

Вопросы по курсу «Основы теории категорий»

1. Основные понятия. Определения, примеры.
 - a. Категория.
 - b. Изоморфизм.
 - c. Мономорфизм, эпиморфизм.
 - d. Морфизм, обратимый слева (расщепляющийся мономорфизм); морфизм, обратимый справа (расщепляющийся эпиморфизм).
 - e. Начальный, конечный объект.
 - f. Произведение, копроизведение.
 - g. Уравнитель, коуравнитель.
 - h. Предел, копредел.
 - i. Расслоенное произведение, декартов квадрат.
 - j. Обратный образ.
 - k. Функтор (ковариантный, контравариантный).
 - l. Свободный (косвободный) объект.
 - m. Левый (правый) сопряженный функтор. Построение через свободный (косвободный) объект.
 - n. Единица (коединица) сопряжения.
 - o. Естественное преобразование (функторный морфизм).
 - p. Естественный изоморфизм.
 - q. Эквивалентные категории.
2. Упражнения. Доказать:
 - a. обр. слева \Rightarrow моно;
обр. справа \Rightarrow эпи.
 - b. изо \Rightarrow обр. слева \Rightarrow уравнитель \Rightarrow моно,
изо \Rightarrow обр. справа \Rightarrow коуравнитель \Rightarrow эпи.
 - c. эпи, уравнитель \Rightarrow изо;
моно, коуравнитель \Rightarrow изо.
 - d. моно, эпи не \Rightarrow изо (привести контрпример).
 - e. моно не \Rightarrow уравнитель (привести контрпример).
 - f. уравнитель не \Rightarrow обр. слева (привести контрпример).
 - g. Начальный (конечный) объект единственен с точностью до изоморфизма.
 - h. Произведение (копроизведение) единственно с точностью до изоморфизма.
 - i. Уравнитель (коуравнитель) единственен с точностью до изоморфизма.
 - j. $A \times T \cong A$; $A \times \perp \cong A$.
 - k. $(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$; $(A + B) + C \cong A + (B + C)$.
 - l. $[f, g] \circ h = [f \circ h, g \circ h]$; $h \circ \langle f, g \rangle = \langle h \circ f, h \circ g \rangle$.
 - m. $(f \times g) \circ [h, r] = [f \circ h, g \circ r]$; $\langle h, r \rangle \circ (f \times g) = \langle h \circ f, r \circ g \rangle$.
 - n. $(f \times g) \circ (h \times r) = (f \circ h) \times (g \circ r)$; $(f + g) \circ (h + r) = (f \circ h) + (g \circ r)$.
 - o. Обратный образ мономорфизма – мономорфизм.
 - p. Предел (копредел) единственен с точностью до изоморфизма.
 - q. Построение предела через произведения и уравнители (копредела через копроизведения и коуравнители).
 - r. Явное построение расслоенного произведения через произведение и уравнитель.
 - s. Композиция функторов – функтор.
 - t. Функтор сохраняет изоморфизмы, обратимый слева (справа).
 - u. Свободный (косвободный) объект единственен с точностью до изоморфизма.
 - v. Обратный от естественного изоморфизма – естественный изоморфизм.
 - w. Левый сопряженный для забывающих функторов: $\text{Mon} \rightarrow \text{Set}$, $\text{Grp} \rightarrow \text{Set}$, $\text{Lin} \rightarrow \text{Set}$, $\text{CMet} \rightarrow \text{Met}$.
 - x. Левый и правый сопряженные для забывающего функтора: $\text{Top} \rightarrow \text{Set}$.