Лекция №6

§9. Принцип сжимающих отображений. Теоремы о неподвижной точке.

Пусть D – оператор, вообще говоря, нелинейный, действующий из банахова пространства B в себя.

Определение. Оператор D, действующий из банахова пространства B в себя, называется сжимающим (или сжимающим отображением), если существует константа q такая, что $0 \le q < 1$ и для любых $y_1, y_2 \in B$ выполнено неравенство $\|Dy_1 - Dy_2\| \le q \cdot \|y_1 - y_2\|$.

Нетрудно показать (сделайте это самостоятельно), что сжимающий оператор является непрерывным.

Определение. Элемент y называется неподвижной точкой оператора D, если $Dy = y$.

Ниже мы докажем, что у сжимающего оператора, действующего в банаховом пространстве, есть и при том единственная, неподвижная точка. Напомним, что банахово пространство – это полное нормированное пространство, и при доказательстве мы будем использовать полноту пространства B.

Предварительно докажем одно вспомогательное утверждение. Будем называть рядом бесконечную сумму элементов пространства B

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n, \quad \text{где} \quad z_n \in B, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

а $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} z_n$ - его частичной суммой. Как обычно, определим сходимость ряда как сходимость последовательности его частичных сумм, т.е. если $S_N \underset{N\to\infty}{\to} S$, где $S, S_N, z_n \in B$, то говорят, что ряд сходится, а элемент S называется его суммой.

Поскольку пространство B полное, то необходимым и достаточным условием сходимости ряда является критерий Коши: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \ge N \quad \forall p \ge 1 \qquad \left\| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} z_k \right\| \le \varepsilon$.

Теорема (признак Вейерштрасса сходимости ряда). Пусть $\|z_n\| \le a_n, \quad a_n \ge 0, \quad n = 1,2,\ldots$ (a_n- последовательность неотрицательных чисел). Тогда из сходимости числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$.

Доказательство. Из неравенства треугольника и условия теоремы следует

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} z_k \right\| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \|z_k\| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k .$$

Запишем критерий Коши как *необходимое* условие сходимости числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$: для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \ge N \quad \forall p \ge 1 \quad \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k \le \varepsilon$. Из этого неравенства и неравенства, полученного в начале доказательства теоремы, следует, что, начиная с этого номера, $\left\| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} z_k \right\| \le \varepsilon$, т.е. выполняется критерий Коши как *достаточное* условие сходимости ряда в банаховом пространстве B.

Теорема (о неподвижной точке). Пусть D – сжимающий оператор. Тогда существует, и притом единственная, точка $y \in B$ такая, что $Dy = y$. Эта точка может быть найдена методом последовательных приближений (простой итерации): $y_{n+1} = Dy_n, \quad n = 0,1,2,\ldots$, где $y_0 \in B$ - произвольная фиксированная точка пространства B (начальное приближение), причем $y_n \to y : Dy = y$.

Доказательство.

1) Единственность. Пусть существуют две неподвижные точки y_1 и y_2: $Dy_1 = y_1, Dy_2 = y_2, \quad y_1 \neq y_2$. Тогда $0 < \|y_1 - y_2\| = \|Dy_1 - Dy_2\| \le q\|y_1 - y_2\| < \|y_1 - y_2\|$, и мы приходим к противоречию. Единственность доказана.

2) Существование докажем методом последовательных приближений. Зададим произвольное начальное приближение $y_0 \in B$ и рассмотрим последовательность $y_{n+1} = Dy_n, \quad n = 0,1,2,\ldots$ Докажем ее сходимость.

Заметим, что сходимость последовательности y_n равносильна сходимости ряда $y_{n+1} = \underbrace{(y_{n+1} - y_n)}_{\substack{\text{общий} \\ \text{член ряда}}} + (y_n - y_{n-1}) + \ldots + (y_1 - y_0) + y_0$.

Так как $\|y_{n+1} - y_n\| = \|Dy_n - Dy_{n-1}\| \le q\|y_n - y_{n-1}\| \le \ldots \le q^n \underbrace{\|y_1 - y_0\|}_{=const}, \quad 0 \le q < 1$, то общий член ряда мажорируется членом бесконечно убывающей геометрической прогрессии, а, тем самым, последовательность y_n сходится по признаку Вейерштрасса, т.е. $y_n \to y, \quad y \in B$.

Покажем, что $Dy = y$, т.е. $y -$ неподвижная точка оператора. Пусть это не так: $Dy = \tilde{y}, \quad \tilde{y} \neq y$. Тогда для любого натурального n имеет место $0 < \|y - \tilde{y}\| \le \|\tilde{y} - y_{n+1}\| + \|y_{n+1} - y\| = \|Dy - Dy_n\| + \|y_{n+1} - y\| \le q\|y - y_n\| + \|y_{n+1} - y\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$, из чего следует, что $\|y - \tilde{y}\| = 0$, или $y = \tilde{y}$. Теорема доказана.

Теорема. Пусть D - оператор, отображающий банахово пространство B в себя, и существует натуральное число k такое, что D^k - сжимающий оператор. Тогда существует единственная неподвижная точка оператора D (такая, что $Dy = y$), причем y может быть найдено методом последовательных приближений: для любого $y_0 \in B$: $y_{n+1} = D\,y_n, \quad n = 0,1,\ldots,\ y_n \to y$.

Доказательство. 1) Возьмем любой элемент y_0 и получим последовательность

$$\begin{array}{cccccccccc} y_0 & y_1 & \cdots & y_{k-1} & y_k & y_{k+1} & \cdots & y_{2k-1} & y_{2k}, & \cdots \\ & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \\ & Dy_0 & & D^{k-1}y_0 & D^k y_0 & D^{k+1}y_0 & \ldots & D^{2k-1}y_0 & D^{2k}y_0 & \end{array}$$

Рассмотрим подпоследовательности

$y_0, \quad y_k = D^k y_0, \qquad y_{2k} = D^k(D^k y_0), \ldots \to \quad y$ (т.к. D^k - сжимающий);

$y_1, \quad y_{k+1} = D^k y_1, \quad y_{2k+1} = D^k(D^k y_1), \ldots \to \quad y$ (y то же, т.к. D^k - сжимающий, и его неподвижная точка не зависит от выбора начального приближения в методе последовательных приближений);

………

$y_{k-1}, \quad y_{2k-1} = D^k y_{k-1}, \quad y_{3k-1} = D^k(D^k y_{k-1}), \ldots \to \ y$.

Вернемся к исходной последовательности и заметим, что она состоит из k подпоследовательностей, каждая из которых сходится к y. Отсюда легко следует, что и вся последовательность сходится к y. Очевидно, что указанный элемент y и является неподвижной точкой оператора D^k.

2) Докажем, что неподвижные точки операторов D и D^k совпадают.

Пусть y - неподвижная точка оператора D, т.е. $y = Dy$. Подействуем в последнем равенстве слева и справа $(k-1)$ раз оператором D. Получим $y = D^k y$, т.е. неподвижная точка оператора D является неподвижной точкой оператора D^k. В силу того, что D^k - сжимающий оператор и, следовательно, имеет только одну неподвижную точку, неподвижная точка оператора D единственна (если она существует).

Докажем обратное утверждение. Пусть y - неподвижная точка оператора D^k, т.е. $y = D^k y$, тогда $Dy = D(D^k)^n y = D^{nk}(Dy) \underset{n\to\infty}{\to} y$ в силу того, что метод простой итерации сходится к неподвижной точке независимо от начального приближения. В результате $y = Dy$, т.е. y - неподвижная точка оператора D. Теорема доказана.

§10. Уравнения Фредгольма 2-го рода с «малыми» λ.

Будем рассматривать интегральный оператор A: $Ay \equiv \int\limits_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds$, где ядро $K(x,s)$ непрерывно по совокупности переменных x,s, но не предполагается, вообще говоря, симметрическим.

Определим оператор D: $Dy = \lambda Ay + f = \lambda \int\limits_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds + f(x)$, $\quad f(x)$ - заданная непрерывная функция.

Интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода можно записать в операторном виде: $y(x) = \lambda A y + f$ или $y = Dy$.

Чтобы применить теорему о неподвижной точке, доказанную в предыдущем параграфе, оператор D нельзя рассматривать в пространстве $h[a,b]$, т.к. это – неполное пространство. Будем рассматривать оператор D: $C[a,b] \to C[a,b]$ ($C[a,b]$- банахово, т.е. полное нормированное пространство). Очевидно, что D является непрерывным, вообще говоря, нелинейным оператором, а решение интегрального уравнения является его неподвижной точкой.

Найдем достаточные условия, при которых оператор D является сжимающим. Возьмем произвольные $y_1, y_2 \in C[a,b]$ и определим

$$z_1 = \lambda A y_1 + f = D y_1; \qquad z_2 = \lambda A y_2 + f = D y_2 \quad .$$

Обозначим $\max\limits_{x,s\in[a,b]} |K(x,s)| = M$ и для любого $x \in [a,b]$ получим оценку

$$|z_1(x) - z_2(x)| = \left| \lambda \int\limits_a^b K(x,s)\big(y_1(s) - y_2(s)\big) ds \right| \le |\lambda| M \left(\max_{s\in[a,b]} |y_1(s) - y_2(s)| \right)\big(b-a\big) = |\lambda| M\,(b-a) \|y_1 - y_2\|_{C[a,b]}.$$

Отсюда $\|z_1 - z_2\|_{C[a,b]} = \|Dy_1 - Dy_2\|_{C[a,b]} \le |\lambda| M\,(b-a) \|y_1 - y_2\|_{C[a,b]}$.

Обозначим $q = |\lambda| M\,(b-a)$ и потребуем, чтобы выполнялось условие $q < 1$. В этом случае оператор D, действующий в банаховом пространстве $C[a,b]$, является сжимающим и, следовательно, имеет место доказанная в предыдущем параграфе теорема о неподвижной точке.

Теорема. Если $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$ (такие λ будем называть «малыми»), то неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода имеет, и притом единственное, решение для любой непрерывной функции $f(x) \in C[a,b]$, причем это решение может быть найдено методом последовательных приближений.

Следствие 1. Если $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$, то однородное уравнение имеет только тривиальное решение.

Следствие 2. На интервале $0 < |\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$ нет характеристических чисел интегрального оператора A. Если у оператора A есть характеристические числа, то $|\lambda_{\min}| \ge \dfrac{1}{M(b-a)}$.

Рассмотрим метод последовательных приближений в данном случае.

Пусть $y_0 \equiv 0,\quad y_{n+1} = \lambda A y_n + f,\quad n = 0,1,2,...$. Тогда:

1) $y_1 = \lambda \int\limits_a^b K(x,s)\cdot 0 \cdot ds + f(x) = f(x)$;

2) $y_2 = \lambda \int\limits_a^b K(x,s) f(s) ds + f(x)$;

3)
$$y_3 = \lambda^2 \int\limits_a^b K(x,\xi)\left(\int\limits_a^b K(\xi,s) f(s)\, ds\right) d\xi + \lambda \int\limits_a^b K(x,s) f(s) ds + f(x) = \lambda^2 \int\limits_a^b \underbrace{\left(\int\limits_a^b K(x,\xi) K(\xi,s) d\xi\right)}_{K_2(x,s)} f(s) ds +$$
$$+\lambda \int\limits_a^b K(x,s) f(s) ds + f(x),$$ где $K_2(x,s)$ - повторное (итерированное) ядро.

Продолжая процесс, получим $y_{n+1} = f + \lambda A f + \lambda^2 A^2 f + ... + \lambda^{n-1} A^{n-1} f + \lambda^n A^n f$, где A^n – интегральный оператор с повторным ядром $K_n(x,s) = \int\limits_a^b K(x,\xi) K_{n-1}(\xi,s) d\xi$, $n = 2,3,...,$ а $K_1(x,s) \equiv K(x,s)$.

Мы уже доказали, что последовательность y_n имеет предел y, являющийся решением интегрального уравнения, причем y представляется рядом Неймана:
$$y = f + \lambda A f + \lambda^2 A^2 f + ... + \lambda^n A^n f + ...$$

Полученный результат можно представить в операторной форме. При «малых» λ решение интегрального уравнения существует и единственно. Если мы перепишем уравнение $y = \lambda A y + f$ в виде $(I - \lambda A) y = f$, то из доказанного следует существование обратного оператора, определенного на всем пространстве $C[a,b]$: $y = (I - \lambda A)^{-1} f$. Покажем, что это выражение можно записать как $y = f + \lambda R_\lambda f$, где R_λ - интегральный оператор с непрерывным по переменным x, s ядром $R(x,s,\lambda)$ (резольвентой), т.е. $y = f + \lambda \int\limits_a^b R(x,s,\lambda) f(s)\, ds$, или $(I - \lambda A)^{-1} = I + \lambda R_\lambda$.

Докажем, что ряд $\underbrace{K_1(x,s)}_{=K(x,s)} + \lambda K_2(x,s) + ... + \lambda^{n-1} K_n(x,s) + \dots$ сходится равномерно относительно $x, s \in [a,b]$.

1) $|K_1(x,s)| = |K(x,s)| \le M$;

2) $|K_2(x,s)| \le \int\limits_a^b |K(x,\xi)||K(\xi,s)| d\xi \le M^2 (b-a)$;

…

n) $|K_n(x,s)| \le M^n (b-a)^{n-1}$;

….

Отсюда $\quad \left|\lambda^{n-1} K_n(x,s)\right| \le \underbrace{\left(|\lambda| M(b-a)\right)^{n-1}}_{q^{n-1}} M$, $\quad$ где $\quad 0 \le q = |\lambda| M(b-a) < 1$.

По признаку Вейерштрасса функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,s)$ сходится равномерно, поскольку общий член этого ряда мажорируется общим членом бесконечной убывающей геометрической прогрессии. Обозначим $K(x,s) + \lambda K_2(x,s) + ... = R(x,s,\lambda)$.

В силу равномерной сходимости резольвента $R(x,s,\lambda)$ непрерывна по совокупности переменных (x,s). Суммируя геометрическую прогрессию, получаем оценку $\quad |R| \le \dfrac{M}{1-|\lambda| M(b-a)}$.

В силу равномерной сходимости записанного выше функционального ряда можно поменять местами интегрирование и суммирование и записать решение интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода в виде

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,s,\lambda) f(s)\, ds.$$

Рассмотрим теперь вопросы <u>корректности математической постановки</u> задачи решения уравнения Фредгольма $y = \lambda A y + f$ для «малых» λ при условии, что это уравнение рассматривается в пространстве $C[a,b]$.

Необходимо ответить на три вопроса:

1) Существование решения. Мы доказали, что решение существует для любой непрерывной функции $f(x)$.

2) Единственность решения. Мы доказали, что решение единственно.

3) Устойчивость (непрерывная в пространстве $C[a,b]$ зависимость решения от неоднородности $f(x)$).

Докажем устойчивость. Пусть заданы "точная" неоднородность f и "возмущенная" (заданная с ошибкой) $\tilde{f} = f + \delta f$. По доказанному выше и для "точной", и для "возмущенной" неоднородностей уравнения $y = \lambda A y + f$ и $\tilde{y} = \lambda A \tilde{y} + \tilde{f}$ имеют решения, представимые с помощью резольвентного оператора. Запишем их разность

$$\tilde{y} - y = \tilde{f} - f + \lambda \int_a^b R(x,s,\lambda)(\tilde{f} - f)\, ds.$$

Далее $\quad \|\tilde{y} - y\|_{C[a,b]} \le \|\tilde{f} - f\|_{C[a,b]} (1 + |\lambda| M_R (b-a))$, где $|R| \le \dfrac{M}{1-|\lambda| M(b-a)} = M_R$.

Если $\|\delta f\| \to 0$, то и $\|\delta y\| = \|\tilde{y} - y\|_{C[a,b]} \to 0$, т.е. мы доказали непрерывную зависимость решения от неоднородности в норме пространства $C[a,b]$. Более того, полученное неравенство позволяет получить оценку погрешности решения, если известна оценка погрешности неоднородности.

Следовательно, все три требования к корректности решения данного уравнения выполнены, и задача решения уравнения Фредгольма 2-го рода с “малым λ” в пространстве $C[a,b]$ корректна (корректно поставлена).

Докажите самостоятельно, что при тех же условиях эта задача корректна и в пространстве $h[a,b]$.

§11. Уравнения Вольтерра 2-го рода.

Рассмотрим уравнение Вольтерра 2-го рода в операторной форме $y = \lambda A y + f$, где оператор A имеет вид

$$Ay = \lambda \int_a^x K(x,s)\, y(s)\, ds\,, \qquad x, s \in [a,b]\,.$$

.

Ядро $K(x,s)$ - непрерывно по совокупности переменных на своей треугольной области определения $\Delta = \{x, s : a \le s \le x \le b\}$ и не равно нулю тождественно, $f(x)$ – непрерывная на $[a,b]$ функция.

Докажите самостоятельно следующие утверждения (действуя аналогично проведенным ранее доказательствам соответствующих свойств оператора Фредгольма):

1) Если $y(s)$ - непрерывная на $[a,b]$ функция, то $z(x) = \int_a^x K(x,s)\, y(s)\, ds$ - непрерывная на $[a,b]$ функция, т.е. можно рассматривать оператор A как действующий в пространствах $C[a,b] \to C[a,b]$ или $h[a,b] \to h[a,b]$.

2) Интегральный оператор Вольтерра является вполне непрерывным при действии: $h[a,b] \to C[a,b], \quad h[a,b] \to h[a,b]$.

Покажем, что интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода можно решать для любого λ методом последовательных приближений при любой $f(x) \in C[a,b]$, т.е.

$y_{n+1} = \lambda\, A\, y_n + f, \qquad y_0 \in C[a,b]$.

Определим оператор D: $C[a,b] \to C[a,b]$ следующим образом: для любого $y \in C[a,b]$ $\quad Dy \equiv \lambda Ay + f$. Покажем, что оператор D (вообще говоря, не сжимающий) обладает тем свойством, что некоторая его степень - оператор D^k - сжимающий (натуральное число k зависит от λ, но не зависит от f).

Теорема. Для любого λ существует натуральное число k такое, что D^k - сжимающий оператор.

<u>Доказательство.</u> Возьмем две непрерывные функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Определим $z_j = D\, y_j$, $j = 1,2$, тогда $\left|z_1(x) - z_2(x)\right| = \left|Dy_1 - Dy_2\right| = |\lambda|\left|Ay_1 - Ay_2\right|$.

Обозначим $\max\limits_{x,s\in\Delta}\left|K(x,s)\right| = M$. Имеет место неравенство

$$\left|Ay_1 - Ay_2\right| = \left|\int_a^x K(x,s)\big(y_1(s) - y_2(s)\big)ds\right| \le M\,(x-a)\left\|y_1 - y_2\right\|_{C[a,b]}.$$

Отсюда

$$\left\|Ay_1 - Ay_2\right\|_{C[a,b]} \le M\,(b-a)\left\|y_1 - y_2\right\|_{C[a,b]}$$

и

$$\left\|Dy_1 - Dy_2\right\|_{C[a,b]} \le |\lambda|\,M\,(b-a)\left\|y_1 - y_2\right\|_{C[a,b]}.$$

Далее

$$|\,D^2 y_1 - D^2 y_2\,| \le \left|\lambda^2 \int_a^x K(x,s)\;\big(Ay_1 - Ay_2\big)\;ds\right| \le |\lambda|^2\;\frac{M^2}{2!}\;(x-a)^2\;\left\|y_1 - y_2\right\|_{C[a,b]} \le$$

$$\le |\lambda|^2\;\frac{M^2}{2!}\;(b-a)^2\;\left\|y_1 - y_2\right\|_{C[a,b]}\;,$$

следовательно, $\left\| D^2 y_1 - D^2 y_2 \right\|_{C[a,b]} \le |\lambda|^2 \dfrac{M^2}{2!}(b-a)^2 \left\| y_1 - y_2 \right\|_{C[a,b]}$,

$$\ldots$$

$$\left\| D^n y_1 - D^n y_2 \right\|_{C[a,b]} \le \underbrace{|\lambda|^n \frac{M^n}{n!}(b-a)^n}_{(q_n)} \left\| y_1 - y_2 \right\|_{C[a,b]}.$$

Обозначим $q_n = |\lambda|^n \dfrac{M^n}{n!}(b-a)^n$. Ясно, что для любого λ $q_n \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому, при достаточно больших n выполнено неравенство $q_n < 1$. В качестве k выберем минимальное натуральное n, при котором $|\lambda|^n \dfrac{M^n}{n!}(b-a)^n < 1$, тогда что D^k - сжимающий оператор. Теорема доказана.

Теперь мы можем применить теорему о неподвижной точке, доказанную в конце параграфа 9, и получить следствия.

Следствие 1. При любом λ однородное уравнение Вольтерра 2-го рода имеет только тривиальное решение.

Следствие 2. Оператор Вольтерра не имеет характеристических чисел.

Таким образом, оператор Вольтерра является примером вполне непрерывного оператора, не имеющего ни одного характеристического числа (нетрудно показать, что оператор Вольтерра вполне непрерывный из $h[a,b]$ в $h[a,b]$, но не самосопряженный).

Следствие 3. Решение уравнения Вольтерра 2-го рода можно найти методом последовательных приближений, который в данном случае называется методом Пикара. Для любого начального приближения $y_0 \in C[a,b]$

$$y_{n+1} = \lambda \int_a^x K(x,s)\, y_n(s)\, ds + f(x), \qquad n = 0,1,2,\ldots, \qquad \text{или} \qquad y_{n+1} = \lambda A y_n + f\,.$$

Если $y_0 = 0$, то получаем ряд Неймана: $y = f + \lambda A f + \lambda^2 A^2 f + \ldots + \lambda^n A^n f + \ldots$.

Экзаменационные вопросы

1) Определения и формулировки теорем.

1. Сформулировать определение сжимающего оператора.
2. Сформулировать определение неподвижной точки оператора.
3. Сформулировать теорему о существовании неподвижной точки у сжимающего оператора. Как можно найти неподвижную точку?
4. Записать метод последовательных приближений решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с «малым» λ.
5. Сформулировать определение повторного (итерированного) ядра интегрального оператора Фредгольма. Ядром какого интегрального оператора оно является?
6. Сформулировать теорему о разрешимости интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода.

2) Утверждения и теоремы, которые необходимо уметь доказывать. Теоретические задачи.

1. Доказать теорему о существовании неподвижной точки у сжимающего оператора.
2. Доказать теорему о существовании неподвижной точки у оператора, натуральная степень которого является сжимающим оператором.
3. Доказать, что сжимающий оператор является непрерывным.
4. Доказать, что если λ «мало», то неоднородное уравнение Фредгольма 2 рода имеет, и притом единственное, решение для любой непрерывной функции $f(x) \in C[a,b]$, причем это решение может быть найдено методом последовательных приближений.
5. Доказать, что если λ «мало», то однородное уравнение Фредгольма 2 рода имеет только тривиальное решение.
6. Доказать сходимость ряда Неймана для решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с «малым» λ и получить выражение для резольвенты.
7. Доказать, что интегральное уравнение типа Вольтерра имеет и притом единственное решение для любой непрерывной функции $f(x)$.
8. Доказать, что однородное интегральное уравнение типа Вольтерра имеет только тривиальное решение.
9. Доказать, что интегральный оператор Фредгольма, умноженный на «малое» λ, является сжимающим при действии в $C[a,b]$.
10. Определим оператор *D*: $C[a,b] \to C[a,b]$ следующим образом: для любого $y \in C[a,b]$ $Dy \equiv \lambda Ay + f$, где A – интегральный оператор Вольтерра с непрерывным ядром, $f(x)$ – непрерывная на $[a,b]$ функция. Доказать, что для любого λ существует натуральное число k такое, что D^k - сжимающий оператор.
11. Доказать, что если оператор D действует в полном нормированном пространстве, а оператор D^k (*k* – натуральное число) сжимающий, то неподвижные точки операторов D и D^k совпадают, из чего следует, что оператор D имеет единственную неподвижную точку.
12. Доказать, что интегральный оператор Фредгольма, действующий в $C[a,b]$, не имеет характеристических чисел на интервале (0, 1/(M(b-a)), где $M = \max\limits_{x,s\in[a,b]}|K(x,s)|$.
13. Доказать, что интегральный оператор Фредгольма, действующий в $h[a,b]$, не имеет характеристических чисел на интервале (0, 1/(M(b-a)), где $M = \max\limits_{x,s\in[a,b]}|K(x,s)|$.
14. Доказать, что минимальное по модулю характеристическое число интегрального оператора Фредгольма, действующего в $C[a,b]$, удовлетворяет неравенству $|\lambda_{\min}| \geq \dfrac{1}{M(b-a)}$, где $M = \max\limits_{x,s\in[a,b]}|K(x,s)|$.
15. Доказать, что минимальное по модулю характеристическое число интегрального оператора Фредгольма, действующего в $h[a,b]$, удовлетворяет неравенству $|\lambda_{\min}| \geq \dfrac{1}{M(b-a)}$, где $M = \max\limits_{x,s\in[a,b]}|K(x,s)|$.
16. Доказать, что интегральный оператор Вольтерра, действующий в пространстве $C[a,b]$, не имеет характеристических чисел.
17. Доказать, что интегральный оператор Вольтерра, действующий в пространстве $h[a,b]$, не имеет характеристических чисел.