* \in \mathbb{B}^*. \boxtimes$$

Шаг 2. 2. $\Rightarrow$ 3. Пусть $u_n \rightharpoonup u$ в $\mathbb{B}$, $\mathbb{A}u_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ в $\mathbb{B}^*$ и

$$\limsup_{n\to+\infty}\langle \mathbb{A}u_n, u_n\rangle \leqslant \langle f, u\rangle.$$

Тогда для произвольного $v \in \mathbb{B}$ имеем

$$\begin{aligned}\langle f - \mathbb{A}v, u - v\rangle = \langle f, u\rangle - \langle f, v\rangle - \langle \mathbb{A}v, u - v\rangle \geqslant \\ \geqslant \limsup_{n\to+\infty}\left(\langle \mathbb{A}u_n, u_n\rangle - \langle f, v\rangle - \langle \mathbb{A}v, u - v\rangle\right) = \\ = \limsup_{n\to+\infty}\left(\langle \mathbb{A}u_n, u_n\rangle - \langle \mathbb{A}u_n, v\rangle - \langle \mathbb{A}v, u_n - v\rangle\right) = \\ = \limsup_{n\to+\infty}\langle \mathbb{A}u_n - \mathbb{A}v, u_n - v\rangle \geqslant 0.\end{aligned}$$

Отсюда на основании 2. вытекает, что $\mathbb{A}u = f$.

Шаг 3. 3. $\Rightarrow$ 4.

1. Пусть $u_n \to u$ сильно в $\mathbb{B}$.

2. Вследствие локальной ограниченности оператора $\mathbb{A}$ последовательность $\{\|\mathbb{A}u_n\|_*\}$ ограничена. Тогда найдется такая подпоследовательность $\{v_n\}$ последовательности $\{u_n\}$, такая, что

$$\mathbb{A}v_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad * -\text{слабо в} \quad \mathbb{B}^*.$$

Ясно, что при этом имеем

$$v_n \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}.$$

Тогда имеет место следующее равенство:

$$\langle \mathbb{A}v_n, v_n\rangle = \langle \mathbb{A}v_n, v_n - u\rangle + \langle \mathbb{A}v_n, u\rangle,$$

причем

$$|\langle \mathbb{A}v_n, v_n - u\rangle| \leqslant \|\mathbb{A}v_n\|_* \|v_n - u\| \leqslant M_1 \|v_n - u\| \to +0,$$

$$\langle \mathbb{A}v_n, u\rangle \to \langle f, u\rangle$$

при $n \to +\infty$. Тогда имеем

$$\lim_{n\to+\infty}\langle \mathbb{A}v_n, v_n\rangle = \langle f, u\rangle,$$

откуда, в силу 3., $\mathbb{A}u = f$ и $\mathbb{A}v_n \rightharpoonup \mathbb{A}u$.

3. Теперь предположим, что найдется такая подпоследовательность $\{w_n\} \subset \{u_n\}$, что последовательность $\{\mathbb{A}w_n\}$ не сходится $*$–слабо в $\mathbb{A}u$. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$ и такой элемент $z \in \mathbb{B}$, что для некоторой подпоследовательности $\{w_n\} \subset \{u_n\}$ выполнено неравенство

$$|\langle \mathbb{A}w_n, z\rangle - \langle \mathbb{A}u, z\rangle| > \varepsilon \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Но тогда, поскольку

$$\|\mathbb{A}w_n\|_* \leqslant M_1 \quad \text{и} \quad w_n \to u$$

Тогда повторяя рассуждения, мы получим, что найдется такая ее подпоследовательность $\{w_{n_n}\}$, что

$$\mathbb{A}w_{n_n} \overset{*}{\rightharpoonup} \mathbb{A}u.$$

При этом для $\{w_{n_n}\}$ должно быть выполнено неравенство (3.2). Полученное противоречие доказывает, что

$$\mathbb{A}u_n \overset{*}{\rightharpoonup} \mathbb{A}u \quad *-\text{слабо в} \quad \mathbb{B}^* \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Шаг 4. 4. $\Rightarrow$ 5. Очевидно, что $\mathbb{A}$ как деминепрерывный оператор является радиально непрерывным. Поскольку 1. $\Rightarrow$ 2., то достаточно показать, что из

$$\langle f - \mathbb{A}v, u - v\rangle \geqslant 0 \; \forall\, v \in K \Rightarrow \langle f - \mathbb{A}v, u - v\rangle \geqslant 0 \; \forall\, v \in \mathbb{B}$$

Так как K плотно в $\mathbb{B}$, то для каждого $v \in \mathbb{B}$ существует последовательность $\{v_n\}$, такая, что

$$v_n \in K, \quad v_n \to v \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad n \to +\infty.$$

Используя деминепрерывность, получаем

$$\langle f - \mathbb{A}v, u - v\rangle = \lim_{n\to+\infty}\langle f - \mathbb{A}v_n, u - v_n\rangle.$$

Шаг 5. 5. $\Rightarrow$ 1. В частном случае $\mathbb{K} = \mathbb{X}$ утверждение 5. совпадает с 2. Но из 2., как уже было доказано, следует деминепрерывность, а значит, и радиальная непрерывность оператора $\mathbb{A}$.

Лемма доказана.

Справедлива следующая вспомогательная лемма:

Лемма 6. *Пусть* $\mathbb{A} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ — *радиально непрерывный монотонный оператор. Тогда при любом* $f \in \mathbb{B}^*$ *множество* K *решений уравнения* $\mathbb{A}u = f$ *выпукло и слабо замкнуто.*

Доказательство.

1. Пусть $u_1, u_2 \in K$ и $u_t = tu_1 + (1-t)u_2$, $t \in [0,1]$. Тогда для любого $v \in \mathbb{B}$

$$\begin{aligned}\langle f - \mathbb{A}v, u_t - v\rangle &= \\ &= \langle f - \mathbb{A}v, tu_1 - tv\rangle + \langle f - \mathbb{A}v, (1-t)u_2 - (1-t)v\rangle = \\ &= t\langle \mathbb{A}u_1 - \mathbb{A}v, u_1 - v\rangle + (1-t)\langle \mathbb{A}u_2 - \mathbb{A}v, u_2 - v\rangle \geqslant 0\end{aligned}$$

откуда в силу леммы 5.

$$\mathbb{A}u_t = f,$$

т. е. K выпукло.

2. Пусть $\{u_n\}$ — последовательность элементов $u_n \in K$, такая, что $u_n \rightharpoonup u$ в $\mathbb{B}$. Для любого $v \in \mathbb{B}$ имеем

$$\langle f - \mathbb{A}v, u - v\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle f - \mathbb{A}v, u_n - v\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle \mathbb{A}u_n - \mathbb{A}v, u_n - v\rangle \geqslant 0,$$

поскольку $\mathbb{A}u_n = f$. Таким образом, в силу леммы 5.

$$\mathbb{A}u = f,$$

т. е. K слабо замкнуто.

Лемма доказана.

§ 4. Теоремы существования

В этом параграфе мы изложим важную теорию Браудера–Минти монотонных, коэрцитивных операторов, нашедшую важное приложение в теории эллиптических краевых задач.

Справедлива следующая основная теорема.

Теорема Браудера–Минти. *Пусть* $\mathbb{A} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ — *радиально непрерывный монотонный коэрцитивный оператор. Тогда множество решений уравнения*

$$\mathbb{A}u = f \tag{4.1}$$

при любом $f \in \mathbb{B}^*$ *непусто, слабо замкнуто и выпукло.*

Доказательство.

1. Ввиду леммы 6 нам надо лишь показать, что (4.1) имеет по крайней мере одно решение. Пусть $\{h_n\} \subset \mathbb{B}$ — какая-нибудь полная система линейно независимых элементов в $\mathbb{B}$, и пусть $\mathbb{B}_n$ — замкнутая линейная оболочка векторов $\{h_1, ..., h_n\}$. Тогда соответствие

$$\mathbb{C} : \mathbb{R}^n \ni \{a_1, ..., a_n\} \to \sum_{i=1}^{n} a_i h_i = u_n$$

определяет взаимно однозначное непрерывное отображение $\mathbb{C}$ пространства $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{B}_n$. Очевидно,

$$|a|_1 = \|\mathbb{C}a\| \quad \forall\, a \in \mathbb{R}^n$$

является нормой на $\mathbb{R}^n$. В силу эквивалентности всех норм на конечномерном пространстве имеем

$$|a| \leqslant c|a|_1 = c\|\mathbb{C}a\|.$$

2. Определим оператор $\mathbb{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ по правилу

$$\mathbb{T}a = \{b_1, ..., b_n\}, \quad b_i = \langle \mathbb{A}\mathbb{C}a - f, h_i\rangle.$$

Поскольку $\mathbb{A}$ как радиально непрерывный монотонный оператор деминепрерывен (лемма 5), оператор $\mathbb{T}$ непрерывен. Из коэрцитивности $\mathbb{A}$ следует, что для достаточно больших $R_1 > 0$

$$\left(\frac{\langle \mathbb{A}u_n, u_n\rangle}{\|u_n\|} - \|f\|_*\right)\|u_n\| \geqslant 0 \quad \text{при} \quad \|u_n\| \geqslant R_1.$$

Поэтому для $|a| = R = R_1 c$

$$(\mathbb{T}a, a) = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i = \langle \mathbb{A}u_n, u_n\rangle - \langle f, u_n\rangle \geqslant$$
$$\geqslant \left(\frac{\langle \mathbb{A}u_n, u_n\rangle}{\|u_n\|} - \|f\|_*\right)\|u_n\| \geqslant 0.$$

Следовательно, согласно лемме об остром угле, существует такое $a \in \in \mathbb{R}^n$, что $\mathbb{T}a = 0$; значит, для $u_n = \mathbb{C}a$

$$\langle \mathbb{A}u_n, h_i\rangle = \langle f, h_i\rangle, \quad i = 1, ..., n. \tag{4.2}$$

Таким образом, существует решение задачи (4.2).

3. Из оценки

$$\frac{\langle \mathbb{A}u_n, u_n\rangle}{\|u_n\|} \leqslant \|f\|_*$$

и коэрцитивности $\mathbb{A}$ вытекает, что $\|u_n\| \leqslant M_1$.

☐ Действительно, в противном случае мы бы имели

$$\lim_{\|u_n\| \to +\infty} \frac{\langle \mathbb{A}u_n, u_n\rangle}{\|u_n\|} = +\infty. \boxtimes$$

Поэтому

$$\langle \mathbb{A}u_n, u_n\rangle \leqslant M_2 \quad \text{для} \quad n = 1, 2, ...$$

4. Докажем теперь, что из условий $\|u_n\| \leqslant M_1$ и $\langle \mathbb{A}u_n, u_n\rangle \leqslant M_2$ вытекает, что

$$\|\mathbb{A}u_n\|_* \leqslant M, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

□ Действительно, в силу монотонности оператора $\mathbb{A}$ он является локально ограниченным в нуле. Поэтому существуют такие постоянные $\varepsilon > 0$ и $M_3 > 0$, что имеет место следующие неравенства:

$$\|\mathbb{A}v\|_* \leqslant M \quad \text{для всех} \quad \|v\| \leqslant \varepsilon.$$

Справедливо неравенство в силу монотонности оператора $\mathbb{A}$.

$$\langle \mathbb{A}u_n - \mathbb{A}v, u - v\rangle \geqslant 0 \Rightarrow \langle \mathbb{A}u_n, v\rangle \leqslant \langle \mathbb{A}u_n, u_n\rangle + \langle \mathbb{A}v, v\rangle - \langle \mathbb{A}v, u_n\rangle.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\|\mathbb{A}u_n\|_* = \sup_{\|v\|\leqslant\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} |\langle \mathbb{A}u_n, v\rangle| \leqslant \\ \leqslant \sup_{\|v\|\leqslant\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} |\langle \mathbb{A}u_n, u_n\rangle + \langle \mathbb{A}v, v\rangle - \langle \mathbb{A}v, u_n\rangle| \leqslant \\ \leqslant \sup_{\|v\|\leqslant\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} [M_2 + \|\mathbb{A}v\|_*\|v\| + \|\mathbb{A}v\|_*\|u_n\|] \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\varepsilon} (M_2 + M_3\varepsilon + M_3M_1) = M. \boxtimes\end{aligned}$$

5. Далее, в силу (4.2)

$$\lim_{n\to+\infty} \langle \mathbb{A}u_n, h\rangle = \langle f, h\rangle \quad \forall\, h \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbb{B}_n.$$

Отсюда следует, что $\mathbb{A}u_n \rightharpoonup f$ слабо в $\mathbb{B}^*$. Пусть $\{u_{n_k}\}$ — подпоследовательность последовательности $\{u_n\}$, такая, что

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Покажем, что u является решением уравнения (4.1). Из (4.2) получаем

$$\lim_{k\to+\infty} \langle \mathbb{A}u_{n_k}, u_{n_k}\rangle = \lim_{k\to+\infty} \langle f, u_{n_k}\rangle = \langle f, u\rangle.$$

Но тогда согласно лемме 5 пункта 3 $\mathbb{A}u = f$.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть оператор $\mathbb{A} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ радиально непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Тогда существует обратный оператор $\mathbb{A}^{-1} : \mathbb{B}^* \to \mathbb{B}$, и этот обратный оператор строго монотонен, ограничен и деминепрерывен.*

Доказательство. Доказательство проведем в четыре шага.

Шаг 1. Оператор $\mathbb{A}^{-1} : \mathbb{B}^* \to \mathbb{B}$ существует. Очевидно, достаточно показать, что уравнение $\mathbb{A}u = f$ при любом $f \in \mathbb{B}^*$ имеет точно одно решение. Теорема 1 гарантирует существование хотя бы одного решения u. Пусть v — другое решение. Тогда

$$\langle \mathbb{A}u - \mathbb{A}v, u - v \rangle = 0.$$

Вследствие строгой монотонности $\mathbb{A}$ отсюда следует, что $u = v$.

Шаг 2. Оператор $\mathbb{A}^{-1}$ строго монотонен. Пусть $f, g \in \mathbb{B}^*$, $f \neq g$. Полагая $u = \mathbb{A}^{-1}f$, $v = \mathbb{A}^{-1}g$, в силу монотонности $\mathbb{A}$ имеем

$$\langle f - g, \mathbb{A}^{-1}f - \mathbb{A}^{-1}g \rangle = \langle \mathbb{A}u - \mathbb{A}v, u - v \rangle > 0.$$

Шаг 3. Оператор $\mathbb{A}^{-1}$ ограничен. Пусть $\mathbb{A}u = f$ и $\|f\|_* \leqslant M$. Тогда $\langle \mathbb{A}u, u \rangle \geqslant \gamma(\|u\|)\|u\|$ и, следовательно, $\gamma(\|u\|) \leqslant \|f\|_*$. Так как $\gamma(s) \to +\infty$ при $s \to +\infty$, то отсюда вытекает, что

$$\|u\| = \|\mathbb{A}^{-1}f\| \leqslant K$$

с постоянной K, зависящей только от M.

Шаг 4. Оператор $\mathbb{A}^{-1}$ деминепрерывен. В силу леммы 5 достаточно показать, что из соотношения

$$\langle f - g, u - \mathbb{A}^{-1}g \rangle \geqslant 0 \quad \forall\, g \in \mathbb{B}^* \tag{4.3}$$

следует равенство $u = \mathbb{A}^{-1}f$. Пусть (4.3) выполнено. Тогда для любого $v \in \mathbb{B}$ и для $g = \mathbb{A}v$ имеем

$$\langle f - \mathbb{A}v, u - v \rangle = \langle f - g, u - \mathbb{A}^{-1}g \rangle \geqslant 0.$$

Ввиду радиальной непрерывности $\mathbb{A}$ отсюда следует по лемме 5, что $f = \mathbb{A}u$, т. е. $u = \mathbb{A}^{-1}f$.

Теорема доказана.

Наконец, справедлива следующая полезная в приложениях лемма.

Лемма 7. *Пусть оператор $\mathbb{A} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ радиально непрерывен и сильно монотонен. Тогда у него существует обратный оператор $\mathbb{A}^{-1} : \mathbb{B}^* \to \mathbb{B}$, который является липшиц-непрерывным. Если $\mathbb{A}$ вдобавок липшиц-непрерывен, то $\mathbb{A}^{-1}$ — сильно монотонный.*

Доказательство.

1. Оператор $\mathbb{A}^{-1} : \mathbb{B}^* \to \mathbb{B}$ существует по тереме 2.
2. Для любых $f, g \in \mathbb{B}^*$ и для $u = \mathbb{A}^{-1}f$, $v = \mathbb{A}^{-1}g$ имеем

$$\|f - g\|_* \|u - v\| \geqslant \langle \mathbb{A}u - \mathbb{A}v, u - v \rangle \geqslant m\|u - v\|^2 = \\ = m\big\|\mathbb{A}^{-1}f - \mathbb{A}^{-1}g\big\|\|u - v\|,$$

откуда

$$\big\|\mathbb{A}^{-1}f - \mathbb{A}^{-1}g\big\| \leqslant \frac{1}{m}\|f - g\|_*.$$

3. Если $\mathbb{A}$ липшиц-непрерывен, то

$$\langle f-g, \mathbb{A}^{-1}f - \mathbb{A}^{-1}g\rangle = \langle \mathbb{A}u - \mathbb{A}v, u-v\rangle \geqslant m\|u-v\|^2 \geqslant$$
$$\geqslant \frac{m}{M^2}\|\mathbb{A}u - \mathbb{A}v\|^2 = \frac{m}{M^2}\|f-g\|_*^2.$$

Лемма доказана.

§ 5. Параболическое уравнение с p—лапласианом

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для уравнения параболического типа следующего вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) = f, \quad p > 2, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{5.1}$$

$$u(0) = u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Определение 8. *Слабым обобщенным решением задачи* (5.1) *назовем функцию* $u(x)(t)$, *удовлетворяющую условию*

$$\int_0^{\mathrm{T}} \varphi(t)\langle \mathbb{D}(u), w\rangle\, dt = \int_0^{\mathrm{T}} \varphi(t)\langle f, w\rangle\, dt \quad \forall\, w \in W_0^{1,p}(\Omega),\ \forall\, \varphi(t) \in L^p(0,\mathrm{T}), \tag{5.2}$$

где

$$\mathbb{D}(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du),$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ — *это скобки двойственности между банаховыми пространствами* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *и* $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Замечание 1. Пусть $\mathbb{V}$ — рефлексивное пространство Банаха, содержащееся в пространстве Гильберта $\mathbb{H}$, $\mathbb{V} \subset \mathbb{H}$, причем соответствующее вложение непрерывно и $\mathbb{V}$ плотно в $\mathbb{H}$. Отождествляя $\mathbb{H}$ с его сопряженным и обозначая через $\mathbb{V}'$ сопряженное к $\mathbb{V}$, мы, таким образом, можем отождествить $\mathbb{H}$ с подпространством в $\mathbb{V}'$:

$$\mathbb{V} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{V}'.$$

Если задана такая функция $u \in L^p(0,\mathrm{T};\mathbb{V})$, что $u' \in L^{p'}(0,\mathrm{T};\mathbb{V}')$, то функция $u : [0,\mathrm{T}] \to \mathbb{H}$ непрерывна (после, быть может, изменения на множестве меры нуль), и отображение $u \to u(0)$ является сюръективным отображением на $\mathbb{H}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть заданы функции* f *и* u_0, *удовлетворяющие условиям*

$$f \in L^{p'}(0,\mathrm{T};W^{-1,p'}(\Omega)), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

$$u_0 \in L^2(\Omega).$$

Тогда существует, и притом только одна, функция u,

$$u \in L^p(0, \mathrm{T}; W_0^{1,p}(\Omega)), \tag{5.3}$$

удовлетворяющая (5.2).

Доказательство.

1. Положим

$$\mathbb{A}(v) = -\operatorname{div}(|Dv|^{p-2}Dv). \tag{5.4}$$

Без труда проверяется, что $\mathbb{A}$ отображает $W^{1,p}(\Omega)$ в $W^{-1,p'}(\Omega)$, и если u удовлетворяет (5.3), то

$$\mathbb{A}(u) \in L^{p'}(0, \mathrm{T}; W^{-1,p'}(\Omega)). \tag{5.5}$$

Тогда из (5.1) следует, что

$$u' = \frac{\partial u}{\partial t} \in L^{p'}(0, \mathrm{T}; W^{-1,p'}(\Omega)). \tag{5.6}$$

Из (5.6) следует, что после возможного изменения на множестве нулевой меры функция u является непрерывным отображением $[0, \mathrm{T}] \to \to W^{-1,p'}(\Omega)$, так что начальное условие имеет смысл.

2. Пусть $w_1, \ldots, w_n, \ldots$ — «галеркинский базис» в $W_0^{1,p}(\Omega)$; определим «приближенное решение» $u_m(t)$ нашей задачи:

$$u_m(t) = \sum_{k=1}^{m} c_{mk}(t) w_k, \quad c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}[0, \mathrm{T}_m].$$

Тогда из (5.2) в силу основной леммы вариационного исчисления получим, что $c_{mk}(t)$ являются решениями следующей системы уравнений

$$\left(u_m'(t), w_j\right)_2 + \langle \mathbb{A}(u_m(t)), w_j \rangle = \langle f(t), w_j \rangle, \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{5.7}$$

$$u_m(0) = u_{0m} = \sum_{k=1}^{m} c_{mk}(0) w_k, \quad u_{0m} \to u_0 \quad \text{сильно в} \quad W_0^{1,p}(\Omega),$$

где $(\cdot,\cdot)_2$ — это скалярное произведение в $L^2(\Omega)$.

3. В силу известных результатов теории обыкновенных дифференциальных уравнений имеем: $u_m(t)$ определяется на интервале $[0, t_m]$, $t_m > 0$. Однако отметим, что

$$\langle \mathbb{A}(u), u \rangle = \|u\|^p, \tag{5.8}$$

где $\|\cdot\|$ — это «стандартная» норма на $W_0^{1,p}(\Omega)$, т. е.

$$\|v\| \equiv \left(\int\limits_\Omega |Dv|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

а символом $|\cdot|$ обозначим норму в $L^2(\Omega)$. Тогда умножим (5.7) на $c_{mj}(t)$ и просуммируем по $j = \overline{1,m}$ и получим следующее равенство:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \langle \mathbb{A}(u_m), u_m\rangle = \langle f(t), u_m\rangle\,,$$

$$\langle \mathbb{A}(u_m), u_m\rangle = \|u_m\|^p, \quad \langle f(t), u_m\rangle \leqslant \|f\|_*\|u_m\|,$$

откуда справедливо неравенство

$$\frac{1}{2}|u_m(t)|^2 + \int\limits_0^t \|u_m(s)\|^p\,ds \leqslant \int\limits_0^t \|f(s)\|_*\|u_m(s)\|\,ds + \frac{1}{2}|u_{0m}|^2, \tag{5.9}$$

откуда следует, что $t_m = \mathrm{T}$ и что

$$u_m \quad \text{ограничены в} \quad L^\infty(0,\mathrm{T}; L^2(\Omega)) \cap L^p(0,\mathrm{T}; W_0^{1,p}(\Omega)). \tag{5.10}$$

4. Следовательно, мы можем выделить такую подпоследовательность $\{u_\mu\}$, что

$$u_\mu \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad L^2(0,\mathrm{T}; L^2(\Omega)) \quad \text{слабо}, \tag{5.11}$$

$$u_\mu \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad L^p(0,\mathrm{T}; W_0^{1,p}(\Omega)) \quad \text{слабо}, \tag{5.12}$$

$$u_\mu(\mathrm{T}) \rightharpoonup \xi \quad \text{в} \quad L^2(\Omega) \quad \text{слабо}, \tag{5.13}$$

$$\mathbb{A}(u_\mu) \rightharpoonup \chi \quad \text{в} \quad L^{p'}(0,\mathrm{T}; W^{-1,p'}(\Omega)) \quad \text{слабо}, \tag{5.14}$$

поскольку

$$\|\mathbb{A}(u)\|_* = \|u\|^{p-1},$$

где $\|\cdot\|_*$ — норма банахова пространства $W^{-1,p'}(\Omega)$ и, следовательно, $\mathbb{A}(u_m)$ ограничены в $L^{p'}(0,\mathrm{T}; W^{-1,p'}(\Omega))$.

5. Продолжим $u_m(t)$, $\mathbb{A}(u_m(t)), \ldots$ на $\mathbb{R}$ нулем вне $[0,\mathrm{T}]$; соответствующие продолжения обозначим через $\widetilde{u}_m(t)$, $\mathbb{A}(\widetilde{u_m(t)}), \ldots$. Из (5.7) следует, что

$$\left(\frac{d}{dt}\widetilde{u}_m(t), w_j\right)_2 + \left(\mathbb{A}(\widetilde{u_m(t)}), w_j\right)_2 =$$
$$= \left(\widetilde{f}(t), w_j\right)_2 + (u_{0m}, w_j)_2\,\delta(t-0) - (u_m(\mathrm{T}), w_j)_2\,\delta(t-\mathrm{T}). \tag{5.15}$$

Здесь мы воспользовались известными формулами связи классической производной с производной в смысле распределений. Теперь можно перейти к пределу в (5.15) при $m = \mu$ и фиксированном j, откуда выведем, что

$$\left(\frac{d}{dt}\widetilde{u}, w_j\right)_2 + (\widetilde{\chi}, w_j)_2 = \left(\widetilde{f}, w_j\right)_2 + \\ + (u_0, w_j)_2\, \delta(t-0) - (\xi, w_j)_2\, \delta(t-\mathrm{T}) \quad \forall\, j \tag{5.16}$$

и, следовательно,

$$\frac{d\widetilde{u}}{dt} + \widetilde{\chi} = \widetilde{f} + u_0\delta(t-0) - \xi\delta(t-\mathrm{T}). \tag{5.17}$$

Сужая (5.17) на $(0, \mathrm{T})$, получим, что

$$u^{'} + \chi = f, \tag{5.18}$$

откуда $u^{'} \in L^{p^{'}}(0, \mathrm{T}; W^{-1,p^{'}}(\Omega))$, следовательно, $u(0)$ и $u(\mathrm{T})$ имеют смысл, и, сравнивая с (5.17), получим, что $u(0) = u_0$ и $u(\mathrm{T}) = \xi$.

6. Итак, мы докажем существование решения, если покажем, что

$$\chi = \mathbb{A}(u). \tag{5.19}$$

Из свойства монотонности оператора $\mathbb{A}$ следует, что

$$\mathbb{X}_\mu = \int\limits_0^{\mathrm{T}} \langle \mathbb{A}(u_\mu) - \mathbb{A}(v(t)), u_\mu(t) - v(t)\rangle\, dt \geqslant 0, \tag{5.20}$$

$$\forall\, v \in L^p(0, \mathrm{T}; W_0^{1,p}(\Omega)).$$

Согласно (5.7),

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} \langle \mathbb{A}(u_\mu), u_\mu\rangle\; dt = \int\limits_0^{\mathrm{T}} \langle f, u_\mu\rangle\; dt + \frac{1}{2}|u_{0\mu}|^2 - \frac{1}{2}|u_\mu(\mathrm{T})|^2$$

и, следовательно,

$$\mathbb{X}_\mu = \int\limits_0^{\mathrm{T}} \langle f, u_\mu\rangle\; dt + \frac{1}{2}|u_{0\mu}|^2 - \frac{1}{2}|u_\mu(\mathrm{T})| - \\ - \int\limits_0^{\mathrm{T}} \langle \mathbb{A}(u_\mu), v\rangle\; dt - \int\limits_0^{\mathrm{T}} \langle \mathbb{A}(v), u_\mu - v\rangle\; dt, \tag{5.21}$$

откуда (поскольку $\liminf |u_\mu(\mathrm{T})|^2 \geqslant |u(\mathrm{T})|^2$):

$$\limsup \mathbb{X}_\mu \leqslant \int\limits_0^{\mathrm{T}} \langle f, u\rangle\, dt + \frac{1}{2}|u_0|^2 - \frac{1}{2}|u(\mathrm{T})|^2 - \\ - \int\limits_0^{\mathrm{T}} \langle \chi, v\rangle\, dt - \int\limits_0^{\mathrm{T}} \langle \mathbb{A}(v), u - v\rangle\, dt. \quad (5.22)$$

Из (5.18) можно заключить, что

$$\langle u' + \chi - f, u\rangle = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + \langle \chi, u\rangle = \langle f, u\rangle,$$

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} \langle f, u\rangle\, dt + \frac{1}{2}|u_0|^2 - \frac{1}{2}|u(\mathrm{T})|^2 = \int\limits_0^{\mathrm{T}} \langle \chi, u\rangle\, dt.$$

7. Сопоставляя это равенство с (5.21), (5.22), получим, что

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} \langle \chi - \mathbb{A}(v), u - v\rangle\, dt \geqslant 0. \quad (5.23)$$

Положим $v = u - \lambda w$, $\lambda > 0$, $w \in L^p(0, \mathrm{T}; W_0^{1,p}(\Omega))$ и произвольно; тогда из (5.24) следует, что

$$\lambda \int\limits_0^{\mathrm{T}} \langle \chi - \mathbb{A}(u - \lambda w), w\rangle\, dt \geqslant 0, \quad (5.24)$$

откуда

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} \langle \chi - \mathbb{A}(u - \lambda w), w\rangle\, dt \geqslant 0 \quad (5.25)$$

устремляя $\lambda \to +0$ в (5.26), получим

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} \langle \chi - \mathbb{A}(u), w\rangle\, dt \geqslant 0, \quad \forall\, w. \quad (5.26)$$

Следовательно,

$$\chi = \mathbb{A}(u).$$

8. Пусть u_1 и u_2 — два решения задачи. Тогда разность $w = u_1 - u_2$ удовлетворяет уравнению

$$w' + \mathbb{A}(u_1) - \mathbb{A}(u_2) = 0, \quad w(0) = 0,$$

откуда

$$(w', w) + (\mathbb{A}(u_1) - \mathbb{A}(u_2), u_1 - u_2) = 0,$$

и, благодаря монотонности,

$$(w', w) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 \leqslant 0 \Rightarrow |w|^2(t) \leqslant |w(0)|^2 = 0,$$

откуда $w = 0$.

Теорема доказана.

Итак, метод монотонных операторов позволяет доказать однозначную обобщенную разрешимость в слабом смысле начально-краевой задачи для важного класса нелинейных параболических уравнений.

§ 6. Литературные указания

В данной лекции мы использовали материал, изложенный в работах [8], [9].

Лекция 7

МЕТОД ГАЛЕРКИНА И КОМПАКТНОСТИ

В данной лекции мы рассмотрим один из самых мощных методов нелинейного анализа — метод компактности. Данный метод применим ко всем трем классическим классам дифференциальных уравнений в частных производных, а также к нелинейным уравнениям соболевского типа. Мы рассмотрим некоторые конкретные нелинейные краевые задачи и на их примере проследим как применяется метод компактности.

§ 1. Введение

Метод компактности формально заключается в том, что при доказательстве сходимости приближенного решения, построенного по методу Галеркина, *существенно* используются вполне непрерывные вложения пространств С. Л. Соболева. Какой-то особой теории метода компактности нет, поэтому, как правило, метод компактности иллюстрируется на ряде примеров. Поэтому и мы тоже рассмотрим некоторые характерные примеры.

§ 2. Нелинейное гиперболическое уравнение

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$, $\delta \in (0,1]$.

Приведем классическую постановку рассматриваемой в дальнейшем задачи.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + |u|^q u = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, \mathrm{T}), \tag{2.1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad u^{'}(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.2}$$

где $q > 0$ и

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}, \quad x = (x_1, x_2, x_3).$$

Сейчас мы приведем обобщенную постановку задачи (2.1), (2.2). Дадим следующее определение

Определение 1. *Слабым обобщенным решением задачи* (2.1), (2.2) *назовем функцию* $u(x)(t)$ *класса* $u \in L^\infty(0, \mathrm{T}; H^1_0(\Omega))$, $u' \in L^\infty(0, \mathrm{T}; L^2(\Omega))$, $u'' \in L^\infty(0, \mathrm{T}; H^{-1}(\Omega))$, *удовлетворяющую задаче*

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left\langle u'' - \Delta u + |u|^q u, v \right\rangle = 0 \; \forall\, v \in L^1(0, \mathrm{T}; H^1_0(\Omega)),\; q \in (0, 4], \tag{2.3}$$

$$u(0) = u_0 \in H^1_0(\Omega), \quad u'(0) = u_1 \in L^2(\Omega), \tag{2.4}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — *скобки двойственности между гильбертовыми пространствами* $H^1_0(\Omega)$ *и* $H^{-1}(\Omega)$.

Задача (2.3)–(2.4) эквивалентна следующей

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \varphi(t) \left\langle u'' - \Delta u + |u|^q u, w \right\rangle = 0 \; \forall\, w \in H^1_0(\Omega),\; \forall\, \varphi(t) \in L^1(0, \mathrm{T}), \tag{2.5}$$

$$u(0) = u_0 \in H^1_0(\Omega), \quad u'(0) = u_1 \in L^2(\Omega). \tag{2.6}$$

Справедлив следующий основной результат.

Теорема 1. *Пусть* $u_0 \in H^1_0(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ *и* $q \in (0, 2]$. *Тогда существует единственное слабое обобщенное решение задачи* (2.1), (2.2) *в смысле определения* 1 *в классе* $u \in L^\infty(0, \mathrm{T}; H^1_0(\Omega))$, $u' \in L^\infty(0, \mathrm{T}; L^2(\Omega))$, $u'' \in L^\infty(0, \mathrm{T}; H^{-1}(\Omega))$.

Доказательство.

Шаг 1. Приближенные решения.

Рассмотрим теперь «приближенную» к задаче (2.5)–(2.6) следующую задачу

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}_m} dt \varphi(t) \left\langle u''_m - \Delta u_m + |u_m|^q u_m, w_j \right\rangle = 0,\; u_m = \sum_{k=1}^m c_{mk}(t) w_k, \tag{2.7}$$

$\mathrm{T}_m > 0$, $w_j \in H^1_0(\Omega)$, $\forall\, \varphi(t) \in L^1(0, \mathrm{T})$, $j = \overline{1, m}$,

$$u_m(0) = u_{m0} \in H^1_0(\Omega), \quad u'_m(0) = u_{m1} \in L^2(\Omega), \tag{2.8}$$

$$c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, \mathrm{T}_m], \tag{2.9}$$

где

$$u_{m0} = \sum_{i=1}^m \alpha_{mi} w_i \to u_0 \quad \text{сильно в} \quad H^1_0(\Omega),$$
$$u_{m1} = \sum_{i=1}^m \beta_{mi} w_i \to u_1 \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega),$$

а относительно системы функций $\{w_j\}_{j=1}^{+\infty}$ предположим, что это решения задачи на собственные значения и собственные функции

$$\Delta w_j + \lambda_j w_j = 0, \quad w_j \in H_0^1(\Omega).$$

Известно, что линейно независимая система функций $\{w_j\}_{j=1}^{+\infty}$ образует базис в $H_0^1(\Omega)$.

Шаг 2. Локальная разрешимость.

Поскольку $\mathbb{C}_0^\infty[0, \mathrm{T}_m] \subset L^1(0, \mathrm{T}_m)$, то в (2.5) возьмем функцию $\varphi(t) \in \mathbb{C}_0^\infty[0, \mathrm{T}_m]$. С другой стороны, в классе $c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, \mathrm{T}_m]$ имеем

$$\left\langle u_m^{''} - \Delta u_m + |u_m|^q u_m, w_j \right\rangle \in \mathbb{C}[0, \mathrm{T}_m].$$

Отсюда в силу основной леммы вариационного исчисления получим поточечную по $t \in [0, \mathrm{T}_m]$ систему m уравнений:

$$\left\langle u_m^{''} - \Delta u_m + |u_m|^q u_m, w_j \right\rangle = 0, \quad j = \overline{1, m}. \tag{2.10}$$

Поскольку $w_j \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, поэтому

$$\langle w_k, w_j \rangle = (w_k, w_j)_2, \quad \langle \Delta w_k, w_j \rangle = (Dw_k, Dw_j)_2.$$

Кроме того, поскольку по построению $u_m \in L^\infty(0, \mathrm{T}_m; H_0^1(\Omega)) \subset$ $\subset L^\infty(0, \mathrm{T}_m; L^{q+2}(\Omega))$ при $q \in [0, 4]$ имеем

$$|u_m|^q u_m \in L^\infty(0, \mathrm{T}_m; L^{(q+2)/(q+1)}(\Omega)).$$

С другой стороны, $w_j \in H_0^1(\Omega) \subset L^{q+2}(\Omega)$. Поэтому

$$\langle |u_m|^q u_m, w_j \rangle = \left(|u_m|^q u_m, w_j\right)_2.$$

В силу этого из (2.10) вытекает следующая задача

$$\sum_{k=1}^m (w_k, w_j)_2 \, c_{mk}^{''}(t) + \sum_{l=1}^m (Dw_k, Dw_j)_2 \, c_{mk}(t) + \\ + \left(|u_m|^q u_m, w_j\right)_2 = 0, \quad j = \overline{1, m}. \tag{2.11}$$

В силу линейной независимости системы $w_1, ..., w_m$ имеем

$$\det\left(w_k, w_j\right)_2 \neq 0.$$

Поэтому система (2.11) после обращения матрицы $||a_{kj}|| = ||\left(w_k, w_j\right)_2||$ примет вид системы типа Коши–Ковалевской, а, значит, найдется такое $\mathrm{T}_m > 0$, что система (2.11) с соответствующими начальными условиями имеет решение $c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, \mathrm{T}_m]$.

Шаг 3. Априорные оценки.

Умножим уравнение (2.10), отвечающее индексу j, на c'_{mj} и просуммируем по j. Тогда получим

$$\left(u''_m, u'_m\right)_2 + (Du_m, Du'_m)_2 + \left(|u_m|^q u_m, u'_m\right)_2 = 0, \tag{2.12}$$

откуда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|u'_m\|_2^2 + \|Du_m\|_2^2\right] + \frac{1}{q+2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{q+2}^{q+2} = 0. \tag{2.13}$$

В силу (2.13) получим

$$\frac{1}{2}\left[\|u'_m\|_2^2 + \|Du_m\|_2^2\right] + \frac{1}{q+2}\|u_m\|_{q+2}^{q+2} = \\ = \frac{1}{2}\left[\|u_{m1}\|_2^2 + \|Du_{m0}\|_2^2\right] + \frac{1}{q+2}\|u_{m0}\|_{q+2}^{q+2}. \tag{2.14}$$

По условию имеем

$$u_{m0} \to u_0 \quad \text{сильно в} \quad H_0^1(\Omega), \quad u_{m1} \to u_1 \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega),$$

что означает выполнение неравенства

$$\frac{1}{2}\left[\|u'_m\|_2^2 + \|Du_m\|_2^2\right] + \frac{1}{q+2}\|u_m\|_{q+2}^{q+2} \leqslant C(\mathrm{T}), \tag{2.15}$$

где постоянная $C(\mathrm{T})$ — не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Из (2.15) вытекает, что

$$u_m \quad \text{ограничены в} \quad L^\infty(0, \mathrm{T}; H_0^1(\Omega)), \tag{2.16}$$

$$u'_m \quad \text{ограничены в} \quad L^\infty(0, \mathrm{T}; L^2(\Omega)). \tag{2.17}$$

Отсюда в частности следует что $\mathrm{T}_m > 0$ не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Шаг 4. Предельный переход.

Пространство

$$L^\infty(0, \mathrm{T}; H_0^1(\Omega))$$

является сопряженным к

$$L^1(0, \mathrm{T}; H^{-1}(\Omega))$$

и поэтому из последовательности u_m можно выделить такую последовательность u_μ, что

$$u_\mu \rightharpoonup u \ * \text{–слабо в } L^\infty(0, \mathrm{T}; H_0^1(\Omega)), \tag{2.18}$$

$$u'_\mu \rightharpoonup v \ * \text{–слабо в } L^\infty(0, \mathrm{T}; L^2(\Omega)). \tag{2.19}$$

Из (2.18) вытекает, что

$$u'_\mu \rightharpoonup u' \text{ в } \mathcal{D}'(0, \mathrm{T}; H_0^1(\Omega)), \tag{2.20}$$

и, следовательно, в силу (2.19) имеем $v = u'$.

Кроме того, из (2.18) и (2.19) вытекает, что u_m принадлежат ограниченному множеству $H^1(Q)$, $Q = (0, \mathrm{T}) \times \Omega$. Однако, как известно вложение $H^1(Q)$ в $L^2(Q)$ компактно. Здесь мы применяем метод компактности!!!

Итак мы можем считать, что подпоследовательность u_μ, удовлетворяет условию

$$u_\mu \to u \text{ сильно в } L^2(Q) \text{ и почти всюду,} \tag{2.21}$$

и, наконец, поскольку $|u_m|^q u_m$ ограничены в $L^\infty(0, \mathrm{T}; L^{(q+2)/(q+1)}(\Omega))$, то можно еще предположить, что

$$|u_m|^q u_m \rightharpoonup w \quad * \text{–слабо в} \quad L^\infty(0, \mathrm{T}; L^{(q+2)/(q+1)}(\Omega)). \tag{2.22}$$

Существенно важный момент — здесь мы сталкиваемся с одной из наиболее типичных трудностей нелинейных задач — доказательство того, что

$$w = |u|^q u. \tag{2.23}$$

На этот вопрос отвечает следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть Q — ограниченная область в $\mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_t$, g_m и g — такие функции из $L^p(Q)$, $1 < p < +\infty$, что*

$$\|g_m\|_{L^p(Q)} \leqslant C, \quad g_m \to g \quad \textit{почти всюду в} \quad Q.$$

Тогда $g_m \rightharpoonup g$ слабо в $L^p(Q)$.

Доказательство.

1. Пусть M — возрастающая последовательность чисел, стремящихся к $+\infty$; положим

$$E_M = \{z | z \in Q, \ |g_m(z) - g(z)| \leqslant 1 \quad \text{для} \quad m \geqslant M\}, \quad z = (x, t).$$

2. Измеримые множества E_M растут с ростом M и

$$\operatorname{meas}(E_M) \to \operatorname{meas}(Q) \quad \text{при} \quad M \to +\infty.$$

3. Пусть Φ_M — множество функций $\varphi(z)$ из $L^{p'}(Q)$

$$\operatorname{supp}\{\varphi\} \subset E_M, \quad \Phi = \bigcup_M \Phi_M.$$

Ясно, что

$$\Phi \overset{ds}{\subset} L^{p'}(Q).$$

Если мы возьмем $\varphi \in \Phi$, то в силу теоремы Лебега

$$\int_Q \varphi\,(g_m - g)\, dz \to +0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty \tag{2.24}$$

□ Действительно, $\varphi \in \Phi_{M_0}$, и если взять $m \geqslant M$, то $|\varphi(g_m - g)| \leqslant |\varphi|$ и левая часть этого неравенства стремится к нулю почти всюду. ⊠

4. Так как Φ плотно в $L^{p'}(Q)$, то (2.24) доказывает лемму.

Лемма доказана.

Мы применим эту лемму в случае, когда

$$g_m = |u_m|^q u_m, \quad p = \frac{q+2}{q+1},$$

в силу того, что

$$g_m \to |u|^q u = g \quad \text{почти всюду} \quad Q \quad \text{при} \quad m \to +\infty,$$

$$g_m \rightharpoonup g \quad \text{слабо в} \quad L^p(Q) \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Но тогда, согласно лемме 1, $w = |u|^q u$.

Таким образом, равенство (2.23) доказано, и можно перейти к пределу в (2.10), полагая $m = \mu$. В силу (2.18) и (2.19) имеем

$$(Du_\mu, Dw_j)_2 \rightharpoonup (Du, Dw_j)_2 \quad * \text{–слабо в} \quad L^\infty(0, \mathrm{T}), \tag{2.25}$$

$$\left(u'_\mu, w_j\right)_2 \rightharpoonup \left(u', w_j\right)_2 \quad * \text{–слабо в} \quad L^\infty(0, \mathrm{T}), \tag{2.26}$$

$$(|u_\mu|^q u_\mu, w_j)_2 \rightharpoonup (|u|^q u, w_j)_2 \quad * \text{–слабо в} \quad L^\infty(0, \mathrm{T}), \tag{2.27}$$

и, следовательно,

$$\left(u''_\mu, w_j\right)_2 = \frac{d}{dt}\left(u'_\mu, w_j\right)_2 \to \left(u'', w_j\right)_2 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(0, \mathrm{T}). \tag{2.28}$$

С другой стороны, в силу (2.10) имеем

$$\left(u''_m, w_j\right)_2 = \left\langle u''_m, w_j\right\rangle = (Du_m, Dw_j)_2 - (|u_m|^q u_m, w_j)_2 = 0. \tag{2.29}$$

Значит,

$$\left(u''_m, w_j\right)_2 \to (v, w_j)_2 \quad * \text{–слабо в} \quad L^\infty(0, \mathrm{T}), \tag{2.30}$$

откуда в силу (2.28) получаем $v = u''$. Теперь мы можем перейти к пределу при $m = \mu \to +\infty$ в задаче (2.7) и с учетом (2.25)– (2.30) получить

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \varphi(t) \left\langle u'' - \Delta u + |u|^q u, w_j\right\rangle = 0, \quad j = \overline{1, \infty}, \ \forall\, \varphi(t) \in L^1(0, \mathrm{T}). \tag{2.31}$$

Отсюда в силу плотности «галеркинского» базиса $\{w_k\}_{k=1}^{+\infty}$ в $H_0^1(\Omega)$ мы получим из (2.31) задачу (2.5).

Шаг 5. Начальные условия.

Нам осталось доказать, что построенная функция $u(x)(t)$ удовлетворяет начальным условиям (2.6).

□ Действительно, по построению имеем

$$u_\mu(0) = u_{\mu 0} \to u_0 \quad \text{сильно в} \quad H_0^1(\Omega).$$

С другой стороны, в силу (2.18)–2.20 после возможного исправления на $[0, \mathrm{T}]$ на множестве нулевой меры Лебега получим

$$u_\mu(0) \to u(0) \quad \text{слабо в} \quad L^2(\Omega).$$

Отсюда следует, что имеет место начальное условие $u(0) = u_0$.

Теперь в силу (2.30) имеем

$$\left(u''_m, w_j\right)_2 \to (v, w_j)_2 \quad * -\text{слабо в} \quad L^\infty(0, \mathrm{T}), \tag{2.32}$$

и, следовательно,

$$\left(u'_\mu(0), w_j\right)_2 \to \left(u', w_j\right)_2 \Big|_{t=0} = (u'(0), w_j)_2, \tag{2.33}$$

а поскольку

$$\left(u'_\mu(0), w_j\right)_2 \to (u_1, w_j)_2\,, \tag{2.34}$$

то имеем

$$\left(u'(0), w_j\right)_2 = (u_1, w_j)_2 \quad \forall\, j \in \mathbb{N} \Rightarrow u'(0) = u_1. \tag{2.35}$$

Шаг 6. Единственность.

Сначала докажем следующее важное утверждение.

Лемма 2. *Пусть $v \in L^2(0, \mathrm{T}; L^2(\Omega))$, $v' \in L^2(0, \mathrm{T}; L^2(\Omega))$, тогда имеет место следующее равенство для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$*

$$\|v\|_2^2(t) - \|v\|_2^2(0) = 2\int_0^t ds\, \left(v', v\right)_2(s).$$

Доказательство.

1. Регуляризируя функцию $\widehat{v}$, действующую из $\mathbb{R}$ в $L^2(\Omega)$ и равную v на $[0, \mathrm{T}]$ и 0 вне этого интервала, мы легко получаем последовательность функций v_m, удовлетворяющую условиям

$$v_m \in \mathbb{C}^\infty([0, \mathrm{T}]; L^2(\Omega)), \quad v_m \to v \quad \text{сильно в} \quad L^2_{loc}(0, \mathrm{T}; L^2(\Omega)).$$

2. Совершенно очевидно, что для функций v_m выполнено равенство

$$\frac{d}{dt}\,(v_m, v_m)_2 = 2\left(v_m, v'_m\right)_2.$$

Далее имеем

$$\|v_m\|_2^2 \to \|v\|_2^2, \quad \left(v_m^{'}, v_m\right)_2 \to \left(v^{'}, v\right)_2 \quad \text{сильно в} \quad L^1_{loc}(0, \mathrm{T}).$$

3. Отсюда переходя к пределу при $m \to +\infty$ в смысле $\mathcal{D}^{'}(0, \mathrm{T})$, получим равенство в смысле $\mathcal{D}^{'}(0, \mathrm{T})$:

$$\frac{d}{dt}(v, v)_2 = 2\left(v, v^{'}\right)_2. \tag{2.36}$$

Теперь заметим, что

$$(v, v)_2 \in L^1(0, \mathrm{T}), \quad \left(v, v^{'}\right)_2 \in L^1(0, \mathrm{T}),$$

откуда в силу (2.36) следует, что

$$(v, v)_2 \in \mathbb{AC}[0, \mathrm{T}].$$

Таким образом, интегрируя (2.36) по $t \in (0, \mathrm{T})$ приходим к утверждению леммы.

Лемма доказана.

Справедлива следующая лемма:

Лемма 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того,* $q \in \in (0, 2]$. *Тогда решение* u, *полученное в теореме 1, единственно.*

Доказательство.

1. Пусть u_1 и u_2 — два слабых обобщенных решения задачи в смысле определения 1 и $w = u_1 - u_2$. Пусть $s \in (0, \mathrm{T})$. Положим

$$\psi(t) = \left\{ -\int\limits_t^s w(\sigma)\, d\sigma, \quad t \leqslant s; \quad 0 \quad \text{при} \quad t > s \right\}.$$

Отсюда имеем

$$w_1(t) = \int\limits_0^t w(\sigma)\, d\sigma, \quad \text{так что} \quad \psi(t) = w_1(t) - w_1(s), \quad \text{если} \quad t \leqslant s.$$

2. Тогда из (2.3) положив $v = \psi(t)$ получим

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left\langle w^{''} - \Delta w + |u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2, \psi(t) \right\rangle = 0, \; w(0) = 0, \; w^{'}(0) = 0. \tag{2.37}$$

Откуда, интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_0^s (w^{''}(t), \psi(t))_2\, dx = (w^{'}(t), \psi(t))_2 \Big|_{t=0}^{t=s} - \int\limits_0^s \left(w^{'}, \psi^{'}\right)_2 dt = -\int\limits_0^s \left(w^{'}, \psi^{'}\right)_2 dt.$$

Следовательно,

$$-\int_0^s \left(w', \psi'\right)_2\, dt + \int_0^s (Dw, D\psi)_2\, dt = -\int_0^s (|u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2, \psi)_2\, dt,$$

а поскольку $\psi'(t) = w(t)$, в силу леммы 2 имеем

$$-\int_0^s \left(w', w\right)_2\, dt = -\frac{1}{2}\|w\|_2^2(s).$$

3. Поскольку $w_1(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; H_0^1(\Omega))$ и $w(t) = w_1'(t)$ справедлива цепочка равенств

$$\int_0^s (Dw(t), D\psi(t))_2 = \int_0^s (D\psi'(t), D\psi(t))_2\, dt = \frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{dt}(D\psi(t), D\psi(t))_2\, dt =$$
$$= \frac{1}{2}(D\psi(s), D\psi(s))_2 - \frac{1}{2}(D\psi(0), D\psi(0))_2 = -\frac{1}{2}\|Dw_1(s)\|_2^2.$$

Тогда приходим к равенству

$$\frac{1}{2}\|w\|_2^2(s) + \frac{1}{2}\|Dw_1(s)\|_2^2 = \int_0^s (|u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2, \psi)_2\, dt. \tag{2.38}$$

4. Рассмотрим отдельно выражение в правой части

$$\mathrm{I} = \int_0^s (|u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2, \psi)_2\, dt =$$
$$= \int_0^s (|u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2, w_1(t) - w_1(s))_2\, dt \leqslant$$
$$\leqslant (q+1)\int_0^s \int_\Omega dx\, |w(t)|\, [|w_1(t)| + |w_1(s)|] \max\{|u_1|^q, |u_2|^q\}\, dt. \tag{2.39}$$

Теперь воспользуемся обобщенным неравенством Гельдера со следующими показателями:

$$p_1 = N, \quad p_2 = 2, \quad p_3 = r, \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1 \Rightarrow r = \frac{2N}{N-2}.$$

При этом имеет место непрерывное вложение

$$H_0^1(\Omega) \subset L^r(\Omega).$$

Кроме того, имеем

$$qN \leqslant \frac{2N}{N-2} \Rightarrow q \leqslant \frac{2}{N-2} \quad \text{при} \quad N \geqslant 3,$$

поэтому имеем

$$\||u_k|^q\|_N = \|u_k\|_{qN}^q \leqslant c_1 \|Du_k\|_2^q \quad \text{при} \quad k = 1, 2.$$

Итак, из (2.39) получим следующее неравенство

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} \leqslant (q+1) \int\limits_0^s dt \, \|w\|_2(t) \, [\|w_1(s)\|_r + \|w_1(t)\|_r] \times \\
\times \max\{\||u_1|^q\|_N(t), \||u_2|^q\|_N(t)\} \leqslant \\
\leqslant c_1 \int\limits_0^s dt \|w\|_2(t) \, [\|Dw_1(s)\|_2 + \|Dw_1(t)\|_2] \, dt \leqslant \\
\leqslant c_2(\varepsilon, T) \int\limits_0^s dt \|w\|_2^2(t) + \frac{\varepsilon}{2} \|Dw_1(s)\|_2^2 + \\
+ c_3 \int\limits_0^s dt \left[\frac{1}{2}\|w\|_2^2(t) + \frac{1}{2}\|Dw_1\|_2^2(t)\right]
\end{aligned} \tag{2.40}$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Отсюда в силу (2.38) и (2.40) приходим к неравенству

$$\|w\|_2^2(t) + \|Dw_1\|_2^2(t) \leqslant \mathrm{C}_4(\mathrm{T}) \int\limits_0^t ds \, \left[\|w\|_2^2(s) + \|Dw_1\|_2^2(s)\right].$$

Отсюда в силу леммы Гроноулла–Белмана [7] приходим к выводу, что $u_1 = u_2$ почти всюду.

Лемма доказана.

Теорема доказана.

§ 3. Литературные указания

В данной лекции мы использовали материал, изложенный в работах [8], [9], [18], [23], [25], [39], [46] и [56].

Лекция 8

МЕТОД ВЕРХНИХ И НИЖНИХ РЕШЕНИЙ

В этой лекции мы рассмотрим один из самых мощных методов исследования нелинейных краевых и начально–краевых задач и прежде всего для эллиптических и параболических уравнений для доказательства разрешимости в слабом смысле. Этот метод может быть применен и к другим уравнениям, для которых имеет место признак сравнения решений.

§ 1. Метод верхних и нижних решений. Слабые решения

В этом параграфе мы рассмотрим метод слабых нижних и верхних решений для нелинейного уравнения Пуассона

$$-\Delta u = f(u) \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{1.1}$$

где

$$f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$$

— это гладкая функция и

$$\left| f^{'}(x) \right| \leqslant \mathrm{c} \quad (x \in \mathbb{R}^1), \tag{1.2}$$

где c — константа. Здесь мы будем использовать следующие обозначения

$$H_0^1(\Omega) \equiv W_0^{1,2}(\Omega), \quad H^{-1}(\Omega) \equiv W^{-1,2}(\Omega).$$

Определение 1.

(i) *Функция* $\overline{u} \in H^1(\Omega)$ *называется слабым верхним решением задачи* (1.1), *если*

$$\int\limits_{\Omega} (D\overline{u}, Dv)\, dx \geqslant \int\limits_{\Omega} f(\overline{u}) v\, dx \tag{1.3}$$

для любой функции $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \geqslant 0$ *почти всюду.*

(ii) *Функция* $\underline{u} \in H^1(\Omega)$ *называется слабым нижним решением задачи* (1.1), *если*

$$\int\limits_{\Omega} (D\underline{u}, Dv)\ dx \leqslant \int\limits_{\Omega} f(\underline{u}) v\, dx \tag{1.4}$$

для любой функции $v \in H^1_0(\Omega)$, $v \geqslant 0$ *почти всюду.*

(iii) *Функция* $u \in H^1(\Omega)$ *называется слабым решением задачи* (1.1), *если*

$$\int\limits_{\Omega} (Du, Dv)\ dx = \int\limits_{\Omega} f(u) v\, dx \tag{1.5}$$

для любой функции $v \in H^1_0(\Omega)$.

Замечание 1. Если $\overline{u}, \underline{u} \in \mathbb{C}^2(\Omega)$, то из (1.3) и (1.4) получаем

$$-\Delta\overline{u} \geqslant f(\overline{u}), \quad -\Delta\underline{u} \leqslant f(\underline{u}) \quad \text{в} \quad \Omega,$$

что соответствует классическим определениям верхних и нижних решений.

Теорема 1. *Пусть существует верхнее* $\overline{u}$ *и нижнее* $\underline{u}$ *решения задачи* (1.1) *такие, что*

$$\underline{u} \leqslant 0, \quad \overline{u} \geqslant 0 \quad \textit{на} \quad \partial\Omega \quad \textit{в смысле следов,} \quad \underline{u} \leqslant \overline{u} \quad \textit{п.в.} \quad \textit{в} \quad \Omega. \tag{1.6}$$

Тогда существует слабое решение u *задачи* (1.1) *такое, что*

$$\underline{u} \leqslant u \leqslant \overline{u} \quad \textit{п.в.} \quad \textit{в} \quad \Omega.$$

Доказательство.

Доказательство проведем в несколько шагов.

Шаг 1. Фиксируем достаточно большое $\lambda > 0$ так, что отображение

$$z \to f(z) + \lambda z \tag{1.7}$$

неубывающее. Такой выбор возможен в силу условия (1.2).

Теперь запишем $u_0 = \underline{u}$ и при заданных u_k $(k = 0, 1, 2 ...)$ индуктивно определим $u_{k+1} \in H^1_0(\Omega)$ как единственное слабое решение линейной краевой задачи

$$-\Delta u_{k+1} + \lambda u_{k+1} = f(u_k) + \lambda u_k \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u_{k+1} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{1.8}$$

Шаг 2. Покажем, что

$$\underline{u} = u_0 \leqslant u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_k \leqslant \cdots \quad \text{п.в.} \quad \Omega. \tag{1.9}$$

1. Для этого сначала заметим, что в силу (1.8) при $k = 0$

$$\int\limits_{\Omega} ((Du_1, Dv) + \lambda u_1 v)\ dx = \int\limits_{\Omega} (f(u_0) + \lambda u_0)\, v\, dx \tag{1.10}$$

для любой $v \in H_0^1(\Omega)$. Вычитая (1.10) из (1.4), получим следующее неравенство:

$$\int\limits_{\Omega} [(Du_0 - Du_1, Dv) + \lambda(u_0 - u_1, v)]\, dx \leqslant 0, \quad u_0 = \underline{u},$$

и полагая

$$v = (u_0 - u_1)^+ \in H_0^1(\Omega), \quad v \geqslant 0 \quad \text{почти всюду},$$

находим

$$\int\limits_{\Omega} \big(D(u_0 - u_1), D(u_0 - u_1)^+ + \lambda(u_0 - u_1)(u_0 - u_1)^+\big)\, dx \leqslant 0. \qquad (1.11)$$

Однако,

$$D(u_0 - u_1)^+ = \begin{cases} D(u_0 - u_1) & \text{почти всюду на} \quad \{u_0 \geqslant u_1\}, \\ 0 & \text{почти всюду на} \quad \{u_1 \geqslant u_0\}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\int\limits_{u_0 \geqslant u_1} \Big[|D(u_0 - u_1)|^2 + \lambda(u_0 - u_1)^2\Big]\, dx \leqslant 0,$$

откуда вытекает, что

$$u_0(x) \leqslant u_1(x) \quad \text{почти всюду на} \quad \Omega.$$

2. Теперь по индукции предположим, что

$$u_{k-1} \leqslant u_k \quad \text{п.в. в} \quad \Omega. \qquad (1.12)$$

Из (1.8) находим

$$\int\limits_{\Omega} [(Du_{k+1}, Dv) + \lambda u_{k+1} v]\, dx = \int\limits_{\Omega} (f(u_k) + \lambda u_k)\, v\, dx \qquad (1.13)$$

и

$$\int\limits_{\Omega} [(Du_k, Dv) + \lambda u_k v]\, dx = \int\limits_{\Omega} (f(u_{k-1}) + \lambda u_{k-1})\, v\, dx \qquad (1.14)$$

для любых $v \in H_0^1(\Omega)$. Вычитая и полагая

$$v \equiv (u_k - u_{k+1})^+,$$

находим

$$\int\limits_{u_k \geqslant u_{k+1}} \left[|D(u_k - u_{k+1})|^2 + \lambda \left(u_k - u_{k+1}\right)^2 \right] dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \left[(f(u_{k-1}) + \lambda u_{k-1}) - (f(u_k) + \lambda u_k) \right] (u_k - u_{k+1})^+ \, dx \leqslant 0.$$

Последнее неравенство верно в силу (1.12) и (1.7). Поэтому $u_k \leqslant u_{k+1}$ почти всюду в Ω, как и утверждалось.

Шаг 3. Теперь покажем, что

$$u_k \leqslant \overline{u} \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega \quad (k = 0, 1, 2...). \tag{1.15}$$

При $k = 0$ (1.15) верно в силу (1.6). Пусть для некоторого k

$$u_k \leqslant \overline{u} \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega. \tag{1.16}$$

Вычитая (1.3) из (1.13) и полагая

$$v \equiv (u_{k+1} - \overline{u})^+ \, ,$$

находим

$$\int\limits_{u_{k+1} \geqslant \overline{u}} \left[|D(u_{k+1} - \overline{u})|^2 + \lambda (u_{k+1} - \overline{u})^2 \right] dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega} \left[(f(u_k) + \lambda u_k) - (f(\overline{u}) + \lambda \overline{u}) \right] (u_{k+1} - \overline{u})^+ \, dx \leqslant 0$$

в силу (1.16) и (1.7). Таким образом, $u_{k+1} \leqslant \overline{u}$ почти всюду в Ω.

Шаг 4.

1. Ввиду (1.9) и (1.15)

$$\underline{u} \leqslant \cdots \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant \cdots \leqslant \overline{u} \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega. \tag{1.17}$$

Поэтому

$$u(x) \equiv \lim_{k \to +\infty} u_k(x) \tag{1.18}$$

существует для почти всюду $x \in \Omega$. Кроме того,

$$u_k \to u \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega), \tag{1.19}$$

что гарантируется теоремой о мажорируемой сходимости и (1.17).

□ Действительно, имеем

$$\int\limits_{\Omega} |u_k(x) - u(x)|^2 \, dx \leqslant 4 \int\limits_{\Omega} |\overline{u}(x)|^2 \, dx < +\infty.$$

В совокупности с (1.18) получаем утверждение. ☒

2. Наконец, в силу условия $|f^{'}(z)| \leqslant c$ имеет место формула Лагранжа

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f^{'}(\xi), \quad \xi \in [z, z_0].$$

Из этого неравенства мы получаем два важных вывода. Во–первых, имеет место неравенство при $z = u_k$ и $z_0 = u$

$$\|f(u_k) - f(u)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c\|u_k - u\|_{L^2(\Omega)},$$

из которого в силу (1.19) вытекает, что

$$f(u_k) \to f(u) \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega) \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Во вторых, имеют место следующие неравенства:

$$|f(z)|^2 = (f(z_0) + (z - z_0)f^{'}(\xi))^2 \leqslant \\ \leqslant 2|f(z_0)|^2 + 2c^2|z - z_0|^2 \leqslant \\ \leqslant 2|f(z_0)|^2 + 4c^2|z_0|^2 + 4c^2|z|^2,$$

в котором положим теперь $z = u_k$ и проинтегрируем по области Ω, тогда получим неравенство

$$\|f(u_k)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant c_1 + c_2\|u_k\|^2_{L^2(\Omega)},$$

из которого легко вытекает, что

$$\|f(u_k)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c_3 \left[1 + \|u_k\|_{L^2(\Omega)}\right].$$

3. Из (1.8) скалярным в смысле скобок двойственности

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H^{-1}(\Omega) \otimes H^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}^1$$

умножением на $u_{k+1} \in H^1_0(\Omega)$ получаем равенство

$$\langle -\Delta u_{k+1} + \lambda u_{k+1}, u_{k+1} \rangle = \langle f(u_k) + \lambda u_k, u_{k+1} \rangle.$$

После «интегрирования по частям» отсюда получим следующую цепочку выражений:

$$\|Du_{k+1}\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda\|u_{k+1}\|^2_{L^2(\Omega)} = \\ = \int\limits_{\Omega} f(u_k)u_{k+1}\,dx + \lambda \int\limits_{\Omega} u_k u_{k+1}\,dx \leqslant \\ \leqslant \lambda\frac{\varepsilon}{2}\|u_{k+1}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\lambda 2\varepsilon}\|f(u_k)\|^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+\lambda\frac{\varepsilon}{2}\|u_{k+1}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2\varepsilon}\|u_k\|^2_{L^2(\Omega)} =$$
$$= \lambda\varepsilon\|u_{k+1}\|^2_{L^2(\Omega)} + c_5(\varepsilon,\lambda)\left(1 + \|u_k\|^2_{L^2(\Omega)}\right),$$

из которого вытекает неравенство

$$\|Du_{k+1}\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda(1-\varepsilon)\|u_{k+1}\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant c_5(\varepsilon,\lambda)\left(1 + \|u_k\|^2_{L^2(\Omega)}\right).$$

В этом неравенстве положим

$$\varepsilon = \frac{1}{2},$$

тогда получим неравенство

$$\|Du_{k+1}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\|u_{k+1}\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant c_6(\lambda)\left(1 + \|u_k\|^2_{L^2(\Omega)}\right).$$

Значит, имеем

$$\|Du_{k+1}\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant c_6(\lambda)(1 + \|u_k\|^2_{L^2(\Omega)}),$$

из которого в силу (1.19) приходим к оценке

$$\sup_k \|u_k\|_{H^1_0(\Omega)} < +\infty.$$

Поэтому существует подпоследовательность $\{u_{k_j}\}_{j=1}^{+\infty}$, слабо сходящаяся к $u \in H^1_0(\Omega)$.

Шаг 5. Наконец, проверим, что u — это слабое решение задачи (1.1). Для этого фиксируем $v \in H^1_0(\Omega)$. Тогда из (1.8) находим

$$\int_\Omega \left[\left(Du_{k_j}, Dv\right) + \lambda u_{k_j} v\right]\,dx = \int_\Omega \left(f(u_{k_j-1}) + \lambda u_{k_j-1}\right) v\,dx. \qquad (1.20)$$

Устремляя $k_j \to +\infty$, имеем

$$f(u_{k_j-1}) \to f(u) \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega), \quad u_{k_j-1} \to u \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega)$$

и поэтому из (1.20) получим, что имеет место предельное равенство

$$\int_\Omega [(Du, Dv) + \lambda uv]\,dx = \int_\Omega (f(u) + \lambda u)\,v\,dx.$$

Сокращая член, содержащий λ, приходим к требуемому равенству

$$\int_\Omega (Du, Dv)\,dx = \int_\Omega f(u) v\,dx.$$

Что и требовалось доказать.

Т е о р е м а д о к а з а н а.

§ 2. Литературные указания

В данной лекции мы использовали материал, изложенный в работе [39].

Лекция 9

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП ШАУДЕРА

§ 1. Введение

В данной лекции мы рассмотрим один из самых простых, но чрезвычайно распространенный метод, основанный на принципе Шаудера. Важным фактором этого метода является то, что если он применим к задаче $f = \mathbb{A}f$, то решение этой задачи единственно.

§ 2. Принцип сжимающих отображений

Метод сжимающих отображений является, по всей видимости, наиболее широко используемым методом нелинейного анализа. Дадим определение неподвижной точки.

Определение 1. *Точка f называется неподвижной точкой оператора $\mathbb{A}$, если $f = \mathbb{A}f$.*

Напомним определение непрерывного по Липшицу оператора.

Определение 2. *Оператор $\mathbb{A} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ удовлетворяет условию Липшица на $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{B}$ с константой Липшица $q > 0$, если существует такое $0 < q < +\infty$, что*

$$\|\mathbb{A}f - \mathbb{A}g\| \leqslant q\,\|f - g\| \quad \text{для всех} \quad f, g \in \mathbb{D}.$$

Наконец, введем определение *сжимающего отображения.*

Определение 3. *Оператор $\mathbb{A}$, удовлетворяющий условию Липшица с константой $q \in (0, 1)$, называется сжимающим.*

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Если выполнено неравенство*

$$\|f_{n+1} - f_n\| \leqslant q\,\|f_n - f_{n-1}\| \quad (n \geqslant 1), \tag{2.1}$$

в котором $q \in (0, 1)$, то при всяком $n \geqslant 1$

$$\|f_{n+k} - f_n\| \leqslant q^n (1 - q)^{-1}\,\|f_1 - f_0\| \quad (k \geqslant 1)$$

и (f_n) есть последовательность Коши.

Доказательство.

Из (2.1) по индукции получаем, что

$$\|f_{n+1} - f_n\| \leqslant q^n \|f_1 - f_0\| \quad (n \geqslant 1).$$

Следовательно, при $k \geqslant 1$

$$\|f_{n+k} - f_n\| = \left\|\sum_{j=1}^{k}(f_{n+j} - f_{n+j-1})\right\| \leqslant \sum_{j=1}^{k}\|f_{n+j} - f_{n+j-1}\| \leqslant$$

$$\leqslant \|f_1 - f_0\| \sum_{j=1}^{k} q^{n+j-1} \leqslant q^n(1-q)^{-1}\|f_1 - f_0\|.$$

Так как $q < 1$, правая часть стремится к нулю при $n \to +\infty$ и, значит, (f_n) — последовательность Коши.

Лемма доказана.

Справедлив следующий важный принцип.

Принцип сжимающих отображений. *Предположим, что оператор* $\mathbb{A}$ *отображает замкнутое подмножество* $\mathbb{D}$ *банахова пространства* $\mathbb{B}$ *в* $\mathbb{D}$ *и является сжимающим. Тогда* $\mathbb{A}$ *имеет в* $\mathbb{D}$ *единственную неподвижную точку, скажем* f. *Далее, при любом начальном значении* $f_0 \in \mathbb{D}$ *последовательные приближения* $f_{n+1} = \mathbb{A}f_n$ $(n \geqslant 0)$ *сходятся к* f, *и справедлива следующая оценка скорости сходимости*:

$$\|f - f_n\| \leqslant q^n(1-q)^{-1}\|\mathbb{A}f_0 - f_0\|. \tag{2.2}$$

Доказательство.

1. Поскольку $\mathbb{A}$ — сжимающий оператор, то

$$\|f_{n+1} - f_n\| \leqslant q\|f_n - f_{n-1}\| \quad (n \geqslant 1), \tag{2.3}$$

и из леммы 1 следует, что при $n > m$

$$\|f_n - f_m\| \leqslant q^n(1-q)^{-1}\|\mathbb{A}f_0 - f_0\| \quad .(k \geqslant 1)$$

Этим доказано, что (f_n) — последовательность Коши.

2. Так как $\mathbb{D}$ замкнуто и $(f_n) \in \mathbb{D}$, последовательность (f_n) сходится в $\mathbb{D}$ к некоторому $\overline{f}$. В силу непрерывности $\mathbb{A}$,

$$\mathbb{A}\overline{f} = \lim_{n\to+\infty}\mathbb{A}f_n = \lim_{n\to+\infty} f_{n+1} = \overline{f},$$

т. е. $\overline{f}$ — неподвижная точка.

3. Чтобы доказать единственность, допустим, что $\overline{g}$ — другая неподвижная точка $\mathbb{A}$. Тогда

$$\left\|\overline{f} - \overline{g}\right\| = \left\|\mathbb{A}\overline{f} - \mathbb{A}\overline{g}\right\| \leqslant q\left\|\overline{f} - \overline{g}\right\|.$$

Поскольку $0 < q < 1$, это означает, что $\overline{f} = \overline{g}$.

Теорема доказана.

§ 3. Принцип неподвижной точки Шаудера

Сначала напомним знаменитую теорему Брауэра о неподвижной точке в конечномерном пространстве.

Теорема Брауэра о неподвижной точке 1. *Пусть D — ограниченное замкнутое выпуклое подмножество конечномерного нормированного векторного пространства. Если $\mathbb{A}$ — непрерывное отображение D в себя, то $\mathbb{A}$ имеет неподвижную точку в D.*

Имеет место и ослабленный вариант теоремы Брауэра.

Теорема Брауэра о неподвижной точке 2. *Пусть оператор $\mathbb{A}$ отображает единичный шар $S = \{x \in \mathbb{E}^n : \|x\| \leqslant 1\}$ n—мерного евклидова пространства $\mathbb{E}^n$ в себя. Тогда в S найдется неподвижная точка оператора $\mathbb{A}$.*

Определение 4. *Пусть в банаховом пространстве $\mathbb{B}$ задано множество M из конечного числа элементов*

$$M = \{x_i \in \mathbb{B} : \ i = 1, ..., n\}.$$

Множество всевозможных линейных комбинаций

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,$$

где все $\lambda_i \geqslant 0$ и

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,$$

называется выпуклой оболочкой множества M и обозначается $\mathrm{Co(M)}$.

С помощью теоремы Брауэра можно доказывать различные теоремы о неподвижных точках нелинейных операторов в бесконечномерных банаховых пространствах. Справедлив основной результат этого параграфа.

Теорема принцип Шаудера. *Пусть оператор $\mathbb{A}$ отображает замкнутое ограниченное выпуклое множество $\mathbb{D}$ банахова пространства $\mathbb{B}$ в себя. Тогда, если $\mathbb{A}$ вполне непрерывен на $\mathbb{D}$, то он имеет на $\mathbb{D}$ неподвижную точку.*

Доказательство.

1. Будем рассуждать от противного. Пусть оператор $\mathbb{A}$ не имеет на $\mathbb{D}$ неподвижных точек. Тогда найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для всех $x \in \mathbb{D}$

$$\|\mathbb{A}(x) - x\| \geqslant \varepsilon_0. \tag{3.1}$$

$\square$ Действительно, если это не так, то найдется последовательность $\{x_n\} \subset \mathbb{D}$ такая, что

$$\|\mathbb{A}(x_n) - x_n\| \to 0, \quad n \to +\infty. \tag{3.2}$$

Но тогда, вследствие компактности $\mathbb{A}(\mathbb{D})$ в $\mathbb{B}$, из последовательности $\{\mathbb{A}(x_n)\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\mathbb{A}(x_{n'})\}$, сходящуюся к элементу $x_0 \in \overline{\mathbb{A}(\mathbb{D})}$.

Из (3.2) видно, что и $x_{n'} \to x_0$, $n' \to +\infty$. При этом $x_0 \in \mathbb{D}$, ибо $\overline{\mathbb{A}(\mathbb{D})} \subset \mathbb{D}$, а $\mathbb{D}$ замкнуто. Полагая в (3.2) $n = n'$, вследствие непрерывности $\mathbb{A}(x)$ получаем $\mathbb{A}(x_0) = x_0$, что противоречит нашему предположению об отсутствии у $\mathbb{A}$ неподвижных точек на $\mathbb{D}$. Итак, выполняется неравенство (3.1). ⊠

2. Будем далее считать, что $0 \in \mathbb{D}$. Это условие не является ограничением. В самом деле, пусть $y_0 \in \mathbb{D}$. Рассмотрим множество $\mathbb{D}_0 = \mathbb{D} - y_0$ и оператор

$$\mathbb{A}_0 x = \mathbb{A}(x + y_0) - y_0.$$

Можно доказать, что $\mathbb{D}_0$ — замкнутое выпуклое множество, $\mathbb{A}_0$ — вполне непрерывный оператор. Если $x_0 \in \mathbb{D}$ — неподвижная точка оператора $\mathbb{A}$, то $x_0 + y_0 \in \mathbb{D}_0$ — неподвижная точка оператора $\mathbb{A}_0$.

3. Зафиксируем любое $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Пусть

$$M_\varepsilon = \{y_i \in \overline{\mathbb{A}(\mathbb{D})},\ i = 1, ..., n\}$$

есть конечная $\varepsilon-$сеть множества $\overline{\mathbb{A}(\mathbb{D})}$. Выделим во множестве M_ε максимальную линейно независимую систему элементов. Можно считать, что ее образуют элементы множества

$$N_\varepsilon = \{y_i,\ i = 1, ..., m\}, \quad m \leqslant n.$$

Рассмотрим $m-$мерное банахово пространство $\mathbb{B}_m$, натянутое на элементы множества N_ε и являющееся подпространством банахова пространства $\mathbb{B}$. Пусть, далее,

$$K_\varepsilon = \mathrm{Co}(0 \cup M_\varepsilon)$$

— выпуклая оболочка множества, состоящего из объединения точки 0 и точек конечной $\varepsilon-$сети M_ε. Очевидно, что $K_\varepsilon \subset \mathbb{B}_m$. Далее, K_ε является выпуклым телом в $\mathbb{B}_m$, поскольку $\underline{\mathrm{Co}}(0 \cup M_\varepsilon) \subset K_\varepsilon$. Кроме того, $K_\varepsilon \subset \mathbb{D}$, так как по условию теоремы $\overline{\mathbb{A}(\mathbb{D})} \subset \mathbb{D}$, а $\mathbb{D}$ выпукло.

4. Рассмотрим оператор $\mathbb{A}_\varepsilon$, отображающий $\mathbb{D}$ в $\mathbb{D}$ и определяемый следующим правилом: для $x \in \mathbb{D}$

$$\mathbb{A}_\varepsilon(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(x) y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(x)}, \tag{3.3}$$

где $\mu_i(x) = 0$, если $\|\mathbb{A}(x) - y_i\| > \varepsilon$, и $\mu_i(x) = \varepsilon - \|\mathbb{A}(x) - y_i\|$, если $\|\mathbb{A}(x) - y_i\| \leqslant \varepsilon$. Оператор $\mathbb{A}_\varepsilon$ часто называют $\varepsilon-$проектором Шаудера.

5. Рассмотрим теперь сужение оператора $\mathbb{A}_\varepsilon$ на множество K_ε. Можно доказать, что

a) $\mathbb{A}_\varepsilon$ отображает K_ε в себя;

b) $\mathbb{A}_\varepsilon$ непрерывен.

Таким образом, к сужению $\mathbb{A}_\varepsilon$ на K_ε можно применить теорему Брауэра 1, согласно которой существует неподвижная точка $x_\varepsilon \in K_\varepsilon$ оператора $\mathbb{A}_\varepsilon$:

$$\mathbb{A}_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon.$$

6. Заметим, что оператор $\mathbb{A}_\varepsilon$ обладает следующим свойством:

$$\|\mathbb{A}(x) - \mathbb{A}_\varepsilon(x)\| \leqslant \varepsilon \tag{3.4}$$

для всех $x \in \mathbb{D}$, т. е. оператор $\mathbb{A}_\varepsilon$ аппроксимирует оператор $\mathbb{A}$ на $\mathbb{D}$ с точностью ε.

□ Действительно,

$$\mathbb{A}(x) - \mathbb{A}_\varepsilon(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(x)\mathbb{A}(x)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(x)} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(x) y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(x)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(x)(\mathbb{A}(x) - y_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(x)}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\|\mathbb{A}(x) - \mathbb{A}_\varepsilon(x)\| \leqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(x)\|\mathbb{A}(x) - y_i\|}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(x)},$$

где суммирование в числителе и знаменателе ведется только по тем индексам i, для которых $\|\mathbb{A}(x) - y_i\| < \varepsilon$, поскольку если

$$\|\mathbb{A}(x) - y_i\| \geqslant \varepsilon \Rightarrow \mu_i(x) = 0.$$

Следовательно,

$$\|\mathbb{A}(x) - \mathbb{A}_\varepsilon(x)\| \leqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(x)\varepsilon}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(x)} = \varepsilon. \boxtimes$$

7. В силу (3.4) имеем

$$\|\mathbb{A}(x_\varepsilon) - x_\varepsilon\| = \|\mathbb{A}(x_\varepsilon) - \mathbb{A}_\varepsilon(x_\varepsilon)\| \leqslant \varepsilon.$$

Это противоречит неравенству (3.1), ибо мы взяли $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Значит, допущение о том, что $\mathbb{A}$ не имеет на $\mathbb{D}$ неподвижных точек, неверно, и теорема Шаудера доказана.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть* $\mathbb{A}$ — *вполне непрерывное отображение банахова пространства* $\mathbb{B}$ *в себя. Пусть существует постоянная* M *такая, что для всех* $x \in \mathbb{B}$ *и* $\alpha \in [0, 1]$, *удовлетворяющих уравнению*

$$x = \alpha \mathbb{A} x,$$

справедливо неравенство

$$\|x\| < M. \tag{3.5}$$

Тогда оператор $\mathbb{A}$ *имеет неподвижную точку.*

Доказательство.

1. Без ограничения общности можно предположить, что $M = 1$. Определим отображение

$$\mathbb{A}^* x = \begin{cases} \mathbb{A}x & \text{если} \quad \|\mathbb{A}x\| \leqslant 1, \\ \mathbb{A}x / \|\mathbb{A}x\|, & \text{если} \quad \|\mathbb{A}x\| \geqslant 1. \end{cases}$$

Докажем, что это отображение переводит единичный шар $\mathbb{D}_1 = \{x \in \in \mathbb{B} : \|x\| \leqslant 1\}$ в единичный шар.

□ Действительно, пусть $x \in \mathbb{D}_1$, тогда возможны два случая:

(i) $\|\mathbb{A}x\| \leqslant 1$,

(ii) $\|\mathbb{A}x\| > 1$.

В обоих случаях получаем, что $\|\mathbb{A}^* x\| \leqslant 1$. ⊠

2. Получим теперь оценку по норме разности $\mathbb{A}^* x_1 - \mathbb{A}^* x_2$ в случае, когда $x_1, x_2 \in \mathbb{D}_1$.

□ Действительно, возможны три принципиальных случая:

1) $\|\mathbb{A}x_1\| \leqslant 1$ и $\|\mathbb{A}x_2\| \leqslant 1$;
2) $\|\mathbb{A}x_1\| \geqslant 1$ и $\|\mathbb{A}x_2\| \geqslant 1$;
3) $\|\mathbb{A}x_1\| < 1$ и $\|\mathbb{A}x_2\| > 1$.

В первом случае мы сразу же получаем оценку

$$\|\mathbb{A}^* x_1 - \mathbb{A}^* x_2\| \leqslant \|\mathbb{A}x_1 - \mathbb{A}x_2\|. \tag{3.6}$$

Во втором случае справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}^* x_1 - \mathbb{A}^* x_2\| \leqslant \left\| \frac{\mathbb{A}x_1}{\|\mathbb{A}x_1\|} - \frac{\mathbb{A}x_2}{\|\mathbb{A}x_2\|} \right\| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\|\mathbb{A}x_1\| \|\mathbb{A}x_2\|} \| \|\mathbb{A}x_2\| \mathbb{A}x_1 - \|\mathbb{A}x_1\| \mathbb{A}x_2 \| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\|\mathbb{A}x_1\| \|\mathbb{A}x_2\|} \| \|\mathbb{A}x_2\| \left[\mathbb{A}x_1 - \mathbb{A}x_2\right] + \left[\|\mathbb{A}x_2\| - \|\mathbb{A}x_1\|\right] \mathbb{A}x_2 \| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\|\mathbb{A}x_1\|} \|\mathbb{A}x_1 - \mathbb{A}x_2\| + \frac{1}{\|\mathbb{A}x_1\|} | \|\mathbb{A}x_2\| - \|\mathbb{A}x_1\| | \leqslant \\ \leqslant 2 \|\mathbb{A}x_2\| \|\mathbb{A}x_1 - \mathbb{A}x_2\|. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Рассмотрим теперь третий случай. Тогда для любой точки

$$x_3: \ \|\mathbb{A}x_3\| = 1$$

справедлива оценка

$$\|\mathbb{A}^* x_1 - \mathbb{A}^* x_2\| \leqslant \|\mathbb{A}x_1 - \mathbb{A}x_3\| + \left\| \frac{\mathbb{A}x_2}{\|\mathbb{A}x_2\|} - \frac{\mathbb{A}x_3}{\|\mathbb{A}x_3\|} \right\| \leqslant \\ \leqslant \|\mathbb{A}x_1 - \mathbb{A}x_3\| + 2\|\mathbb{A}x_2 - \mathbb{A}x_3\|. \quad \boxtimes \tag{3.8}$$

Из неравенств (3.6)–(3.8) вытекает, что если оператор $\mathbb{A}$ непрерывен и вполне непрерывен, то таков соответственно и оператор $\mathbb{A}^*$.

3. Поэтому в силу теоремы о принципе Шаудера получаем, что оператор $\mathbb{A}^*$ имеет неподвижную точку x_0. Покажем, что точка x_0 является неподвижной точкой отображения $\mathbb{A}$.

□ Действительно, предположим, что $\|\mathbb{A}x_0\| \geqslant 1$. Тогда $x_0 = \mathbb{A}^* x_0 = \alpha \mathbb{A} x_0$ с $\alpha = 1/\|\mathbb{A}x_0\|$, и поэтому $\|x_0\| = \|\mathbb{A}^* x_0\| = 1$. Но это противоречит неравенству (3.5) с постоянной $M = 1$, выбранной таковой в самом начале доказательства теоремы без ограничения общности.

Следовательно, предположение $\|\mathbb{A}x_0\| \geqslant 1$ неверно, т.е.

$$\|\mathbb{A}x_0\| < 1.$$

Тогда

$$x_0 = \mathbb{A}^* x_0 = \mathbb{A} x_0.$$

Следствие доказано.

§ 4. Квазилинейное уравнение с псевдо-Лапласианом

Рассмотрим следующую задачу

$$\begin{cases} -\Delta_p u \equiv -\operatorname{div}(|Du|^{p-2} Du) = f(x, u) & x \in \Omega, \\ u = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$, $\delta \in (0, 1]$.

Введем обозначение

$$p^* = \begin{cases} \frac{Np}{N-p}, & \text{если} \quad p < N, \\ \infty, & \text{если} \quad p \geqslant N. \end{cases}$$

Предположим, что функция $f : \Omega \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ является Каратеодориевой и удовлетворяет условию роста

$$|f(x, s)| \leqslant c|s|^{q-1} + b(x), \quad x \in \Omega, \quad s \in \mathbb{R}^1, \tag{4.2}$$

где $c > 0$ — некоторая постоянная, $q \in (1, p^*)$, $b(x) \in L^{q'}(\Omega)$,

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Ограничение $q \in (1, p^*)$ гарантирует компактность вложения $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

Теперь сопоставим Каратеодориевой функции $f(x, u)$ оператор Немыцкого $N_f \equiv f(x, u(x))$. Заметим, что справедлива следующая цепочка вложений

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \xrightarrow{N_f} L^{q'}(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega),$$

из которой вытекает, что оператор Немыцкого N_f является компактным оператором

$$N_f : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega).$$

Определение 5. *Слабым решением задачи* (4.1) *называется функция* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *удовлетворяющая уравнению*

$$\langle -\Delta_p u, v\rangle = \langle N_f u, v\rangle \quad \textit{для всех} \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{4.3}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *— скобки двойственности между банаховыми пространствами* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *и* $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Как мы уже установили ранее оператор

$$(-\Delta_p)^{-1} : W^{-1,p'}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)$$

является ограниченным и непрерывным. Поэтому (4.3) может быть переписано в эквивалентном виде

$$u = (-\Delta_p)^{-1} N_f u, \tag{4.4}$$

с компактным оператором

$$\mathbb{T}(\cdot) \stackrel{def:}{=} (-\Delta_p)^{-1} N_f : W_0^{1,p}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega). \tag{4.5}$$

Докажем, что следующее множество ограничено в $W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$S = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \,\middle|\, u = \alpha\mathbb{T}(u) \text{ для некоторого } \alpha \in [0, 1] \right\}.$$

□ Действительно, справедлива следующая цепочка равенств для произвольного $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\|\mathbb{T}(u)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \langle (-\Delta_p)\, \mathbb{T}(u), \mathbb{T}(u)\rangle = \langle N_f u, \mathbb{T}(u)\rangle =$$

$$= \int_{\Omega} f(x, u(x))\mathbb{T}(u)\,dx \leqslant \int_{\Omega} \bigl(c|u|^{q-1} + b(x)\bigr)\,|\mathbb{T}(u)|\,dx.$$

Более того, для $u \in S$, т.е. $u = \alpha\mathbb{T}(u)$ с некоторым $\alpha \in [0, 1]$ мы имеем цепочку неравенств

$$\begin{aligned}\|\mathbb{T}(u)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} &\leqslant c\alpha^{q-1}\|\mathbb{T}(u)\|^q_q + \|b\|_{q'}\|\mathbb{T}(u)\|_q \leqslant \\ &\leqslant c_1^q\alpha^{q-1}\|\mathbb{T}(u)\|^q_{W_0^{1,p}(\Omega)} + c_1\|b\|_{q'}\|\mathbb{T}(u)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leqslant \\ &\leqslant c_1^q\|\mathbb{T}(u)\|^q_{W_0^{1,p}(\Omega)} + c_1\|b\|_{q'}\|\mathbb{T}(u)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)},\end{aligned}$$

где c_1 — наилучшая постоянная вложения $W_0^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$. Следовательно, для каждого $u \in S$ справедливо неравенство

$$\|\mathbb{T}(u)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - K_1\|\mathbb{T}(u)\|^q_{W_0^{1,p}(\Omega)} - K_2\|\mathbb{T}(u)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leqslant 0 \qquad (4.6)$$

с некоторыми постоянными $K_1, K_2 \geqslant 0$. Заметим, что из (4.6) при $q \in \in (1, p)$ вытекает существует такая постоянная $a \geqslant 0$, что

$$\|\mathbb{T}(u)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leqslant a.$$

Отсюда вытекает ограниченность S поскольку

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \alpha\|\mathbb{T}(u)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leqslant a. \quad \boxtimes$$

Отметим, что всегда $p < p^*$.

Таким образом, в силу следствия из теоремы Шаудера мы приходим к следующей теореме о разрешимости:

Теорема 1. *Если Каратеодориева функция* $f : \Omega \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ *удовлетворяет* (4.2) *с* $q \in (1, p)$, *тогда оператор* $(-\Delta_p)^{-1} N_f$ *имеет неподвижную точку в* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *или, что эквивалентно, задача* (4.3) *имеет решение. Более того, все решения этой задачи образуют ограниченное множество в* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

§ 5. Литературные указания

Материал для этой лекции взят из работ [12], [23], [25], [32], [36], [19], [48] и [46].

Лекция 10

ПРОСТЕЙШИЙ СЛУЧАЙ ТЕОРЕМЫ ПИКАРА

§ 1. Автономное уравнение с глобально липшицевой правой частью

Теорема 1. *Пусть B — банахово пространство с нормой $\|.\|$. Пусть функция $\Phi : B \to B$ определена на всём пространстве B и липшиц-непрерывна, т. е. существует такое число $L > 0$, что при всех $x_1, x_2 \in B$ верно неравенство*

$$\|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\| \leqslant L\|x_1 - x_2\|. \text{ [1]}$$

Тогда задача Коши (при любых $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in B$)

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x = \Phi(x), \quad t \geqslant t_0; \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

глобально и однозначно разрешима, т. е.
1) *её решение $x(t) \in C^1([t_0, +\infty); B)$ существует;*
2) *каково бы ни было другое решение $\widetilde{x}(t)$ задачи Коши (1.1) на промежутке $\mathcal{T} = [t_0, T]$ ($t_0 < T < +\infty$) или $\mathcal{T} = [t_0, T)$ ($t_0 < T \leqslant +\infty$), оно совпадает с $x(t)$ на $\mathcal{T} \cap [t_0, +\infty)$.*

Доказательство.

Доказательству теоремы предпошлём две леммы.

Лемма 1. *Зафиксируем некоторое $h \leqslant \frac{1}{2L}$. Каковы бы ни были $t_1 \geqslant t_0$ и $x_1 \in B$, существует и единственно решение задачи Коши*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x = \Phi(x), \quad t \in [t_1, t_1 + h]; \\ x(t_1) = x_1. \end{cases} \tag{1.2}$$

[1] Очевидно, липшиц-непрерывная функция является непрерывной — это нам вскоре понадобится.

Доказательство. Запишем абстрактное интегральное уравнение Вольтерра
$$x(t) = x_1 + \int\limits_{t_1}^{t} \Phi(x(\tau))\, d\tau. \tag{1.3}$$

Докажем прежде, что утверждение (А): $x(t) \in C^1([t_1, t_1 + h]; B)$ *и* $x(t)$ *является решением задачи Коши* (1.2); и утверждение (В): $x(t) \in C([t_1, t_1 + h]; B)$ *и* $x(t)$ *является решением интегрального уравнения* (1.3) равносильны.

(А) $\Longrightarrow$ (Б). Заметим, что если производная функции $x(t)$ непрерывна на отрезке $[t_1, t_1 + h]$, то (в силу уравнения (1.2)) непрерывна на нём и правая часть уравнения — сложная функция $x \mapsto \Phi(x(t))$. Следовательно, обе части уравнения (1.2) можно проинтегрировать по t в пределах от t_1 до произвольной точки на отрезке $[t_1, t_1 + h]$:
$$\int\limits_{t_1}^{t} x'(\tau)\, d\tau = \int\limits_{t_1}^{t} \Phi(x(\tau))\, d\tau, \quad t \in [t_1, t_1 + h].$$

Применяя далее к левой части формулу Ньютона—Лейбница, получаем
$$x(t) - x(t_1) = \int\limits_{t_1}^{t} \Phi(x(\tau))\, d\tau, \quad t \in [t_1, t_1 + h],$$
что с учётом равенства $x(t_1) = x_1$ из (1.2) совпадает с (1.3).

(Б) $\Longrightarrow$ (А). Поскольку функция $x(t)$ непрерывна на отрезке $[t_1, t_1 + h]$, то и функция $t \mapsto \Phi(x(t))$ — как композиция непрерывных функций $x(t)$ и $\Phi(x)$ — тоже непрерывна на нём. Следовательно, к правой части интегрального уравнения (1.3) можно применить теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом. Получаем равенство
$$x(t) = \Phi(x(t)), \quad t \in [t_0, t_0 + h], \tag{1.4}$$
а при подстановке в интегральное уравнение значения $t = t_1$ получаем начальное условие. При этом в силу равенства (1.4) производная $x'(t)$ тоже непрерывна на отрезке $[t_1, t_1 + h]$.

Следовательно, для доказательства существования и единственности непрерывно дифференцируемого решения задачи Коши (1.2) достаточно доказать существование и единственность решения интегрального уравнения (1.3) [1].

---

[1] Подчеркнём, что из существования и единственности решения одного уравнения следует не только существование, но и единственность решения другого!

Для доказательства существования и единственности решения уравнения (1.3) введём банахово пространство (см. задачу 1)

$$\mathbb{B} = C([t_1, t_1 + h]; B)$$

с нормой

$$\|x\|_{\mathbb{B}} = \sup_{t \in [t_1, t_1 + h]} \|x(t)\|$$

и оператор (вообще говоря, нелинейный) $A : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, действующий по правилу

$$(Ax)(t) = x_1 + \int\limits_{t_1}^{t} \Phi(x(\tau)) d\tau,$$

с помощью которого уравнение (1.3) переписывается в виде

$$x = Ax. \tag{1.5}$$

Заметим, что этот оператор (определённый на всём банаховом пространстве B) является сжимающим. В самом деле, для любых непрерывных функций $\widetilde{x}(t)$, $\widetilde{\widetilde{x}}(t)$ в любой точке $t \in [t_1, t_1 + h]$ имеем

$$\begin{aligned}
&\left\| A\widetilde{x}(t) - A\widetilde{\widetilde{x}}(t) \right\| = \\
&\qquad = \left\| x_1 + \int\limits_{t_1}^{t} \Phi(\widetilde{x}(\tau))\, d\tau - x_1 - \int\limits_{t_1}^{t} \Phi(\widetilde{\widetilde{x}}(\tau))\, d\tau \right\| = \\
&\qquad = \left\| \int\limits_{t_1}^{t} \Big(\Phi(\widetilde{x}(\tau)) - \Phi(\widetilde{\widetilde{x}}(\tau)) \Big)\, d\tau \right\| \leqslant \\
&\qquad \leqslant \int\limits_{t_1}^{t} \left\| \Phi(\widetilde{x}(\tau)) - \Phi(\widetilde{\widetilde{x}}(\tau)) \right\| d\tau \leqslant \\
&\qquad \leqslant \int\limits_{t_1}^{t} L \|\widetilde{x}(\tau) - \widetilde{\widetilde{x}}(\tau)\|\, d\tau \leqslant \int\limits_{t_1}^{t} L \sup_{t \in [t_1, t_1 + h]} \|\widetilde{x} - \widetilde{\widetilde{x}}\|\, d\tau = \\
&\qquad = \int\limits_{t_1}^{t} L \|\widetilde{x} - \widetilde{\widetilde{x}}\|_{\mathbb{B}}\, d\tau \leqslant \\
&\qquad \leqslant |t - t_1| L \|\widetilde{x} - \widetilde{\widetilde{x}}\|_{\mathbb{B}} \leqslant Lh \|\widetilde{x} - \widetilde{\widetilde{x}}\|_{\mathbb{B}} \leqslant \frac{1}{2} \|\widetilde{x} - \widetilde{\widetilde{x}}\|_{\mathbb{B}}.
\end{aligned}$$

Беря точную верхнюю грань по всем $t \in [t_1, t_1 + h]$, получаем

$$\left\| A\widetilde{x}(t) - A\widetilde{\widetilde{x}}(t) \right\|_{\mathbb{B}} \leqslant \frac{1}{2} \|\widetilde{x} - \widetilde{\widetilde{x}}\|_{\mathbb{B}}, \tag{1.6}$$

т. е. оператор A является сжимающим оператором, действующим на всём пространстве $\mathbb{B}$. Следовательно, к нему примени́м принцип сжимающих отображений (теорема о неподвижной точке), что и доказывает существование и единственность решения интегрального уравнения (1.3) и — в силу вышесказанного — аналогичный результат для задачи Коши (1.2).

Лемма доказана.

Лемма 2. *Если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — соответственно решения задачи Коши* (1.1) *на некоторых промежутках $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ с началом в точке t_0 ($t_0 \in \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$), то эти функции совпадают на $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$.*

Доказательство.

1. Для сокращения записи введём обозначение $\mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$. Рассмотрим множество

$$\mathcal{T}_4 = \{t \in \mathcal{T}_3 \mid x_1(t) \neq x_2(t)\}.$$

Если оно пусто, то лемма доказана. Предположим теперь, что $\mathcal{T}_4$ непусто. Заметим, что это множество открыто в метрическом пространстве $\mathcal{T}_4$ как прообраз открытого множества $(0, +\infty)$ при непрерывном отображении $g(t) := \|x_1(t) - x_2(t)\|$.

2. Положим

$$T = \inf \mathcal{T}_4. \tag{1.7}$$

Докажем, что $T \notin \mathcal{T}_4$, т. е. $x_1(T) = x_2(T)$. В самом деле, если $T = 0$, то это следует из определения решений (точнее, из начального условия задачи Коши (1.1)). Если же $T > 0$, то в любой левой полуокрестности есть точки, не принадлежащие $\mathcal{T}_4$, а в любой правой полуокрестности — точки, принадлежащие ему. Следовательно, T является граничной точкой множества $\mathcal{T}_4$ и поэтому не принадлежит этому открытому множеству.

3. Из только что установленного факта $T \notin \mathcal{T}_4$ и предположении о непустоте $\mathcal{T}_4$ следует, в частности, что $\mathcal{T}_3$ «не может заканчиваться» точкой T и содержит некоторый промежуток $[T, T + h_1]$. Тогда можно выбрать достаточно малый отрезок $[T, T + h]$ (где $h \leqslant \min(h_1, \frac{1}{2L})$) и поставить на нём задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x = \Phi(x), \quad t \in [t_1, t_1 + h]; \\ x(T) = x_1(T). \end{cases} \tag{1.8}$$

Ограничения каждой из функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, очевидно, были бы её решениями, но не совпадали бы тождественно на отрезке $[T, T + h]$ (поскольку T есть <u>точная</u> нижняя грань $\mathcal{T}_4$). Последнее противоречит лемме 1.

Лемма доказана.

Перейдем к <u>доказательству теоремы.</u> Теперь утверждение теоремы следует из доказанных выше двух лемм. В силу леммы 1 можно, двигаясь по шагам длины h, «составить» решение задачи Коши (1.1) из решений задач типа (1.2). При этом в силу равенства $x'(t) = \Phi(x(t))$, верного и в граничных точках отрезков для соответствующих односторонних производных, и непрерывности функции $x(t)$ (а следовательно, и сложной функции $\Phi(x(t))$), мы получаем, что производная в точках «сшивки» тоже существует и непрерывна. Из леммы 2 мы получаем утверждение о единственности решения.

Теорема доказана.

§ 2. Пример применения теоремы

Рассмотрим обобщенное уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова (ОКПП)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon^4 \Delta u - \varepsilon^2 u) + k\varepsilon^2 \Delta u - f(u, x, \varepsilon) = 0$$

с начальными и граничными условиями

$$u(x, 0) = u_0(x),\ x \in \Omega,\ u|_{\Gamma \times (0,T)} = 0,\ x \in \partial\Omega,\ t \in (0, T).$$

Пусть оператор $\mathbb{D}$ действует на трижды дифференцируемую функцию u по правилу

$$\mathbb{D}u = (\varepsilon^4 \Delta u - \varepsilon^2 u)_t + \varepsilon^2 k \Delta u - f(u, x), \tag{2.1}$$

где непрерывная функция $f(u, x)$ удовлетворяет условию

$$f(0, x) = 0$$

для всех $x \in \Omega$ и условию Липшица

$$|f(u_1, x) - f(u_2, x)| \leqslant C|u_1 - u_2| \tag{2.2}$$

для любых $x \in \Omega$, $u_{1,2} \in \mathbb{R}^1$, где $C > 0$ – постоянная величина.

В качества примера мы рассмотрим функцию f такую, что

$$f(u, x) = \begin{cases} \gamma u(u^2 - U^2(x)), & |u| \leqslant U_0, \quad x \in D, \\ (3\gamma U_0^2 - \gamma U^2(x))u - 2\gamma U_0^3, & |u| \geqslant U_0. \end{cases} \tag{2.3}$$

где $U_0 > \max_D |U(x)|$.

Рассмотрим начально-краевую задачу для обобщённого уравнения Колмогорова—Петровского—Пискунова (ОКПП)

$$\begin{cases} \mathbb{D}u = 0, & x \in \Omega \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \partial\Omega \end{cases} \tag{2.4}$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0,1]$.

Скалярное произведение и норму в $\mathbb{L}^2(\Omega)$ будем обозначать соответственно через $(u,v)_2$ и $\|u\|_2$, а скалярное произведение и норму в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ — соответствующими символами без индексов.

Чтобы сформулировать обобщённую постановку задачи (2.4), удобно будет сразу ввести некоторые операторы.

Определим оператор $\mathbb{J} : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ действующим по правилу

$$\langle \mathbb{J}v, w\rangle = \int\limits_\Omega vw\,dx \quad \forall v, w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Очевидно, это линейный оператор. Оценим его норму. Имеем

$$|\langle \mathbb{J}v, w\rangle| = \left|\int\limits_\Omega vw\,dx\right| \leqslant \|v\|_2\|w\|_2 \leqslant C_F^2\|v\|\|w\|, \tag{2.5}$$

где C_F — константа в неравенстве Фридрихса

$$\|w\|_2 \leqslant C_F\|w\| \quad \forall w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$$

для области Ω. Из (2.5) имеем

$$\|\mathbb{J}\| \leqslant C_F^2. \tag{2.6}$$

Далее, введём оператор $\Delta : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ по правилу

$$\langle \Delta v, w\rangle = -\int\limits_\Omega (\nabla v, \nabla w)\,dx \quad \forall v, w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

В силу оценки

$$\left|\int\limits_\Omega (\nabla v, \nabla w)\,dx\right| \equiv |(\nabla v, \nabla w)| \leqslant \|v\|\|w\|$$

имеем

$$\|\Delta\| \leqslant 1 \tag{2.7}$$

(на самом деле эта норма равна 1, как показывает выбор $w = v$, но для нас это не принципиально).

Наконец, введём нелинейный оператор $\mathbb{F}$ по правилу $\mathbb{F}(v) = f(v(x), x)$.

Справедлива следующая лемма:

Л е м м а 3. *Оператор* $\mathbb{F}(v)$ *является липшиц-непрерывным оператором, действующим в* $\mathbb{L}^p(\Omega)$ (*при любом* $p > 1$), *с константой Липшица, равной* C *из формулы* (2.2).

Доказательство. Поскольку $|U(x)| < U_0 < +\infty$, из (2.3) следует оценка (с некоторыми константами C_1, C_2)

$$|f(v,x)| \leqslant C_1 + C_2|u|,$$

откуда в силу теоремы Красносельского об операторе Немыцкого следует, что оператор $v \mapsto \mathbb{F}(v)$ переводит функцию, принадлежащую $\mathbb{L}^p(\Omega)$, в функцию, принадлежащую $\mathbb{L}^p(\Omega)$. Далее, имеем оценку

$$\|\mathbb{F}(v_1) - \mathbb{F}(v_2)\|_p = \left(\int\limits_\Omega |f(v_1,x) - f(v_2,x)|^p dx \right)^{1/p} \leqslant \{(2.2)\} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_\Omega C^p |v_1 - v_2|^p dx \right)^{1/p} = C\|v_1 - v_2\|_p,$$

что и доказывает лемму.

Лемма доказана.

Мы зафиксируем $p = 2$ и будем считать, что $\mathbb{F} : \mathbb{L}^2(\Omega) \to \mathbb{L}^2(\Omega)$.

Введём также операторы вложения $\mathbb{J}_1 : \mathbb{H}^1_0(\Omega) \to \mathbb{L}^2(\Omega)$ (действующий естественным образом) и $\mathbb{J}_2 : \mathbb{L}^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, действующий по правилу

$$\langle \mathbb{J}_2 v, w \rangle = \int\limits_\Omega vw\,dx \quad \forall v, w \in \mathbb{H}^1_0(\Omega).$$

Оценим их нормы. Очевидно, $\|\mathbb{J}_1\| = C_F$ по самому определению константы Фридрихса. Далее,

$$|\langle \mathbb{J}_2 v, w \rangle| = |(v,w)_2| \leqslant \|v\|_2 \|w\|_2 \leqslant C_F \|v\|_2 \|w\|,$$

откуда сразу следует, что $\|\mathbb{J}_1\| \leqslant C_F$.

Замечание 1. Очевидно, что $\mathbb{J} = \mathbb{J}_2\mathbb{J}_1$.

Теперь мы можем строго определить оператор $\mathbb{D}$. Именно, для всякого $v(x) \equiv v(x,t) \in \mathbb{C}^1([0,T]; \mathbb{H}^1_0(\Omega))$ или $v(x) \equiv v(x,t) \in \in \mathbb{C}^1([0,T); \mathbb{H}^1_0(\Omega))$ (где $T > 0$ произвольно и во втором случае может быть равно $+\infty$) положим

$$\mathbb{D}(v) = \frac{d}{dt}(\varepsilon^4 \Delta v - \varepsilon^2 \mathbb{J} v) + \varepsilon^2 k \Delta v - \mathbb{J}_2 \mathbb{F}(\mathbb{J}_1 v), \tag{2.8}$$

где $\frac{d}{dt}$ обозначает дифференцирование в смысле предела по норме $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$:

$$\frac{d}{dt} v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}(v(t + \Delta t) - v(t)).$$

Очевидно,

$$\mathbb{D} : \mathbb{C}^1([0,T]; \mathbb{H}^1_0(\Omega)) \to \mathbb{C}([0,T]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)).$$

Теперь мы можем дать определение обобщённого решения задачи (2.4).

Определение 1. *Обобщённым решением задачи* (2.4) *будем называть функцию* $u(x,t) \equiv u(x)(t)$ *из класса* $\mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{H}^1_0(\Omega))$, *где* $0 < T < +\infty$ (*или из класса* $\mathbb{C}^{(1)}([0,T);\mathbb{H}^1_0(\Omega))$, *где* $0 < T \leqslant +\infty$), *удовлетворяющую условиям*

$$\begin{cases} \mathbb{D}(u) = 0, \quad t \in [0,T] \quad (\textit{соответственно } t \in [0,T)), \\ u(0) = u_0(x) \in \mathbb{H}^1_0(\Omega). \end{cases} \tag{2.9}$$

Замечание 2. Как показывает «интегрирование по частям», классическое решение задачи (2.4), если оно существует, удовлетворяет нашему определению обобщённого решения.

Замечание 3. Здесь 0 есть элемент пространства $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, т. е. задачу (2.9) можно переписать так:

$$\begin{cases} \forall w \in \mathbb{H}^1_0(\Omega) \quad \langle \mathbb{D}(u), w\rangle = 0, \quad t \in [0,T] \quad (\text{соответственно } t \in [0,T)), \\ u(0) = u_0(x) \in \mathbb{H}^1_0(\Omega). \end{cases}$$

Оказывается, задача (2.9) может быть переформулирована в виде абстрактной задачи Коши. Для этого нам понадобится некоторая подготовительная работа.

Прежде всего введём линейный оператор

$$\mathbb{A} \equiv \mathbb{J} - \varepsilon^2\Delta : \mathbb{H}^1_0(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

В силу доказанной ранее ограниченности операторов $\mathbb{J}$ и Δ и оценок их норм сразу получаем: $\|\mathbb{A}\| \leqslant C_F^2 + \varepsilon^2$. Итак, доказана

Лемма 4. *Оператор* $\mathbb{A} : \mathbb{H}^1_0(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ *является ограниченным линейным оператором с нормой* $\|A\| \leqslant C_F^2 + \varepsilon^2$.

Напомним некоторые определения.

Определение 2. *Пусть* X – *вещественное банахово пространство*, X^* – *его сопряженное. Оператор* $\mathbb{A} : X \to X^*$ *называется радиально непрерывным, если для любых фиксированных* $v_1, v_2 \in X$ *вещественнозначная функция* $S(s)$, *заданная равенством* $S(s) = \langle \mathbb{A}(v_1 + sv_2), v_2\rangle$, *непрерывна на отрезке* $[0,1]$.

Следствие из леммы. *Оператор* $\mathbb{A}$ *является радиально непрерывным. Действительно,* $|S(s_1) - S(s_2)| \leqslant \|A\|\|v_2\|^2|s_1 - s_2|$.

Напомним определение сильно монотонного оператора.

Определение 3. *Оператор* $\mathbb{A} : X \to X^*$ *называется сильно монотонным* (*с константой* $m > 0$), *если для любых* $v_1, v_2 \in X$ *существует такое* $m > 0$, *что*

$$\langle \mathbb{A}v_1 - \mathbb{A}v_2, v_1 - v_2\rangle \geqslant m\|v_1 - v_2\|^2.$$

Лемма 5. *Оператор $\mathbb{A}$ является сильно монотонным.*

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}\langle \mathbb{A}v_1 - \mathbb{A}v_2, v_1 - v_2\rangle = \langle \mathbb{A}(v_1 - v_2), v_1 - v_2\rangle = \\ = \|v_1 - v_2\|_2^2 + \varepsilon^2 \|\nabla(v_1 - v_2)\|_2^2 \geqslant \\ \geqslant \varepsilon^2 \|\nabla(v_1 - v_2)\|_2^2 = \varepsilon^2 \|v_1 - v_2\|^2. \quad (2.10)\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Напомним определение коэрцитивного оператора.

Определение 4. *Оператор $\mathbb{A} : X \to X^*$ называется коэрцитивным, если существует вещественнозначная функция $\gamma(s) > 0$, заданная на множестве $s \in [0, +\infty)$ такая, что*

$$\langle \mathbb{A}v, v\rangle \geqslant \|u\|\gamma(\|u\|) \quad \forall v \in X,$$

где $\lim_{s\to+\infty} \gamma(s) = +\infty$.

Лемма 6. *Оператор $\mathbb{A}$ является коэрцитивным.*

Доказательство. Имеем

$$\langle \mathbb{A}v, v\rangle = \|v\|_2^2 + \varepsilon^2\|\nabla v\|_2^2 \geqslant \varepsilon^2\|\nabla v\|_2^2 = \varepsilon^2\|v\|^2.$$

Следовательно, оператор $\mathbb{A}$ является коэрцитивным с $\gamma(s) = \varepsilon^2 s$.

Лемма доказана.

Итак, оператор $\mathbb{A}$ является радиально непрерывным, строго монотонным, коэрцитивным.

Лемма 7. *Оператор $\mathbb{A}$ имеет обратный оператор*

$$\mathbb{A}^{-1} : \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \to \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Доказательство. Так как оператор $\mathbb{A}$ явяется радиально непрерывным, строго монотонным, коэрцитивным, то утверждение леммы вытекает из теоремы Браудера.

Лемма доказана.

Лемма 8. *Оператор $\mathbb{A}^{-1}$ является липшиц-непрерывным с постоянной Липшица, равной $1/\varepsilon^2$.*

Доказательство.

1. Заметим, что в силу определения нормы на сопряжённом пространстве X^*

$$\|f\|_{X^*} \geqslant \frac{|\langle f, w\rangle|}{\|w\|_X}. \quad (2.11)$$

2. Пусть $w_1, w_2 \in H^{-1}(\Omega)$, $v_1 = A^{-1}w_1$, $v_2 = A^{-1}w_2$. Тогда $w_1 = Av_1$, $w_2 = Av_2$ и с учётом (2.11), а также неравенства (2.10), полученного при доказательстве леммы 4, имеем

$$\|w_1 - w_2\|_{X^*} = \|Av_1 - Av_2\|_{X^*} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{|\langle Av_1 - Av_2, v_1 - v_2|}{\|v_1 - v_2\|} \geqslant \varepsilon^2 \|v_1 - v_2\| = \varepsilon^2 \|A^{-1} w_1 - a^{-1} w_2\|,$$

где в силу обратимости операторов A и A^{-1} $v_1 \neq v_2$ тогда и только тогда, когда $w_1 \neq w_2$. Итак, при всех $v_1 \neq v_2$ имеем

$$\|A^{-1} w_1 - A^{-1} w_2\| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \|w_1 - w_2\|_{X^*}.$$

Лемма доказана.

Теперь обобщённая постановка, данная в определении 1, может быть переписана в виде

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \dfrac{d}{dt}(\mathbb{A}u) = -\varepsilon^2 k \Delta u - \mathbb{J}_2 \mathbb{F}(\mathbb{J}_1 u), \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.12}$$

В силу свойств гладкости решения по t операторы $\frac{d}{dt}$ и $\mathbb{A}$ коммутируют, и мы можем записать (после деления на ε^2)

$$\begin{cases} \mathbb{A} \dfrac{d}{dt}(u) = -k \Delta u + \dfrac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{J}_2 \mathbb{F}(\mathbb{J}_1 u), \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.13}$$

Наконец, пользуясь ранее доказанной непрерывной обратимостью оператора $\mathbb{A}$, мы можем преобразовать задачу к виду

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(u) = -\mathbb{A}^{-1} \left(k \Delta u - \dfrac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{J}_2 \mathbb{F}(\mathbb{J}_1 u) \right), \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.14}$$

Обозначим оператор, стоящий в правой части, через $\Phi(u)$. Таким образом, $\Phi : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ — это оператор, действующий по правилу

$$\Phi(v) = -\mathbb{A}^{-1} \left(k \Delta u - \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{J}_2 \mathbb{F}(\mathbb{J}_1 u) \right). \tag{2.15}$$

Очевидно, этот (нелинейный) оператор является липшиц-непрерывным. В самом деле, оператор $\mathbb{A}^{-1} \Delta : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ является ограниченным линейным оператором в силу вышедоказанного; оператор $\mathbb{A}^{-1} \circ \mathbb{J}_2 \circ \mathbb{F} \circ \mathbb{J}_1$ липишиц-непрерывен как композиция непрерывных линейных операторов $\mathbb{A}^{-1}$, $\mathbb{J}_i$, $i = 1, 2$, и липшиц-непрерывного оператора $\mathbb{F}$.

Итак, исходная задача (в обобщённой постановке) приведена к виду абстрактной задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} u = \Phi(u), \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{2.16}$$

с липшиц-непрерывной правой частью.

В силу теоремы предыдущего параграфа абстрактная задача Коши (2.16) глобально разрешима, т. е. существует единственное решение $u(t) \in \mathbb{C}([0, +\infty); \mathbb{H}_0^1(\Omega))$, а любое другое решение (на конечном промежутке $\mathcal{T}$) является его ограничением с промежутка $[0, +\infty)$ на промежуток $\mathcal{T}$.

§ 3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Доказать, что линейное пространство $C([0, T]; B)$ действительно является банаховым.

Задача 2. Конкретизировать рассуждение о «сшивке» решений, полученных на отрезках, которым мы пользовались в конце доказательства теоремы.

Задача 3. Сформулировать и доказать теорему о глобальной разрешимости системы линейной однородной системы линейных дифференциальных уравнений.

Лекция 11

ТЕОРЕМА О НЕПРОДОЛЖАЕМОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ

В данной лекции будет доказана теорема о существовании, единственности и свойстве непродолжаемости решения абстрактного дифференциального уравнения $y' = A(t, y)$.

§ 1. Теорема о непродолжаемом решении задачи Коши

Пусть B — банахово пространство с нормой $\|.\|$. Рассмотрим также метрическое пространство $\mathbb{R}_+ \times B$ с расстоянием

$$\rho\big((t_1, y_1), (t_2, y_2)\big) = \max(|t_1 - t_2|, \|y_1 - y_2\|). \tag{1.1}$$

Пусть отображение

$$A(t, y) : \mathbb{R}_+ \times B \to B$$

обладает свойствами (A_1) и (A_2):

(A_1) оно непрерывно в смысле метрики (1.2) (т. е. «по совокупности переменных»);

(A_2) существует такая функция

$$\mu(t, s) : {\mathbb{R}_+}^2 \to \mathbb{R}_+,$$

ограниченная на каждом прямоугольнике $[0; T] \times [0; S]$ $(T, S > 0)$, что

$$\forall t \geqslant 0;\ \forall z_1, z_2 \in B\ \ \|A(t, z_1) - A(t, z_2)\| \leqslant \mu(t, \max(\|z_1\|, \|z_2\|))\|z_1 - z_2\|.$$

Замечание 1. Функции $A(t, y)$, удовлетворяющие условию (A_2) (как частный случай, они могут вообще не зависеть от t), будем называть ограниченно липшиц-непрерывными. Смысл названия: они липшиц-непрерывны в каждой ограниченной части пространства B (при этом константа Липшица зависит от t и ограничена конечной величиной, если t изменяется на ограниченном множестве).

Сразу отметим, что из (A_1) вытекает свойство (A_3):

(A_3) функция $\nu(t) \equiv \|A(t, \vartheta)\|$ (где ϑ — нулевой элемент пространства B) ограничена на каждом отрезке $[0; T]$. Действительно, в силу (A_1) числовая функция $\|A(t, \vartheta)\|$ непрерывна при всех $t \geqslant 0$.

Далее, из (A_2) и (A_3) следует свойство

(A_4) существует такая функция

$$\lambda(t,s) : \mathbb{R}_+{}^2 \to \mathbb{R}_+,$$

ограниченная на каждом прямоугольнике $[0;T] \times [0;S]$ $(T, S > 0)$, что

$$\forall t \geqslant 0;\ \forall z \in B\ \ \|A(t,z)\| \leqslant \lambda(t, \|z\|).$$

Действительно, имеем

$$\|A(t,z)\| \leqslant \\ \leqslant \|A(t,\vartheta)\| + \|A(t,z) - A(t,\vartheta)\| \leqslant \nu(t) + \mu(t, \|z\|)\|z\| =: \lambda(t, \|z\|),$$

причём

$$\sup_{\substack{t\,\in\,[0;\,T] \\ s\,\in\,[0;\,S]}} \lambda(t,s) \leqslant \sup_{t\in[0;T]} \nu(t) + S \sup_{\substack{t\,\in\,[0;\,T] \\ s\,\in\,[0;\,S]}} \mu(t,s).$$

Докажем теперь одну простую, но важную лемму.

Лемма 1. *Пусть* $y(t) \in C([a;b], B)$, $[a;b] \subset \mathbb{R}_+$. *Тогда сложная функция* $f(t) \equiv A(t, y(t))$ (*где* A — *введённое выше отображение*) *непрерывна*: $f(t) \in C([a;b], B)$.

Доказательство.

Заметим, что отображение $F : t \mapsto (t, y(t))$, действующее из $[a;b]$ в $\mathbb{R}_+ \times B$ с метрикой (1.2), непрерывно. В самом деле, при $t \to t_0$ имеем $\|y(t) - y(t_0)\| \to 0$ и, следовательно,

$$\max(|t - t_0|, \|y(t) - y(t_0)\|) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to t_0.$$

Но тогда функция $f(t)$ непрерывна как композиция непрерывных отображений

$$t \overset{F}{\mapsto} (t, y(t)) \overset{A}{\mapsto} A(t, y(t)).$$

(Мы воспользовались свойством (A_1).)

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь в пространстве B абстрактную задачу Коши

$$\begin{cases} y'(t) = A(t,y), & t \geqslant 0; \\ y(0) = Y_0; & Y_0 \in B. \end{cases} \tag{1.2}$$

Наряду с ней рассмотрим задачу Коши с начальным условием в произвольный момент времени $t_0 \geqslant 0$:

$$\begin{cases} y'(t) = A(t,y), & t \geqslant t_0; \\ y(0) = y_0; & y_0 \in B, \quad t_0 \geqslant 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Очевидно, (1.2) — частный случай (1.3).

Определение 1. *Пусть*

$$\mathcal{T} = [t_0; T), \quad t_0 < T \leqslant +\infty, \quad \textit{или} \quad \mathcal{T} = [0; T], \quad t_0 < T < +\infty.$$

Решением задачи Коши (1.2) *на промежутке* $\mathcal{T}$ *будем называть всякую абстрактную функцию*

$$y(t) \in C^1(\mathcal{T}, B),$$

удовлетворяющую
1) *начальному условию* $y(t_0) = y_0$;
2) *при каждом* $t \in \mathcal{T}$ *уравнению* $y'(t) = A(t, y(t))$, *где дифференцирование понимается в смысле сильной производной в пространстве* B, *причём в граничных точках промежутка* $\mathcal{T}$, *принадлежащих ему, подразумевается односторонняя производная.*

Замечание 2. Если $z(t)$ — решение задачи Коши (1.2) на промежутке $\mathcal{T} = [0, T]$ (или $\mathcal{T} = [0, T)$), то ограничение функции $z(t)$ на любой промежуток $\mathcal{T}_1 = [t_0, t_1]$ (или $\mathcal{T}_1 = [t_0, t_1]$) есть решение задачи Коши (1.3) с $y_0 = z(t_0)$ на промежутке $\mathcal{T}_1$. (Очевидно.)

Определение 2. *Решение* $y_1(t) \in C^1(\mathcal{T}_1, B)$ *задачи Коши* (1.2) *на промежутке* $\mathcal{T}_1$ *будем называть непродолжаемым, если не существует решения* $y_2(t) \in C^1(\mathcal{T}_2, B)$ *на промежутке* $\mathcal{T}_2$ *той же задачи, удовлетворяющего условиям*
1) $\mathcal{T}_2 \supsetneq \mathcal{T}_1$;
2) $\forall t \in \mathcal{T}_1 \; y_2(t) = y_1(t)$.

Нам потребуется ряд предварительных результатов.

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра

$$y(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} A(\tau, y(\tau))\, d\tau. \tag{1.4}$$

Определение 3. *Решением интегрального уравнения* (1.4) *на промежутке* $[t_0, t_0 + T]$ *назовём функцию*

$$y(t) \in C([t_0, t_0 + T, B]), \tag{1.5}$$

удовлетворяющую при каждом $t \in [t_0, t_0 + T]$ *уравнению* (1.4), *где интеграл понимается в смысле Римана.*

Замечание 3. Как следует из леммы 1, при условии (1.5) имеем $A(t, y(t)) \in C([t_0, t_0 + T], B)$, а поэтому в силу результатов лекции 1 интеграл в (1.4) существует при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Лемма 2. *Для всех* $T > 0$ *эквивалентны следующие утверждения*:

(diff) $y(t) \in C^1([t_0, t_0 + T], B)$ *и* $y(t)$ — *решение задачи Коши* (1.3) *на промежутке* $[t_0, t_0 + T]$;

(int) $y(t) \in C([t_0, t_0 + T], B)$ *и* $y(t)$ — *решение интегрального уравнения* (1.4) *на промежутке* $[t_0, t_0 + T]$.

Доказательство.

1) (diff) $\Rightarrow$ (int). Очевидно, $C^1([t_0,t_0+T],B) \subset C([t_0,t_0+T],B)$. Далее, правая часть уравнения $y'(t) = A(t,y(t))$ непрерывна (поскольку непрерывна $y'(t)$), а поэтому при всех $t \in [0;T]$ существует интеграл

$$\int\limits_{t_0}^{t} A(\tau, y(\tau))\, d\tau. \tag{1.6}$$

Интегрируя обе части уравнения $y'(t) = A(t,y(t))$ от t_0 до t, в силу формулы Ньютона—Лейбница (см. лекцию 1) и начального условия $y(t_0) = y_0$ получаем:

$$\forall t \in [t_0, t_0+T] \;\; y(t) - y_0 = \int\limits_{t_0}^{t} A(\tau, y(\tau))\, d\tau,$$

что и требовалось.

2) (int) $\Rightarrow$ (diff). В силу леммы 1 и непрерывности функции $y(t)$ подынтегральная функция в (1.4) непрерывна, а поэтому интеграл (1.6) при всех $t \in [t_0, t_0+T]]$ существует и допускает дифференцирование по верхнему пределу. Но тогда из получаем: $y(t) \in C^1([0;T],B)$, $y'(t) = A(t,y(t))$ при всех $t \in [t_0,t_0+T]$, $y(t_0) = y_0$, что и требовалось.

Лемма доказана.

Значение леммы 2 в том, что вопрос о существовании и единственности решения задачи Коши (1.3) (или (1.2)) на конечном отрезке сводится к аналогичному вопросу для интегрального уравнения (1.4).

Как нетрудно доказать, линейное пространство

$$\mathbb{B}_{\mathbb{B}_{t_0,T}} \equiv C([t_0,t_0+T],B)$$

zвляется банаховым относительно нормы

$$\|y\|_{\mathbb{B}_{t_0,T}} = \sup_{t\in[t_0,t_0+T]} \|y(t)\|. \tag{1.7}$$

Следовательно, для фиксированного элемента $z_0 \in B$ «полоса»

$$\mathbb{B}^R_{t_0,z_0,T} \equiv \left\{ y(t) \in \mathbb{B}_{t_0,T} \mid \sup_{t\in[t_0,t_0+T]} \|y(t) - z_0\| \leqslant R \right\}$$

zвляется замкнутым шаром в банаховом пространстве $\mathbb{B}_{t_0,T}$, а следовательно, полным метрическим пространством относительно расстояния, порождённого нормой $\|.\|_{\mathbb{B}_{t_0,T}}$. Здесь параметры $t_0 \geqslant 0$, $z_0 \in B$, $R > 0$ произвольны.

Лемма 3. *Пусть* $t_0 \geqslant 0$, $R > 0$, $y_0 \in B$ *произвольны. Тогда найдётся такое* T', *что при всех* $T \in (0, T']$ *решение интегрального уравнения* (1.4) *на промежутке* $[t_0, t_0 + T]$ *существует и единственно в классе* $\mathbb{B}^R_{t_0, y_0, T}$. *(Иными словами, интегральное уравнение* (1.4) *имеет некоторое решение на промежутке* $[t_0, t_0 + T]$, *принадлежащее множеству*$\mathbb{B}^R_{t_0, y_0, T}$, *а другим решений* <u>*из этого множества*</u> *уравнение* (1.4) *не имеет.)*

Доказательства.

Для доказательства воспользуемся методом сжимающих отображений.

1. Введём оператор

$$\mathbb{A}_{t_0, y_0, T} : \mathbb{B}_{t_0, T} \to \mathbb{B}_{t_0, T}$$

(зависящий от $t_0 \geqslant 0$, $y_0 \in B$, $T > 0$ как от параметров) по формуле

$$\mathbb{A}_{t_0, y_0, T} z = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} A(\tau, z(\tau))\, d\tau. \tag{1.8}$$

(Тот факт, что при каждом значении параметров этот оператор действительно ставит каждому элементу банахова пространства $\mathbb{B}_{t_0, T}$ некоторый элемент этого же пространства, следует из леммы 1 и непрерывности интеграла с переменным верхним пределом от ограчниенной функции.)

2. Нам надо выбрать T' таким образом, чтобы при всех $T \in (0, T']$ а) оператор $\mathbb{A}_{t_0, y_0, T}$ отображал каждый элемент множества $\mathbb{B}^R_{t_0, y_0, T}$ снова во множество $\mathbb{B}^R_{t_0, y_0, T}$ и б) являлся в этом множестве сжимающим оператором. (В дальнейшем для сокращения записи параметры t_0, y_0, T у оператора A опустим.)

Для а) проведём оценку

$$\|\mathbb{A} z(t) - y_0\|_{\mathbb{B}_{t_0, T}} = \\ = \sup_{t \in [t_0, t_0 + T]} \left\| \int\limits_{t_0}^{t} A(\tau, z(\tau))\, d\tau \right\| \leqslant \sup_{t \in [t_0, t_0 + T]} \int\limits_{t_0}^{t} \|A(\tau, z(\tau))\|\, d\tau \leqslant \\ \leqslant \int\limits_{t_0}^{t_0 + T} \|A(\tau, z(\tau))\|\, d\tau \leqslant T \sup_{\substack{t \,\in\, [0; T] \\ s \,\in\, [0; S]}} \lambda(t, s).$$

Для б) проведём оценку

$$\|\mathbb{A} z_1(t) - \mathbb{A} z_2(t)\|_{B_{t_0, T}} = \sup_{t \in [t_0, t_0 + T]} \left\| \int\limits_{t_0}^{t} \mathbb{A}(\tau, z_1(\tau))\, d\tau - \int\limits_{t_0}^{t} \mathbb{A}(\tau, z_2(\tau))\, d\tau \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\in[t_0,t_0+T]} \int_{t_0}^{t} \|A(\tau, z_1(\tau)) - A(\tau, z_2(\tau))\| d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_)}^{t_0+T} \|A(\tau, z_1(\tau)) - A(\tau, z_2(\tau))\| d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t_0+T} \mu(\tau, \max(\|z_1(\tau)\|, \|z_2(\tau)\|))\|z_1(\tau) - z_2(\tau)\|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant T \sup_{\substack{t\,\in\,[0;\,t_0+T]\\ s\,\in\,[0;\,\|z_0\|+R]}} \mu(t,s)\|z_1 - z_2\|_{\mathbb{B}_{t_0,T}}.$$

3. Итак, для выполнения условий (а), (б) при некотором T достаточно, чтобы для этого T выполнялись условия

$$\begin{cases} T \sup\limits_{\substack{t\,\in\,[0;\,t_0+T]\\ s\,\in\,[0;\,\|z_0\|+R]}} \lambda(t,s) \leqslant R, \\ T \sup\limits_{\substack{t\,\in\,[0;\,t_0+T]\\ s\,\in\,[0;\,\|z_0\|+R]}} \mu(t,s) \leqslant \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{1.9}$$

4. Нам требуется, чтобы условия (1.9) выполнялись при всех $T \in \in (0, T']$ для некоторого T'. Выберем сначала $\overline{T}$ произвольно, затем подберём $T' \leqslant \overline{T}$ такое, что

$$\begin{cases} T' \sup\limits_{\substack{t\,\in\,[0;\,t_0+\overline{T}]\\ s\,\in\,[0;\,\|z_0\|+R]}} \lambda(t,s) \leqslant R, \\ T' \sup\limits_{\substack{t\,\in\,[0;\,t_0+\overline{T}]\\ s\,\in\,[0;\,\|z_0\|+R]}} \mu(t,s) \leqslant \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{1.10}$$

(это можно сделать, поскольку при фиксированном $\overline{T}$ в левых частях обоих неравенств (1.10) T' умножается на константу). Но тогда тем более

$$\begin{cases} T' \sup\limits_{\substack{t\,\in\,[0;\,t_0+T']\\ s\,\in\,[0;\,\|z_0\|+R]}} \lambda(t,s) \leqslant R, \\ T' \sup\limits_{\substack{t\,\in\,[0;\,t_0+T']\\ s\,\in\,[0;\,\|z_0\|+R]}} \mu(t,s) \leqslant \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

а также
$$\begin{cases} T \sup\limits_{\substack{t \in [0; t_0 + T] \\ s \in [0; \|z_0\| + R]}} \lambda(t,s) \leqslant R, \\ T \sup\limits_{\substack{t \in [0; t_0 + T] \\ s \in [0; \|z_0\| + R]}} \mu(t,s) \leqslant \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$
для любого $T \in (0, T']$.

Лемма доказана.

В силу леммы2 результат леммы 3 полностью переносится на задачу Коши (1.3). Сформулируем соответствующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть $t_0 \geqslant 0$, $R >$), $y_0 \in B$ фиксированы произвольным образом. Тогда найдётся такое T', что для всех $T \in (0, T']$ решение задачи Коши* (1.3) *на промежутке $[t_0, t_0 + T]$ существует и единственно в классе $\mathbb{B}^R_{t_0, y_0, T}$.*

Прямо сейчас выведем отсюда утверждение об отсутствии «разветвлений» решения задачи (1.2).

Лемма 5. *Пусть $y_1(t)$, $y_2(t)$ — решения задачи* (1.2) *соответственно на промежутках $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$. Тогда одно из этих решений является продоолжением другого* (*в частности, они совпадают, если $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$*).

Доказательство.

1. Предположим противное:
$$y_1(t) \not\equiv \quad \text{на } \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2.$$

2. Рассмотрим множество
$$\mathcal{T}^{\neq} \equiv \{t \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 \mid y_1(t) \neq y_2(t)\}.$$
Сразу заметим: $0 \notin \mathcal{T}^{\neq}$ (в силу начального условия задачи (1.2)). Далее, множество $\mathcal{T}^{\neq}$ открыто как подмножество $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$, поскольку является прообразом множества $(0, +\infty)$ при непрерывном отображении $t \mapsto \|y_1(t) - y_2(2)\|$, определённом на $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$. Положим
$$T^* = \inf \mathcal{T}^{\neq}.$$
Заметим: $T^* \notin \mathcal{T}^{\neq}$. В самом деле, если $T^* = 0$, это уже доказано ранее. Если же $T^* > 0$, то T^* — граничная точка множества $\mathcal{T}^{\neq}$, а следовательно, $T^* \notin \mathcal{T}^{\neq}$, поскольку это множество открыто в $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$. Значит существует такое $t_1 > T^*$, что $t_1 \in \mathcal{T}^{\neq} \subset \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$, причём пересечение любой правой полуокрестности точки T^* с $\mathcal{T}^{\neq}$ непусто.

3. В силу замечания 2 функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ являются решениями задачи Коши
$$\begin{cases} y'(t) = A(t, y), \quad t \geqslant T^*; \\ y(T^*) = y_1(T^*) \end{cases} \tag{1.11}$$

на промежутке $[T^*, t_1]$. В силу непрерывности $y_1(t)$, $y_2(t)$ имеем

$$R_{12} = \max_{i=1,2} \sup_{t\in[T^*,t_1]} \|y_i(t) - y_1(T^*)\| < +\infty. \tag{1.12}$$

4. В силу леммы 4 существует такое T', что для любого $T \in \in (0, T']$ решение задачи Коши (1.11) на промежутке $[T^*, T^* + T]$, удовлетворяющее условию $\|y(t) - y_1(T^*)\| \leqslant R_{12}$, единственно. Взяв $T = = \min(T', t_1 - T^*)$, получим противоречие, поскольку в силу (**??**) условие (**??**) выполнено, а $y_1 \not\equiv y_2$ в любой правой полуокретсности T^*.

Лемма доказана.

Теперь мы готовы сформулировать и доказать основную теорему этой лекции.

Теорема о непродолжаемом решении. *Существует и единственно непродолжаемое решение* $\widetilde{y}(t) \in C^1(\mathcal{T}_0; B)$ *задачи Коши* (1.2). *Оно удовлетворяет следующим условиям*:
1) $\mathcal{T}_0 = [0; T_0)$, $0 < T_0 \leqslant +\infty$;
2) *в случае* $T_0 < +\infty$ *верно предельное соотношение*

$$\lim_{t\to T_0-0} \|\widetilde{y}(t)\| = +\infty; \tag{1.13}$$

3) *всякое другое решение задачи* (1.2) *является ограничением решения* $\widetilde{y}(t)$ *на промежуток* $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}_0$.

Замечание 4. В случае $T_0 = +\infty$ соотношение $\lim_{t\to+\infty} \|\widetilde{y}(t)\| = + +\infty$ может как выполняться, так и не выполняться.

Доказательство.

1. В силу леммы 4 существует решение задачи Коши (1.2) хотя бы на некотором отрезке $[0, T]$. В силу леммы 5 из любых двух решений задачи Коши (1.2) одно является продолэжением другого (в частности, они могут совпадать).

2. Рассмотрим теперь для каждого $T > 0$ все функции из $C^1([0; T]; B)$. Среди них или есть решение задачи (1.2) на промежутке $[0; T]$, или нет. Положим

$$\mathbb{T} = \{T > 0 : \exists \text{ решение задачи (1.2) из } C^1([0; T], B)\}, \quad T_0 = \sup \mathbb{T}.$$

Если $T_0 = +\infty$, то существует решение $\widetilde{y}(t) \in C^1([0; +\infty), B)$. В самом деле, выбирая последовательность $T_n \uparrow +\infty$ и соответствующую ей последовательность решений $\{y_n(t)\}$, в силу леммы 5 получим, что при всех $n \in \mathbb{N}$ решение y_{n+1} есть продолжение решения y_n. Поэтому функция

$$\widetilde{y}(t) = \begin{cases} y_n(t), & t \in [T_{n-1}; T_n), \quad n \geqslant 2, \\ y_1(t), & t \in [0; T_1) \end{cases}$$

и будет непродолжаемым решением, определённым на $[0; +\infty)$. Других же решений (не сводящихся к ограничению $\widetilde{y}(t)$ на меньший промежуток) не будет.

3. Пусть теперь $T_0 < +\infty$. Тогда гипотетически возможны два случая: а) $T_0 \in \mathbb{T}$; б) $T_0 \notin \mathbb{T}$.

В случае а) существует решение $y(t) \in C^1([0;T_0], B)$. Но тогда в силу леммы 4, применённой к задаче (1.3) с $t_0 = T_0$, решение можно продолжить за точку T_0, причём обе односторонние производные $y'_-(T_0)$ и $y'_+(T_0)$ будут существовать и равняться $A(T_0; y(T_0))$: левая — по определению решения на $[0;T_0]$, правая — по определению решения задачи Коши с началом промежутка в точке T_0. Следовательно, мы получим решение на большем промежутке и придём к противоречию с определением T_0. Итак, случай а) исключается.

В случае б) рассуждениями, аналогичными проведённым для $T_0 = +\infty$, устанавливаем существование и единственность решения $y(t)$ задачи (1.2) на полуинтервале $[0;T_0)$. Случай б) распадается на два подслучая:

(б$_1$) $\overline{\lim}_{t\to T-0}\|y(t)\| = +\infty$ (т. е. решение неограничено в любой левой полуокрестности точки T_0);

(б$_2$) $\overline{\lim}_{t\to T-0}\|y(t)\| < +\infty$.

4. Покажем, что вариант (б$_2$) исключается. В самом деле, пусть функция $y(t)$ ограничена в некотором полуинтервале $(T_0-\gamma;T_0)$:

$$\exists C \geqslant 0\ \forall t \in (T_0-\gamma;T_0)\ \ \|y(t)\| \leqslant C.$$

Тогда в силу (A_4) имеем

$$\forall t \in (T_0-\gamma;T_0)\ \ \|A(t,y(t))\| \leqslant \sup_{\substack{t\,\in\,[0;T_0]\\ s\,\in\,[0;C]}} \lambda(t,s) =: \mathfrak{L}.$$

Но тогда из уравнения задачи (1.2) вытекает, что производная $y'(t)$ ограничена величиной $\mathfrak{L}$ при $t \in (T_0-\gamma;T_0)$. Следовательно (см. лекцию 1), функция $y(t)$ липшиц-непрерывна на $(T_0-\gamma;T_0)$, а значит, удовлетворяет в точке T_0 слева условию Коши. Итак, существует предел

$$Y_0 = \lim_{t\to T_0-0} y(t).$$

5. Доопределим функцию $y(t)$ в точке T_0 значанием Y_0. Полученная функция $Y(t)$ будет непрерывной в точке T_0 слева. Тогда в силу леммы 1 этой лекции функция $A(t,Y(t))$ тоже непрерывна в точке T_0 слева, а следовательно,

$$\lim_{t\to T_0-0} A(t,y(t)) = \lim_{t\to T_0-0} A(t,Y(t)) = A(T_0;Y_0). \tag{1.14}$$

Но поскольку при $t < T_0$ верно равенство $y' = A(t,y(t))$, из (1.14) получаем соотношение

$$\lim_{t\to T_0-0} y'(t) = A(T_0;Y_0). \tag{1.15}$$

Однако отсюда в силу леммы о продолжении в точку следует, что решение $y(t)$ продолжимо с $[0; T_0)$ на $[0; T_0]$, и мы приходим к противоречию с условием случая (б) (решения на $[0; T_0]$ не существует).

6. Таким образом, при $T_0 < +\infty$ реализуется лишь случай (б$_1$):

$$\overline{\lim}_{t\uparrow T}\|y(t)\| = +\infty. \tag{1.16}$$

7. Установим теперь, что имеет место более сильное, чем (1.16), соотношение

$$\lim_{t\to T_0-0}\|y(t)\| = +\infty. \tag{1.17}$$

8. Итак, требуется доказать:

$$\forall M > 0\, \exists\delta > 0\ \forall t \in (T_0-\delta; T_0)\cap[0; T_0)\ \ \|y(t)\| > M.$$

Предположим противное:

$$\exists M > 0\, \forall\delta > 0\ \exists t \in (T_0-\delta; T_0)\cap[0; T_0)\ \ \|y(t)\| \leqslant M. \tag{1.18}$$

9. Зафиксируем число M из (1.18). В силу (A_4) будем иметь

$$\forall t \in [0; T_0),\ \forall z \in B\ \Big(\|z\| \leqslant 2M\ \Rightarrow\ \|A(t,z)\| \leqslant \sup_{\substack{t\,\in\,[0;T_0]\\ s\,\in\,[0;2M]}} \lambda(t,s) =: E\Big). \tag{1.19}$$

10. Из (1.19) и уравнения $y'(t) = A(t,y)$ получаем:

$$\|y'(t)\| \leqslant E \quad \text{при} \quad \|y(t)\| \leqslant 2M, \quad t \in [0; T_0). \tag{1.20}$$

Выберем $\delta \leqslant \frac{1}{2}\frac{M}{E}$ и возьмём из (1.18) соответствующее $t = t^*$: $\|y(t^*)\| \leqslant M$, $T_0-\delta < t^*$. В силу (1.16) существует такое t^{**}, что $T_0 < < t^* < t^{**} < T_0$ и $\|y(t^{**})\| \geqslant 2M$. Но тогда в силу непрерывности функции $y(t)$ («прообраз замкнутого множества замкнут») существует такое $t^{***} \in (t^*; t^{**}]$, что

$$\|y(t^{***})\| = 2M, \quad \forall t \in (t^*; t^{***})\ \|y(t)\| < 2M,$$

откуда в силу (1.20)

$$\|y'(t)\| \leqslant E \quad \text{при всех} \quad t \in [t^*; t^{***}].$$

Однако в этом случае одновременно

$$\|y(t^{***}) - y(t^*)\| \leqslant |t^{***} - t^*|\cdot E < \delta\cdot E \leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{M}{E}\cdot E < M,$$
$$\|y(t^{***}) - y(t^*)\| \geqslant \|y(t^{***})\| - \|y(t^*)\| \geqslant M.$$

Полученное противоречие доказывает (1.17).

Теорема доказана.

Замечание 5. Функция $f(y) : B_1 \to B_2$ называется ограниченно липшиц-непрерывной, если существует такая функция $\mu(x) : [0, + +\infty) \to [0, +\infty)$, ограниченная на каждом ограниченном множестве, что

$$\forall y_1, y_2 \ \ \|f(y_1) - f(y_2)\|_2 \leqslant \mu(\max(\|y_1\|, \|y_2\|))\|y_1 - y_2\|_1.$$

Иными словами, это функция, липшиц-непрерывная в каждом шаре (возможно, со своей константой Липшица).
Замечание 6. Функция $f(y) : B_1 \to B_2$ называется локально липшиц-непрерывной, если для каждой точки $y_0 \in B_1$ существует такая окрестность $B_\delta(y_0)$, в которой данная функция является липшиц-непрерывной.

$$\forall y_1, y_2 \ \ \|f(y_1) - f(y_2)\|_2 \leqslant \mu(\max(\|y_1\|, \|y_2\|))\|y_1 - y_2\|_1.$$

В теореме фигурирует ограниченно липшиц-непрерывная функция. Условие локальной липшиц-непрерывности является более слабым.

§ 2. Задачи для самостоятельного решения

Задача. Провести подробнее рассуждение, показывающее невозможность «разветвления» решений уравнения (1.2).

Лекция 12

УРАВНЕНИЕ БЕНДЖАМЕНА—БОНА—МАХОНИ—БЮРГЕРСА

§ 1. Постановка задачи и её эквивалентные переформулировки

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_{xx} - u) + u_{xx} + uu_x = 0, \quad (x,t) \in [0,l] \times (0,T_0), \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [0,l], \tag{1.2}$$

$$u(0,t) = 0, \quad lu_x(0,t) = u(l,t), \quad t \in [0,T_0), \tag{1.3}$$

где $u_0(x) \in C^2([0,l])$ и удовлетворяет граничным условиям (1.3). Величина T_0, которая может быть конечной или бесконечной ($T_0 = +\infty$), будет определена ниже. Здесь и далее производные по переменной x обозначены нижним индексом (даже для функций, зависящих только от x), а штрих может обозначать лишь производную по времени t.

Нам потребуется ввести функциональные пространства

$$Z = C([0,l]), \quad \|z\|_Z = \|z\|_{C([0,T])},$$
$$Z_1 = \{z(x) \in C^1([0,l]) \mid z(0) = 0,\, lz_x(0) = z(l)\},$$
$$\|z\|_{Z_1} = \|z\|_{C([0,T])} + \|z_x\|_{C([0,T])},$$
$$Z_2 = \{z(x) \in C^2([0,l]) \mid z(0) = 0,\, lz_x(0) = z(l)\},$$
$$\|z\|_{Z_2} = \|z\|_{C([0,T])} + \|z_x\|_{C([0,T])} + \|z_{xx}\|_{C([0,T])}.$$

Пространства Z_1, Z_2, очевидно, полны относительно выбранных норм как замкнутые подпространства пространств $C^1([0,l])$ и $C^2([0,l])$ соответственно.

Введём также непрерывный при действии $Z_2 \to Z$ оператор $\mathbb{L}$ по формуле

$$\mathbb{L}z = z_{xx} - z.$$

Оператор $\mathbb{L}$ имеет непрерывный обратный $\mathbb{G} : Z \to Z_2$, который можно выписать явно:

$$(\mathbb{G}f)(x) = \int\limits_0^l G(x,s) f(s)\, ds \tag{1.4}$$

с помощью функции Грина задачи

$$\begin{cases} v_{xx} - v = f(x), \quad x \in [0, l], \\ v(0) = 0, \\ l v_x(0) = v(l). \end{cases}$$

Эта функция Грина, как нетрудно проверить непосредственно, имеет вид

$$G(x, s) = G_0(x, s) + \frac{\operatorname{sh} x (l \operatorname{ch} s - \operatorname{ch} l \operatorname{sh} s)}{l - \operatorname{sh} l},$$

где

$$G_0(x, s) = \begin{cases} -\operatorname{sh} x \operatorname{ch} s, & 0 \leqslant x \leqslant s \leqslant l, \\ -\operatorname{ch} x \operatorname{sh} s, & 0 \leqslant s \leqslant x \leqslant l \end{cases}$$

— функция Грина первой краевой задачи для уравнения $v_{xx} - v = f(x)$. Непрерывность оператора $\mathbb{G} : Z \to Z_2$ следует из общих свойств функции Грина, а также может быть легко проверена непосредственно для явно выписанной функции Грина.

Определение 1. *Решением задачи* (1.1)—(1.3) *будем называть функцию*

$$u(x)(t) \in C^1([0, T_0); Z_2), \tag{1.5}$$

где $T_0 < +\infty$ или $T_0 = +\infty$, удовлетворяющую уравнению (1.1) *и начальному условию* (1.2) (*отметим, что граничные условия включены в определения пространств Z_1, Z_2*). *При этом в уравнении* (1.1) *выражение под знаком производной по t мы понимаем в смысле оператора $\mathbb{L}$, второе слагаемое — в смысле оператора дифференцирования, действующего при каждом фиксированном t из Z_2 в Z естественным образом, а третье — как результат вложения в Z функции uu_x, получаемой естественным образом при каждом фиксированном t.*

Таким образом, равенство в (1.1) следует понимать как равенство двух элементов пространства Z, второй из которых представляет собой тождественный нуль, т. е. уравнение (1.1) интерпретируется следующим образом:

$$\frac{d}{dt}(\mathbb{L}u) + u_{xx} + uu_x = 0, \tag{1.6}$$

где производную по времени следует считать обычной (не частной) в смысле пространства (1.5). Операторы $\mathbb{L}$ и $\frac{d}{dt}$ коммутируют между собой (см. лекцию 1), поэтому уравнение (1.6) может быть переписано в виде

$$\mathbb{L}u' + u_{xx} + uu_x = 0. \tag{1.7}$$

Далее, уравнение (1.7) в силу обратимости операторов $\mathbb{L} = \mathbb{G}^{-1}$ эквивалентно в пространстве (1.5) уравнению

$$u' + \mathbb{G}(u_{xx}) + \mathbb{G}(uu_x) = 0.$$

А поскольку $\mathbb{G}(u_{xx}) = \mathbb{G}(u_{xx} - u + u) = u + \mathbb{G}u$, мы приходим к эквивалентному виду

$$u' + u + \mathbb{G}u + \mathbb{G}(uu_x) = 0. \tag{1.8}$$

Сделав теперь в (1.8) замену

$$w(t) = e^t u(t), \tag{1.9}$$

мы получим в силу вышесказанного, что функция $u(x)(t) \in \in C^1([0,T_0);Z_2)$ является решением задачи (1.1)—(1.3) тогда и только тогда, когда функция $w(x)(t) \in C^1([0,T_0);Z_2)$, связанная с ней тождеством (1.9), является решением задачи Коши

$$w' = -(\mathbb{G}w + e^{-t}\mathbb{G}(ww_x)), \quad w(x)(0) = u_0(x) \equiv w_0(x) \in Z_2. \tag{1.10}$$

Стандартным образом (см., например, предыдущую лекцию) задача (1.10) может быть сведена к интегральному уравнению

$$w(t) = w_0 - \int\limits_0^t d\tau A(\tau, w(\tau)), \tag{1.11}$$

где $w_0 = u_0(x)$, $A(t,z) = \mathbb{G}z + e^{-t}\mathbb{G}(zz_x)$.

§ 2. Интегральное уравнение в пространстве $C^1([0,T_0);Z_1)$

Будем вначале искать решение интегрального уравнения (1.11) ослабленного типа:

$$w(x)(t) \in C^1([0,T_0);Z_1).$$

Отметим, что по-прежнему $w_0 \in Z_2 \subset Z_1$.

Нетрудно видеть, что оператор

$$A(t,z) : z \mapsto \mathbb{G}z + e^{-t}\mathbb{G}(zz_x)$$

ограниченно липшиц-непрерывен при действии $Z_1 \to Z_1$ в силу свойств функции Грина. (Ниже будет доказано более сильное утверждение.) Далее, этот оператор непрерывен и по совокупности переменных (t,z) в силу непрерывности произведения непрерывных функций $e^{-t} : \mathbb{R} \to \to \mathbb{R}$ и $\mathbb{G}(zz_x) : Z_1 \to Z_1$. Кроме того, $A(t,0) = 0$. Итак, оператор $A(t,z)$ удовлетворяет всем условиям теоремы из предыдущей лекции. Поэтому в силу этой теоремы уравнение (1.11) имеет единственное непродолжаемое решение. Точнее, верна

Т е о р е м а 1. *Решение интегрального уравнения* (1.11) (*или, что то же самое, задачи Коши* (1.10)) *существует на некотором максимальном промежутке* $[0, T_0)$, *где* $0 < T_0 \leqslant +\infty$, *и единственно на нём. При этом в том случае, когда* $T_0 < +\infty$, *верно предельное равенство*

$$\lim_{t \to T_0 - 0} \|Aw\|_{Z_1} = +\infty.$$

§ 3. Повышение гладкости до $C^1([0, T_0); Z_2)$

Т е о р е м а 2. *Пусть на промежутке* $[0, T_0)$ (*где* T_0 *может быть конечным или бесконечным*) *существует решение* $w(x)(t) \in \in C^1([0, T_0); Z_1)$ *задачи Коши* (1.10) (*или, что то же самое, интегрального уравнения* (1.11)). *Тогда это решение принадлежит классу* $C^1([0, T_0); Z_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Заметим, что оператор

$$A(t, z) : z \mapsto \mathbb{G}z + e^{-t}\mathbb{G}(zz_x)$$

ограниченно липшиц-непрерывен при действии $Z_1 \to Z_2$ с не зависящей от t константой Липшица. Действительно, имеем при всех $t \geqslant 0$

$$\begin{aligned}\|A(t, \overline{z}) - A(t, \overline{\overline{z}})\|_{Z_2} = \left\|\mathbb{G}(\overline{z} - \overline{\overline{z}}) + e^{-t}\mathbb{G}(\overline{z}\overline{z}_x) - e^{-t}\mathbb{G}(\overline{\overline{z}}\overline{\overline{z}}_x)\right\|_{Z_2} \leqslant \\ \leqslant \|\mathbb{G}\|_{Z \to Z_2}\|\overline{z} - \overline{\overline{z}}\|_Z + e^{-t}\|\mathbb{G}(\overline{z}\overline{z}_x) - \mathbb{G}(\overline{\overline{z}}\overline{\overline{z}}_x)\|_{Z_2} \leqslant \\ \leqslant \|\mathbb{G}\|_{Z \to Z_2}\|\overline{z} - \overline{\overline{z}}\|_{Z_1} + \|\mathbb{G}(\overline{z}\overline{z}_x - \overline{\overline{z}}\overline{\overline{z}}_x)\|_{Z_2}.\end{aligned}$$

Для оценки второго слагаемого в правой части заметим, что

$$\begin{aligned}\|\overline{z}\overline{z}_x - \overline{\overline{z}}\overline{\overline{z}}_x\|_Z = \|\overline{z}\overline{z}_x - \overline{z}\overline{\overline{z}}_x + \overline{z}\overline{\overline{z}}_x - \overline{\overline{z}}\overline{\overline{z}}_x\|_Z \leqslant \\ \leqslant \|\overline{z}(\overline{z}_x - \overline{\overline{z}}_x)\|_Z + \|(\overline{z} - \overline{\overline{z}})\overline{\overline{z}}_x\|_Z \leqslant \\ \leqslant \|\overline{z}\|_Z\|\overline{z} - \overline{\overline{z}}\|_{Z_1} + \|\overline{z} - \overline{\overline{z}}\|_Z\|\overline{\overline{z}}\|_{Z_1} \leqslant \\ \leqslant \|\overline{z}\|_{Z_1}\|\overline{z} - \overline{\overline{z}}\|_{Z_1} + \|\overline{z} - \overline{\overline{z}}\|_{Z_1}\|\overline{\overline{z}}\|_{Z_1} \leqslant 2\max(\|\overline{z}\|_{Z_1}, \|\overline{\overline{z}}\|_{Z_1})\|\overline{z} - \overline{\overline{z}}\|_{Z_1}.\end{aligned}$$

А поэтому в силу непрерывности линейного оператора $\mathbb{G}$ при действии $Z \to Z_2$ мы и получаем требуемый результат с константой Липшица, зависящей от $\max(\|\overline{z}\|_{Z_1}, \|\overline{\overline{z}}\|_{Z_1})$.

Итак, $A(t, z)$ есть ограниченно липшиц-непрерывный оператор при действии из Z_1 в Z_2, причём константа Липшица зависит от $\max(\|\overline{z}\|_{Z_1}, \|\overline{\overline{z}}\|_{Z_1})$ и не зависит от t. (Отметим, что локальная липшиц-непрерывность оператора $A(t, z) : Z_1 \to Z_1$ отсюда непосредственно следует в силу непрерывности вложения $Z_2 \to Z_1$ с константой вложения, не превышающей единицу для выбранных нормировок пространств Z_1 и Z_2.) Из только что доказанной ограниченной липшиц-непрерывности в силу теоремы о композиции непрерывных отображений мы получаем, что если $w(x,t) \in C^1([0,T_0);Z_1)) \subset C([0,T_0,Z_1))$, то $A(t,w(x)(t)) \in C([0,T_0);Z_2))$, поэтому интеграл в правой части уравнения (1.11) является интегралом от непрерывной функции и в смысле пространства Z_2. Следовательно, правая часть уравнения (1.11) принадлежит Z_2 при каждом t (напомним, что $w_0 \in Z_2$) и дифференцируема как функция от t со значениями в Z_2. Поэтому то же можно сказать о левой части, и мы получаем, что $w(x)(t) \in C^1([0,T_0);Z_2)$.

Теорема доказана.

§ 4. Дальнейшее усиление результатов

Можно, однако, исходить из решения не в пространстве Z_1, а в пространстве Z. Для этого нам следует распространить оператор $A(t,z)$ на функции $z \in C([0,l])$. Для этого рассмотрим более подробно оператор $\mathbb{G}$ (см. (1.4) и ниже). Положим

$$g_1(x,s) = -\operatorname{sh} x \operatorname{ch} s + \frac{\operatorname{sh} x(l \operatorname{ch} s - \operatorname{ch} l \operatorname{sh} s)}{l - \operatorname{sh} l},$$

$$g_2(x,s) = -\operatorname{ch} x \operatorname{sh} s + \frac{\operatorname{sh} x(l \operatorname{ch} s - \operatorname{ch} l \operatorname{sh} s)}{l - \operatorname{sh} l}.$$

Тогда

$$(\mathbb{G}f)(x) = \int\limits_0^x g_2(x,s)f(s)\,ds + \int\limits_x^l g_1(x,s)f(s)\,ds. \tag{4.1}$$

Естественно, это определение не годится для функции $f = zz_x$, если z только непрерывна. Поэтому мы формально запишем $zz_x = (1/2)(z^2)_x$ и формально проинтегрируем по частям в (4.1). Это даст

$$\mathbb{G}(zz_x)(x) = \frac{1}{2}\left[\int\limits_0^x g_2(x,s)(z^2(s))_s ds + \int\limits_x^l g_1(x,s)(z^2(s))_s ds\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ g_2(x,s)z^2(s)\Big|_{s=0}^{s=x} - \int\limits_0^x \frac{\partial g_2}{\partial s} z^2(s)\,ds + \right.$$

$$\left. + \ g_1(x,s)z^2(s)\Big|_{s=x}^{s=l} - \int\limits_x^l \frac{\partial g_1}{\partial s} z^2(s)\,ds\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[g_1(x,l)z^2(l) - g_2(x,0)z^2(0) - \int\limits_0^x \frac{\partial g_2}{\partial s} z^2(s)\,ds - \int\limits_x^l \frac{\partial g_1}{\partial s} z^2(s)\,ds\right], \tag{4.2}$$

где в последнем равенстве мы воспользовались непрерывностью функции Грина. Формулу (4.2) следует рассматривать как определение оператора $\mathbb{G}(zz_x)$, применимое к $z \in Z$. Существенно, однако, что при $z \in \in Z_1$ цепочку равенств (4.2) можно прочитать с конца и убедиться тем самым, что при таких z новое определение равносильно старому. Но теперь мы будем считать, что второе слагаемое в операторе $A(t, z)$ определено с помощью формулы (4.2).

Заметим теперь, что функция $(\mathbb{G}(zz_x))(x)$ дифференцируема по x, как следует из свойств интегралов, зависящих от параметров и свойств функции Грина. Имеем

$$(\mathbb{G}(zz_x))_x(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,l)z^2(l) - \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,0)z^2(0) - \frac{\partial g_2}{\partial s}(x,s)\Big|_{s=x} z^2(x) - \right.$$
$$\left. - \int\limits_0^x \frac{\partial^2 g_2}{\partial x \partial s}(x,s)z^2(s)\,ds + \frac{\partial g_1}{\partial s}(x,s)\Big|_{s=x} z^2(x) - \int\limits_x^l \frac{\partial^1 g_2}{\partial x \partial s}(x,s)z^2(s)\,ds\right] \tag{4.3}$$

Отметим ещё, что при $z \in Z$ для функции $A(t, z)$ выполнены граничные условия (1.3), — это следует из свойств функции Грина. Поэтому при $z \in Z$ имеем $A(t, z) \in Z_1$.

Используя ограниченность функций $g_1(x, s)$ и $g_2(x, s)$ и их первых и вторых производных на отрезке $[0, l]$, а также неравенство

$$|z_1^2(x) - z_2^2(x)| = |z_1(x) - z_2(x)| \cdot |z_1(x) + z_2(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \|z_1 - z_2\|_{C([0,l])} \cdot (\|z_1\|_{C([0,l])} + \|z_2\|_{C([0,l])}),$$

устанавливаем, что оператор $z \mapsto \mathbb{G}(zz_x)$, а с ним и оператор $A(t, z)$ (в котором второе слагаемое теперь определено формулой (4.2)) является равномерно по t ограниченно липшиц-непрерывным при действии $Z \to \to Z_1$. А из теоремы о непрерывности произведения получаем, как и прежде, что $A(t, z)$ непрерывен по совокупности переменных (t, z) относительно рассматриваемых норм. Тогда тем более это верно при рассмотрении оператора A при действии $Z \to Z$. Итак, для оператора $A(t, z)$ в рассматриваемом теперь смысле выполнены все условия теоремы из предыдущей лекции и, следовательно, уравнение (1.11) имеет единственное непродолжаемое решение класса

$$w(x)(t) \in C^1([0, T_0); Z). \tag{4.4}$$

Далее, пользуясь только что установленными равномерной по t ограниченной липшиц-непрерывностью и непрерывностью по совокупности переменных (t, z) оператора $A(t, z)$ при действии $Z \to Z_1$, аналогично предыдущему разделу получаем, что существование решения класса (4.4) на промежутке $[0, T_0)$ гарантирует существование решения класса

$$w(x)(t) \in C^1([0, T_0); Z_1)$$

на этом же промежутке. А последнее в силу теоремы 2 обеспечивает существование классического решения

$$w(x)(t) \in C^1([0, T_0); Z_2)$$

на этом же промежутке. Эти рассуждения доказывают, что верна

Теорема 3. 1. *Решение интегрального уравнения* (1.11) *(или, что то же самое, задачи Коши* (1.10)) *в классе*

$$w(x)(t) \in C^1([0, T_0); Z)$$

существует на некотором максимальном промежутке $[0, T_0)$, *где* $0 < T_0 \leqslant +\infty$, *и единственно на нём. При этом в том случае, когда* $T_0 < +\infty$, *верно предельное равенство*

$$\lim_{t \to T_0 - 0} \|Aw\|_Z = +\infty.$$

2. *Существование решения интегрального уравнения* (1.11) *в классе*

$$w(x)(t) \in C^1([0, T_0); Z)$$

гарантирует существование его решения в классе

$$w(x)(t) \in C^1([0, T_0); Z_2)$$

с тем же T_0.

§ 5. Разрушение решения

В предыдущем разделе мы доказали существование единственного максимального решения задачи (1.1)—(1.3), понимаемого в «усиленном классическом» смысле

$$u(x)(t) \in C^1([0, T_0); C^2([0, l])).$$

Теперь умножим обе части уравнения (1.1) на пробную функцию $l - x$ и проинтегрируем по $x \in (0, l)$. С учетом граничных условий справедливы следующие формулы интегрирования по частям:

$$\int_0^l (l - x) u'_{xx}\, dx = -l u'_x(0, t) + u'(l, t) - u'(0, t) = 0,$$

$$\int_0^l (l - x) u_{xx}\, dx = -l u_x(0, t) + u(l, t) - u(0, t) = 0,$$

$$\int_0^l (l-x)uu_x dx = \frac{1}{2}\int_0^l u^2(x,t)\,dx.$$

Таким образом с учётом уравнения (1.1) приходим к следующему равенству:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{2}\int_0^l u^2\,dx, \quad J(t) = \int_0^l (l-x)u\,dx. \tag{5.1}$$

С помощью неравенства Коши—Буняковского получаем следующую оценку:

$$(J(t))^2 = \left(\int_0^l (l-x)u\,dx\right)^2 \leqslant \int_0^l (l-x)^2 dx \int_0^l u^2 dx = \frac{l^3}{3}\int_0^l u^2 dx, \tag{5.2}$$

откуда с учётом (5.1) следует, что

$$\frac{dJ}{dt} \geqslant \frac{3}{2l^3} J^2(t). \tag{5.3}$$

Теперь мы предположим, что начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяет условию

$$J(0) = \int_0^l (l-x)u_0(x)\,dx > 0. \tag{5.4}$$

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть функция $J(t)$ удовлетворяет следующим условиям*:

1. $J(t) \in C[0,T) \cap C^1(0,T)$;
2. $J(0) > 0$*;*
3. $\exists a > 0 \quad \forall t \in (0,T)$
$$\frac{dJ}{dt} \geqslant aJ^2.$$

Здесь $0 < T \leqslant +\infty$. *Тогда при всех* $t \in [0,T)$

$$J(t) \geqslant \frac{J(0)}{1 - aJ(0)t}. \tag{5.5}$$

Доказательство.

В силу второго и третьего условий имеем $J(t) \geqslant J(0)$ при всех $t \in [0,T)$. Следовательно, верна цепочка

$$\frac{J'}{J^2} \geqslant a \Rightarrow -\frac{1}{J}\bigg|_{t=0}^{t=t} \geqslant at \Rightarrow \frac{1}{J(0)} - \frac{1}{J(t)} \geqslant at \Rightarrow \frac{1}{J(t)} \leqslant \frac{1}{J(0)} - at \Rightarrow$$

$$(\text{при } t \in \Big(0, \tfrac{1}{aJ(0)}\Big)) \Rightarrow J(t) \geqslant \frac{J(0)}{1 - aJ(0)t}.$$

Но из последнего неравенства и условия 1 следует, что $T \leqslant \frac{1}{aJ(0)}$, следовательно, неравенство (5.5) выполнено на всём промежутке существования функции $J(t)$.

Лемма доказана.

В силу леммы из (5.2) получим следующее неравенство:

$$J(t) \geqslant \frac{J(0)}{1 - aJ(0)t}, \tag{5.6}$$

где $a = \frac{3}{2l^3}$, из которого следует, что

$$T_0 \leqslant T_1 \equiv \frac{2l^3}{3} J(0)^{-1}, \tag{5.7}$$

т. е. на большем временном промежутке решение существовать не может.

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 4. *При условии* (5.4) *решение задачи* (1.1)—(1.3) *в смысле* (1.5) *не может существовать при всех* $t \in [0, +\infty)$. *Промежуток* $[0, T_0)$ *существования решения ограничен условием* (5.7).

§ 6. Основной результат

Из вышеизложенных результатов непосредственно следует

Теорема 5. *В условиях теорем* 1, 4 *решение задачи* (1.1)—(1.3) *существует в классическом смысле*

$$u(x)(t) \in C^1([0, T_0); C^2([0, l]))$$

и разрушается за конечное время с режимом «жёсткий blow-up», т. е. $T_0 \leqslant T_1 \equiv l^3 J(0)^{-1}$ *и*

$$\lim_{t \to T_0 - 0} \|u(x)(t)\|_{C([0,l])} = +\infty.$$

Доказательство. В самом деле, теорема 4 с учётом замены (1.9) гарантирует существование и единственность решения в классическом смысле, причём решение принадлежит $C^1([0, T_0); C^2([0, l]))$ для тех же самых T_0, для которых оно принадлежит $C^1([0, T_0); C([0, l]))$. Теорема 5 гарантирует разрушение классического решения за конечное время при условии (5.4). Следовательно, решение из $C^1([0, T_0); C^2([0, l]))$, а с ним и решение из $C^1([0, T_0); C([0, l]))$ существует лишь для $T_0 \leqslant T_1$. А тогда в силу теоремы из предыдущей лекции имеем

$$\lim_{t \to T_0 - 0} \|A(t, w(x)(t))\|_{C([0,l])} = +\infty. \tag{6.1}$$

Из ранее доказанного следует, что оператор $A(t)$ равномерно по t ограничен при действии $Z \to Z$ на каждом ограниченном множестве пространства $C([0,l])$. Поэтому из (6.1) получаем

$$\lim_{t \to T_0 - 0} \|w(x)(t)\|_{C([0,l])} = +\infty,$$

а в силу соотношения (1.9) и неравенств $0 \leqslant t < T_0 < +\infty$ имеем

$$\lim_{t \to T_0 - 0} \|u(x)(t)\|_{C([0,l])} = +\infty.$$

Теорема доказана.

§ 7. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Проверить, что для функции (4.2) выполнены граничные условия (1.3), если $z(x) \in C([0,l])$.

Задача 2. Проверить, что решение класса (1.5) является классическим решением, т. е. что все производные, входящие в уравнение (1.1), существуют и непрерывны.

Лекция 13

ПРИМЕР ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ

§ 1. Применение теоремы Пикара

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + \Delta u - u^3 = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Мы сразу перейдём к формулировке и исследованию обобщённой постановки этой задачи.

Подобно тому, как это было сделано в лекции 2, введём линейный оператор

$$Au = \Delta u - Iu, \quad A : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega).$$

Здесь линейные операторы Δ и I действуют из пространства $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ в пространство $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ соответственно по правилам

$$\langle \Delta v, w \rangle = -\int\limits_{\Omega} (\nabla v, \nabla w)\, dx \quad \forall v, w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \tag{1.1}$$

$$\langle Iv, w \rangle = \int\limits_{\Omega} vw\, dx \quad \forall v, w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \tag{1.2}$$

(Тот факт, что определённый согласно (1.1) оператор Δ является ограниченным, проверяется с помощью неравенство Коши—Буняковского. В случае оператора I приходится привлечь ещё и неравенство Фридрихса.) Аналогично случаю лекции 2 с помощью теоремы Браудера—Минти устанавливаем, что оператор A имеет ограниченный обратный оператор

$$A^{-1} : \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \to \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Попытаемся искать обобщённое решение задачи (1) как функцию

$$u(t) \in C^1([0,T), \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \quad 0 < T \leqslant +\infty.$$

Тогда уравнение из (1) можно, пока формально, переписать в виде

$$\frac{d}{dt}Au + \Delta u - u^3 = 0$$

или, с учётом тождества $\frac{d}{dt}Au = Au'$ (см. лекцию 1) и обратимости оператора A, в виде

$$\frac{d}{dt}u = A^{-1}(u^3 - \Delta u).$$

Почему формально? Потому что мы пока не знаем, принадлежит ли u^3 области определения $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ оператора A^{-1}. Однако сейчас мы установим нужный нам факт. Именно, из теорем вложения соболевских пространств известно, что для ограниченной области Ω имеет место непрерывное вложение

$$J_1 : \mathbb{H}^1_0(\Omega) \to L^4(\Omega). \tag{1.3}$$

В силу теоремы Красносельского об операторе Немыцкого можно утверждать, что отображение $u \mapsto u^3$ преобразует функцию из пространства $L^4(\Omega)$ в функцию из пространства $L^{4/3}(\Omega)$. (Впрочем, в данном случае это очевидно из более простых соображений: $|u^3|^{4/3} = |u|^4$, поэтому если $u \in L^4(\Omega)$, то $u^3 \in L^{4/3}(\Omega)$.) С другой стороны, $L^{4/3}(\Omega) = (L^4(\Omega))^*$, а поэтому в силу известной теоремы о вложении банаховых пространств и их сопряжённых [1]) из получаем непрерывное вложение

$$J_2 : L^{4/3}(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

понимаемое в естественном смысле:

$$\langle J_2 v, w\rangle = \int\limits_{\Omega} vw\,dx \quad \forall v \in L^{4/3}(\Omega), \forall w \in \mathbb{H}^1_0(\Omega). \tag{1.4}$$

Итак, имеется цепочка отображений

$$\mathbb{H}^1_0(\Omega) \xrightarrow{J_1} L^4(\Omega) \xrightarrow{F_3} L^{4/3}(\Omega) \xrightarrow{J_1} \mathbb{H}^{-1}(\Omega). \tag{1.5}$$

Следовательно, имеется отображение $A^{-1} \circ J_2 \circ F_3 \circ J_1$. Чтобы доказать его ограниченную липшиц-непрерывность, достаточно доказать таковую для отображения $F_3 : L^4(\Omega) \to L^{4/3}(\Omega)$, поскольку остальные отображения являются ограниченными линейными операторами (см. задачу 1). Итак, если мы докажем, что отображение F_3 является

[1]) Если X, Y суть рефлексивные бесконечномерные банаховы пространства, то условие «X плотно и непрерывно вложено в Y» равносильно условию «Y^* плотно и непрерывно вложено в X^*».

ограниченно липшиц-непрерывным, то сможем свести исходную задачу к исследованию абстрактной задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u = A^{-1}(J_2F_3(J_1u) - \Delta u), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.6}$$

и применить к ней теорему из лекции 3.

Продемонстрируем на этом примере стандартную технику использования неравенств Гёльдера и Юнга. Имеем

$$\|u_1^3 - u_2^3\|_{4/3} = \left(\int\limits_\Omega |u_1^3 - u_2^3|^{\frac{4}{3}} dx\right)^{\frac{3}{4}} =$$

$$= \left(\int\limits_\Omega |u_1 - u_2|^{\frac{4}{3}} \cdot |u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = \{\text{неравенство Гёльдера}\} =$$

$$= \left(\left(\int\limits_\Omega |u_1 - u_2|^{\frac{4}{3}\cdot 3} dx\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\int\limits_\Omega |u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2|^{\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}} dx\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} =$$

$$= \left(\left(\int\limits_\Omega |u_1 - u_2|^4 dx\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\int\limits_\Omega |u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2|^2 dx\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} =$$

$$= \left(\int\limits_\Omega |u_1 - u_2|^4\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\int\limits_\Omega |u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \|u_1 - u_2\|_4 \cdot \left(\int\limits_\Omega |u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для оценки второго множителя заметим, что

$$|u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2|^2 = u_1^4 + u_2^4 + 3u_1^2u_2^2 + 2(u_1^3u_2 + u_1u_2^3) \leqslant C(u_1^4 + u_2^4),$$

где последний переход произведён с помощью неравенства Юнга, применённого в виде

$$u_1^2u_2^2 \leqslant \frac{u_1^4 + u_2^4}{2}, \quad |u_1||u_2|^3 \leqslant \frac{u_1^4}{4} + \frac{u_2^4}{4/3} \quad \text{и} \quad |u_1|^3|u_2| \leqslant \frac{u_1^4}{4/3} + \frac{u_2^4}{4}.$$

Следовательно,

$$\left(\int\limits_{\Omega} |u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \left(\int\limits_{\Omega} (u_1^4 + u_2^4) dx\right)^{\frac{1}{2}} = C_1 \left(\int\limits_{\Omega} u_1^4 dx + \int\limits_{\Omega} u_2^4 dx\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= C_1 \left(\|u_1\|_4^4 + \|u_2\|_4^4\right)^{\frac{1}{2}} = C_1 \left(2 \max(\|u_1\|_4, \|u_2\|_4)\right)^2. \quad (1.7)$$

Итак, в силу всего вышесканного ограниченная липшиц-непрерывность отображения $A^{-1} \circ J_2 \circ F_3 \circ J_1$ доказана. Следовательно, применяя теорему 3 к задаче Коши (1.6), получаем локальную (по t) разрешимость рассматриваемой задачи.

§ 2. Глобальная разрешимость

Применим метод априорных оценок.

Итак, решение задачи есть функция $u(t) \in C^1([0,T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$. Следовательно (в силу всего вышесказанного) левая часть есть элемент пространства $C([0,T]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$. Поэтому при каждом $t \geqslant 0$ можно подействовать левой частью уравнения на $u(t)$. Получим

$$\left\langle \frac{d}{dt}(Au) + \Delta u - J_2 F_3(J_1 u) \right\rangle = 0, \quad t \in [0,T).$$

Пользуясь перестановочностью дифференцирования и применения линейного оператора (см. лекцию 1), приводим предыдущее равенство к виду

$$\left\langle A\frac{d}{dt}u + \Delta u - J_2 F_3(J_1 u) \right\rangle = 0, \quad t \in [0,T),$$

или

$$\left\langle A\frac{d}{dt}u, u \right\rangle + \langle \Delta u, u\rangle - \langle J_2 F_3(J_1 u), u\rangle = 0, \quad t \in [0,T).$$

Распишем в явном виде оператор A и скобки двойственности (см. (1.1) и (1.2)):

$$-\int\limits_{\Omega} (\nabla u', \nabla u) dx - \int\limits_{\Omega} u' u\, dx - \int\limits_{\Omega} (\nabla u, \nabla u) dx - \int\limits_{\Omega} u^3 \cdot u\, dx = 0,$$

где последний член получается с учётом (1.4), или

$$-(u', u) - (u', u) - \int\limits_{\Omega} (\nabla u, \nabla u) dx - \int\limits_{\Omega} u^4 dx = 0. \quad (2.1)$$

Поскольку в вещественном гильбертовом пространстве H для любой непрерывно дифференцируемой функции $v(t) \in C^1(\mathcal{T}, H)$ верно

$$\frac{d}{dt}\|v\|^2 = 2(v', v),$$

равенство (2.1) можно преобразовать к виду

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \|u\|^2_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)}\right) - \int\limits_\Omega u^4\,dx = 0, \tag{2.2}$$

или, обозначив $E(t) := \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)}$,

$$\frac{1}{2}\frac{dE}{dt} = -\left(\|u\|^2_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)} + \int\limits_\Omega u^4\,dx\right),$$

откуда

$$\frac{1}{2}\frac{dE}{dt} \leqslant 0.$$

Учтя, что $E(0) = \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)} < +\infty$, получаем, что на всём промежутке существования решения выполнено неравенство

$$E(t) \leqslant E(0). \tag{2.3}$$

Теперь вспомним, что абстрактная задача Коши, к которой мы свели исходную задачу, ставилась в пространстве $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$. Следовательно, норма именно в этом пространстве будет фигурировать в теореме лекции 3 при применении этой теоремы к нашей задаче. Но из (2.3) получаем

$$\|u\|_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)} \leqslant E(t) \leqslant E(0)$$

и, в частности, для любого конечного $T_1 < +\infty$ имеем

$$\varlimsup_{t\to T_1} \|u\|_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)} < +\infty. \tag{2.4}$$

Но из теоремы лекции 3 вытекает, что если бы решение существовало бы лишь на конечном промежутке, его норма стремилась бы к бесконечности на конце этого промежутка. Следовательно, решение существует на всей полупрямой $[0, +\infty)$.

Замечание 1. Как видно, здесь важна не сама по себе оценка (2.3), а более слабое утверждение: ограниченность нормы решения на каждом ограниченном промежутке.

§ 3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Пользуясь оценкой (1.7), получить в явном виде функцию $\mu(t,s)$ из теоремы лекции 3 для отображения $A^{-1}\circ J_2\circ F_3\circ J_1$.

Задача 2. Доказать ограниченную липшиц-непрерывность следующих операторов:
1) $u\mapsto u^5$, $L^6(\Omega)\to L^{6/5}(\Omega)$;
2*) $u\mapsto |u|^q$, $L^{q+1}(\Omega)\to L^{(q+1)/q}(\Omega)$, $q>1$.

Задача 3. Доказать формулу дифференцирования скалярного квадрата дифференцируемой функции со значении в вещественном гильбертовом пространстве:

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 = 2(u',u).$$

(Рекомендуется сослаться на подходящее утверждение из лекции 1, проверив условия его применимости.)

Задача 4. Сформулировать соответствующие обобщённые постановки и доказать глобальную разрешимость аналогичной задачи, в правой части уравнения которой вместо 0 стоит:
1) $f(x)\in L^2(\Omega)$;
2) $f(x)\in \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$;
3) $f(x,t)\in C([0,+\infty);L^2(\Omega))$;
4) $f(x,t)\in C([0,+\infty);\mathbb{H}^{-1}(\Omega))$;
5*) $f(x,u)$;
6*) $f(x,|\nabla u|)$,
где в последних двух случаях функция $f(x,s)$ является каратеодориевой и равномерно по $x\in\Omega$ удовлетворяет оценке

$$|f(x,t)|\leqslant |s|^\gamma,\quad \gamma\in(0,1).$$

Лекция 14

РАЗЛИЧНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ И ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ

§ 1. Непродолжаемое решение интегрального уравнения Вольтерра

Рассмотрим в банаховом пространстве B с нормой $\|\cdot\|$ интегральное уравнение

$$u(t) = \overline{u}(t) + \int\limits_0^t K(t,\tau)A(\tau, u(\tau))\,d\tau. \tag{1.1}$$

Условия на ядро $K(t,\tau) : \mathbb{R}_+^2 \to L(B,B)$ [1] и функции $A(t,u) : \mathbb{R}_+ \times \times B \to B$, $\overline{u}(t) : \mathbb{R}_+ \to B$ будут сформулированы ниже. Интегралы здесь и далее понимаются в смысле Римана см. лекцию 1).

Определение 1. *Назовём функцию $u(t)$ решением уравнения (1.1) на промежутке $\mathcal{T} \equiv [0;T]$ [2], если $u(t) \in C(\mathcal{T}, B)$ и $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) при всех $t \in \mathcal{T}$.*

Замечание 1. В дальнейшем слова «уравнения (1.1)» будем часто опускать.

Замечание 2. Как видно, мы используем не понятие «решение», а понятие «решение на промежутке». Если $u_1(t)$, $u_2(t)$ — решения соответственно на промежутках $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ и $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$, то они считаются разными решениями независимо от совпадения значений функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ на $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$.

Определение 2. *Назовём решение u_2 на промежутке $\mathcal{T}_2$ продолжением решения $u_1(t)$ на промежутке $\mathcal{T}_1$, если*

1) $\mathcal{T}_2 \supseteq \mathcal{T}_1$ и 2) $u_2(t) = u_1(t)$ на $\mathcal{T}_1$.

Замечание 3. Нам удобно использовать такую терминологию, в которой решение является своим собственным продолжением.

[1] Здесь и далее $\mathbb{R}_+ \equiv [0;+\infty)$.

[2] Т. е. $\mathcal{T} = [0;T]$ или $\mathcal{T} = [0;T)$, причём в последнем случае допускается $T = +\infty$. Если не оговорено иное, промежуток $\mathcal{T}$ всегда начинается с 0 и $0 \in \mathcal{T}$.

Определение 3. *Решение u_2 на промежутке $\mathcal{T}$ назовём непродолжаемым, если оно не имеет продолжения, отличного от него самого, т. е. если не существует такого решения $\widetilde{u}(t)$ на промежутке $\widetilde{\mathcal{T}}$, что*

$$\text{1) } \widetilde{u}(t) \text{ — продолжение решения } u(t), \text{ 2) } \widetilde{\mathcal{T}} \supsetneq \mathcal{T}.$$

Если же такое решение $\widetilde{u}(t)$ существует, то решение $u(t)$ назовём продолжаемым.

Для формулировки условий на функцию $A(t,u)$ рассмотрим метрическое пространство $\mathbb{R}_+ \times B$ с расстоянием

$$\rho\big((t_1,u_1),(t_2,u_2)\big) = \max(|t_1-t_2|, \|u_1-u_2\|). \tag{1.2}$$

Очевидно, это пространство полно. Пусть отображение

$$A(t,u) : \mathbb{R}_+ \times B \to B$$

обладает свойствами (A_1) и (A_2):

(A_1) оно непрерывно в смысле метрики (1.2);

(A_2) существует такая функция

$$\mu(t,s) : {\mathbb{R}_+}^2 \to \mathbb{R}_+,$$

ограниченная на каждом прямоугольнике $[0;T]\times[0;S]$ $(T,S>0)$, что

$$\forall t \geqslant 0,\ \forall u_1,u_2 \in B\ \ \|A(t,u_1)-A(t,u_2)\| \leqslant \mu(t, \max(\|u_1\|,\|u_2\|))\|u_1-u_2\|.$$

Сразу отметим, что из (A_1) вытекает свойство (A_3):

(A_3) функция $\nu(t) \equiv \|A(t,\vartheta)\|$ (где ϑ — нулевой элемент пространства B) ограниченна на каждом отрезке $[0;T]$. Действительно, в силу (A_1) числовая функция $\|A(t,\vartheta)\|$ непрерывна при всех $t \geqslant 0$.

Далее, из (A_2) и (A_3) следует свойство

(A_4) существует такая функция

$$\lambda(t,s) : {\mathbb{R}_+}^2 \to \mathbb{R}_+,$$

ограниченная на каждом прямоугольнике $[0;T]\times[0;S]$ $(T,S>0)$, что

$$\forall t \geqslant 0,\ \forall u \in B\ \ \|A(t,u)\| \leqslant \lambda(t,\|u\|).$$

Действительно, имеем

$$\|A(t,u)\| \leqslant \|A(t,\vartheta)\| + \|A(t,u)-A(t,\vartheta)\| \leqslant \nu(t) + \mu(t,\|u\|)\|u\| =: \lambda(t,\|u\|),$$

причём

$$\sup_{\substack{t\in[0;T]\\ s\in[0;S]}} \lambda(t,s) \leqslant \sup_{t\in[0;T]} \nu(t) + S \sup_{\substack{t\in[0;T]\\ s\in[0;S]}} \mu(t,s).$$

Нам понадобится лемма, доказанная в лекции 3. Для удобства напомним её формулировку.

Лемма 1. *Пусть* $u(t) \in C([a;b], B)$, $[a;b] \subset \mathbb{R}_+$. *Тогда сложная функция* $f(t) \equiv A(t, u(t))$ *(где* A *— введённое выше отображение) непрерывна*: $f(t) \in C([a;b], B)$.

Теперь сформулируем и докажем основную теорему.

Теорема 1. *Пусть*

1) $\overline{u}(t) \in C(\mathbb{R}_+, B)$;

2) *ядро* $K(t, \tau)$ *непрерывно по совокупности переменных на* ${\mathbb{R}_+}^2$ *(в равномерной операторной топологии, т. е. по норме банаховой алгебры* $L(B, B)$*)*;

3) *функция* $A(t, u)$ *обладает свойствами* (A_1) *и* (A_2).

Тогда верны следующие утверждения.

1. *Существует хотя бы одно решение* $u(t)$ *на промежутке* $\mathcal{T}$, $\mathcal{T} \neq \varnothing$, $\mathcal{T} \neq \{0\}$.

2. *Из любых двух решений* u_1, u_2 *одно является продолжением другого.* (*В частности, совпадающие решения являются продолжениями друг друга.*)

3. *Если* $u(t)$ *— решение на* <u>*отрезке*</u> $[0;T]$, *то решение* $u(t)$ *продолжаемо.* (*В частности, «решение»* $\overline{u}(0)$ *продолжаемо с «отрезка»* $\{0\}$, *как следует из п.* 1.)

4. *Существует такое* $T_0 > 0$ *и такое решение* $u_0(t)$ *на промежутке* $\mathcal{T}_0 = [0; T_0)$, *что* $u_0(t)$ *— непродолжаемое решение.*

5. *Непродолжаемое решение единственно.*

6. *Для непродолжаемого решения верно, что если* $T_0 < +\infty$, *то*

$$\limsup_{t \to T_0 - 0} \|u(t)\| = +\infty. \tag{1.3}$$

При этом если $K(t, \tau) \equiv I$ (*единичный оператор*), *то непродолжаемое решение является не просто неограниченным, но бесконечно большим*:

$$\lim_{t \to T_0 - 0} \|u(t)\| = +\infty. \tag{1.4}$$

В случае $T_0 = +\infty$ *соотношение* (1.3) (*соответственно* (1.4)) *может как выполняться, так и не выполняться.*

Замечание 4. В частности, можно рассматривать числовые ядра $K(t, \tau) : {\mathbb{R}_+}^2 \to \mathbb{R}$: банахова алгебра $\mathbb{R}$ изометрически изоморфна подалгебре скалярных операторов в $L(B, B)$.

Доказательство.

1. Для каждого $T > 0$ рассмотрим банахово пространство

$$\mathbb{B}_T := C([0;T], B), \quad \|u\|_{\mathbb{B}_T} \equiv \sup_{t \in [0;T]} \|u(t)\|,$$

и оператор $\mathbb{A}_T : \mathbb{B}_T \to \mathbb{B}_T$,

$$\mathbb{A}_T(u) := \overline{u}(t) + \int\limits_0^t K(t, \tau) A(\tau, u(\tau))\, d\tau.$$

Заметим, что при условии непрерывности функции $u(t)$ интеграл в правой части последней формулы непрерывен. (Это следует из леммы 1 и стандартных оценок, использующих равномерную непрерывность ядра $K(t,\tau)$ на любом прямоугольнике $[0;T_1]\times[0;T_2]$). Поэтому функция $u(t)\in C([0;T],B)$ будет решением уравнения (1.1) тогда и только тогда, когда она является решением уравнения

$$u=\mathbb{A}_T(u) \tag{1.5}$$

в банаховом пространстве $\mathbb{B}_T$.

Сейчас мы укажем, как выбрать $T>0$ таким образом, чтобы доказать однозначную разрешимость уравнения (1.5) методом сжимающих отображений. Для этого зафиксируем некоторое произвольно выбранное $R>0$ и рассмотрим замкнутое подмножество

$$\mathbb{B}_T^R=\left\{u(t)\in\mathbb{B}_T \mid \sup_{t\in[0;T]}\|u(t)-\overline{u}(t)\|\equiv\|u-\overline{u}\|_{\mathbb{B}_T}\leqslant R\right\}.$$

В силу общих свойств метрических пространств множество $\mathbb{B}_T^R$ само является полным метрическим пространством относительно расстояния, порождённого нормой пространства $\mathbb{B}_T$. Итак, нам требуется, чтобы оператор $\mathbb{A}_T$ а) не выводил из множества $\mathbb{B}_T^R$; б) являлся в нём сжимающим.

Для а) проведём оценку

$$\left\|\int\limits_0^t K(t,\tau)A(\tau,u(\tau))\,d\tau\right\|_{\mathbb{B}_T}\equiv\sup_{t\in[0;T]}\left\|\int\limits_0^t K(t,\tau)A(\tau,u(\tau))\,d\tau\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^T\|K(t,\tau)\|\|A(\tau,u(\tau))\|\,d\tau\leqslant T\sup_{t,\tau\in[0;T]}\|K(t,\tau)\|\sup_{\substack{t\,\in\,[0;\,T]\\ s\,\in\,[0;\,\|\overline{u}(t)\|_{\mathbb{B}_T}+R]}}\lambda(t,s). \tag{1.6}$$

Для б) — оценку

$$\left\|\int\limits_0^t K(t,\tau)A(\tau,u_1(\tau))\,d\tau-\int\limits_0^t K(t,\tau)A(\tau,u_2(\tau))\,d\tau\right\|_{\mathbb{B}_T}\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^T\|K(t,\tau)\|\|A(\tau,u_1(\tau))-A(\tau,u_2(\tau))\|\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{t,\tau\in[0;T]}\|K(t,\tau)\|\sup_{\substack{t\,\in\,[0;\,T]\\ s\,\in\,[0;\,\|\overline{u}(t)\|_{\mathbb{B}_T}+R]}}\mu(t,s)\int\limits_0^T\|u_1(\tau)-u_2(\tau)\|\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant T \sup_{t,\tau\in[0;T]} \|K(t,\tau)\| \sup_{\substack{t\,\in\,[0;\,T]\\ s\,\in\,[0;\,\|\overline{u}(t)\|_{\mathbb{B}_T}+R]}} \mu(t,s)\|u_1-u_2\|_{\mathbb{B}_T}. \quad (1.7)$$

Заметим, что в силу свойств функций μ и λ, а также непрерывности функций $\overline{u}(t)$ и $K(t,\tau)$ точные верхние грани в (1.6) и (1.7) конечны (и, очевидно, не возрастают при уменьшении T). Поэтому существует такое $T>0$, что выполняются условия

$$\begin{cases} T \sup\limits_{t,\tau\in[0;T]} \|K(t,\tau)\| \sup\limits_{\substack{t\,\in\,[0;\,T]\\ s\,\in\,[0;\,\|\overline{u}(t)\|_{\mathbb{B}_T}+R]}} \lambda(t,s)\leqslant R,\\ T \sup\limits_{t,\tau\in[0;T]} \|K(t,\tau)\| \sup\limits_{\substack{t\,\in\,[0;\,T]\\ s\,\in\,[0;\,\|\overline{u}(t)\|_{\mathbb{B}_T}+R]}} \mu(t,s)\leqslant \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

В этом случае в силу принципа сжимающих отображений уравнение (1.5) однозначно разрешимо, а поэтому и исходное уравнение (1.1) имеет единственное решение на промежутке $[0;T]$.

2. Рассмотрим сначала случай, когда $\mathcal{T}_1=\mathcal{T}_2=:\mathcal{T}$. Предположим, что $u_1(t)\not\equiv u_2(t)$ на $\mathcal{T}$. Заметим, что множество точек t, где $u_1(t)=u_2(t)$, является замкнутым подмножеством промежутка $\mathcal{T}$ как прообраз замкнутого множества $\{\vartheta\}$ при непрерывном отображении u_2-u_1, а поэтому множество $\mathfrak{T}$, где равенство решений нарушается, открыто в $\mathcal{T}$. Следовательно, имеется точка $T^*=\inf\mathfrak{T}$, причём $u_1(T^*)=u_2(T^*)=:u^*$, и такое T^{**}, что $(T^*;T^{**}]\subset\mathfrak{T}$. Но тогда каждая из функций $u_1(t)$, $u_2(t)$ является решением уравнения

$$u(t)=\overline{u}(t)+u^*-\overline{u}(T^*)+\int\limits_{T^*}^{t} K(t,\tau)A(\tau,u(\tau))\,d\tau$$

на отрезке $[T^*;T^{**}]$. Уменьшив, если потребуется, величину T^{**}, мы с помощью рассуждений, аналогичных п. 1, сможем доказать единственность решения этого уравнения на отрезке $[T^*;T^{**}]$ и прийти к противоречию.

Теперь рассмотрим случай, когда промежутки $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ различны. Пусть для определённости $\mathcal{T}_2\supsetneq\mathcal{T}_1$. Тогда, перейдя к функциям $u_1(t)$ и $u_2|_{\mathcal{T}_1}(t)$, мы получаем предыдущий случай, невозможность которого уже доказана.

3. Для доказательства достаточно перейти к рассмотрению уравнения

$$u(t)=\overline{u}(t)+u(T)-\overline{u}(T)+\int\limits_{T}^{t} K(t,\tau)A(\tau,u(\tau))\,d\tau$$

при $t \geqslant T$ и применить рассуждения, аналогичные п. 1. Очевидно, что полученные решения будут «сшиваться» непрерывно и дадут продолжение решения $u(t)$.

4. Пусть

$$\mathfrak{T} = \{T > 0: \text{ существует решение задачи (1.1) на промежутке } [0; T]\}$$

при $T_0 = \sup \mathfrak{T} \leqslant +\infty$. В силу п. 1 множество $\mathfrak{T}$ непусто и содержит некоторый отрезок ненулевой длины. Поэтому $T_0 > 0$ и существует такая последовательность решений $\{u_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ на промежутках $[0; T_n]$, что $T_n > 0$, $T_n \uparrow T_0$. В силу п. 2 любые два решения уравнения (1.1) совпадают на их общей области определения. Поэтому при всех $n \in \mathbb{N}$ решение $u_{n+1}(t)$ есть продолжение решения $u_n(t)$. Тогда можно построить функцию

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), & t \in [0; T_1], \\ u_{n+1}(t), & t \in (T_n; T_{n+1}], \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Эта функция будет решением уравнения (1.1) на промежутке $[0; T_0)$. Если $T_0 = +\infty$, то $u(t)$ будет очевидным образом непродолжаемым. Если $T_0 < +\infty$, то по самому определению T_0 максимально возможный промежуток существования решения — это либо полуинтервал $[0; T_0)$, либо отрезок $[0; T_0]$. Однако последнее исключается в силу п. 3, ведь тогда существовало бы некоторое решение на промежутке, большем отрезка $[0; T_0]$, а следовательно, и на некотором отрезке $[0; T_1]$ с $T_1 > T_0$. Следовательно, решение $u(t)$, $t \in [0; T_0)$, непродолжаемо.

Итак, существует непродолжаемое решение, определённое на полуоткрытом промежутке $[0; T_0)$ с $T_0 \leqslant +\infty$.

5. Пусть $u_1(t)$, $u_2(t)$ — два непродолжаемых решения. Тогда в силу п. 2 одно из них является продолжением другого. Следовательно, или они совпадают, или одно из них является продолжаемым.

6. Пусть $u(t)$ — решение на $[0; T_0)$, $T_0 < +\infty$ и $u(t)$ — непродолжаемое решение. Будем доказывать от противного. Предположим, что решение $u(t)$ ограниченно, т. е. существует число C_0 такое, что

$$\|u(t)\| \leqslant C_0, \quad t \in [0; T_0).$$

Но интеграл в правой части уравнения (1.1) удовлетворяет в левой полуокрестности точки T_0 условию Коши. Это вытекает из неравенства (где $0 < t_1 < t_2 < T_0$)

$$\left\| \int_0^{t_2} K(t_2, \tau) A(\tau, u(\tau))\, d\tau - \int_0^{t_1} K(t_1, \tau) A(\tau, u(\tau))\, d\tau \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^{t_1} \|K(t_2, \tau) - K(t_1, \tau)\| \|A(\tau, u(\tau))\|\, d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \|K(t_2, \tau)\| \|A(\tau, u(\tau))\|\, d\tau \tag{1.8}$$

с использованием равномерной непрерывности ядра $K(t,\tau)$ на любом прямоугольнике и свойства (A_4). С другой стороны, функция $\overline{u}(t)$ непрерывна всюду по условию. Следовательно, функция $u(t)$ непрерывно продолжима в точку T_0. Обозначим продолженную функцию через $\widetilde{u}(t)$. Тогда функция

$$\overline{u}(t) + \int\limits_0^t K(t,\tau)A(\tau,\widetilde{u}(\tau))\,d\tau,$$

заведомо совпадающая с $u(t) = \overline{u}(t) + \int_0^t K(t,\tau)A(\tau,u(\tau))\,d\tau$ на $[0;T_0)$, существует и непрерывна на $[0;T_0]$, а следовательно, её значение в точке T_0 совпадает с $\widetilde{u}(T_0)$ в силу единственности непрерывного продолжения на замыкание. Следовательно, функция $\widetilde{u}(t)$ является решением уравнения (1.1) на отрезке $[0;T_0]$, что противоречит условию непродолжаемости решения $u(t)$ на промежутке $[0;T_0)$. Таким образом, соотношение (1.3) доказано.

Замечание 5. Дальнейшие рассуждения аналогичны проведённым в лекции 3 для дифференциального уравнения.

Покажем теперь, что в случае $K(t,\tau) \equiv I$ выполняется предельное соотношение (1.4). Надо доказать:

$$\forall M > 0\ \exists \delta > 0\ \forall t \in (T_0 - \delta; T_0) \cap [0;T_0)\ \ \|u(t)\| > M.$$

Предположим противное:

$$\exists M > 0\ \forall \delta > 0\ \exists t \in (T_0 - \delta; T_0) \cap [0;T_0)\ \ \|u(t)\| \leqslant M. \tag{1.9}$$

Зафиксируем M из (1.9). В силу свойства (A_4) будем иметь

$$\forall t \in [0;T_0),\ \forall z \in B\ \Big(\|z\| \leqslant 2M\ \Rightarrow\ \|A(t,z)\| \leqslant \sup_{\substack{t\,\in\,[0;T_0]\\ s\,\in\,[0;2M]}} \lambda(t,s) =: E\Big). \tag{1.10}$$

Выберем $\delta \leqslant \frac{M}{4E}$ из условия

$$\|\overline{u}(t'') - \overline{u}(t')\| < \frac{M}{4} \quad \text{при} \quad |t'' - t'| < \delta.$$

(Это возможно, поскольку функция $\overline{u}(t)$, как непрерывная на $\mathbb{R}_+$, равномерно непрерывна на отрезке $[0;T_0]$.) Возьмём из (1.9) такое $t = t^*$, что $T_0 - \delta < t^* < T_0$, $\|u(t^*)\| \leqslant M$. В силу (1.3) существует такое t^{**}, что $T_0 - \delta < t^* < t^{**} < T_0$ и $\|u(t^{**})\| \geqslant 2M$. Но тогда в силу непрерывности функции $u(t)$ существует такое $t^{***} \in (t^*; t^{**}]$, что

$$\|u(t^{***})\| = 2M, \quad \|u(t)\| < 2M \text{ при всех } t \in (t^*; t^{***}). \tag{1.11}$$

Имеем тогда, с одной стороны,

$$\|u(t^{***}) - u(t^*)\| \geqslant \|u(t^{***})\| - \|u(t^*)\| = M,$$

а с другой, в силу уравнения (1.1), утверждений (1.11) и (1.10), а также выбора δ:

$$\|u(t^{***}) - u(t^*)\| \leqslant \|\overline{u}(t^{***}) - \overline{u}(t^*)\| + \int\limits_{t^*}^{t^{***}} \|A(\tau, u(\tau))\|\, d\tau <$$

$$< \frac{M}{4} + |t^{***} - t^*|E \leqslant \frac{M}{4} + \delta E \leqslant \frac{M}{2}.$$

Полученное противоречие завершает доказательство п. 6 и всей теоремы.

Теорема доказана.

Замечание 6. Легко видеть, что в случае, когда ядро K не зависит от t и является непрерывной функцией аргумента τ, оно может быть «включено» в $A(t, u)$, и поэтому соотношение (1.4) верно и в этом случае.

§ 2. Пример непродолжаемого решения, не имеющего предела

В случае ядра, зависящего от t и удовлетворяющего условиям теоремы 1, соотношение (1.4) может не выполняться. Приведём один из возможных примеров. Для этого рассмотрим функцию

$$u(t) = 1 + \frac{1}{T_0 - t}\cos^2\frac{1}{T_0 - t} \in C[0; T_0), \quad T_0 = \frac{2}{\pi}, \tag{2.1}$$

и построим интегральное уравнение вида (1.1), решением которого является функция (2.1), причём его ядро будет зависеть лишь от переменной t. Легко видеть, что при $t \to T_0 - 0$ функция (2.1) предела не имеет (потому что она принимает значение 1 сколь угодно близко к точке T_0), но

$$\limsup_{t \to T_0 - 0} u(t) = +\infty.$$

Таким образом, функция (2.1) удовлетворяет соотношению (1.3), но не соотношению (1.4). Нужно найти такую функцию $K(t) \in C[0; +\infty)$, чтобы при $t \in [0; T_0)$ выполнялось тождество

$$u(t) = u(0) + K(t)\int\limits_0^t (u(s))^k ds.$$

Натуральное k будет выбрано ниже. Поскольку $u(0) = 1$, имеем

$$1 + \frac{1}{T_0 - t}\cos^2\frac{1}{T_0 - t} = 1 + K(t)\int\limits_0^t \left(1 + \frac{1}{T_0 - s}\cos^2\frac{1}{T_0 - s}\right)^k ds,$$

или
$$K(t) = \frac{\frac{1}{T_0-t}\cos^2\frac{1}{T_0-t}}{\int_0^t \left(1+\frac{1}{T_0-s}\cos^2\frac{1}{T_0-s}\right)^k ds}, \quad T_0 = \frac{2}{\pi}. \tag{2.2}$$
При всех натуральных k дробь в правой части доставляет непрерывную на интервале $t \in (0; T_0)$ функцию. С помощью правила Лопиталя нетрудно получить, что $K(t) \to 0$ при $t \to +0$. Если к тому же
$$K(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to T_0 - 0, \tag{2.3}$$
то функция $K(t)$ может быть продолжена до непрерывной функции аргумента $t \in [0; +\infty)$ и, тем самым, будет удовлетворять условию теоремы 1. Будем добиваться выполнения условия (2.3).

В силу бинома Ньютона с учётом неотрицательности второго слагаемого имеем при всех $k \geqslant 3$, $k \in \mathbb{N}$, $s \in [0; T_0)$
$$\left(1+\frac{1}{T_0-s}\cos^2\frac{1}{T_0-s}\right)^k \geqslant \\ \geqslant \frac{k(k-1)(k-2)}{6}\frac{1}{(T_0-s)^3}\cos^6\frac{1}{T_0-s}, \tag{2.4}$$
откуда при всех $t \in [0; T_0)$
$$\int_0^t \left(1+\frac{1}{T_0-s}\cos^2\frac{1}{T_0-s}\right)^k ds \geqslant \\ \geqslant \frac{k(k-1)(k-2)}{6}\int_0^t \frac{1}{(T_0-s)^3}\cos^6\frac{1}{T_0-s}ds. \tag{2.5}$$
Вычислим интеграл в правой части последней формулы:
$$\int_0^t \frac{1}{(T_0-s)^3}\cos^6\frac{1}{T_0-s}ds = \left\{y = \frac{1}{T_0-s}\right\} = \int_{\frac{1}{T_0}}^{\frac{1}{T_0-t}} y\cos^6 y\,dy = \\ = \frac{5}{32}y^2 + \frac{15}{32}\left(\frac{y\sin 2y}{2}+\frac{\cos 2y}{4}\right) + \\ + \frac{6}{32}\left(\frac{y\sin 4y}{4}+\frac{\cos 4y}{16}\right) + \frac{1}{32}\left(\frac{y\sin 6y}{6}+\frac{\cos 6y}{36}\right)\Bigg|_{\frac{1}{T_0}}^{\frac{1}{T_0-t}} = \\ = \frac{5}{32}\frac{1}{(T_0-t)^2} + O\left(\frac{1}{T_0-t}\right) \quad \text{при} \quad t \to T_0 - 0. \tag{2.6}$$

Из (2.2), (2.4)—(2.6) получаем

$$0 \leqslant K(t) \leqslant \frac{6}{k(k-1)(k-2)} \frac{\frac{1}{T_0-t}\cos^2\frac{1}{T_0-t}}{\frac{5}{32}\frac{1}{(T_0-t)^2} + O\left(\frac{1}{T_0-t}\right)} =$$

$$= \frac{32\cdot 6}{5k(k-1)(k-2)} \frac{\cos^2\frac{1}{T_0-t}}{\frac{1}{T_0-t} + O(1)} \to +0 \quad \text{при} \quad t \to T_0 - 0.$$

Это и доказывает предельное соотношение (2.3) в случае выбора, например, $k=3$.

Итак, уравнение имеет вид

$$u(t) = 1 + \int\limits_0^t K(t)(u(s))^3 ds,$$

где

$$K(t) = \begin{cases} \frac{\frac{1}{T_0-t}\cos^2\frac{1}{T_0-t}}{\int_0^t\left(1+\frac{1}{T_0-s}\cos^2\frac{1}{T_0-s}\right)^3 ds}, & t \in (0;T_0), \\ 0, & t \in \{0\}\cup[T_0;+\infty), \end{cases}$$

$T_0 = \frac{2}{\pi}$, а соответствующее решение —

$$u(t) = 1 + \frac{1}{T_0-t}\cos^2\frac{1}{T_0-t}.$$

Замечание 7. К данному результатату примыкает результат работы

V. Komornik, P. Martinez, M. Pierre, J. Vanconsenoble. “Blow-up” of bounded solutions of differential equations.
Acta Sci. Math. (Szeged). Vol. 69. Pp. 651–657 (2003),

где показано, что непродолжаемое решение задачи Коши для автономного абстрактного дифференциального уравнения

$$u' = f(u)$$

с локально липшицевой правой частью $f(u)$ в произвольном бесконечномерном банаховом пространстве B может (в отличие от случаев (1.3) и (1.4)) быть даже ограниченным, если $f(u)$, являясь локально липшиц-непрерывной, не является ограниченной на каждом ограниченном подмножестве пространства B.

Замечание 8. Важно различать *ограниченно липшиц-непрерывные* и *локально липшиц-непрерывные* функции. Последни – это такие, что для любой точки найдётся окрестность, в которой такая функция Липшиц-непрерывна. В бесконечномерном банаховом пространстве эти условия не равносильны.

§ 3. Теорема Пеано

Замечание 9. См. лекцию 12 основного курса.

Теорема Пеано. *Рассмотрим дифференциальное уравнение относительно скалярной функции* $u(t)$

$$u' = f(t, u). \tag{3.1}$$

Если правая часть $f(t, u)$ *непрерывна в некоторой ограниченной замкнутой области* G, *то через каждую внутреннюю точку* (t_0, u_0) *этой области проходит* *хотя бы одна* *интегральная кривая этого уравнения.*

Легко видеть, что единственность не гарантируется этой теоремой не случайно: достаточно рассмотреть задачу Коши

$$\begin{cases} u' = 3u^{\frac{2}{3}}, \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Задача (3.2) имеет как тривиальное решение $u = 0$, так и решение $u = t^3$. Кроме того, при любом t_0 функция $(t - t_0)^3$ также является решением уравнения задачи (3.2), причём

$$\left. \frac{d}{dt}(t - t_0)^3 \right|_{t=t_0} = 0.$$

Следовательно, решения $u = 0$ и $u = (t - t_0)^3$ можно гладко сшить и получить (при произвольном $t_0 > 0$) решение

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, t_0), \\ (t - t_0)^3, & t \in [t_0, +\infty), \end{cases} \tag{3.3}$$

также являющееся решением задачи (3.2). Итак, задача (3.2) имеет не два, а бесконечно много решений, определённых на всей полупрямой $t \geqslant 0$.

Оказывается, существуют и более «патологические» примеры. Не будем приводить их ввиду громоздкости построения, но отметим лишь, что существует такая функция $f(t, u)$, непрерывная на всей плоскости (t, u), что для любой пары (t_0, u_0) задача Коши

$$\begin{cases} u' = f(t, u), \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

имеет более одного решения на любом отрезке $[t_0, t_0 + \varepsilon]$. (Задача (3.2) обладает таким свойством лишь при $u_0 = 0$.)

Не случайно мы сформулировали теорему Пеано для скалярной функции. Дело в том, что теорема Пеано верна только для конечномерных линейных пространств. Напротив, в любом бесконечномерном банаховом пространстве задача (3.1) может не иметь ни одного (даже локального по времени) решения. Этот результат был получен в

А. Н. Годунов, О теореме Пеано в банаховых пространствах. Функц. анализ и его прил., 1975, том 9, выпуск 1, 59—60.

§ 4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Опираясь на задачу (3.2) (или подобные ей), построить задачу Коши со следующими свойствами:
1) её тривиальное решение $u = 0$ существует на полупрямой;
2) для любого $T > 0$ существует нетривиальное решение на промежутке $[0, T)$ (возможно, продолжаемое), 3) никакое её нетривиальное решение не продолжаемо на всю полупрямую.

Задача 2. Привести пример локально липшиц-непрерывной, но не ограниченно липшиц-непрерывной функции.

Предметный указатель

Список литературы

1. *Байокки К., Капело А.* Вариационные и квазивариационые неравенства. — М.: Наука, 1988. — 448 с.
2. *Вайнберг М.М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. — М.: Гос. изд. технико-теор. лит., 1956. — 344 с.
3. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1988. — 512 с.
4. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978. — 336 с.
5. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка М.: Наука, 1989.
6. *Данфорд Н.*, *Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория.
7. *Демидович В.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967, 472 с.
8. *Дубинский Ю. А.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения. — Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат., 1976. N 9. — 130 с.
9. *Дубинский Ю. А.* Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях// Матем. сб., 1965, 67(109)–4, 609–642.
10. *Зорич В.А.* Математический анализ. — М.: Наука, 1981. — 544 с.
11. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 624 с.
12. *Канторович Л.В.*, *Акилов Г.П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 744 с. — М.: Мир, 1962. — 897 с.
13. *Климов В. С.* О функционалах с бесконечным числом критических значений// Матем. сб., т. 100, N 1(5), с. 102–116.
14. *Ф. Клемент, Х. Хейманс, С. Ангенент, К. ван Дуйн, Б. де Пахтер* Однопараметрические полугруппы. Абстрактные дифференциальные уравнения с приложениями. М.: Мир, 1992, с. 352.
15. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1956, 392 с.
16. *Крылов Н. В.* Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гельдера. Н.: Научная книга, 1998.
17. *Корпусов М. О., Свешников А. Г.* Нелинейный функциональный анализ и математическое моделирование физики. Т. I. Геометрические и топологические свойства линейных пространств. — М.: УРСС, 2010. — 420 с.
18. *Корпусов М. О., Свешников А. Г.* Нелинейный функциональный анализ и математическое моделирование физики. Т. II. Методы исследования нелинейных операторов. — М.: УРСС, 2011. — 480 с.
19. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

20. *Кузин И. А.* Разрешимость некоторых эллиптических задач с критическим показателем нелинейности//Матем. сб., т. 180, N 11, 1989, с. 1475–1485.
21. *Кузин И. А.* О кратной разрешимости некоторых эллиптических задач с критическим показателем нелинейности//Матем. заметки, т. 52, N 1, 1992, с. 51–56.
22. *Кузин И. А.* Теоремы сравнения для вариационных задач и их приложение к эллиптическим уравнениям в $\mathbb{R}^N$//Известия РАН. Серия Матем., т. 57, N 5, 1993, с. 149–167.
23. *Куфнер А., Фучик С.* Нелинейные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1988. — 304 с.
24. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика. М.: Наука, 1992, т. 8., 664 с.
25. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 588 с.
26. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи. — М.: Мир, 1971. — 372 с.
27. *Люстерник Л. А., Шнирельман Л. Г.* Топологические методы в вариационных задачах. М.: Гос. издат., 1930. — 68 с.
28. *Митидиери Э.*, *Похожаев С. И.* Априорные оценки и отсутствие решений дифференциальных неравенств в частных производных. Труды МИАН, т. 234, 2001.
29. *Морен К.* Методы Гильбертова пространства. — М.: Мир, 1965. — 572 с.
30. *Осмоловский В. Г.* Нелинейная задача Штурма-Лиувилля. — С.-П.: 2003. — 260 с.
31. *Похожаев С. И.* О методе расслоения решения нелинейных краевых задач//Труды МИАН СССР.1990. Т. 192. С. 146–163.
32. *Хатсон В., Пим Дж.*. Приложения функционального анализа и теории операторов. — М.: Мир, 1983. — 432 с.
33. *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.
34. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
35. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О.* Нелинейный функциональный анализ и его приложения к уравнениям в частных производных. — М.: Научный Мир, 2008. — 400 с.
36. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980. — 496 с.
37. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 832 с.
38. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. — М.: Мир, 1969. —1072 с.
39. *Эванс Л. К.* Уравнения с частными производными. — Новосибирск.: Тамара Рожковская, 2003. — 563 с.
40. *Adams R,* Sobolev spaces. Academic press, 1975.
41. *Ambrosetti A.* Critical points and nonlinear variational problems//Memoires de la S.M.F., V. 49, 1992, pp. 1–139.
42. *Berger M. S.* On von Karman's equation and the buckling of a thin elastic plate. I. the clamped plate// Comm. Pure Appl. Math. 20 (1967), pp. 687–719.

43. *Berger M. S.* A Sturm–Liouville theorem for nonlinear elliptic partial differential equations//Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, V. 20, N 3, 1966, pp. 543–582.
44. *Clark C. D.* A variant of the Lusternik–Schnirelman theory//Indiana University Mathematics Jornal, V. 22, N 1, 1972, pp. 65–74.
45. *Crandall M. G., Liggett T. M.* Generation of semigroups of nonlinear transformations on general Banach spaces//Amer. J. Math. V. 93, 1971, pp. 265–298.
46. *Dinca G., Jebelean P., Mawhin J.* Variational and topological methods for Dirichlet problems with p-Laplacian//Portugaliae Mathematica, V. 58, N. 3, 2001, pp. 339–378.
47. *Pavel Drabek, Yaroslav Milota* Methods of nonlinear analisys. Applications to differential equations. Birkhaser. 2007. pp. 575.
48. *Fujita H.* On the blowing up solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$//J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.— 1966.— Sect. IA, V. 13.—pp. 109–124.
49. *Leszek Gasinski, Nikolaos S. Papageorgiou* Nonlinear analisys. Volume 9. Chapman and Hall. Series in Mathematical Analysis and Applications. Edited by Ravi P. Agarwal and Donal O Regan. 2005. pp. 960.
50. *Leszek Gasinski, Nikolaos S. Papageorgiou* Nonsmooth critical point theory and nonlinear boundary value problems. Volume 8. Chapman and Hall. Series in Mathematical Analysis and Applications. Edited by Ravi P. Agarwal and Donal O Regan. 2005. pp. 768.
51. *Komura Y.* Nonlinear semi-groups in Hilbert space// J. Math. Soc. Japan, V. 19, N 4, 1967, pp. 493–507.
52. *Jeanjean L.* Variational methods and applications to some nonlinear problems// Memoir for Habilitation of Louis Jeanjean, 1999.
53. *Huang Y. X.* Eigenvalues of the p–Laplacian in $\mathbb{R}^N$ with indefinite weight// Comment. Math. Univ. Carolinae V. 36, N 3, 1995, pp. 519–527.
54. *Kato T.* Nonlinear semigroups and evolution equations//J. Math. Soc. Japan V. 19, N 4, 1967, pp. 509–520.
55. *Kuzin I., Pohozaev S.* Entire solutions of semilinear elliptic equations. — Nonlinear Differential Equations and their Applications, 33. Birkhauser Verlag, Basel, 1997. vi+250 pp.
56. *Lindqvist P.* On the equation $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda|u|^{p-2}u = 0$ // Proc. Amer. Math. Soc., 1990. — V. 109. — P. 157–164.
57. *Lindqvist P.* Notes on the p-Laplace equation. http://www.math.ntnu.no/ lqvist/p-laplace.pdf
58. *Miyadera I.* Nonlinear semigroups. Translations of mathematical monographs. 109. (Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1991).
59. *Nirenberg L.* Variational and topological methods in nonlinear problems//Bulletine of the AMS, V. 4, N. 3, 1981, pp. 267–302.
60. *Rabinowitz P. H.* Variational methods for nonlinear elliptic eigenvalue problems// Indiana Univ. Math. J. V. 23, N 8, 1974 pp. 729–754.
61. *Michael Struwe* Variational methods. Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems. Fourth Edition. 2008 Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 320 pp.
62. *Schwartz, J.* Nonlinear Functional Analysis. Gordon and Breach Sciences Publishers, New York. 1969.

КОРПУСОВ Максим Олегович
ПАНИН Александр Анатольевич

Лекции по линейному и нелинейному
функциональному анализу
Часть III. Нелинейный анализ

Подписано к печати 16.06.2015 г.
Формат А5. Объем 22,5 п.л.Тираж 100 экз.
Заказ №

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, стр.2

Отпечатано в Типографии МГУ им. М.В. Ломоносова