ТЕМА 1

Метрические, нормированные и евклидовы пространства.

Основные определения и теоремы

Множество L называется (вещественным) линейным пространством, если для любых двух его элементов x, y определен элемент $x+y \in L$ (называемый суммой x и y), и для любого элемента $x \in L$ и любого (вещественного) числа α определен элемент $\alpha x \in L$, причем выполнены следующие условия:

1) для любых элементов $x, y \in L$ $\quad x+y=y+x$ (коммутативность сложения);
2) для любых элементов $x, y, z \in L$ $\quad (x+y)+z=x+(y+z)$ (ассоциативность сложения);
3) существует элемент $\theta \in L$ (называемый нулевым элементом, или нулем пространства L) такой, что для любого элемента $x \in L$ $\quad x+\theta=x$ (существование нулевого элемента);
4) для любого элемента $x \in L$ существует элемент $(-x) \in L$ (называемый обратным к x) такой, что $x+(-x)=\theta$ (существование обратного элемента);
5) для любых элементов $x, y \in L$ и любого (вещественного) числа α $\quad \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ (дистрибутивность умножения суммы элементов на число);
6) для любых (вещественных) чисел α и β и любого элемента $x \in L$ $\quad (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ (дистрибутивность умножения суммы чисел на элемент);
7) для любых (вещественных) чисел α, β и любого элемента $x \in L$ $\quad (\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$ (ассоциативность умножения на число);
8) для любого элемента $x \in L$ $\quad 1 \cdot x=x$ (свойство единицы).

Элементы $x_1, x_2, ..., x_m$ линейного пространства L называются линейно зависимыми, если существуют такие (вещественные) числа $C_1, C_2, ..., C_m$, не все равные нулю, что $\sum_{k=1}^{m} C_k x_k=\theta$; если же последнее равенство имеет место в единственном случае $C_1=C_2=...=C_m=0$, то элементы $x_1, x_2, ..., x_m$ - линейно независимы.

Натуральное число n, называется размерностью линейного пространства, если существуют n линейно независимых элементов пространства, а любые $n+1$ элементов - линейно зависимы. В этом случае линейное пространство называется конечномерным (n-мерным).

Если для любого натурального n можно указать n линейно независимых элементов, то линейное пространство называется бесконечномерным.

Множество M называется метрическим пространством, если для любых двух его элементов $x, y \in M$ определено вещественное число $\rho(x, y)$ (называемое метрикой, или расстоянием), причем выполнены следующие условия:

1) для любых элементов $x, y \in M$ $\quad \rho(x, y) \ge 0$, $\quad$ причем $\rho(x, y)=0$ тогда и только тогда, когда элементы x и y совпадают (неотрицательность метрики);
2) для любых элементов $x, y \in M$ $\quad \rho(x, y)=\rho(y, x)$ (симметричность метрики);
3) для любых элементов $x, y, z \in M$ $\quad \rho(x, y) \le \rho(x, z)+\rho(y, z)$ (неравенство треугольника).

Метрическое пространство не обязательно является линейным.

Последовательность элементов метрического пространства $x_n \in M$, $n=1,2,...$ сходится к элементу $x_0 \in M$ ($x_n \to x_0$ при $n \to \infty$), если $\rho(x_n, x_0) \to 0$ при $n \to \infty$.

Линейное пространство N называется нормированным, если для любого элемента $x \in N$ определено (вещественное) число $\| x \|$ (называемое нормой), причем выполнены следующие условия:

1) для любого элемента $x \in N$ $\quad \| x \| \geq 0$, причем $\| x \| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$ - нулевой элемент пространства;
2) для любого элемента $x \in N$ и любого (вещественного) числа α $\quad \| \alpha x \| = | \alpha | \cdot \| x \|$ (неотрицательная однородность нормы);
3) для любых элементов $x, y \in N$ $\quad \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ (неравенство треугольника).

Нормированное пространство является метрическим, если положить $\rho(x, y) = \| x - y \|$.

Последовательность элементов нормированного пространства $x_n \in N$, $n = 1, 2, \ldots$ сходится (по норме пространства N) к элементу $x_0 \in N$ ($x_n \to x_0$ при $n \to \infty$), если $\| x_n - x_0 \| \to 0$ при $n \to \infty$.

Из сходимости последовательности x_n по норме пространства следует сходимость последовательности (числовой!) норм, т.е. если $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$, то $\| x_n \| \to \| x_0 \|$ при $n \to \infty$. Обратное, вообще говоря, неверно.

Последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$ элементов нормированного пространства N называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер K такой, что для любого $n \geq K$ и любого натурального p выполнено неравенство $\| x_{n+p} - x_n \| \leq \varepsilon$.

Если последовательность сходится, то она фундаментальна. Если же любая фундаментальная последовательность элементов сходится, то нормированное пространство называется полным.

Полное нормированное пространство называется банаховым.

Последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$ элементов нормированного пространства N называется ограниченной, если существует константа C такая, что $\| x_n \| \leq C$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$ элементов нормированного пространства N, обладающая тем свойством, что из любой ее подпоследовательности можно выделить сходящуюся, называется компактной.

Любая компактная последовательность является ограниченной. В конечномерном пространстве верно и обратное утверждение, однако, для бесконечномерных пространств это, вообще говоря, не так.

Линейное пространство E называется евклидовым, для любых двух элементов $x, y \in E$ определено вещественное число (x, y), называемое скалярным произведением, причем выполнены следующие условия:

1) для любых элементов $x, y \in E$ $\quad (x, y) = (y, x)$ (симметричность);
2) для любых элементов $x, y, z \in E$ $\quad (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ (аддитивность по первому аргументу);
3) для любых элементов $x, y \in E$ и любого вещественного числа α $\quad (\alpha x, y) = \alpha (x, y)$ (однородность по первому аргументу);
4) для любого $x \in E$ $\quad (x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$ (свойство скалярного квадрата).

В евклидовом пространстве E всегда можно ввести норму, порожденную скалярным произведением $\| x \|_E = \sqrt{(x, x)}$.

Для любых двух элементов x и y произвольного евклидова пространства выполняется неравенство Коши-Буняковского $(x, y)^2 \leq (x, x) \cdot (y, y)$ или

$|(x,y)| \le \|x\| \cdot \|y\|$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда элементы x и y линейно зависимы.

Напомним определения основных встречающихся далее линейных пространств.

1. Нормированное пространство $C[a,b]$. Элементами этого пространства являются непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции. Норма определяется как $\|y\|_{C[a,b]} = \max\limits_{x\in[a,b]} |y(x)|$, сходимость по норме пространства $C[a,b]$ - равномерная сходимость. Пространство $C[a,b]$ - банахово (полное).
2. Нормированное пространство $C^{(p)}[a,b]$. Элементами этого пространства являются функции, непрерывные с производными до p-го порядка включительно на отрезке $[a,b]$. Норма определяется как $\|y\|_{C^{(p)}[a,b]} = \sum\limits_{k=0}^{p} \max\limits_{x\in[a,b]} |y^{(k)}(x)|$, сходимость по норме пространства $C^{(p)}[a,b]$ - равномерная со всеми производными до p-го порядка. Пространство $C^{(p)}[a,b]$ - банахово.
3. Евклидово (нормированное) пространство $h[a,b]$. Элементами этого пространства являются непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции. Для любых двух непрерывных функций положим $(y,z) = \int\limits_a^b y(x)z(x)dx$ - скалярное произведение, и введем норму, порожденную скалярным произведением $\|y\|_{h[a,b]} = \sqrt{\int\limits_a^b y^2(x)dx}$; сходимость по норме пространства $h[a,b]$ - сходимость в среднем. Пространство $h[a,b]$ не является полным.

Примеры решения задач

Пример 1.1. Доказать, что множество (вещественных) функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$ образует (вещественное) линейное пространство (пространство $C[a,b]$).

Решение. Так как сумма двух непрерывных функций, а также произведение непрерывной функции на вещественное число, также являются непрерывными функциями, то для решения задачи необходимо проверить аксиомы линейного пространства.

1) $\forall y(x), z(x) \in C[a,b]$ $\quad y(x)+z(x) = z(x)+y(x)$;
2) $\forall y(x), z(x), w(x) \in C[a,b]$ $\quad [y(x)+z(x)]+w(x) = y(x)+[z(x)+w(x)]$;
3) нулевым элементом пространства естественно считать $\quad y(x) \equiv 0 \in C[a,b]$;
4) $\forall y(x) \in C[a,b]$ существует противоположный элемент $\quad -y(x) \in C[a,b]$;
5) $\forall y(x), z(x) \in C[a,b], \forall \alpha$ $\quad \alpha\,[y(x)+z(x)] = \alpha y(x) + \alpha z(x)$;
6) $\forall y(x) \in C[a,b], \forall \alpha, \beta$ $\quad (\alpha+\beta)y(x) = \alpha y(x) + \beta y(x)$;
7) $\forall y(x) \in C[a,b], \forall \alpha, \beta$ $\quad (\alpha\beta)y(x) = \alpha\,[\beta y(x)]$;
8) $\forall y(x) \in C[a,b]$ $\quad 1 \cdot y(x) = y(x)$.

Пример 1.2. Доказать, что пространство $C[a,b]$ является нормированным, если для $\forall\ y(x)\in C[a,b]$ определить $\|y\|_{C[a,b]}=\max\limits_{x\in[a,b]}|y(x)|$.

Решение. Для доказательства достаточно убедиться в корректности указанного определения нормы, т.е. проверить аксиомы нормы.

1) $\forall y(x)\in C[a,b]:\quad \|y\|_{C[a,b]}=\max\limits_{x\in[a,b]}|y(x)|\geq 0$, причем $\|y\|_{C[a,b]}=0\Leftrightarrow y(x)\equiv 0=\theta$;

2) $\forall y(x)\in C[a,b],\forall\alpha:\quad \|\alpha y\|_{C[a,b]}=\max\limits_{x\in[a,b]}|\alpha y(x)|=|\alpha|\cdot\max\limits_{x\in[a,b]}|y(x)|=|\alpha|\cdot\|y\|_{C[a,b]}$;

3) $\forall\ y(x),\ z(x)\in C[a,b]:\quad \|y+z\|_{C[a,b]}=\max\limits_{x\in[a,b]}|y(x)+z(x)|\leq$

$$\leq\max_{x\in[a,b]}(|y(x)|+|z(x)|)\leq\max_{x\in[a,b]}|y(x)|+\max_{x\in[a,b]}|z(x)|=\|y\|_{C[a,b]}+\|z\|_{C[a,b]}.$$

Пример 1.3. Доказать неравенство Коши-Буняковского в пространстве $h[a,b]$ и проверить корректность определения нормы в этом пространстве $\|y\|_{h[a,b]}=\sqrt{\int\limits_a^b y^2(s)\,ds}$.

Решение. Неравенство Коши-Буняковского в пространстве $h[a,b]$ имеет вид

$$(y,z)^2\equiv\left[\int_a^b y(x)z(x)dx\right]^2\leq\int_a^b y^2(x)dx\cdot\int_a^b z^2(x)dx\qquad\forall\ y(x),\ z(x)\in h[a,b].$$

Для доказательства рассмотрим следующее очевидное соотношение $0\leq(y+\lambda z,y+\lambda z)=(y,y)+2\lambda(y,z)+\lambda^2(z,z)$, которое справедливо для любых двух элементов пространства $y(x),z(x)\in h[a,b]$ и любого вещественного числа λ. Поэтому дискриминант квадратного (относительно λ) трехчлена должен быть отрицательным, т.е. $4(y,z)^2-4(y,y)(z,z)\leq 0$, откуда и получаем требуемое неравенство:

$$(y,z)^2\equiv\left[\int_a^b y(x)z(x)dx\right]^2\leq(y,y)(z,z)\equiv\int_a^b y^2(x)dx\cdot\int_a^b z^2(x)dx.$$

Замечание. Приведенное доказательство может быть проведено в любом евклидовом пространстве.

Для проверки корректности определения нормы в пространстве $h[a,b]$ нужно убедиться в справедливости соответствующих аксиом в определении нормы.

1) $\forall y(x)\in h[a,b]:\quad \|y\|_{h[a,b]}=\sqrt{\int\limits_a^b y^2(x)dx}\geq 0$, причем $\|y\|_{h[a,b]}=0\Leftrightarrow y(x)\equiv 0=\theta$;

2) $\forall y(x)\in h[a,b],\forall\alpha:\quad \|\alpha y\|_{h[a,b]}=\sqrt{\int\limits_a^b\alpha^2y^2(x)dx}=|\alpha|\cdot\sqrt{\int\limits_a^b y^2(x)dx}=|\alpha|\cdot\|y\|_{h[a,b]}$;

3) $\forall y(x),z(x)\in h[a,b]:\quad \|y+z\|^2_{h[a,b]}=\int\limits_a^b(y(x)+z(x))^2dx=\int\limits_a^b(y^2(x)+z^2(x)+2y(x)z(x))dx\leq$

(с учетом неравенства Коши-Буняковского)

$$\leq\int_a^b y^2(x)\,dx+\int_a^b z^2(x)\,dx+2\sqrt{\int_a^b y^2(x)\,dx}\cdot\sqrt{\int_a^b z^2(x)\,dx}=\left(\|y\|_{h[a,b]}+\|z\|_{h[a,b]}\right)^2,$$

откуда получаем неравенство треугольника $\|y+z\|_{h[a,b]}\leq\|y\|_{h[a,b]}+\|z\|_{h[a,b]}$.

Пример 1.4. Найти норму $y(x)=\sin x+\cos x$

а) в пространстве $C[0,2\pi]$;

б) в пространстве $h[0,2\pi]$.

Решение. а) $\left\|\sin x+\cos x\right\|_{C[0,2\pi]} = \max\limits_{x\in[0,2\pi]} |\sin x+\cos x| = \sqrt{2}$;

б) $\left\|\sin x+\cos x\right\|_{h[0,2\pi]} = \sqrt{\int\limits_0^{2\pi} (\sin x+\cos x)^2\,dx} = \sqrt{2\pi}$.

Пример 1.5. Доказать, что любая сходящаяся последовательность элементов нормированного пространства фундаментальна.

Решение. Последовательность x_n элементов нормированного пространства *N* называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon>0$ найдется номер *K* такой, что для любого $n\ge K$ и любого натурального p выполнено $\| x_{n+p}-x_n \| \le \varepsilon$.

Пусть последовательность x_n элементов нормированного пространства сходится (по норме пространства *N*) к элементу $x_0\in N$, тогда для любого $\varepsilon>0$ существует номер *K* такой, что при $n\ge K$ и любом натуральном p одновременно выполнены два неравенства: $\| x_n-x_0 \| \le \frac{\varepsilon}{2}$ и $\| x_{n+p}-x_0 \| \le \frac{\varepsilon}{2}$.

Пользуясь неравенством треугольника, получим при $n\ge K$ и любом натуральном p $\| x_{n+p}-x_n \| = \| x_{n+p}-x_0+x_0-x_n \| \le \| x_{n+p}-x_0 \| + \| x_n-x_0 \| \le \varepsilon$, что и требовалось.

Пример 1.6. Доказать, что пространство $h[a,b]$ не является полным.

Решение. Для доказательства достаточно построить пример фундаментальной последовательности элементов пространства $h[a,b]$, которая не является сходящейся в этом пространстве.

Рассмотрим для определенности пространство $h[-1,1]$ и последовательность непрерывных функций (элементов этого пространства):

$$y_n(x)=\begin{cases} -1, & -1\le x\le -\dfrac{1}{n} \\ nx, & 0\le |x| \le \dfrac{1}{n} \\ 1, & \dfrac{1}{n}\le x\le 1\,. \end{cases}$$

а) Докажем, что эта последовательность фундаментальна в пространстве $h[-1,1]$.

Зададим произвольное $\varepsilon>0$ и положим $m>n$, тогда существует такое натуральное число $N(\varepsilon)$, для которого

$$\left\|y_n(x)-y_m(x)\right\|^2_{h[-1,1]} = \int\limits_{-1}^{1}(y_n(x)-y_m(x))^2\,dx = 2\int\limits_0^{1/m}(mx-nx)^2\,dx + 2\int\limits_{1/m}^{1/n}(1-nx)^2\,dx = \frac{2}{3n}+\frac{2n}{3m^2}-\frac{4}{3m}\le\frac{4}{3n}<\varepsilon$$

при $\forall\ m>n>N(\varepsilon)=\left[\dfrac{4}{3\varepsilon}\right]+1$, что и требовалось доказать.

б) Пусть последовательность $y_n(x)$ сходится в пространстве $h[-1,1]$, т.е. существует непрерывная функция $\varphi(x)$ такая, что для $\forall\varepsilon>0\ \ \exists N_1(\varepsilon)$ и при всех $n\ge N_1(\varepsilon)$ выполнено

$$\|y_n(x)-\varphi(x)\|_{h[-1,1]}=\sqrt{\int_{-1}^{1}(y_n(x)-\varphi(x))^2\,dx}\le\frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Рассмотрим разрывную функцию $\psi(x)=\begin{cases}-1, & -1\le x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & 0<x\le 1\end{cases}$.

Тогда для $\forall\varepsilon>0\ \ \exists N_2(\varepsilon)$ такое, что при $\forall n\ge N_2(\varepsilon)$ имеем

$$\sqrt{\int_{-1}^{1}(y_n(x)-\psi(x))^2\,dx}=\sqrt{2\int_{0}^{1/n}(nx-1)^2\,dx}=\sqrt{\frac{2}{3n}}\le\frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $\varphi(x)$ - непрерывная, а $\psi(x)$ - разрывная функция, то $\varphi(x)-\psi(x)\not\equiv 0$ и, следовательно, $\sqrt{\int_{-1}^{1}(\varphi(x)-\psi(x))^2\,dx}>0$. Поэтому для всех $\varepsilon>0$ и $n\ge\max\{N_1(\varepsilon),N_2(\varepsilon)\}$

$$0<\sqrt{\int_{-1}^{1}(\varphi(x)-\psi(x))^2\,dx}=\sqrt{\int_{-1}^{1}[(\varphi(x)-y_n(x))+(y_n(x)-\psi(x)]^2\,dx}\ \le$$

$$\le\sqrt{\int_{-1}^{1}(\varphi(x)-y_n(x))^2\,dx}+\sqrt{\int_{-1}^{1}(y_n(x)-\psi(x))^2\,dx}=\|y_n(x)-\varphi(x)\|_{h[-1,1]}+\sqrt{\int_{-1}^{1}(y_n(x)-\psi(x))^2\,dx}\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\,.$$

Ввиду произвольности выбора $\varepsilon>0$ получаем противоречие, а значит предположение о сходимости последовательности $y_n(x)$ в пространстве $h[-1,1]$ неверно.

Итак, построенная последовательность $y_n(x)$ фундаментальна в пространстве $h[-1,1]$, но не является сходящейся в этом пространстве, что и требовалось доказать.

Замечание. При доказательстве было использовано соотношение

$$\int_a^b(y(x)+z(x))^2\,dx\le\int_a^b y^2(x)\,dx+\int_a^b z^2(x)\,dx+2\sqrt{\int_a^b y^2(x)\,dx}\cdot\sqrt{\int_a^b z^2(x)\,dx}=\left[\sqrt{\int_a^b y^2(x)\,dx}+\sqrt{\int_a^b z^2(x)\,dx}\right]^2,$$

являющееся следствием неравенства Коши-Буняковского.

Пример 1.7. Доказать, что не всякая ограниченная последовательность в пространстве $C[a,b]$ является компактной.

Решение. Рассмотрим пространство $C[0,1]$ и последовательность элементов этого пространства $y_n=\sin 2^n\pi x$, $n=1,2,3,\ldots$. Очевидно, $\|y_n\|_{C[0,1]}=\max\limits_{x\in[0,1]}|y_n(x)|=1$, т.е. последовательность ограничена.

Покажем, что никакая ее подпоследовательность не может сходиться в $C[0,1]$.

Действительно, для любого номера i существует точка $x^*=\frac{1}{2^{i+1}}\in[0,1]$ такая, что в ней $y_i(x^*)=\sin 2^i\pi\frac{1}{2^{i+1}}=1$. При этом для любого $k>i$ в этой же точке имеет место $y_k(x^*)=\sin 2^k\pi\frac{1}{2^{i+1}}=0$. Следовательно, $\|y_i-y_k\|_{C[0,1]}\ge|y_i(x^*)-y_k(x^*)|=1$, т.е. никакая подпоследовательность рассматриваемой последовательности не является фундаментальной, а значит и не может сходиться.

Задачи для самостоятельного решения

1.1 Доказать, что пространство $h[a,b]$ является линейным.

1.2 Доказать, что пространство $C^{(p)}[a,b]$ является линейным.

1.3 Доказать, что в пространстве $\mathbb{R}^1$ нельзя ввести норму по формуле $\| x \| = | arctg\, x |$.

1.4 Можно ли определить нормы следующими функциями для указанных множеств:

а) $\| y \| = \max\limits_{x \in [a, \frac{a+b}{2}]} | y(x) |$ в $C[a,b]$;

б) $\| y \| = | y(a) | + \max\limits_{x \in [a,b]} | y'(x) |$ в $C^{(1)}[a,b]$;

в) $\| y \| = | y(b) - y(a) | + \max\limits_{x \in [a,b]} | y'(x) |$ в $C^{(1)}[a,b]$.

1.5 Найти нормы следующих функций, рассматривая их как элементы пространств $C[0,2]$ и $C^{(1)}[0,2]$:

а) $y = 2\sin \pi x - \cos \pi x$

б) $y = 3\cos \pi x - \sin \pi x$

в) $y = x^2 - x$

г) $y = x^2 - 4x$

д) $y = x^2 - 6x$.

1.6 Найти нормы следующих функций, рассматривая их как элементы пространства $h[0,2]$:

а) $y = 2\sin \pi x - \cos \pi x$

б) $y = x^2 - x$

в) $y = x^3 - 1$.

1.7 Доказать, что если последовательность элементов нормированного пространства сходится, то эта последовательность ограничена.

1.8 Построить пример, показывающий, что из сходимости в среднем на отрезке $[a,b]$ функциональной последовательности не следует равномерная (и даже поточечная) сходимость.

1.9 Построить пример бесконечной ортонормированной системы в пространстве $h[a,b]$.

1.10 Привести пример ограниченной некомпактной последовательности в пространстве $h[a,b]$.

1.11 Доказать, что последовательность $y_n(x) = x^n$ ограничена и некомпактна в пространстве $C[0,1]$.

1.12 Доказать, что последовательность непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций $y_n(x)$, удовлетворяющих неравенству $\|y_n\|^2_{h[a,b]} + \|y'_n\|^2_{h[a,b]} \le \gamma, \quad \gamma > 0$, является компактной в пространстве $C[a,b]$.

Ответы к задачам

1.4 а) нет; б) да; в) нет.

1.5 а) $\| y \|_{C[0,2]} = \sqrt{5}$, $\| y \|_{C^{(1)}[0,2]} = (\pi + 1)\sqrt{5}$;

б) $\| y \|_{C[0,2]} = \sqrt{10}$, $\| y \|_{C^{(1)}[0,2]} = (\pi + 1)\sqrt{10}$;

в) $\| y \|_{C[0,2]} = 2$, $\| y \|_{C^{(1)}[0,2]} = 5$;

г) $\| y \|_{C[0,2]} = 4$, $\| y \|_{C^{(1)}[0,2]} = 8$;

д) $\| y \|_{C[0,2]} = 9$, $\| y \|_{C^{(1)}[0,2]} = 15$.

1.6 а) $\| y \|_{h[0,2]} = \sqrt{5}$; б) $\| y \|_{h[0,2]} = \dfrac{4}{\sqrt{15}}$; в) $\| y \|_{h[0,2]} = \sqrt{\dfrac{86}{7}}$.