

Основы теории категорий и некоторые ее приложения

Аннотация

Теория категорий представляет из себя попытку математиков раскрыть основополагающие принципы, общие для различных областей математики. Грубо говоря, категория представляет класс однотипных математических структур, скажем, групп, линейных пространств, топологических пространств и т.д. и соотношения между ними. Многие важные математические конструкции, встречающиеся в различных областях математики (например понятия произведения групп, линейных или топологических пространств), получают в терминах теории категорий единообразное и изящное выражение. Наиболее интересные результаты теории категорий связаны с понятиями функтора ("отображения" одной категории в другую) и естественного преобразования ("трансформирующего" один функтор в другой). Так понятие сопряженного функтора изящно описывает, скажем, пополнение метрических пространств, наделение множества дискретной (или антидискретной) топологией, образование свободной группы и многие другие фундаментальные понятия соответствующих математических дисциплин. В спецкурсе рассматриваются основные понятия и конструкции теории категорий. Изложение сопровождается примерами из теории множеств, алгебры, топологии. Вкратце рассматриваются некоторые приложения теории категорий к алгебраической теории систем, универсальным алгебрам, теории преобразователей информации.

Ключевые слова

Теория категорий, функторы, естественные преобразования, свободные объекты, сопряженные функторы, монады (тройки), алгебраические теории, преобразователи информации.

Введение

Предпосылки для теоретико-категорного описания математических объектов.

Обзор основных понятий теории категорий: категории, функторы, естественные преобразования.

Определение категории

Аксиомы теории категорий

Основные примеры

Основные понятия и конструкции в категориях

Простейшие понятия

- Изоморфизмы.
- Мономорфизмы и эпиморфизмы (примеры, когда эпи-мономорфизм не является изоморфизмом), расщепляющиеся мономорфизмы и эпиморфизмы (т.е. морфизмы, обратимые слева или справа).
- Начальный и конечный объекты.
- Произведения и копроизведения.

Пределы и копределы

- Произведения как пределы; бесконечные произведения.
- Уравнители и коуравнители.
- Расслоенные произведения.
- Обратный образ.
- Теорема о существовании пределов.

Системы факторизации

Категории множеств, наделенных структурой

Функторы

Определение и примеры

Свободные объекты

Сопряженные функторы

Примеры

- Свободные группы.
- Свободные векторные пространства.
- Пополнение метрических пространств.
- Левый и правый сопряженные к забывающему функтору $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$.

Естественные преобразования функторов и сопряженность

Монады (тройки)

Связь между сопряженностью и монадами

- Категории Клейсли.
- Категории Эйленберга-Мура.

Приложения к универсальным алгебрам

Теории неопределенности, Категории преобразователей информации

- Многозначные.
- Нечеткие.
- Стохастические.

Категории преобразователей информации как моноидальные категории Клейсли

Литература

Основная

- Arbib M. A., Manes E. G. Arrows, Structures and Functors, New York: Academic Press.
- Голдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики. М.: Мир.
- Цаленко М. Ш. Основы теории категорий. М.: Наука, 1974.
- Букур И. Деляну А., Введение в теорию категорий и функторов.

Дополнительная

- MacLane S. Categories for the Working Mathematician, Graduate texts in mathematics № 5. New York: Springer.
- Manes E. G. Algebraic Theories, Graduate texts in mathematics № 26. New York, Springer.
- Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 1986.

- Ленг С., Алгебра.
- Фейс К., Алгебра. Кольца, модули и категории. Т 1.
- Голубцов П. В. Информативность в категории многозначных преобразователей информации, Проблемы передачи информации, 1998, т. 34, №3, 60-80
- Голубцов П. В., Аксиоматическое описание категорий преобразователей информации. Проблемы передачи информации, Т.35 №3, С.109-127, 1999.
- Golubtsov P.V., Monoidal Kleisli Category as a Background for Information Transformers Theory. Информационные процессы (Information processes). Электронный научный журнал, Том 2, №1, стр. 62-84, 2002 (<http://www.jip.ru/2002/2-1-2002.htm>).